Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

М. В. Невский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Ярославль 2012

УДК 517.51+514.17
ББК В151
Н40

Рецензенты:

кафедра математического анализа Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского;
М. Л. Гольдман, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры нелинейного анализа и оптимизации Российского университета дружбы народов.

Монография подготовлена и издана при финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053.

Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции / Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 218 с.

ISBN 978-5-8397-0853-2

В монографии рассматриваются геометрические вопросы, связанные с полиномиальной интерполяцией функций многих переменных. Приводятся оценки для норм интерполяционных проекторов через геометрические характеристики множеств и другие соотношения. Часть из них связана с установленными автором свойствами n-мерного симплекса.

Предназначена для научных работников в области теории аппроксимации и геометрии выпуклых тел. Может быть полезна аспирантам, магистрантам и студентам старших курсов математических специальностей и направлений.

Библиогр.: 68 назв.

УДК 517.51+514.17
ББК В151

ISBN 978-5-8397-0853-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга написана на основе результатов автора, полученных приблизительно в течение последних десяти лет. Предметом наших рассмотрений являются вопросы, связанные с полиномиальной интерполяцией функций многих переменных и применением в этой области некоторых геометрических методов. Интерполяция представляет собой один из старейших методов аппроксимации функций. Достаточно сказать, что наиболее известная интерполяционная формула была открыта Лагранжем [54] в 1795 г., а интерполяционная формула Ньютона была описана ещё раньше (соответствующая работа "Метод разностей" опубликована в 1736 г.). Теории интерполяции и интерполяционным методам посвящена обширная литература (см., например, [6], [8], [9], [33], [34], [37] и др.).

Как и анализ в целом, теория приближения тесно связана с геометрией. Многие фундаментальные и частные результаты теории приближения имеют по своей сути геометрический характер. Не случайно один из параграфов замечательного обзора В. М. Тихомирова по теории аппроксимации [40] так и называется: "Теория приближений и геометрия". Что же касается интерполяции, то здесь геометрические конструкции возникают вместе с заданием набора узлов интерполяции. В частности, при интерполяции функций n переменных с помощью пространства $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ многочленов степени ≤ 1 узлы интерполяции являются вершинами n-мерного симплекса. Поэтому оказывается возможным получить оценки для нормы интерполяционного проектора через геометрические характеристики соответствующего ему симплекса. Здесь находят свои приложения некоторые новые свойства, например, неравенства для осевых диаметров симплекса. Этот подход можно перенести на интерполяцию с помощью пространств многочленов, более широких, чем $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$.

Особое место в книге занимают оценки для минимальной возможной нормы интерполяционного проектора через геометрические характеристики множеств. Для некоторых (к сожалению, весьма малочисленных) ситуаций найдено точное значение минимальной нормы интерполяционного проектора и описаны все оптимальные наборы узлов.

Дадим краткий обзор содержания книги.

Глава 1 написана по материалам работ автора [25], [29]–[31], [60]. Часть из приведённых в ней результатов используется в дальнейшем, но эта глава, помимо прикладного аспекта, имеет и самостоятельное значение. В ней вводятся и исследуются некоторые геометрические характеристики выпуклых тел, и в первую очередь симплексов. Для невырожденного n-мерного симплекса S обозначим через $\alpha(S)$ минимальное $\sigma > 0$, для которого $Q_n \subset \sigma S$. Доказывается, что справедливо равенство

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{1}$$

Здесь $d_i(S)$ есть i-й осевой диаметр S, представляющий собой максимальную длину отрезка, принадлежащего S и параллельного i-й координатной оси. Соотношение (1) установлено двумя способами. Кроме того, получены формулы, связывающие осевые диаметры $d_i(S)$ и величину $\alpha(S)$ с коэффициентами базисных многочленов Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ симплекса S. Приведён ряд геометрических следствий соотношения (1). В качестве примера одного из них приведём следующее утверждение, доказанное автором в [25]. *Если $Q_n \subset S$, то для некоторого i симплекс S содержит отрезок длины n, параллельный оси x_i.* С помощью (1) также даются простые доказательства ряда известных утверждений. В связи с этим отметим здесь следующий красивый результат М. Лассака [58]. *Пусть S есть симплекс максимального объёма в Q_n. Тогда* $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$. Это свойство содержится в следствии 1.6.10.

При написании главы 2 были использованы работы автора [15], [16], [18], [21], [24], [25]. В этой и следующей главах рассматривается задача интерполяции функций из $C(Q_n)$ с помощью $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\|P\|$ норму соответствующего интерполяционного проектора как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Пусть $S \subset Q_n$ — симплекс, вершины которого совпадают с узлами P, $\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\| - 1\right) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1. \tag{2}$$

С помощью (2) и (1) выписываются оценки для нормы проектора через осевые диаметры соответствующего симплекса. Пусть θ_n есть минимальная величина $\|P\|$. Неравенства (2) позволяют получить следующие оценки для θ_n через величину $\xi_n = \min\{\xi(S) : S \subset Q_n\}$:

$$\frac{n+1}{2n}\left(\theta_n - 1\right) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2}\left(\theta_n - 1\right) + 1. \tag{3}$$

Во второй части главы получаются точные значения θ_n и ξ_n для $n = 2$ и $n = 3$, а также даётся полное описание минимальных проекторов и экстремальных симплексов.

Глава 3 посвящена оценкам величин θ_n и ξ_n. Эта глава написана по материалам статей автора [12], [16], [17], [19], [21], [27], а также работы автора и И. В. Хлестковой [23]. Многие результаты этой главы получены с применением симплексов максимального объёма в Q_n. Доказываются соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$ и $\xi_n \asymp n$. При оценивании θ_n снизу применяются стандартизованные многочлены Лежандра Ψ_n. Автору удалось установить их следующее интересное свойство. Для $\gamma \geq 1$ введём в рассмотрение множество $E_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum |x_i| + |1 - \sum x_i| \leq \gamma\}$. Имеет место равенство

$$\mathrm{mes_n}(E_\gamma) = \frac{\Psi_n(\gamma)}{n!}. \tag{4}$$

Обозначим через ν_n максимальную величину объёма симплекса, содержащегося в Q_n. Из (4) следует, что

$$\theta_n \geq \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right),$$

откуда и выводится оценка $\theta_n \geq cn^{1/2}$. Заметим, что симплекс S максимального объёма в Q_n (т. е. такой симплекс $S \subset Q_n$, для которого верно $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$) является почти-оптимальным в смысле ξ_n : для него $\xi(S) \asymp \xi_n$. Соответствующий S интерполяционный проектор P является почти-минимальным, т. е. для него $\|P\| \asymp \theta_n$. В этой же главе обсуждаются условия выполнения равенства справа в (3), а также приводятся полученные оценки чисел θ_n и ξ_n для $n \leq 20$.

Глава 4 написана по материалам статьи [20]. Пусть H есть ортогональный проектор на пространство многочленов степени ≤ 1. Основной результат главы заключается в соотношении $\|H\| \asymp \theta_n$ для нормы H как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Таким образом, в этой ситуации минимальный интерполяционный проектор асимптотически эквивалентен ортогональному проектору. Оценка $\|H\| \geq cn^{1/2}$ получается двумя способами — с использованием эйлеровых чисел и центральных B-сплайнов. Для этой цели применяются как известные, так и новые свойства этих объектов.

В главе 5 предпринята попытка обобщения некоторых отмеченных выше результатов на интерполяцию с помощью более широких пространств алгебраических многочленов. При написании этой главы использованы статьи автора [14], [17], [21], [26], [28]. Здесь установлены аналоги неравенств (2) и (3), а также получены некоторые оценки для минимальной нормы интерполяционного проектора. Приведём следующий пример (см. п. 5.4.2). Известно (см., например, [33]), что минимальная величина нормы интерполяционного проектора, действующего из $C[-1,1]$ на пространство $\Pi_2\left(\mathbb{R}^1\right)$ многочленов степени ≤ 2 от одного переменного, равна $5/4$. В наших обозначениях это записывается так:

$$\theta\left(\Pi_2\left(\mathbb{R}^2\right); [-1,1]\right) = \frac{5}{4}. \tag{5}$$

Рассмотрим часть параболы $\Gamma = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1\}$. Пусть треугольник S, вершины которого принадлежат Γ, и число $\sigma \ge 1$ таковы, что $\Gamma \subset \sigma S$. Минимальное возможное σ с таким свойством равно $11/8$; оно соответствует, например, треугольнику с вершинами $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ (а также и некоторым другим). Оказывается, что равенство $\min \sigma = 11/8$ эквивалентно (5). В главе 5 обсуждается круг подобных геометрических вопросов для минимальных проекторов при интерполяции с помощью допустимого пространства многочленов Π. Существенной чертой нашего подхода является применение полученных выше результатов для линейной интерполяции функций, заданных на некотором подмножестве пространства $\mathbb{R}^{d-1}$, где $d = \dim \Pi$. В частности, на этом пути удаётся получить аналоги неравенств (2), (3) и других оценок для норм проектора через геометрические характеристики множеств.

Заключительная глава 6 написана на основе статей автора [13] и [22]. В ней получены оценки и найдены точные значения констант, стоящих в неравенствах для некоторых эквивалентных норм на пространствах алгебраических многочленов. Эта глава, как и глава 1, имеет самостоятельное значение. Тем не менее, некоторые её результаты применялись для получения оценок предыдущей главы.

Несколько слов о принятой в книге нумерации. Главы книги делятся на параграфы. Некоторые параграфы дополнительно делятся на пункты; последние не всегда снабжены заголовками. Нумерация глав, параграфов и пунктов и ссылки на них стандартные. Формулы нумеруются заново в пределах каждой главы. Номер формулы содержит порядковый номер параграфа в главе и порядковый номер формулы в параграфе. Ссылки на формулу внутри данной главы содержат только эти два числа. Ссылки на ту же формулу, но сделанные из другой главы, дополняются в первой позиции номером той главы, где находится данная формула. Например, ссылка на вторую формулу из четвертого параграфа третьей главы, сделанная в этой главе, имеет вид (4.2), а ссылка на ту же формулу из другой главы выглядит как (3.4.2). Утверждения (леммы, теоремы и следствия) нумеруются с помощью трёх чисел (номер главы, порядковый номер параграфа в главе и номер утверждения данного типа в этом параграфе). Например, теорема 1.3.2 есть вторая теорема из третьего параграфа первой главы.

Доказать новую содержательную теорему весьма трудно, но гораздо труднее для исследователя найти причины и объяснить природу математического творчества. Появление этой книги явилось одним из результатов многолетней работы автора на математическом факультете Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Своё первое научное исследование (теоремы вложения для пространств функций, заданных на областях с особенностями) автор выполнил под руководством Владимира Степановича Климова (эта статья была опубликована в 1977 г.). В 1980–х гг. научным руководителем автора был Юрий Абрамович Брудный, оказавший самое существенное влияние на его формирование как математика и преподавателя. В этот период был получен ряд результатов по кусочно-полиномиальной аппроксимации в ненормируемых классах Орлича и смежным вопросам. Как видно из предыдущего, настоящая книга посвящена другой тематике. Геометрические задачи, приведённые в первой главе, с большой пользой для автора обсуждались с Владимиром Леонидовичем Дольниковым. Большое внимание к этой работе проявили также Герман Михайлович Бродский, Николай Александрович Стрелков и Павел Анатольевич Шварцман. Всем названным лицам автор выражает свою искреннюю благодарность.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

В этой книге $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Через $e_1, \ldots, e_n$ обозначается канонический базис $\mathbb{R}^n$; считаем $e := (1, \ldots, 1)$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ через $\|x\|$ ниже обозначается обычная евклидова норма x :

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Положим $Q_n := [0,1]^n$.

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Под $\mathrm{int}(C)$ понимается совокупность внутренних точек C. Символ $\mathrm{vol}(C)$ обозначает объём C. Если C — выпуклый многогранник, то $\mathrm{ver}(C)$ есть совокупность вершин C. Под *транслятом* понимается результат параллельного переноса. Таким образом, транслят выпуклого тела C имеет вид $C' = C + t$, где $t \in \mathbb{R}^n$. Если $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $[x, y]$ обозначает отрезок с концами в x, y, а (xy) — прямую, проходящую через эти точки.

Будем говорить, что n-мерный симплекс описан вокруг выпуклого тела C, если каждая $(n-1)$-мерная грань этого симплекса содержит точку C. Примем по определению, что выпуклый многогранник вписан в C, если любая его вершина принадлежит границе C.

Для компактного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ через $C(\Omega)$ обозначается совокупность непрерывных функций $f : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ понимается пространство многочленов от n переменных степени ≤ 1, т. е. линейная оболочка $1, x_1, \ldots, x_n$. В главах 5 и 6 вводятся в рассмотрение и более широкие пространства многочленов.

Для двух функций L и M натурального аргумента n запись $L \asymp M$ означает, что существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n, с которыми выполняются неравенства

$$c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Мы остановились здесь на самых общих обозначениях; другие обозначения вводятся по ходу изложения. Следует сказать, что в разных главах книги разные объекты могут обозначаться одной и той же буквой. Например, C обозначает как выпуклое тело, так и пространство непрерывных функций, а под c в одном месте понимается центр тяжести симплекса, а в другом — положительная константа. Однако во всех разделах, где разные объекты рассматриваются одновременно, они обозначаются по-разному.

ГЛАВА 1

БАЗИСНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГРАНЖА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ n-МЕРНОГО СИМПЛЕКСА

§ 1.1. Базисные многочлены n-мерного симплекса

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Если $\Delta := \det(\mathbf{A})$, то $\mathrm{vol}(S) = |\Delta|/n!$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Многочлены $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$ (здесь δ_j^k — символ Кронекера). Коэффициенты λ_j составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$. В дальнейшем считаем $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, иначе говоря,

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \tag{1.1}$$

В силу свойства $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$ любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x), \tag{1.2}$$

представляющему собой аналог классической интерполяционной формулы Лагранжа. Поэтому в дальнейшем мы будем называть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу* S. Применяя (1.2) последовательно к $p(x) = 1, x_1, \ldots, x_n$, получим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x)x^{(j)} = x. \tag{1.3}$$

Те же равенства (1.3) могут быть получены из формул Крамера, согласно которым

$$\left(\begin{array}{ccc} x_1^{(1)} & \ldots & x_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} \\ 1 & \ldots & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \\ \lambda_{n+1}(x) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{array}\right).$$

Числа $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_{n+1}(x)$ являются *барицентрическими координатами x относительно симплекса S* (см. [1; гл. 12]). В силу (1.3) хотя бы одно из них положительно. Уравнения $\lambda_j(x)=0$ задают $(n-1)$-мерные гиперплоскости, содержащие грани S, а для $x \in \operatorname{int}(S)$ выполняется $0<\lambda_j(x)<1$. Имеет место представление

$$S=\left\{x \in \mathbb{R}^n: \lambda_j(x) \geq 0, j=1, \ldots, n+1\right\}. \tag{1.4}$$

Пусть x — точка границы S. Минимальная размерность грани S, которой принадлежит x, равняется $n-k$ тогда и только тогда, когда среди $\lambda_j(x)$ имеется ровно k чисел, равных нулю $(1 \leq k \leq n)$.

Из (1.3) получаются следующие равенства для строчных сумм элементов $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{n+1, j}=\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0)=1,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij}=\sum_{j=1}^{n+1}\left[\lambda_j(e_i)-\lambda_j(0)\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(e_i)-\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0)=0, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} l_{ij}=0. \tag{1.6}$$

Столбцовые суммы $\mathbf{A}^{-1}$, в отличие от строчных, зависят от S :

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_{ij}=\lambda_j(e), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Заметим также, что из невырожденности $\mathbf{A}^{-1}$ следует $\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| \neq 0$ при любом $i=1, \ldots, n+1$. Как мы покажем ниже, весьма интересный геометрический смысл имеет каждая из величин $2\left(\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\right)^{-1}$ (здесь $1 \le i \le n$) и $(1/2)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|$.

§ 1.2. Свойства осевых диаметров симплекса

1.2.1. Осевые диаметры выпуклого тела. Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $d_i(C)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного оси x_i. Величину $d_i(C)$ будем называть *i-м осевым диаметром* C. Понятие аксиального, или осевого, диаметра (axial diameter) было введено Скоттом [63], [64].

Для любого $i = 1,\ldots,n$ выпуклое тело C может быть представлено как объединение отрезков, параллельных i-й координатной оси. Перенесём каждый такой отрезок вдоль содержащей его прямой таким образом, чтобы конец полученного отрезка принадлежал гиперплоскости $x_i = 0$, а сам он располагался в полупространстве $x_i \ge 0$. Обозначим через $R_i(C)$ объединение всех перенесённых отрезков. Множество $R_i(C)$ есть результат применения к C операции R_i, введённой Радзишевски [61]. Операция R_i переводит C в выпуклое тело $R_i(C)$, причём $\mathrm{vol}\,(R_i(C)) = \mathrm{vol}(C)$.

Операция R_i определяется по аналогии с классической симметризацией Штейнера (см. [4; §15]) относительно гиперплоскости $x_i = 0$. Результат последней операции, применённой к C, также есть объединение отрезков, полученных переносом отрезков C, параллельных оси x_i. Но при симметризации Штейнера рассматриваемой гиперплоскости принадлежит середина каждого перенесённого отрезка.

1.2.2. Теорема об осевых диаметрах симплекса. Пусть S — невырожденный n-мерный симплекс. Для $n \ge 2$ обозначим через $V_i(S)$ проекцию симплекса S на гиперплоскость $x_i = 0$. Очевидно, $V_i(S)$ есть выпуклая оболочка проекций вершин S на эту гиперплоскость. Пусть $\Sigma_i(S)$ есть $(n-1)$-мера $V_i(S)$, σ_{ij} есть $(n-1)$-мера проекции $(n-1)$-мерной грани S, противоположной вершине $x^{(j)}$, на гиперплоскость $x_i = 0$. Тогда

$$\Sigma_i(S) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\sigma_{ij}. \qquad (2.1)$$

В [25] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.2.1. *Пусть $1 \le i \le n$. Для i-го осевого диаметра S верно равенство*

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\,. \qquad (2.2)$$

В S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i. Центр этого отрезка совпадает с точкой

$$y^{(i)} := \sum_{j=1}^{n+1} m_{ij} x^{(j)}, \tag{2.3}$$

где

$$m_{ij} := \frac{|l_{ij}|}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}. \tag{2.4}$$

Каждая $(n-1)$-мерная грань S содержит по крайней мере один из концов указанного отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней S, содержащих концы отрезка, не превосходит $n-1$.

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Тогда $S = \left[x^{(1)}, x^{(2)}\right]$, $i = 1$,

$$\lambda_1(x) = \frac{x^{(2)} - x}{x^{(2)} - x^{(1)}}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}},$$

$$d_1(S) = x^{(2)} - x^{(1)}.$$

Как нетрудно видеть, обе части (2.2) совпадают. Так как $m_{11} = m_{12} = 1/2$, то (2.3) имеет вид $y^{(1)} = \left(x^{(1)} + x^{(2)}\right)/2$.

Пусть теперь $n \geq 2$. Положим

$$\delta_i(S) := \frac{n \cdot \mathrm{vol}(S)}{\Sigma_i(S)}.$$

Напомним, что $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \neq 0$. Установим последовательно равенства

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|, \quad \delta_i(S) = d_i(S). \tag{2.5}$$

Из них и будет следовать (2.2).

Учитывая (2.1), имеем:

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{\Sigma_i(S)}{n \cdot \mathrm{vol}(S)} = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \Sigma_i(S) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}. \tag{2.6}$$

Из связи определителей и объёмов следует, что

$$\sigma_{11} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \cdot |\Delta_1(e_1) - \Delta_1(0)| =$$

$$= \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |\lambda_1(e_1) - \lambda_1(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |l_{11}| \, .$$

Аналогично при данном i и $j = 1, \dots, n+1$

$$\sigma_{ij} = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |\lambda_j(e_i) - \lambda_j(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |l_{ij}| \, .$$

Возвращаясь к (2.6), получаем:

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \, |l_{ij}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \, .$$

Левое равенство из (2.5) доказано, перейдём к правому.

Основание выпуклого тела $R_i(S)$, лежащее в гиперплоскости с уравнением $x_i = 0$, есть $V_i(S)$. Рассмотрим отрезок длины $d_i(S)$, принадлежащий $R_i(S)$. Пусть z есть его конец, не лежащий в гиперплоскости $x_i = 0$. Положим $V_{i,z}(S) := \text{conv}\,(V_i(S), z)$. В силу выпуклости $R_i(S)$ выполняется $V_{i,z}(S) \subset R_i(S)$. Поэтому

$$\text{vol}\,(V_{i,z}(S)) = \frac{\Sigma_i(S) d_i(S)}{n} \leq \text{vol}\,(R_i(S)) = \text{vol}(S),$$

откуда

$$d_i(S) \leq \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{\Sigma_i(S)} = \delta_i(S).$$

Покажем, что S содержит отрезок, параллельный оси x_i, длина которого равняется

$$\delta_i(S) = \frac{2}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}.$$

Пусть $y^{(i)}$ есть точка S с барицентрическими координатами m_{ij}, заданными равенствами (2.4). Рассмотрим отрезок $\left[y_-^{(i)}, y_+^{(i)}\right]$, где

$$y_-^{(i)} := y^{(i)} - \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} e_i,$$

$$y_+^{(i)} := y^{(i)} + \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} e_i.$$

Этот отрезок параллелен i-й оси и имеет длину $\delta_i(S)$, а его середина совпадает с $y^{(i)}$. Так как $\lambda_j\left(y^{(i)}\right) = m_{ij}$, то при $j = 1, \ldots, n+1$

$$\lambda_j\left(y_-^{(i)}\right) = \lambda_j\left(y^{(i)}\right) - \frac{l_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} = \frac{|l_{ij}| - l_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} \geq 0,$$

$$\lambda_j\left(y_+^{(i)}\right) = \lambda_j\left(y^{(i)}\right) + \frac{l_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} = \frac{|l_{ij}| + l_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} \geq 0.$$

В силу (1.4) и выпуклости S отрезок $\left[y_-^{(i)}, y_+^{(i)}\right]$ целиком принадлежит симплексу. Это даёт оценку $d_i(S) \geq \delta_i(S)$. Выше было доказано, что верно и противоположное неравенство. Поэтому $d_i(S) = \delta_i(S)$. Равенство (2.3) следует из определения барицентрических координат.

При фиксированном j хотя бы одно из чисел $\lambda_j\left(y_-^{(i)}\right)$ и $\lambda_j\left(y_+^{(i)}\right)$ равно 0. Это означает, что соответствующий конец отрезка принадлежит $(n-1)$-мерной грани S, противоположной $x^{(j)}$. Если $l_{ij} \neq 0$, то эта грань содержит ровно один из концов отрезка. В случае, когда $l_{ij} = 0$, отрезок целиком принадлежит указанной грани.

Пусть $k_-^{(i)}$ и $k_+^{(i)}$ равняются количеству 0 среди чисел $\lambda_j\left(y_-^{(i)}\right)$ и $\lambda_j\left(y_+^{(i)}\right)$ соответственно, $j = 1, \ldots, n+1$. Тогда размерности двух минимальных по включению граней S, содержащих $y_-^{(i)}$ и $y_+^{(i)}$, равняются соответственно $n - k_-^{(i)}$ и $n - k_+^{(i)}$. Из предыдущего следует, что $k_-^{(i)} + k_+^{(i)} \geq n+1$. Поэтому сумма размерностей этих граней не превосходит $n-1$.

Осталось доказать единственность отрезка длины $d_i(S)$, параллельного оси x_i и принадлежащего S. Из равенства $d_i(S) = \delta_i(S)$ следует, что

$$\operatorname{vol}(S) = \frac{\Sigma_i(S) d_i(S)}{n}. \tag{2.7}$$

Так как $V_{i,z}(S) \subset R_i(S)$, то

$$\frac{\Sigma_i(S)d_i(S)}{n} = \mathrm{vol}\,(V_{i,z}(S)) \le \mathrm{vol}\,(R_i(S)) = \mathrm{vol}(S).$$

Левая и правая величины в этой цепочке совпадают. Поэтому для любого отрезка максимальной длины с концом z, не принадлежащим гиперплоскости $x_i = 0$, выполняется

$$R_i(S) = V_{i,z}(S). \tag{2.8}$$

Остаётся заметить, что если существует два различных отрезка указанного вида, то каждое из равенств (2.7)–(2.8) нарушается. Это противоречие завершает доказательство теоремы. □

1.2.3. Следствия. Из равенств (2.7)–(2.8) следует, что для любого S все вершины выпуклого многогранника $R_i(S)$ принадлежат параллельным гиперплоскостям $x_i = 0$ и $x_i = d_i(S)$, причём последняя содержит ровно одну вершину. Аналогично результат применения к S симметризации Штейнера относительно гиперплоскости $x_i = 0$ есть выпуклый многогранник, все вершины которого принадлежат гиперплоскостям $x_i = 0$, $x_i = d_i(S)/2$, $x_i = -d_i(S)/2$ (причём каждой из двух последних — ровно по одной вершине). Последнее свойство S известно — его ранее установили Мартини и Вейссбах. Более того, Мартини [59] доказал, что указанное строение симметризаций Штейнера выпуклого тела в $\mathbb{R}^n$ характеризует симплекс.

Из (2.2) и (1.5) вытекает, что *величина $1/d_i(S)$ равна сумме положительных элементов i-й строки $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этой строки.*

Следствие 1.2.1. *Если $S \subset Q_n$, то для $i = 1, \ldots, n$*

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \ge 2. \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как $S \subset Q_n$, то для любого i выполняется $d_i(S) \le 1$. Теперь достаточно применить (2.2). Следствие доказано. □

Следствие 1.2.2. *Для любой прямой L симплекс S содержит единственный отрезок максимальной длины, параллельный L. Каждой $(n-1)$-мерной грани S принадлежит хотя бы один из концов этого отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней*

S, содержащих концы отрезка, не превосходит $n-1$. Объём S ровно в n раз меньше произведения длины указанного отрезка и $(n-1)$-меры проекции S на $(n-1)$-мерную гиперплоскость, ортогональную L.

Доказательство. Достаточно ввести в $\mathbb{R}^n$ новую прямоугольную систему координат так, чтобы первая координатная ось была параллельна L, и затем применить теорему 1.2.1 для $i = 1$. Формула для объёма S, о которой идёт речь в условии следствия, получается аналогично (2.7). Следствие доказано. $\square$

§ 1.3. Величина $\xi(C;S)$

Пусть S — невырожденный симплекс, C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Введём в рассмотрение величину

$$\xi(C;S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}.$$

Положим $\xi(S) := \xi(Q_n;S)$. Очевидно, $\xi(C;S) = 1$ тогда и только тогда, когда $C \subset S$.

В этом параграфе мы приведём ряд утверждений о вычислении величины $\xi(C;S)$. Первые два предложения (теорема 1.3.1 и следствие 1.3.1) обобщают на случай произвольного C результаты лемм 1 и 2 из [60], в которых рассматривался случай $C = Q_n$.

Теорема 1.3.1. *Пусть $C \not\subset S$ и $1 \leq j \leq n$. Предположим, что j-я $(n-1)$-мерная грань симплекса $\xi(C;S)S$ (параллельная грани S с уравнением $\lambda_j(x) = 0$) содержит точку C. Тогда*

$$\xi(C;S) = (n+1)\max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как j-я грань S удовлетворяет уравнению $\lambda_j(x) = 0$ и $\xi(C;S) > 1$, то j-я грань $\xi(C;S)S$ удовлетворяет уравнению $-\lambda_j(x) = \mu$ с некоторым $\mu > 0$. Обозначим через z точку C, принадлежащую j-й грани $\xi(C;S)S$. Пусть c — центр тяжести S, b — общая точка отрезка $[c,z]$ и границы S. Из определения $\xi(C;S)$ следует, что

$$\xi(C;S) = \frac{\|z-c\|}{\|b-c\|}, \tag{3.2}$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Точки c, b, z лежат на одной прямой. Так как λ_j — многочлен первой степени, то нетрудно показать, что (3.2) эквивалентно равенству

$$\xi(C;S)=\frac{\lambda_j(z)-\lambda_j(c)}{\lambda_j(b)-\lambda_j(c)}. \tag{3.3}$$

Для этого достаточно преобразовать правую часть (3.3) с помощью (3.2). Положим здесь для краткости $\xi=\xi(C;S)$. Из (3.2) имеем

$$z=\frac{\|z-c\|}{\|b-c\|}(b-c)+c=\xi(b-c)+c.$$

Так как $\lambda_j(x)=l_{1j}x_1+\ldots+l_{nj}x_n+l_{n+1,j}$, см. (1.1), получаем

$$\frac{\lambda_j(z)-\lambda_j(c)}{\lambda_j(b)-\lambda_j(c)}=\frac{\lambda_j(\xi(b-c)+c)-\lambda_j(c)}{\lambda_j(b)-\lambda_j(c)}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}l_{ij}(\xi(b_i-c_i)+c_i)+l_{n+1,j}-\sum\limits_{i=1}^{n}l_{ij}c_i-l_{n+1,j}}{\sum\limits_{i=1}^{n}l_{ij}(b_i-c_i)}=$$

$$=\frac{\xi\sum\limits_{i=1}^{n}l_{ij}(b_i-c_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}l_{ij}(b_i-c_i)}=\xi.$$

Итак, (3.3) доказано.

Остается привести (3.3) к нужному виду (3.1). Барицентрические координаты центра тяжести симплекса одинаковы и равны $1/(n+1)$. Поэтому $\lambda_j(c)=1/(n+1)$. Кроме того, $\lambda_j(b)=0$. Поскольку $C\subset\xi(C;S)S$, для $x\in C$ выполняется $-\lambda_j(z)=\mu\geq-\lambda_j(x)$. Следовательно, $-\lambda_j(z)=\max_{x\in C}(-\lambda_j(x))$. Таким образом, из (3.3) следует

$$\xi(C;S)=\frac{\lambda_j(z)-\lambda_j(c)}{\lambda_j(b)-\lambda_j(c)}=$$

$$\frac{\lambda_j(z)-1/(n+1)}{-1/(n+1)}=(n+1)\max_{x\in C}(-\lambda_j(x))+1.$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 1.3.1. *Пусть S — невырожденный симплекс, C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $C\not\subset S$. Если симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг C, то*

$$\max_{x\in C}\left(-\lambda_1(x)\right)=\ldots=\max_{x\in C}\left(-\lambda_{n+1}(x)\right). \tag{3.4}$$

Доказательство. По условию, каждая $(n-1)$-мерная грань $\xi(C;S)S$ содержит точку C. Из леммы 1 получается, что (3.1) выполняется при любом $j=1,\dots,n+1$. Следовательно, $\max_{x\in C}(-\lambda_j(x))$ не зависит от j, т. е. имеет место (3.4). $\square$

Теорема 1.3.2. *Пусть S — невырожденный симплекс, C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $C\not\subset S$. Тогда*

$$\xi(C;S)=(n+1)\max_{1\le k\le n+1}\max_{x\in C}(-\lambda_k(x))+1. \tag{3.5}$$

Равенство (3.4) *эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг C.*

Доказательство. Очевидно, найдётся номер j, удовлетворяющий условию теоремы 1.3.1. Из (3.1) следует, что $\xi(C;S)$ не превосходит правой части (3.5). Покажем, что это нестрогое неравенство фактически является равенством. Пусть внешний максимум в правой части (3.5) достигается на $k=k^*$. В силу теоремы 1.3.1 для доказательства (3.5) достаточно установить, что k^*-я грань $\xi(C;S)S$ содержит точку C. Предположим противное. Обозначим через z точку C, на которой достигается $\max_{x\in C}(-\lambda_{k^*}(x))$. Если $\lambda_{k^*}(z)\ge 0$, то правая часть (3.5) не превосходит 1; это противоречит условию $C\not\subset S$. Поэтому $\lambda_{k^*}(z)<0$. В этом случае z лежит между гиперплоскостью, задающей k^*-ю грань симплекса $\xi(C;S)$, и гиперплоскостью $\lambda_{k^*}(x)=0$. Пусть c — центр тяжести S, b — точка пересечения прямой (cz) с гиперплоскостью $\lambda_{k^*}(x)=0$. Имеем $\lambda_{k^*}(c)=1/(n+1)$, $\lambda_{k^*}(b)=0$. Рассуждения по схеме доказательства теоремы 1.3.1 и соображения подобия приводят к тому, что

$$\xi(C;S)>\frac{\lambda_{k^*}(z)-\lambda_{k^*}(c)}{\lambda_{k^*}(b)-\lambda_{k^*}(c)}=\frac{\lambda_{k^*}(z)-1/(n+1)}{-1/(n+1)}.$$

Это даёт

$$\xi(C;S)>(n+1)(-\lambda_{k^*}(z))+1=$$
$$=(n+1)\max_{1\le k\le n+1}\max_{x\in C}(-\lambda_k(x))+1.$$

Мы получили, что левая часть (3.5) превосходит правую часть. Полученное противоречие доказывает первую часть теоремы.

Перейдём к доказательству второй части. Пусть выполняется (3.4). Тогда каждая $(n-1)$-мерная грань $\xi(C;S)S$ содержит точку C. Действительно, если для некоторой грани $\xi(C;S)S$ это не так, то, рассуждая, как и выше, мы установим невозможность уже доказанного равенства (3.5).

Поэтому с учётом следствия 1.3.1 условие (3.4) эквивалентно тому, что симплекс $\xi(C;S)S$ описан вокруг C. $\square$

Отдельно остановимся на случае $C = Q_n$. Многочлен из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ принимает минимальное и максимальное значения на Q_n в вершинах куба. В связи с этим в соотношениях настоящего пункта величина $\max_C(-\lambda_j)$ при $C = Q_n$ может быть заменена на равную величину $\max_{\mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j)$. В частности, равенство (3.5) принимает вид

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1\le k\le n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1, \tag{3.6}$$

а условие (3.4) сводится к соотношению

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \tag{3.7}$$

Соотношения (3.6)–(3.7) мы используем в дальнейшем.

§ 1.4. Величина $\alpha(C;S)$ и равенство $\alpha(S) = \sum 1/d_i(S)$

1.4.1. Величина $\alpha(C_1, C_2)$. На совокупности выпуклых тел из $\mathbb{R}^n$ можно ввести некоторые метрики, определяемые в терминах гомотетии с коэффициентом $\sigma \in \mathbb{R}$ и параллельного переноса (см. обзор в [7]). В этом параграфе мы введём в рассмотрение величину $\alpha(C_1, C_2)$, которая также использует гомотетию и параллельный перенос. Однако в нашем случае коэффициент гомотетии предполагается положительным.

Для выпуклых тел $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\alpha(C_1; C_2)$ минимальное $\sigma > 0$, для которого C_1 принадлежит трансляту σC_2. Положим

$$\alpha(C) := \alpha(Q_n; C).$$

Из результата Скотта [63; теорема 1] следует, что если в выпуклое тело C можно вписать транслят куба σQ_n при некотором $\sigma > 0$, то

$$\alpha(C) \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)}.$$

Здесь и далее $d_i(C)$ — i-й осевой диаметр C. В [29; следствие 2] автор доказал, что последнее неравенство справедливо для любого C (см. следствие 1.5.3). В настоящем параграфе мы докажем, что для выпуклого тела C и симплекса S справедливо

$$\alpha(C;S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1. \tag{4.1}$$

Здесь $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S. Мы также покажем, что в случае $C = Q_n$ (4.1) приводится к виду

$$\alpha(S) = \alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{4.2}$$

Второе доказательство равенства (4.2) дается в § 1.5.

1.4.2. Величина $\psi(C;S)$. Пусть S — невырожденный симплекс, C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Введём в рассмотрение величину

$$\psi(C;S) := \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + 1.$$

Следующее утверждение доказано в [31; лемма 3].

Лемма 1.4.1. *Для $\sigma > 0$ и $t \in \mathbb{R}^n$*

$$\psi(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma}\psi(C;S). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины симплекса S, $y^{(1)}$, $\ldots$, $y^{(n+1)}$ — вершины симплекса $\sigma S + t$. Очевидно,

$$y^{(k)} = \sigma\big(x^{(k)} - c\big) + c + t = \sigma x^{(k)} - t'.$$

Здесь c — центр тяжести S, $t' = -(1-\sigma)c - t$. Определим многочлены $\Lambda_j \in \Pi_1\left(\mathbb{R}^n\right)$ с помощью равенств

$$\Lambda_j(x) := \lambda_j\Big(\frac{x+t'}{\sigma}\Big), \quad j = 1, \ldots, n+1.$$

Тогда $\Lambda_j\left(y^{(k)}\right) = \lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$. Поэтому $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n+1}$ суть базисные многочлены Лагранжа симплекса $\sigma S + t$. Так как $\lambda_j \in \Pi_1\left(\mathbb{R}^n\right)$, то

$$\lambda_j(x+s) = \lambda_j(x) + \lambda_j(s) - \lambda_j(0),$$

$$\lambda_j(\tau x) - \lambda_j(0) = \tau\left[\lambda_j(x) - \lambda_j(0)\right].$$

С учетом этого имеем

$$\Lambda_j(x) = \lambda_j\Big(\frac{x+t'}{\sigma}\Big) =$$

$$= \lambda_j\Big(\frac{x}{\sigma}\Big) + \lambda_j\Big(\frac{t'}{\sigma}\Big) - \lambda_j(0) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\lambda_j(x) + \Big(1 - \frac{1}{\sigma}\Big)\lambda_j(0) + \lambda_j\Big(\frac{t'}{\sigma}\Big) - \lambda_j(0) =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\lambda_j(x) + \lambda_j\Big(\frac{t'}{\sigma}\Big) - \frac{1}{\sigma}\lambda_j(0).$$

Таким образом,

$$\psi(C; \sigma S + t) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\Lambda_j(x)) + 1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}\Big[-\frac{1}{\sigma}\lambda_j(x) - \lambda_j\Big(\frac{t'}{\sigma}\Big) + \frac{1}{\sigma}\lambda_j(0)\Big] + 1 =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) - \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\Big(\frac{t'}{\sigma}\Big) + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(0) + 1$$

$$= \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in C}(-\lambda_j(x)) + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\psi(C; S).$$

Мы воспользовались тем, что в соответствии с (1.3)

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(0) = 1.$$

Равенство (4.3) доказано. □

Лемма 1.4.2. *Пусть* $p((x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1}$. *Тогда*

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-p(x)) + p\Big(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i|. \tag{4.4}$$

Доказательство. Если $x_i = 0$ или $x_i = 1$, то $|(1/2) - x_i| = 1/2$. Поэтому для $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$

$$p\Big(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\Big) - p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\Big(\frac{1}{2} - x_i\Big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}|a_i|\Big|\frac{1}{2} - x_i\Big| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|a_i|.$$

Определим $x^* \in \mathrm{ver}(Q_n)$ с помощью равенств: $x_i^* = 0$, если $a_i \geq 0$, и $x_i^* = 1$, если $a_i < 0$. Для $x = x^*$ неравенство, содержащееся в предыдущей цепочке, обращается в равенство. Это означает, что имеет место (4.4). Лемма доказана. $\square$

Ниже нам понадобится ещё полученное выше выражение для осевых диаметров $d_i(S)$ через коэффициенты многочленов λ_j, соответствующих симплексу S. Напомним, что $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$. В этих обозначениях для любого $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|, \tag{4.5}$$

см. теорему 1.2.1.

1.4.3. Основные равенства. В [31] доказана следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть C — выпуклое тело, S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\alpha(C;S) = \psi(C;S). \tag{4.6}$$

В случае $C = Q_n$ имеем

$$\alpha(S) = \sum_{j=1}^{n+1}\max_{x\in\mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Из определения $\alpha(C;S)$ и $\xi(C;S)$ следует, что существуют $\sigma > 0$ и $t \in \mathbb{R}^n$, для которых симплекс $S_1 := \sigma S + t$ не содержит C и выполняется $\alpha(C;S_1) = \xi(C;S_1)$. Заметим, что тогда каждая $(n-1)$-мерная грань симплекса $\xi(C;S_1)S_1$ содержит точку C. (Предположим, что это не так. Тогда найдется число $\tau \in (0,1)$ такое, что C принадлежит трансляту симплекса $(\tau\xi(C;S_1))S_1$. В этом случае будет иметь место $\alpha(C;S_1) \leq \tau\xi(C;S_1)$. Последнее неравенство противоречит равенству $\alpha(C;S_1) = \xi(C;S_1)$.)

Сначала покажем, что (4.6) выполняется для симплекса S_1. Пусть λ_j^* — базисные многочлены для этого симплекса. Применяя к S_1 теорему 1.3.1 (с $j = 1$) и следствие 1.3.1, получим

$$\alpha(C;S_1) = \xi(C;S_1) = (n+1)\max_{x\in C}(-\lambda_1^*(x)) + 1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1}\max_{x\in C}(-\lambda_j^*(x)) + 1 = \psi(C;S_1).$$

Теперь вернёмся к симплексу S. Очевидно,

$$\alpha(C;S_1)=\alpha(C;\sigma S+t)=(1/\sigma)\alpha(C;S).$$

Кроме того, лемма 1.4.1 даёт

$$\psi(C;S_1)=\psi(C;\sigma S+t)=(1/\sigma)\psi(C;S).$$

Поэтому из равенства $\alpha(C;S_1)=\psi(C;S_1)$ следует $\alpha(C;S)=\psi(C;S)$. Итак, (4.6) доказано.

Перейдём к доказательству второй части теоремы. Пусть $C=Q_n$. Максимум многочлена из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ на выпуклом многограннике достигается в вершине многогранника. Поэтому

$$\max_{x\in Q_n}(-\lambda_j(x))=\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x)).$$

Из (1.3) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\Bigl(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\Bigr)=1. \tag{4.8}$$

Применяя, кроме (4.8), еще леммы 1.4.1 и 1.4.2, получим

$$\psi(Q_n;S)=\sum_{j=1}^{n+1}\max_{x\in Q_n}(-\lambda_j(x))+1=$$

$$=\sum_{j=1}^{n+1}\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x))+1=$$

$$=\sum_{j=1}^{n+1}\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\Bigl[-\lambda_j(x))+\lambda_j\Bigl(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\Bigr)\Bigr]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}|l_{ij}|=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}.$$

Итоговое выражение означает, что равенство $\alpha(S):=\alpha(Q_n;S)=\psi(Q_n;S)$ эквивалентно равенству $\alpha(S)=\sum_{i=1}^{n}1/d_i(S)$. Таким образом, выполняется (4.7). Теорема доказана. $\square$

Приведённый результат может быть использован и в другом направлении, а именно при вычислении $\psi(C;S)$ с помощью $\alpha(C;S)$. Ограничимся ситуацией, когда C — параллелепипед.

Следствие 1.4.1. *Пусть V — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, ребра которого задаются линейно независимыми векторами $v_1, \ldots, v_n$. Обозначим длину v_i через a_i. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ — невырожденный симплекс; δ_i — максимальная длина отрезка, принадлежащего S и параллельного v_i. Тогда*

$$\psi(V;S) = \alpha(V;S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\delta_i}.$$

Доказательство. Любые два невырожденных параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$ аффинно эквивалентны. Соответствующее аффинное преобразование переводит симплекс в симплекс. При этом преобразовании сохраняется отношение длин в любом фиксированном направлении. Следовательно, равенство $\alpha(V;S) = \sum_{i=1}^{n} a_i/\delta_i$ эквивалентно его аналогу для $V = Q_n$, см. (4.7). Для завершения доказательства следствия осталось привлечь (4.6). Следствие доказано. $\square$

Особо отметим возможность вычисления $\alpha(S)$ через коэффициенты l_{ij} многочленов λ_j.

Следствие 1.4.2. *Справедливо равенство*

$$\alpha(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{4.9}$$

Полезная для вычислений формула (4.9) вытекает из (4.5) и (4.7).

Из (4.9) и (1.6) вытекает, что *величина $\alpha(S)$ равна сумме положительных элементов верхних n строк матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этих строк.*

§ 1.5. Второе доказательство равенства $\alpha(S) = \sum 1/d_i(S)$

В этом параграфе ключевое равенство

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \tag{5.1}$$

для осевых диаметров симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ будет получено иным способом, нежели при установлении теоремы 1.4.1. Этот подход реализован в статье автора [60].

1.5.1. Теорема о симплексе и параллелепипеде. Сначала мы приведём независимое доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.5.1. *Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — невырожденный параллелепипед и y — вершина V. Обозначим векторы, задающие рёбра V и исходящие из y через $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$. Пусть a_i — длина $v^{(i)}$, т. е. $a_i = \|v^{(i)}\|$. Пусть S — n-мерный симплекс. Обозначим через δ_i максимальную длину отрезка из S, параллельного $v^{(i)}$. Если $V \subset S$, то*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\delta_i} \leq 1. \tag{5.2}$$

Доказательство. Любые два невырожденных симплекса в $\mathbb{R}^n$ аффинно эквивалентны. Поэтому мы можем отобразить симплекс S с помощью аффинного преобразования на симплекс, заданный неравенствами

$$x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1. \tag{5.3}$$

Параллелепипед V при этом отображении перейдёт в параллелепипед, содержащийся внутри симплекса (5.3). Так как невырожденное аффинное преобразование сохраняет отношение длин в любом заданном направлении, то достаточно доказать (5.2) для новых симплекса и параллелепипеда. Обозначим эти многогранники теми же символами S и V. Итак, с этого момента мы предполагаем, что S задан неравенствами (5.3).

Некоторый транслят V, содержащийся в S (возможно, сам V) имеет вершину в гиперплоскости $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$. Без ограничения общности мы можем считать, что вершина y параллелепипеда V удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^{n} y_k = 1$.

Обозначим через σ_i сумму абсолютных величин всех отрицательных координат вектора, а через τ_i — сумму всех неотрицательных координат вектора $v^{(i)}$:

$$\sigma_i = \sum_{k: v_k^{(i)} < 0} |v_k^{(i)}|, \quad \tau_i = \sum_{k: v_k^{(i)} \geq 0} v_k^{(i)}.$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{n} y_k = 1$, то $v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}$ принадлежат замкнутому подпространству $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq 0$. Поэтому $\sum_{k=1}^{n} v_k^{(i)} \leq 0$ для любого $v^{(i)}$, где $1 \leq i \leq n$. Это даёт $0 \leq \tau_i \leq \sigma_i$. Условие $v_i \neq 0$ теперь влечёт $\sigma_i > 0$.

Из включения $V \subset S$ следует, что для любого подмножества A множества $\{1, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется

$$y_j + \sum_{i \in A} v_j^{(i)} \geq 0.$$

Здесь y_j и $v_j^{(i)}$ обозначают j-е координаты y и $v^{(i)}$ соответственно. Следовательно, для любого A

$$\sum_{i \in A} v_j^{(i)} \geq -y_j. \tag{5.4}$$

Теперь рассмотрим сумму $s = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$. Покажем, что $s \leq 1$. Для $j \in \{1, \ldots, n\}$ положим $A_j = \{i : v_j^{(i)} < 0\}$. Из определения σ_i следует

$$s = \sum_{k : v_k^{(1)} < 0} |v_k^{(1)}| + \ldots + \sum_{k : v_k^{(n)} < 0} |v_k^{(n)}|.$$

Очевидно, s есть сумма абсолютных величин отрицательных координат всех векторов $v^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$. Таким образом, мы имеем другое представление для s, а именно

$$s = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i : v_j^{(i)} < 0} |v_j^{(i)}| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in A_j} (-v_j^{(i)}).$$

Из (5.4) мы получаем неравенство $\sum_{i \in A_j} (-v_j^{(i)}) \leq y_j$. Итак,

$$s = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in A_j} (-v_j^{(i)}) \leq \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Введём в рассмотрение точки $z_+^{(i)}, z_-^{(i)}$ с помощью равенств

$$z_+^{(i)} = \left(\frac{1}{\sigma_i} \max(v_1^{(i)}, 0), \ldots, \frac{1}{\sigma_i} \max(v_n^{(i)}, 0) \right),$$

$$z_+^{(i)} = \left(-\frac{1}{\sigma_i} \min(v_1^{(i)}, 0), \ldots, -\frac{1}{\sigma_i} \min(v_n^{(i)}, 0) \right).$$

Мы утверждаем, что $z_+^{(i)}, z_-^{(i)} \in S$ для всех $1 \leq i \leq n$. Действительно, j-я координата $z_+^{(i)}$ равна 0 или $v_j^{(i)}/\sigma_i$ (последнее — в случае $v_j^{(i)} > 0$). Эта величина ≥ 0, так как $\sigma_i > 0$. Аналогично, j-я координата $z_-^{(i)}$ есть 0 или $-v_j^{(i)}/\sigma_i$ (в случае $v_j^{(i)} < 0$); эта величина также является неотрицательной. Далее,

$$\sum_{k=1}^{n} z_{+k}^{(i)} = \frac{1}{\sigma_i} \sum_{k=1}^{n} \max(v_k^{(i)}, 0) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_i} \sum_{k: v_k^{(i)} \geq 0} v_k^{(i)} = \frac{\tau_i}{\sigma_i} \leq 1,$$

поскольку $0 \leq \tau_i \leq \sigma_i$. Мы также имеем

$$\sum_{k=1}^{n} z_{-k}^{(i)} = -\frac{1}{\sigma_i} \sum_{k=1}^{n} \min(v_k^{(i)}, 0) =$$

$$= -\frac{1}{\sigma_i} \sum_{k: v_k^{(i)} < 0} v_k^{(i)} = \frac{1}{\sigma_i} \sum_{k: v_k^{(i)} < 0} |v_k^{(i)}| = \frac{\sigma_i}{\sigma_i} = 1.$$

Как отмечалось выше, $S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \geq 0, \sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1\}$. Следовательно, $z_+^{(i)}, z_-^{(i)} \in S$.

Наконец, рассмотрим отрезок $[z_-^{(i)}, z_+(i)]$. Очевидно, он принадлежит S. Так как $z_+^{(i)} - z_-^{(i)} = (1/\sigma_i) v^{(i)}$, этот отрезок параллелен $v^{(i)}$. Длина рассматриваемого отрезка равна

$$\|z_+^{(i)} - z_-^{(i)}\| = \frac{\|v^{(i)}\|}{\sigma_i} = \frac{a_i}{\sigma_i}.$$

Это число не превосходит δ_i (так как δ_i есть максимальная длина отрезка, принадлежащего S и параллельного $v^{(i)}$). Следовательно, $a_i/\sigma_i \leq \delta_i$, т. е. $a_i/\delta_i \leq \sigma_i$ для любого $1 \leq i \leq n$. Окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\delta_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = s \leq 1.$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Первоначально автор доказал теорему 1.5.1 другим путём, см. следствие 4.2 из [25]. Главной идеей его первого подхода было применение равенства (2.2), связывающего коэффициенты l_{ij} базисных многочленов симплекса S с его осевыми диаметрами $d_i(S)$. Этот метод используется и в доказательстве более общего результата — равенства (4.7) теоремы 1.4.1 настоящей работы. Приведённое здесь доказательство теоремы 1.5.1 опирается на идеи другого, более геометрического подхода, о котором автору сообщил В. Л. Дольников. В дальнейшем мы докажем ключевое соотношение (5.1) с помощью теоремы 1.5.1, не привлекая полиномиальное равенство (2.2). Как представляется автору, эти два метода доказательства (5.1) и с точки зрения сложности, и с эстетической точки зрения равноценны.

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Как и ранее, $\alpha(S)$ обозначает минимальное $\sigma > 0$, для которого существует $t \in \mathbb{R}^n$ такое, что $Q_n \subset \sigma S + t$. По этому определению $\alpha(S)S$ есть минимальный положительный гомотетический образ S, транслят которого покрывает стандартный единичный куб Q_n. Также напомним, что $d_i(S)$ обозначает i-й осевой диаметр S.

Следствие 1.5.1. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \alpha(S). \tag{5.5}$$

Доказательство. Из определения $\alpha(S)$ следует, что существует t такое, что $Q_n \subset \alpha(S)S + t$. Значит, для некоторого t' выполняется включение $(1/\alpha(S))Q_n + t' \subset S$. (Если $\alpha(S) = 1$, то это включение имеет место с $t' = -t$.) Обозначим куб $(1/\alpha(S))Q_n$ через Q'. Так как Q' является параллелепипедом, мы можем применить теорему 1.5.1. В этом случае векторы $v^{(i)}$, задающие рёбра Q', параллельны координатным осям. Поэтому $\delta_i = d_i(S)$. Для любого вектора $v^{(i)}$ имеем $a_i = \|v^{(i)}\| = \alpha(S)^{-1}$. Неравенство (5.2) даёт

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha(S)^{-1}}{d_i(S)} \leq 1.$$

Для получения (5.5) остаётся умножить последнее неравенство на $\alpha(S)$. Следствие доказано. $\square$

Наша дальнейшая цель — показать, что выполняется и неравенство, противоположное (5.5).

1.5.2. Свойства осевых диаметров выпуклого тела. Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, $d_i(C)$ — i-й осевой диаметр C. Из результата Скотта [63; теорема 1] следует, что если в C можно вписать транслят куба Q_n, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{5.6}$$

Доказательство этого соотношения, приведённое в [63], опирается на n-кратное применение к C симметризаций Штейнера. При этом существенно используется то, что все вершины указанного транслята принадлежат границе C. Ниже мы докажем неравенство (5.6) в более общей ситуации, когда подход работы [63] не эффективен. Как следствие мы получим, что для осевых диаметров любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq \alpha(C). \tag{5.7}$$

Напомним, что символ $\alpha(C)$ обозначает минимальное $\tau > 0$, для которого Q_n принадлежит некоторому трансляту τC. Приводимые ниже теорема 1.5.2 и следствия 1.5.2, 1.5.3 доказаны автором в [29].

Теорема 1.5.2. *Пусть для выпуклого тела C*

$$\sigma := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)}\right)^{-1}.$$

Тогда C содержит транслят куба σQ_n.

Доказательство. Для $i = 1, \ldots, n$ обозначим через D_i произвольный отрезок, принадлежащий C, параллельный i-й координатной оси и имеющий длину $d_i := d_i(C)$. Рассмотрим множество $W := \operatorname{conv}(D_1, \ldots, D_n)$. Пусть $\mu_i := \sigma/d_i$, $m^{(i)}$ — центр D_i. Положим $m := \sum_{i=1}^{n} \mu_i m^{(i)}$. Так как

$$\mu_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} = 1,$$

то m есть выпуклая комбинация точек W. Поэтому $m \in W$. Обозначим через Q транслят куба σQ_n, центр которого совпадает с m. Покажем, что $Q \subset W$. Произвольная вершина Q имеет вид

$$v = m + \left(\pm\frac{\sigma}{2}, \ldots, \pm\frac{\sigma}{2}\right)$$

с некоторым сочетанием знаков $\pm$. Имеем:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma}{d_i} m^{(i)} + \sigma \left(\pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sigma \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} m^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\pm\frac{1}{2} e_i\right)\right] =$$

$$= \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \left(m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i\right).$$

Отрезок D_i параллелен i-й координатной оси, и его длина равна d_i, поэтому $m^{(i)} \pm (d_i/2)e_i \in D_i$. Точки $m^{(i)} \pm (d_i/2)e_i$ суть концы D_i. Таким образом, каждая вершина Q есть выпуклая комбинация концов отрезков $D_1, \ldots, D_n$ и, следовательно, принадлежит W. Значит, $Q \subset W$, а так как $W \subset C$, то $Q \subset C$. Теорема 1.5.2 доказана. $\square$

Следствие 1.5.2. *Пусть C содержит некоторый транслят Q_n и не содержит никакого транслята τQ_n при $\tau > 1$. Тогда имеет место*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1.$$

Доказательство. Допустим, что для некоторого C выполняется неравенство $\sum 1/d_i(C) < 1$. Положим $\sigma := \left(\sum 1/d_i(C)\right)^{-1}$. По предыдущей теореме C содержит транслят куба σQ_n. Но так как $\sigma > 1$, то это противоречит условию. Следствие доказано. $\square$

Следствие 1.5.3. *Для любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ справедливо* (5.7).

Доказательство. Из определения $\alpha(\cdot)$ следует, что выпуклое тело $C' := \alpha(C)C$ удовлетворяет условию следствия 1.5.1. Для C' выполняется неравенство (5.6), т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C')} \geq 1. \tag{5.8}$$

Остаётся заметить, что $d_i(C') = \alpha(C) d_i(C)$, поэтому (5.8) эквивалентно (5.7). Это завершает доказательство. $\square$

Следствие 1.5.4. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда справедливо* (5.1).

Доказательство. Следствие 1.5.1 даёт оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \alpha(S).$$

Так как симплекс S является выпуклым телом, к нему применимо также следствие 1.5.3. Взяв в (5.7) $C = S$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \geq \alpha(S).$$

Таким образом, справедливо равенство (5.1). $\square$

Мы показали, что *если C — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, то* (5.7) *является равенством.* Обратное утверждение верно лишь для $n = 1$, когда любое выпуклое тело C есть отрезок и $\alpha(C) = 1/d_1(C)$. Если $n \geq 2$, то в качестве подходящего C, отличного от симплекса, можно взять множество $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, $n \leq \sum x_i \leq 2n$. В этом примере $d_1(C) = \ldots = d_n(C) = n$, $\alpha(C) = 1$, поэтому левая и правая части (5.7) одинаковы и равны 1.

В заключение отметим, что неравенство, противоположное (5.7), выполняется с точной константой n в правой части:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \leq n\alpha(C). \tag{5.9}$$

Равенство в (5.9) верно тогда и только тогда, когда C есть транслят куба σQ_n, $\sigma > 0$. Приведём доказательства последних утверждений.

Поскольку транслят выпуклого тела $\alpha(C)C$ содержит Q_n, то при любом i верно $\alpha(C)d_i(C) = d_i(\alpha(C)C) \geq 1$, т. е. $1/d_i(C) \leq \alpha(C)$. Для получения (5.9) достаточно просуммировать последние неравенства по i.

Если C есть транслят σQ_n $(\sigma > 0)$, то обе части (5.9) одинаковы и равны n/σ. Наконец, пусть выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ таково, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} = n\alpha(C).$$

Из предыдущего имеем $d_i(\alpha(C)C) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Так как при этом некоторый транслят куба Q_n, обозначим его через Q, принадлежит $\alpha(C)C$, то $\alpha(C)C = Q$. (Допустим противное. Пусть $x \in \alpha(C)C \setminus Q$. Из выпуклости $\alpha(C)C$ следует, что для некоторого j существует отрезок, проходящий через x, параллельный j-й оси и содержащийся в $\alpha(C)C$. Длина этого отрезка превышает 1, что противоречит равенству $d_j(\alpha(C)C) = 1$.) Значит, C есть транслят σQ_n для некоторого $\sigma > 0$.

§ 1.6. Следствия

Приведённые в настоящем параграфе следствия равенства (5.1) имеют в основном геометрический характер. Они отмечались в статьях [25] и [60]. Некоторые другие следствия касаются вопросов полиномиальной интерполяции функций. Мы приведём их в главах 2 и 4.

Следствие 1.6.1. *Если $Q_n \not\subset S$, то*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S). \tag{6.1}$$

Равенство в (6.1) *эквивалентно каждому из двух равносильных условий:*

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_1(x)) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_{n+1}(x))\,; \tag{6.2}$$

$$\textit{симплекс}\ \ \xi(S)S\,\textit{описан вокруг}\,Q_n. \tag{6.3}$$

Доказательство. По определению $\xi(S)$ справедливо включение $Q_n \subset \xi(S)S$. Так как $\alpha(S)$ представляет собой минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту S, то $\alpha(S) \le \xi(S)$. Это неравенство совпадает с (6.1), поскольку $\alpha(S) = \sum 1/d_i(S)$. Для доказательства второй части следствия запишем геометрическое неравенство $\alpha(S) \le \xi(S)$ в эквивалентном функциональном виде, а именно через базисные многочлены λ_j симплекса S. Обратимся к первому равенству в (4.7) и соотношению (3.6), согласно которым

$$\alpha(S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda(x)) + 1,$$

$$\xi(S) = (n+1)\max_{1\le j\le n+1}\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda(x)) + 1.$$

Поэтому неравенство $\alpha(S) \le \xi(S)$ эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda(x)) \le (n+1)\max_{1\le j\le n+1}\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda(x)). \tag{6.4}$$

Равенство $\alpha(S) = \xi(S)$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо равенство в (6.4), а именно лишь при условии (6.2). Для завершения доказательства заметим, что равносильность условий (6.2) и (6.3) отмечалась в § 1.3 (см. теорему 1.3.2). □

Следствие 1.6.2. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^n$ — *невырожденный симплекс.*

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \le 1 \tag{6.5}$$

тогда и только тогда, когда Q_n *содержится в трансляте* S.

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} = 1$$

тогда и только тогда, когда для некоторого $t \in \mathbb{R}^n$ верно $Q_n \subset S+t$ и симплекс $S+t$ описан вокруг Q_n.

Доказательство. В силу равенства

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}$$

в пункте (a) имеем $\alpha(S) \leq 1$, а в пункте (b) имеем $\alpha(S) = 1$. Из определения $\alpha(S)$ сразу следует, что $\alpha(S) \leq 1$ тогда и только тогда, когда Q_n принадлежит некоторому трансляту S. Если же $\alpha(S) = 1$, то дополнительно к этому условию каждая $(n-1)$-мерная грань рассматриваемого транслята содержит вершину Q_n (иначе будет выполняться $\alpha(S) < 1$). Обратно, если некоторый транслят описан вокруг Q_n, то $\alpha(S) = 1$, так как в этом случае неравенство $\alpha(S) < 1$ невозможно. □

Следствие 1.6.3. *Пусть $S \subset Q_n$. Тогда $\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n$. Если $\xi(S) = n$, то $\alpha(S) = n$ и для любого i верно $d_i(S) = 1$.*

Доказательство. Включение $S \subset Q_n$ влечёт $d_i(S) \leq 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$\xi(S) \geq \alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \geq n.$$

Если $\xi(S) = n$, то все величины в этой цепочке одинаковы и равны n. В этом случае из соотношений $\sum 1/d_i(S) = n$ и $d_i(S) \leq 1$ получаем $d_i(S) = 1$. Следствие доказано. □

С помощью полученных результатов легко доказывается утверждение, представляющее, по мнению автора, самостоятельный интерес. Рассмотрим n-мерный симплекс S^*, ограниченный гиперплоскостями $x_i = 0$ и $\sum x_i = n$. Очевидно, $Q_n \subset S^*$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S^* содержит отрезок длины n, параллельный (в данном случае: принадлежащий) i-й координатной оси. Очевидно, что не каждый симплекс S, содержащий Q_n, имеет это свойство. Ниже даётся ответ на вопрос о существовании в S указанного отрезка хотя бы для одного i.

Следствие 1.6.4. *Пусть $Q_n \subset S$. Тогда для некоторого $i = 1, \ldots, n$ верно $d_i(S) \geq n$. Иначе говоря, для некоторого i симплекс S содержит отрезок длины n, параллельный i-й координатной оси.*

Доказательство. Так как $Q_n \subset S$, то справедливо неравенство (6.5) следствия 1.6.2. Если бы для всех i выполнялось $d_i(S) < n$, то (6.5) не имело бы места. Поэтому существует i, для которого $d_i(S) \geq n$. □

Заметим, что утверждение следствия 1.6.4 было сформулировано автором в виде гипотезы в [24; п. 4]. Доказательство было дано в [25; следствие 4.2].

Следствие 1.6.5. *Если $Q_n \subset S$, то для соответствующих S базисных многочленов λ_j выполняется*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| \leq 2. \tag{6.6}$$

Доказательство. Из (2.2) следует, что осевые диаметры симплекса S удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\,.$$

Так как $Q_n \subset S$, то к S применимо неравенство (6.5) следствия 1.6.2. Поэтому имеет место (6.6). $\square$

В связи с (6.6) заметим, что если $S \subset Q_n$, то

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| \geq 2n.$$

Последнее неравенство следует из (2.9).

Следствие 1.6.6. *Пусть $Q_n \subset S$, $d_i := d_i(S)$. Обозначим через S' симплекс с вершинами $x^{(i)} := d_ie_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, $x^{(n+1)} := 0$. Тогда $Q_n \subset S'$.*

Доказательство. Уравнение $(n-1)$-мерной гиперплоскости, содержащей грань S', противоположную нулевой вершине, имеет вид

$$\frac{x_1}{d_1} + \ldots + \frac{x_n}{d_n} = 1.$$

Так как $Q_n \subset S$, то верно неравенство (6.5). Из него следует, что вершина e куба Q_n принадлежит S'. Тогда и весь куб Q_n содержится в S'. Следствие доказано. $\square$

Определим $d(S)$ как максимальный из осевых диаметров S :

$$d(S) := \max_{1\leq i\leq n} d_i(S).$$

Обозначим через ϱ_n максимальное значение константы $R > 0$, с которой для любого n-мерного симплекса S, содержащего Q_n, выполняется соотношение $d(S) \geq R$.

Следствие 1.6.7. *Справедливо равенство* $\varrho_n = n$.

Доказательство. Если S содержит Q_n, то по следствию 1.6.4 имеем $d(S) \geq n$. Это означает, что $\varrho_n \geq n$. Рассмотрение симплекса S^*, ограниченного гиперплоскостями $x_i = 0$ и $\sum x_i = n$, даёт оценку $\varrho_n \leq n$. Поэтому при любом n верно $\varrho_n = n$. $\square$

Далее через V обозначается невырожденный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, рёбра которого задаются линейно независимыми векторами $v_1, \ldots, v_n$.

Следствие 1.6.8. *Если $V \subset S$, то для некоторого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S содержит отрезок, который параллелен v_i и длина которого равна длине v_i, умноженной на n.*

Доказательство. Каждый n-мерный параллелепипед аффинно эквивалентен кубу Q_n. Поэтому утверждение достаточно доказать для $V = Q_n$. Но в таком виде оно эквивалентно следствию 1.6.4. $\square$

С помощью равенства (5.1) могут быть получены некоторые известные результаты других авторов. В качестве таких примеров приведём следствия 1.6.9–1.6.12. Утверждение следствия 1.6.9. весьма сложным геометрическим путём было доказано Лассаком (см. [58; лемма 1]). Более наглядные следствия 1.6.10. и 1.6.12 выводятся из следствия 1.6.9 так же, как в [58]. Результат следствия 1.6.11 приведён в работе Балла [43; предложение 1].

Следствие 1.6.9. *Предположим, что для симплекса S выполняются включения $-(1/n)S \subset V \subset S$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ симплекс $-(1/n)S$ содержит ровно один отрезок, который принадлежит V, параллелен v_i и длина которого равна длине v_i.*

Доказательство. Утверждение сводится к случаю $V = Q_n$, который мы и рассмотрим. Так как $-(1/n)S \subset Q_n$, то $d_i\bigl(-(1/n)S\bigr) \leq 1$. Значит, $d_i(S) \leq n$ и $1/d_i(S) \geq 1/n$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \geq 1.$$

Включение $Q_n \subset S$ даёт противоположное неравенство, см. (6.5). Тем самым,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} = 1.$$

Это равенство будет нарушаться, если существует такое k, что $d_k(S) < n$. Поэтому для любого $i = 1, \ldots, n$ осевой диаметр $d_i(S)$ равен n. Получаем, что $d_i\bigl(-(1/n)S\bigr) = 1$. Единственность содержащегося в симплексе $-(1/n)S$ отрезка длины 1, параллельного оси x_i, следует из теоремы 1.2.1. Следствие доказано. $\square$

Следствие 1.6.10. *Пусть симплекс $S \subset V$ имеет максимальный объём из всех симплексов, принадлежащих V. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S содержит единственный отрезок, который принадлежит V, параллелен v_i и длина которого равна длине v_i.*

Доказательство. Сначала заметим, что справедливо включение $V \subset -nS$. Если бы это было не так, то некоторая вершина S могла бы быть перемещена в V таким образом, что её расстояние до противоположной грани симплекса увеличилось. Получившийся таким путём симплекс $S' \subset V$ удовлетворял бы неравенству $\mathrm{vol}(S') > \mathrm{vol}(S)$. Последнее невозможно в силу того, что S имеет максимальный объём в V. Итак, $V \subset -nS$. Обозначим $T := -nS$, тогда $S = -(1/n)T$. Имеют место включения $-(1/n)T \subset V \subset T$. Для завершения доказательства остаётся применить к симплексу T следствие 1.6.9. $\square$

Следствие 1.6.11. *Пусть S — невырожденный симплекс, V_1, V_2 — параллелепипеды в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что V_2 есть результат гомотетии V_1 с коэффициентом $\sigma > 1$. Если $V_1 \subset S \subset V_2$, то $\sigma \geq n$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $V_1 = Q_n$, на котором мы и остановимся. В этой ситуации V_2 представляет собой транслят σQ_n. Из включения $S \subset V_2$ следует, что для любого $i = 1, \ldots, n$ верно $d_i(S) \leq \sigma$. Включение $Q_n \subset S$ даёт $\sum 1/d_i(S) \leq 1$. Поэтому

$$\frac{n}{\sigma} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq 1.$$

Таким образом, $\sigma \geq n$. Следствие доказано. $\square$

Следствие 1.6.12. *Пусть $V \subset S$ есть параллелепипед максимального возможного объёма в симплексе S. Тогда справедливо заключение следствия* 1.6.10.

Доказательство. Как доказано в [58], некоторый транслят параллелепипеда nV содержит S. Обозначим этот транслят через U. Так как $-U = U$, то U содержит транслят $-S$. Значит, V содержит некоторый транслят $-(1/n)S$. Так как $V \subset S$, то последний транслят содержится в S и, следовательно, представляет собой $-(1/n)S$. Таким образом, $-(1/n)S \subset V \subset S$. Теперь достаточно применить следствие 1.6.10. $\square$

Ещё одно геометрическое следствие равенства (5.1) рассматривается в следующем пункте.

§ 1.7. О гипотезе Лассака для выпуклого тела

Настоящий параграф написан по материалам статьи автора [30].

1.7.1. Гипотеза Лассака и близкие результаты. Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Для $i = 1, \ldots, n$ обозначим через $w_i(C)$ *i-ю ширину* C, т. е. ширину C в направлении i-й координатной оси. Величина $w_i(C)$ равна расстоянию между двумя опорными гиперплоскостями к C, нормали к которым направлены из 0 в e_i. Очевидно, что $w_i(C)$ и i-й осевой диаметр $d_i(C)$ связаны неравенством $w_i(C) \geq d_i(C)$.

В 1993 г. Лассак [56] сформулировал следующую интересную гипотезу (мы приводим её в эквивалентном виде).

(H1) *Пусть в выпуклое тело C можно вписать транслят Q_n. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} \geq 1. \tag{7.1}$$

Если $n = 1$, то C — отрезок единичной длины и (7.1) является равенством. В двумерной ситуации (7.1) доказано в [56]. Некоторые вычисления с применением производной названы в том доказательстве простыми, но скучными (easy but tedious), и опущены. К настоящему времени установлен ряд близких к (H1) утверждений, но не эквивалентных (H1). Как отмечалось в п. 1.5.2, Скотт (см. [63]) доказал, что если в C можно вписать транслят Q_n, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{7.2}$$

Так как $w_i(C) \geq d_i(C)$, то это неравенство слабее, чем (7.1). Автор установил его справедливость в более общей ситуации, когда C содержит транслят Q_n и не содержит транслята σQ_n при $\sigma > 1$ (см. [29; следствие 1] и следствие 1.5.2 настоящей главы). Нетрудно также показать, что аналогичное утверждение для неравенства (7.1) является неверным. В предположениях (H1) в [57] получено соотношение

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} + \frac{n-2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{7.3}$$

Очевидно, что (7.3) сильнее, чем (7.2), но слабее, чем (7.1). Мы воспользуемся оценкой (7.3) при доказательстве теоремы 1.7.2.

Обсуждаемые соотношения относятся к задачам о приближении выпуклых тел вписанными параллелепипедами. Некоторые известные факты в этой тематике (включая неравенство (7.3) для трёхмерного случая) приведены в обзоре Бронштейна [5; п. 5.2].

1.7.2. Случай $n = 2$. Приведём здесь иное, нежели в [56], доказательство двумерного варианта (7.1). Для некоторых плоских C прямым способом доказывается более сильное неравенство. Для других $C \subset \mathbb{R}^2$ соотношение (7.1) получается с помощью следствия 1.5.2.

Ясно, что в формулировке (H1) слово *транслят* можно опустить, что приводит к эквивалентному утверждению. Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^2$, в которое вписан квадрат Q_2. Положим $w_i := w_i(C)$. Существуют такие точки $a, b, g, h \in C$, что $b_1 - h_1 = w_1$, $g_2 - a_2 = w_2$ и, кроме того, $a_1, b_2, g_1, h_2 \in [0, 1]$. Обозначим через R прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям, имеют длины w_1 и w_2 и содержат a, b, g, h. Пусть u, v, s, t — точки, расположенные симметрично поочерёдно g, h, a, b на противоположных сторонах R. Это означает, что $u_1 = g_1$, $v_2 = h_2$, $s_1 = a_1$, $t_2 = b_2$ и $v_1 - h_1 = b_1 - t_1 = w_1$, $s_2 - a_2 = g_2 - u_2 = w_1$. Точки $a, \ldots, t$ будем называть *отмеченными*. Некоторые из них могут совпадать. Положим $\Delta := |(a_1 - u_1)(b_2 - v_2)|$. Если $\Delta = 0$, то $w_1 = d_1(C)$ или $w_2 = d_2(C)$.

Теорема 1.7.1. *Справедливо неравенство*

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \geq 1. \tag{7.4}$$

Если при обходе границы R отмеченные точки встречаются в порядке a, v, b, s, g, t, h, u или в порядке a, u, b, v, g, s, h, t, то

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \geq 1 + \frac{\Delta}{w_1 w_2}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Обозначим через Z выпуклую оболочку Q_2 и точек a, b, g, h. Так как $Q_2 \subset Z \subset C$ и Q_2 вписан в C, то Q_2 вписан в Z. Проведём через a, b, g, h и вершины квадрата прямые, параллельные координатным осям. Эти прямые делят R на ≤ 25 прямоугольников, 9 из которых разбивают Q_2. Площадь центрального прямоугольника S из последних девяти равна Δ. Заметим, что сумма площадей прямоугольников

D_1, D_2, D_3, D_4, расположенных в углах R, равна $(w_1-1)(w_2-1)$. В этом пункте $|Y|$ обозначает площадь Y.

Пусть при обходе контура R отмеченные точки следуют в порядке $a,\ v, b,\ s, g,\ t, h, u$ или в порядке a, u, b, v, g, s, h, t. Из выпуклости Z вытекает, что площадь каждого D_i не превосходит суммы площадей двух смежных прямоугольников, принадлежащих Q_2 и примыкающих к границе этого квадрата. Взятые вместе с S, эти четыре пары внешних для Q_2 прямоугольников покрывают Q_2 (без внутренних пересечений). Сравнивая площади, получаем

$$(w_1-1)(w_2-1) = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq$$

$$\leq 1 - |S| = 1 - \Delta,$$

откуда следует (7.5) и тем более (7.4).

Рассмотрим другие возможные варианты следования отмеченных точек на границе R, а именно a, u, v, b, g, s, t, h или a, b, v, s, g, h, t, u. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят в указанных случаях к соотношениям

$$(w_1-1)(w_2-1) = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq$$

$$\leq 1 + |S| = 1 + \Delta.$$

Этот подход даёт лишь

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} \geq 1 - \frac{\Delta}{w_1 w_2} \tag{7.6}$$

— неравенство, более слабое, чем (7.4). Тем не менее, и в рассматриваемой ситуации (7.4) имеет место. Докажем это. Пусть x и y — вершины Q_2, расположенные на границе Z между a, h и b, g соответственно; l_1, l_2 — граничные отрезки Z, примыкающие к x; l_3, l_4 — граничные отрезки Z, примыкающие к y. Считаем, что l_1 и l_3 направлены от x и y в одну и ту же полуплоскость относительно прямой (xy). Обозначим через p и q вершины R, расположенные между точками u, v и s, t соответственно. Положим $F := \operatorname{conv}(p, Z)$, $G := \operatorname{conv}(q, Z)$. Каждый из внутренних углов выпуклого многоугольника Z при вершинах x и y не превосходит π. Это означает, что хотя бы одно из множеств F и G не содержит транслята σQ_2 при $\sigma > 1$. Допустим, этим свойством обладает F. Так как $Q_2 \subset F$, то к выпуклому телу $F \subset \mathbb{R}^2$ применимо следствие 1.5.2. Из него вытекает, что

$$\frac{1}{d_1(F)} + \frac{1}{d_2(F)} \geq 1.$$

Для получения (4) осталось учесть равенства $d_i(F) = w_i(F) = w_i$.

В случае, когда какие-то из отмеченных точек совпадают, теорема доказывается по той же схеме с очевидными модификациями. $\square$

Неравенства $|D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4| \leq 1 \pm |S|$, приводящие к оценкам (7.5)–(7.6), можно наглядно проиллюстрировать с помощью рисунков. Этот путь не лишён занимательности.

Заметим, что гарантировать для всех C выполнение (7.5) нельзя. Точнее, если отмеченные точки следуют при прохождении границы R в порядке a, u, v, b, g, s, t, h или a, b, v, s, g, h, t, u (см. вторую часть доказательства теоремы 1.7.1), то (7.5) может не выполняться. Приведём пример. Пусть C — треугольник с вершинами $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$. Очевидно, квадрат Q_2 вписан в C. Так как $w_1 = w_2 = 2$, то (7.4) является равенством. В данном случае $R = [0,2]^2$. Возьмём $a = (1,0)$, $b = (2,0)$, $g = (0,2)$, $h = (0,1)$. Тогда $u = (0,0)$, $v = (2,1)$, $s = (1,2)$, $t = u = (0,0)$, $\Delta = |(a_1 - u_1)(b_2 - v_2)| = 1$. Значит, правая часть (7.5) равна $5/4$, что превышает левую часть (которая равна 1).

1.7.3. Случай, когда C — симплекс. В этом пункте $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ситуацию, когда выпуклое тело C представляет собой невырожденный n-мерный симплекс. Мы будем опираться на результат части (b) следствия 1.6.2, который состоит в следующем. Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq 1 \tag{7.7}$$

эквивалентно тому, что S содержит транслят Q_n. При этом равенство в (7.7) имеет место тогда и только тогда, когда S содержит транслят Q_n и каждая $(n-1)$-мерная грань S содержит вершину этого транслята. С помощью этого результата, а также неравенства (7.3) нетрудно установить справедливость (H1) в случае $C = S$. Более того, в этой ситуации неравенство в (7.1) становится равенством. Таким образом, для случая $C = S$ гипотеза Лассака верна в следующем усиленном варианте.

Теорема 1.7.2. *Пусть в n-мерный симплекс S можно вписать транслят Q_n. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(S)} = 1, \tag{7.8}$$

$$w_1(S) = d_1(S), \quad \ldots, \quad w_n(S) = d_n(S). \tag{7.9}$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\sum_{i=1}^n 1/w_i(S) \geq 1$. Для $n = 1$ это следует из равенства $w_1(S) = 1$. Для $n = 2$ достаточно воспользоваться (7.4). Пусть $n \geq 3$. Применим к выпуклому телу S неравенство (7.3):

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(S)} + \frac{n-2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} \geq 1. \tag{7.10}$$

Так как в S можно вписать транслят Q_n, то к S также применима вторая часть следствия 1.6.2. Тем самым, $\sum_{i=1}^n 1/d_i(S) = 1$. С учетом этого (7.10) даёт

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(S)} + \frac{n-2}{n} \geq 1,$$

откуда и следует $\sum_{i=1}^n 1/w_i(S) \geq 1$. Теперь используем соотношения $w_i(S) \geq d_i(S)$, благодаря которым $1/d_i(S) \geq 1/w_i(S)$. Имеем:

$$1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i(S)} \geq 1.$$

Ясно, что в этой цепочке оба неравенства обращаются в равенства. Первое из этих равенств даёт (7.9), а второе совпадает с (7.8). □

Из соображений подобия немедленно получаем следующий результат.

Следствие 1.7.1. *Пусть в симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят σQ_n при некотором $\sigma > 0$. Тогда для любого $i = 1, \ldots, n$ верно $w_i(S) = d_i(S)$.*

Для $n = 1$ и $n = 2$ верно и утверждение, обратное к следствию 1.7.1. Минимальное n, для которого это обратное утверждение не верно, равно 3. Действительно, пусть S — правильный тетраэдр с длинами рёбер $\sqrt{2}$, вписанный в Q_3. Таковым является, например, тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$. Каждый из трёх отрезков, соединяющих центры скрещивающихся рёбер S, параллелен одной из координатных осей и имеет длину 1. Поэтому для любого $i = 1, 2, 3$ верно $d_i(S) = w_i(S) = 1$. Максимальное σ, при котором S содержит транслят σQ_3, равно $1/3$. При этом куб $(1/3)Q_3$ располагается в S таким образом, что каждая грань S содержит ровно одну из его вершин. Четыре вершины куба $(1/3)Q_3$ не принадлежат границе S. Это означает, что в S нельзя вписать транслят σQ_3 ни при каком $\sigma > 0$.

Заметим также, что если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n и для него выполнены равенства (7.8)–(7.9), то C не обязательно является симплексом. Пример: $n = 2$, C — квадрат с вершинами $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$.

1.7.4. Замечания. Приведём очевидное неулучшаемое неравенство, противоположное (7.1). Если в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n, то $w_i(C) \geq 1$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i(C)} \leq n. \tag{7.11}$$

Равенство в (7.11) эквивалентно условию $w_1(C) = \ldots = w_n(C) = 1$, которое выполняется тогда и только тогда, когда C есть транслят Q_n.

В заключение сформулируем ещё одну гипотезу.

(H2) *Пусть в выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ можно вписать транслят Q_n. Тогда существует выпуклое тело C', содержащее транслят Q_n, не содержащее транслята σQ_n при $\sigma > 1$, и такое, что $d_i(C') = w_i(C)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Покажем, что (H2) эквивалентна (H1). Действительно, в предположении справедливости (H2) утверждение (H1) сразу получается с помощью следствия 1.5.2. Именно таким способом выше была доказана вторая часть теоремы 1.7.1. Допустим теперь, что справедлива гипотеза (H1). Зафиксируем выпуклое тело C, удовлетворяющее условию (H1). Для $w_i = w_i(C)$ рассмотрим набор точек

$$z^{(1)} = (w_1, 0, \ldots, 0), \quad z^{(2)} = (0, w_2, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad z^{(n)} = (0, 0, \ldots, w_n).$$

Положим $C' := \operatorname{conv}\left(z^{(1)}, \ldots, z^{(n)}, Q_n\right)$. Нетрудно показать, что выпуклое тело C' удовлетворяет условию (H2). Поэтому из (H1) следует (H2).

К сожалению, ответ на вопрос о справедливости (H2) при $n > 2$ автору не известен.

§ 1.8. Величина $\beta(S)$

В дополнение к $\alpha(S)$ введём в рассмотрение ещё одну числовую величину, связывающую n-мерный невырожденный симплекс S с основным кубом Q_n. Именно, обозначим через $\beta(S)$ максимальное $\sigma > 0$, для которого транслят σS принадлежит Q_n. В этом пункте мы обратимся к вычислению $\beta(S)$. Как и ранее, $x^{(j)}$ обозначают вершины S. Утверждения этого параграфа доказаны в [27].

Лемма 1.8.1. *Некоторый транслят S принадлежит Q_n тогда и только тогда, когда для $i = 1, \ldots, n$ и $j, k = 1, \ldots, n+1$ верно*

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(j)}\right| \leq 1. \tag{8.1}$$

Доказательство. Пусть выполнено (8.1). Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$D := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \min_{1 \le j \le n+1} x_i^{(j)} \le x_i \le \max_{1 \le j \le n+1} x_i^{(j)}, \ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Ясно, что $S \subset D$. Так как длины рёбер D не превышают 1, то транслят D принадлежит Q_n. Значит, некоторый транслят S также принадлежит Q_n. Необходимость (8.1) для принадлежности транслята S кубу Q_n очевидна. Лемма доказана. □

Пусть $w_i(S)$ есть i-я ширина S, т. е. ширина S в направлении i-й координатной оси (см. § 1.7). Очевидно,

$$w_i(S) = \max_{1 \le j,k \le n+1} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right|,$$

Обозначим через $w(S)$ максимальную из ширин S :

$$w(S) := \max_{1 \le i \le n} w_i(S).$$

Условие леммы 1.8.1 эквивалентно соотношению $w(S) \le 1$.

Теорема 1.8.1. *Справедливо равенство*

$$\beta(S) = \frac{1}{w(S)}. \tag{8.2}$$

Доказательство. Пусть $\sigma > 0$ таково, что транслят σS принадлежит Q_n. Тогда Q_n содержит некоторый транслят симплекса с вершинами $\sigma x^{(j)}$. Применив к последнему симплексу лемму 1.8.1, получим

$$\max \sigma \cdot \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right| \le 1. \tag{8.3}$$

Максимум в (8.3) взят по $i = 1, \ldots, n$; $j, k = 1, \ldots, n+1$. Поэтому

$$\sigma \le \frac{1}{\max \left| x_i^{(k)} - x_i^{(j)} \right|} = \frac{1}{w(S)}.$$

Значит,

$$\beta(S) = \max\{\sigma > 0 : \text{транслят } \ \sigma S \subset Q_n\} \le \frac{1}{w(S)}.$$

Предположим, что для некоторого S^* выполняется строгое неравенство $\beta(S^*) < 1/w(S^*)$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$, для которого $(\beta(S^*)+\varepsilon)w(S^*) \leq 1$, то есть

$$\max_{i,j,k}(\beta(S^*)+\varepsilon)\left|x_i^{(k)} - x_i^{(j)}\right| \leq 1.$$

По лемме 1.8.1 некоторый транслят симплекса $(\beta(S^*)+\varepsilon)S^*$ принадлежит Q_n. Это включение противоречит определению $\beta(S)$. Равенство (8.2) установлено. □

Так как транслят $\beta(S)S$ принадлежит Q_n, то $\beta(S)d_i(S) = d_i(\beta(S)S) \leq 1$. Следовательно, $\beta(S) \leq 1/d_i(S)$. Поэтому установленное ранее равенство

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}$$

(см. теорему 1.4.1) приводит к оценке

$$\beta(S) \leq \frac{\alpha(S)}{n}. \tag{8.4}$$

В случае, когда $S \subset Q_n$ и все $d_i(S) = 1$, имеем $w_i(S) = w(S) = \beta(S) = 1$; в то же время $\alpha(S) = n$. Для такого S (8.4) обращается в равенство. Как отмечалось выше (см. следствие 1.6.10), свойством $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$ обладает симплекс максимального объёма в Q_n.

Если $n = 1$, то S есть отрезок $[x^{(1)}, x^{(2)}]$, $x^{(1)} < x^{(2)}$. Нетрудно видеть, что $\alpha(S) = \beta(S) = 1/\left(x^{(2)} - x^{(1)}\right)$, поэтому (8.4) становится равенством.

Пусть $n \geq 2$. Покажем, что *неравенство* $\beta(S) \geq \gamma_n\alpha(S)$ *не выполняется одновременно для всех* n*-мерных симплексов ни с какой константой* $\gamma_n > 0$. Для $\varepsilon \in (0,1)$ рассмотрим симплекс $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \varepsilon e_j, 1 \leq j \leq n$; $x^{(n+1)} = e$. Вычислив $\mathbf{A}^{-1}$, получим

$$\lambda_j(x) = \frac{n-\varepsilon-1}{\varepsilon(n-\varepsilon)}x_j + \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-n)}\sum_{i\neq j} x_i + \frac{1}{n-\varepsilon}, \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$\lambda_{n+1}(x) = \frac{1}{n-\varepsilon}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{\varepsilon}{n-\varepsilon}.$$

С учётом (4.9) имеем

$$\alpha(S_\varepsilon) = \frac{n^2-n}{\varepsilon(n-\varepsilon)}.$$

Очевидно, $\beta(S_\varepsilon) = 1$, поэтому неравенство $\beta(S_\varepsilon) \geq \gamma\alpha(S_\varepsilon)$ эквивалентно

$$\gamma \leq \frac{\varepsilon(n-\varepsilon)}{n^2 - n}. \tag{8.5}$$

Остаётся заметить, что при $\varepsilon \to 0$ правая часть (8.5) стремится к 0.

ГЛАВА 2

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА n-МЕРНОМ КУБЕ

§ 2.1. Задача линейной интерполяции на Q_n

Пусть точки $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right) \in Q_n,\ j = 1, \ldots, n+1$, суть вершины невырожденного симплекса S. Мы будем говорить, что набор точек $x^{(j)}$ является *допустимым набором узлов для интерполяции с помощью* $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Это условие эквивалентно любому из неравенств $\mathrm{vol}(S) \neq 0$ или $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S, коэффициенты которых составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$ (см. § 1.1). Так как $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, для любой $f \in C(Q_n)$ существует единственный многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющий условиям $p\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Полагая $Pf := p$, введём в рассмотрение оператор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, который в дальнейшем будем называть интерполяционным проектором. Итак, *интерполяционный проектор* $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ *по системе узлов* $x^{(j)}$ определяется с помощью равенств

$$Pf\left(x^{(j)}\right) = f_j := f\left(x^{(j)}\right), \quad j = 1, \ldots, n+1. \tag{1.1}$$

Это равенство показывает, что оператор P является линейным. В силу (1.1) и (1.1.2) справедлив следующий аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x). \tag{1.2}$$

Обозначим через $\|P\|$ норму P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Эта величина зависит от узлов $x^{(j)}$. Пусть θ_n есть минимальная величина нормы P при условии, что все узлы интерполяции принадлежат кубу Q_n :

$$\theta_n := \min_{x^{(j)} \in Q_n} \|P\|.$$

Интерполяционный проектор P^*, для которого $\|P^*\| = \theta_n$, будем называть *минимальным*. В центре наших интересов будут находиться вопросы об оценках и точных значениях θ_n, а также вопросы об описании минимальных и асимптотически минимальных интерполяционных проекторов.

Напомним, что $\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Введём в рассмотрение геометрическую характеристику куба Q_n, определяемую равенством

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S - n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \operatorname{vol}(S) \neq 0\}.$$

В этой главе мы докажем, что для интерполяционного проектора P и симплекса S с вершинами в его узлах справедливо неравенство

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\| - 1\right) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что для любого n

$$\frac{n+1}{2n}\left(\theta_n - 1\right) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2}\left(\theta_n - 1\right) + 1. \tag{1.4}$$

В § 2.2 применяется подход, при котором $\|P\|$ и $\xi(S)$ выражаются через барицентрические координаты. Весьма интересно заметить, что равенство в (1.4) имеет место лишь для конечной совокупности n. Это следует из асимптотических соотношений для ξ_n и θ_n, устанавливаемых в главе 3.

Часть результатов и доказательств настоящей главы остаются справедливыми после замены куба Q_n на его фиксированное подмножество и внесения некоторых естественных изменений. Это даёт возможность применить получившиеся теоремы при рассмотрении интерполяции с помощью более широких, чем $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, пространств многочленов. Соответствующий подход реализован в главе 6.

§ 2.2. Соотношение между $\|P\|$ и $\xi(S)$

2.2.1. $\|P\|$, $\xi(S)$ и барицентрические координаты. Мы будем использовать следующие формулы, доказанные автором в [24].

Лемма 2.2.1. *Для любого интерполяционного проектора P : $C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и симплекса S с вершинами в его узлах имеют место равенства*

$$\|P\| = \max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| =$$

$$= \max\Big\{\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)\Big\}, \tag{2.1}$$

$$\xi(S) = (n+1)\max_{x\in\mathrm{ver}(Q_n)}\max_{1\le j\le n+1}(-\lambda_j(x)) + 1 =$$

$$= (n+1)\max\Big\{\max_{1\le j\le n+1}(-\beta_j) : \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1}\beta_j x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)\Big\} + 1. \tag{2.2}$$

Доказательство. Вторые равенства в (2.1) и (2.2) вытекают из первых и того, что $\lambda_j(x)$ суть барицентрические координаты x.

Из (1.1) следует, что

$$\|P\| = \sup_{\|f\|_{C(Q_n)}=1}\|Pf\|_{C(Q_n)} = \sup_{-1\le f_j\le 1}\max_{x\in Q_n}\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x).$$

Выражение $\sum f_j\lambda_j(x)$ является линейным по x и $f_1, \ldots, f_{n+1}$, поэтому

$$\|P\| = \max_{f_j=\pm 1}\max_{x\in\mathrm{ver}(Q_n)}\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x) =$$

$$= \max_{x\in\mathrm{ver}(Q_n)}\max_{f_j=\pm 1}\sum_{j=1}^{n+1} f_j\lambda_j(x) = \max_{x\in\mathrm{ver}(Q_n)}\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|,$$

и первое равенство из (2.1) доказано. Остаётся заметить, что первое равенство из (2.2) было доказано в § 1.3 (см. там (3.6)).

Лемма доказана. □

2.2.3. Соотношение между $\|P\|$ и $\xi(S)$. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2.2.2. *Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\sum_j \beta_j = 1$ и среди чисел β_j имеется хотя бы одно неположительное. Обозначим $\beta := \max_{1\le j\le n+1}(-\beta_j)$. Тогда*

$$\frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| - 1\right) \le \beta \le \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| - 1\right). \tag{2.3}$$

Если среди чисел β_j имеется ровно μ отрицательных ($1 \le \mu \le n$), то

$$\frac{1}{2\mu}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| - 1\right) \le \beta. \tag{2.4}$$

Доказательство. Так как $-2\beta_j \le |\beta_j| - \beta_j$, то

$$\beta = \max_{1\le j\le n+1}(-\beta_j) \le \frac{1}{2}\max_{1\le j\le n+1}(|\beta_j| - \beta_j) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}(|\beta_j| - \beta_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| - 1\right),$$

и правое неравенство из (2.3) получено. Из условия $\sum \beta_j = 1$ следует, что хотя бы одно из чисел β_j является положительным; следовательно, количество неположительных чисел $\le n$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| - 1 = \sum_{j=1}^{n+1}(|\beta_j| - \beta_j) = \sum_{j:\,\beta_j\le 0}(|\beta_j| - \beta_j) \le$$

$$\le 2n\max_{j:\beta_j\le 0}(-\beta_j) \le 2n\max_{1\le j\le n+1}(-\beta_j) = 2n\beta,$$

что даёт левое неравенство из (2.3). Во втором равенстве этой цепочки мы использовали то, что хотя бы одно из чисел β_j неположительно. (В случае, когда все $\beta_j > 0$, нижние оценки леммы не верны.)

Допустим теперь, что среди чисел β_j имеется ровно μ отрицательных, $1 \le \mu \le n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j| - 1 = \sum_{j=1}^{n+1}(|\beta_j| - \beta_j) = \sum_{j:\,\beta_j< 0}(|\beta_j| - \beta_j) \le$$

$$\le 2\mu\max_{j:\,\beta_j< 0}(-\beta_j) \le 2\mu\max_{1\le j\le n+1}(-\beta_j) = 2\mu\beta,$$

и справедливо (2.4). $\square$

Пусть $1 \le \mu \le n$. Будем говорить, что точка $x \in \operatorname{ver}(Q_n)$ является *μ-вершиной Q_n относительно симплекса $S \subset Q_n$*, если для интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство

$$\|P\| = \sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)|$$

и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных. Следующее утверждение доказано в [24; теорема 3.1].

Теорема 2.2.1. *Для любого проектора P и соответствующего ему симплекса S справедливы соотношения*

$$\frac{n+1}{2n}\left(\|P\|-1\right)+1 \le \xi(S) \le \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1. \tag{2.5}$$

Равенство в правой части (2.5) *имеет место тогда и только тогда, когда существует* 1*-вершина Q_n относительно S. Если для некоторого μ, $1 \le \mu \le n$, имеется μ-вершина Q_n относительно S, то*

$$\frac{n+1}{2\mu}\left(\|P\|-1\right)+1 \le \xi(S). \tag{2.6}$$

Доказательство. Из (2.3) следует, что для любых чисел β_j, удовлетворяющих условию леммы 2.2.2, справедливо неравенство

$$\frac{n+1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j|-1\right)+1 \le (n+1)\beta+1 \le$$

$$\le \frac{n+1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\beta_j|-1\right)+1. \tag{2.7}$$

Пусть $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$. Так как $x \notin \mathrm{int}(S)$, то не все $\lambda_j(x)$ являются положительными. Кроме того, $\sum \lambda_j(x) = 1$. Таким образом, числа $\beta_j := \lambda_j(x)$ удовлетворяют условию леммы 2.2.2. Применим к ним (2.7), а затем возьмём максимум по $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$. Для получения (2.5) теперь достаточно привлечь (2.1) и (2.2).

Если $v \in \mathrm{ver}(Q_n)$ — μ-вершина относительно S, то числа $\beta_j = \lambda_j(v)$ удовлетворяют (2.4). Значит,

$$\frac{n+1}{2\mu}\left(\|P\|-1\right)+1 = \frac{n+1}{2\mu}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(v)|-1\right)+1 \le$$

$$\le (n+1)\max_{1\le j\le n+1}(-\lambda_j(v))+1 \le$$

$$\le (n+1)\max_{1\le j\le n+1,\, x\in \mathrm{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x))+1 = \xi(S).$$

Мы применили (2.2). Таким образом, в случае существования μ-вершины выполняется (2.6).

Осталось показать, что выполнение равенства в правой части (2.5) эквивалентно наличию 1-вершины. Пусть существует 1-вершина Q_n относительно S. Тогда (2.6) выполняется с $\mu = 1$, то есть

$$\xi(S) \geq \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1.$$

С учётом (2.5) это даёт требуемое равенство.

Пусть теперь в правой части (2.5) выполняется равенство. Предположим, что 1-вершины Q_n не существует. Обозначим через U совокупность тех $x \in \operatorname{ver}(Q_n)$, для которых $\sum |\lambda_j(x)| = \|P\|$. Тогда для любой $x \in U$ среди $\lambda_j(x)$ имеется не менее двух отрицательных чисел. Значит, для $x \in U$

$$\max_{1 \leq j \leq n+1}(-\lambda_j(x)) < \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}(|\lambda_j(x)| - \lambda_j(x))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)| - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\|P\| - 1\right).$$

Если же $x \in \operatorname{ver}(Q) \setminus U$, то $\sum |\lambda_j(x)| < \|P\|$, поэтому

$$\max_{1 \leq j \leq n+1}(-\lambda_j(x)) \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}(|\lambda_j(x)| - \lambda_j(x))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j(x)| - 1\right) < \frac{1}{2}\left(\|P\| - 1\right).$$

Таким образом, неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n+1}(-\lambda_j(x)) < \frac{1}{2}\left(\|P\| - 1\right)$$

справедливо для любой точки $x \in \operatorname{ver}(Q_n)$. Взяв в нём максимум по $x \in \operatorname{ver}(Q_n)$ и применив (2.2), получим

$$\xi(S) < \frac{n+1}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1.$$

Это противоречит нашему предположению. Теорема доказана $\square$

Следствие 2.2.1. *Пусть имеется 1-вершина Q_n относительно S. Тогда для соответствующего проектора*

$$\|P\| = 2 \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \operatorname{ver}(Q_n)}(-\lambda_j(x)) + 1, \tag{2.8}$$

Доказательство. Из условия следует, что справа в (2.5) имеет место равенство. Согласно (1.3.6),

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \le j \le n+1} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1.$$

Эти два равенства и дают (2.8). $\square$

2.2.3. Соотношение между θ_n и ξ_n и другие следствия. Двусторонняя оценка (2.5) приводит к следующему важному для нас результату (см. [24; теорема 3.2]).

Теорема 2.2.2. *Для любого n выполняются соотношения*

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 \le \xi_n \le \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1. \tag{2.9}$$

Доказательство. Из левого неравенства (2.5) следует, что для любого симплекса $S \subset Q_n$

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 \le \xi(S).$$

Взятие минимума по S даёт левое соотношение в (2.9). Правая оценка (2.5) влечёт для любого проектора $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\xi_n \le \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1.$$

После взятия минимума по P получается нужная верхняя оценка для ξ_n. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.2.2. *Для любого n выполняются неравенства*

$$\xi_n \ge n, \quad \theta_n \ge 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Левое неравенство сразу получается из следствия 1.6.3, согласно которому для любого невырожденного симплекса $S \subset Q_n$ верно $\xi(S) \ge n$. Для получения правого неравенства в (2.10) достаточно применить левое неравенство и (2.9). $\square$

С помощью теоремы 2.2.1 и результатов главы 1 получается следующая оценка нормы проектора P через осевые диаметры соответствующего симплекса S. Это утверждение приведено в [24; следствие 4.11].

Следствие 2.2.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — *интерполяционный проектор,* S — *симплекс с вершинами в его узлах. Выполняются неравенства*

$$\frac{2}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}-1\right)+1 \le \|P\|, \tag{2.11}$$

$$\frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{d(S)}-1\right)+1 \le \|P\|. \tag{2.12}$$

Равенство в (2.11) *имеет место тогда и только тогда, когда существует* 1*-вершина* Q_n *относительно* S *и справедливо соотношение* (1.3.7)*, т. е.*

$$\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\left(-\lambda_1(x)\right) = \ldots = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)}\left(-\lambda_{n+1}(x)\right).$$

Последнее условие эквивалентно тому, что симплекс $\xi(S)S$ *описан вокруг* Q_n*.*

Доказательство. Правое неравенство (2.5), соединённое с неравенством (1.6.1), даёт (2.11). Оценка (2.12) следует из (2.11) и определения $d(S)$. Теперь рассмотрим вопрос о выполнении в (2.11) равенства. Из предыдущего следует, что оно имеет место тогда и только тогда, когда одновременно

$$\xi(S) = \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1, \quad \xi(S) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)}.$$

Необходимое и достаточное условие справедливости левого из этих равенств — существование 1-вершины Q_n относительно S, см. теорему 2.2.1. Необходимое и достаточное условие правого равенства — выполнение (1.3.7). Последнее равносильно тому, что симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n (см. следствие 1.6.1). □

Приведём ещё следующее утверждение.

Теорема 2.2.3. *Если выполняется равенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i(S)} = \frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1, \tag{2.13}$$

то при любом j *точка, на которой достигается* $\max\{(-\lambda_j(x)) : x \in \mathrm{ver}(Q_n)\}$*, является* 1*-вершиной* Q_n *относительно* S*.*

Доказательство. Из (2.5) и (1.6.1) следует, что в силу выполнения равенства (2.13) обе его части равняются $\xi(S)$. Пусть y — любая 1-вершина Q_n относительно S. Тогда существует k, для которого

$$\|P\| = -\lambda_k(y) + \sum_{j\neq k} \lambda_j(y) =$$

$$= -2\lambda_k(y) + \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(y) = -2\lambda_k(y) + 1.$$

Отсюда

$$\frac{n+1}{2}(\|P\|-1) + 1 = -(n+1)\lambda_k(y) + 1.$$

Левая часть последнего равенства одновременно равняется $\xi(S)$. В силу (1.3.6)

$$-\lambda_k(y) = \max_{1\leq j\leq n+1, x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)).$$

Пусть $y^{(j)}$ — любая точка, на которой достигается $\max\{(-\lambda_j(x)) : x \in \mathrm{ver}(Q_n)\}$. Из (1.3.6) следует, что

$$-\lambda_k(y) = -\lambda_1\left(y^{(1)}\right) = \ldots = -\lambda_{n+1}\left(y^{(n+1)}\right).$$

Имеем:

$$\|P\| = -2\lambda_k(y) + 1 = -2\lambda_1\left(y^{(1)}\right) + 1 =$$

$$= -\lambda_1\left(y^{(1)}\right) + \sum_{j\neq 1} \lambda_j\left(y^{(1)}\right) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \left|\lambda_j\left(y^{(1)}\right)\right| \leq \|P\|.$$

Поэтому $-\lambda_1\left(y^{(1)}\right) = \left|-\lambda_1\left(y^{(1)}\right)\right| > 0$; $\lambda_2\left(y^{(1)}\right) \geq 0, \ldots, \lambda_2\left(y^{(1)}\right) \geq 0$. Таким образом, $y^{(1)}$ есть 1-вершина Q_n относительно S. Аналогично 1-вершинами Q_n относительно S являются точки $y^{(2)}, \ldots, y^{(n+1)}$.

Теорема доказана. □

§ 2.3. Редукция в задаче о минимальном проекторе

2.3.1. Вспомогательные предложения. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что минимальный проектор при линейной интерполяции на Q_n, если он существует (см. п. 2.3.3), может быть построен по системе узлов, принадлежащих границе Q_n. Для этого достаточно убедиться, что для любого проектора P найдётся такой проектор $\hat{P}$, узлы которого принадлежат границе куба Q_n и который удовлетворяет неравенству $\|\hat{P}\| \leq \|P\|$. Полную редукцию мы проведём для $n=2$ и $n=3$, но сначала отметим полезные геометрические свойства интерполяционных проекторов $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, справедливые для каждого $n \in \mathbb{N}$. Мы следуем схеме работы [15].

Лемма 2.3.1. *Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ и $y^{(1)}, \ldots, y^{(n+1)}$ — два набора узлов из Q_n, допустимых для интерполяции с помощью $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$; P_1, P_2 — интерполяционные проекторы по этим наборам узлов. Пусть S_1 — симплекс с вершинами $x^{(j)}$, S_2 — симплекс с вершинами $y^{(j)}$. Предположим, что справедливо включение $S_2 \subset S_1$. Тогда $\|P_1\| \leq \|P_2\|$.*

Доказательство. Пусть многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет неравенствам $\left|p\big(x^{(j)}\big)\right| \leq 1$. В силу свойств линейной функции из включения $S_2 \subset S_1$ следует, что $\left|p\big(y^{(j)}\big)\right| \leq 1$. Поэтому

$$\|P_1\| = \sup_{p:|p(x^{(j)})|\leq 1} \|p\|_{C(Q_n)} \leq \sup_{p:|p(y^{(j)})|\leq 1} \|p\|_{C(Q_n)} = \|P_2\|.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3.2. *Пусть n-мерный прямоугольный параллелепипед $D \subset Q_n$ содержит узлы интерполяционного проектора P. Тогда*

$$\|P\|_{C(D)\to C(D)} \leq \|P\|_{C(Q_n)\to C(Q_n)}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Как отмечено в § 2.2,

$$\|P\|_{C(Q_n)\to C(Q_n)} = \max_{x\in Q_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Так как узлы интерполяции принадлежат D, то с теми же базисными многочленами λ_j справедливо и равенство

$$\|P\|_{C(D)\to C(D)} = \max_{x\in D} \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Для получения (3.1) остаётся учесть включение $D \subset Q_n$. □

Лемма 2.3.3. *Пусть прямоугольный параллелепипед D получается из Q_n с помощью сдвига и растяжения, $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор по допустимой системе узлов $x^{(j)} \in Q_n$. Тогда* *их образы $z^{(j)} \in D$ также образуют допустимую систему. Соответствующий узлам $z^{(j)}$ проектор $P' : C(D) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству*

$$\|P'\|_{C(D)\to C(D)} = \|P\|_{C(Q_n)\to C(Q_n)}. \tag{3.2}$$

Иначе говоря, $\|P\|$ не меняется при сдвиге и растяжении Q_n.

Доказательство. Допустимость набора узлов $z^{(j)}$ следует из того, что образы точек, не лежащих в одной $(n-1)$-мерной гиперплоскости, при невырожденном аффинном преобразовании также будут обладать этим свойством. Равенство (3.2) следует из инвариантности C-нормы при сдвиге и растяжении. □

2.3.2. Случаи $n = 2$ и $n = 3$. Начнём со случая $n = 2$. Будем рассматривать интерполяционные проекторы, соответствующие вершинам треугольников, принадлежащих Q_2. Для любого такого треугольника найдётся больший треугольник, вершины которого принадлежат сторонам Q_2. По лемме 2.3.1 при этом переходе норма проектора не возрастёт. Если ни одна из вершин нового треугольника не совпадает с вершиной квадрата, то от квадрата можно отрезать прямоугольную часть со сторонами, параллельными осям, не содержащую узлов интерполяции. В силу леммы 2.3.2 проектор, рассматриваемый на оставшемся, базовом прямоугольнике, будет вновь иметь не бóльшую норму. С помощью этой процедуры мы добьёмся того, что хотя бы один из узлов будет совпадать с вершиной базового прямоугольника. С помощью растяжения от прямоугольника можно перейти обратно к Q_2. В силу леммы 2.3.3 для новых узлов, принадлежащих Q_2, норма проектора останется прежней. Действуя таким образом, мы придём к следующему расположению узлов: $x^{(1)}$ находится в вершине квадрата; $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$ принадлежат сторонам, не содержащим $x^{(1)}$. Используя симметрию, добьёмся того, что

$$x^{(1)} = (0,0), \quad x^{(2)} = (1,t), \quad x^{(3)} = (s,1); \qquad 0 \le t \le s \le 1, st \ne 1.$$

Наконец, заметим, что в случае $s = 1$ наименьшая норма проектора соответствует $t = 0$ (лемма 2.3.1), а $\|P\|$ совпадает со значением этой нормы при $s = t = 0$. Поэтому можно считать, что

$$x^{(1)} = (0,0), \quad x^{(2)} = (1,t), \quad x^{(3)} = (s,1); \qquad 0 \le t \le s < 1. \tag{3.3}$$

Таким образом, минимальный интерполяционный проектор на квадрате Q_2, если он существует, соответствует узлам вида (3.3) при некоторых s и t.

Рассмотрим теперь ситуацию $n = 3$. Отрезая от куба слои, параллельные его граням, добьёмся того, что хотя бы три из четырёх узлов попадут на грани оставшегося, базового параллелепипеда. Норма проектора при этом не увеличится (лемма 2.3.2). С помощью растяжения от параллелепипеда можно перейти опять к Q_3. Норма проектора останется прежней (лемма 2.3.3).

Заметим, что в результате выполнения этой процедуры на каждой грани куба будет находиться хотя бы один из узлов. Так как число граней куба равно 6, то либо хотя бы один из узлов попадёт сразу на три грани куба (и в этом случае он совпадёт с вершиной Q_3), либо найдутся два узла, каждый из которых попадёт на две грани куба (и в этом случае каждый из этих узлов будет принадлежать ребру Q_3). Две отмеченные возможности не исключают одна другую.

Рассмотрим тетраэдр с вершинами в узлах интерполяции на данный момент. Как было сказано, хотя бы три вершины этого тетраэдра принадлежат границе куба. Найдётся новый тетраэдр, содержащий прежний, все четыре вершины которого уже будут принадлежать граням куба. Для его построения достаточно перенести четвёртую вершину по некоторой прямой в сторону границы куба. Эта прямая соединяет четвёртую вершину с центром тяжести противоположной грани тетраэдра. Норма проектора по новым узлам не увеличится в силу леммы 2.3.1.

Заметим, что указанная редукция может осуществляться и в другом порядке. Именно, можно сначала перенести каждую из вершин тетраэдра до пересечения с границей куба вдоль прямой, соединяющей эту вершину с центром тяжести противоположной грани тетраэдра, в сторону от этой грани (поочерёдно для всех вершин); затем отрезать от куба слои, параллельные его граням; наконец, перейти от параллелепипеда обратно к кубу с помощью растяжения.

Таким образом, минимальный проектор $P : C(Q_3) \to \Pi_1(\mathbb{R}^3)$, если он существует, соответствует узлам, принадлежащим граням куба Q_3. При этом на каждой грани куба располагается хотя бы один узел. Кроме того, либо найдётся узел, совпадающей с вершиной куба, либо найдутся два узла, каждый из которых принадлежит ребру куба.

Аналогичная редукция может быть проведена для любого n.

2.3.3. Существование минимального проектора. Обратимся к вопросу о существовании интерполяционного проектора P, для которого $\|P\|$ минимальна. Зафиксируем $n \in \mathbb{R}\cdot$ Рассмотрим интерполяционный проектор P^*, узлы которого имеют вид $x^{(1)} = e_1, \ldots, x^{(n)} = e_n, x^{(n+1)} = 0$. В этом случае

$$\lambda_1(x) = x_1, \quad \ldots, \quad \lambda_n(x) = x_n, \quad \lambda_{n+1}(x) = -\sum_{j=1}^{n} x_j + 1.$$

Поэтому (см. (1.1.2))

$$p(x) = P^* f(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n + f_{n+1}\Bigl(-\sum_{j=1}^{n} x_j + 1\Bigr).$$

Это даёт равенство

$$\|P^*\| = \max_{f_i=\pm1; x_j=0,1} |p(x)| = \max_{x_j=0,1}\Bigl(\sum_{j=1}^{n} x_j + |1 - \sum_{j=1}^{n} x_j|\Bigr) =$$

$$= \max_{1\le k\le n}(2k-1) = 2n-1$$

(здесь k обозначает число единиц в наборе x). Таким образом, $\theta_n \le 2n-1$.

Теперь положим $m := n(n+1)$ и рассмотрим $\|P\|$ как функцию аргумента $X := \bigl(x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}\bigr)$, определённую в допустимых точках m-мерного единичного куба Q_m. Подмножество Q_m, состоящее из тех X, для которых $\|P\| \le 2n-1$, является компактным в $\mathbb{R}^m$. Заданная на этом подмножестве непрерывная функция $\|P\|$ достигает своего минимального значения θ_n. Соответствующая точка минимума определяет набор узлов минимального проектора.

Аналогичным образом доказывается существование симплекса $S \subset Q_n$ такого, что $\xi(S) = \xi_n$.

§ 2.4. Точные значения θ_n и ξ_n для $n = 1, 2$

Приведём в этом параграфе точные значения двух первых членов последовательностей $\{\theta_n\}$ и $\{\xi_n\}$, а также дадим описание минимальных проекторов. Имеют место следующие равенства:

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1, \quad \xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1.$$

2.4.1. Случай $n = 1$. Одномерный случай совсем прост. Очевидно, $\xi_1 = 1$. Для любого проектора существует 1-вершина Q_1 относительно соответствующего симплекса (который в этой ситуации является отрезком).

В силу теоремы 2.2.1 правое неравенство в (2.5) является равенством, из которого получаем $\theta_1 = 1$. Разумеется, значение θ_1 легко найти и непосредственно. Из интерполяционной формулы Лагранжа следует, что норма проектора P по узлам $x^{(1)}, x^{(2)} \in [0,1], x^{(1)} < x^{(2)}$, равна

$$\|P\| = \frac{\max\left(x^{(1)} + x^{(2)}, 2 - x^{(1)} - x^{(2)}\right)}{x^{(2)} - x^{(1)}}.$$

Всегда $\|P\| \geq 1$, причём $\|P\| = 1$ тогда и только тогда, когда одновременно $x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 1$. Это означает, что $\theta_1 = 1$. Интересно заметить, что минимальный проектор здесь является единственным, а его норма равна 1. При $n > 1$ каждое из этих свойств не имеет места.

2.4.2. Случай $n = 2$**.** Точное значение θ_2 вычисляется существенно труднее, а получающийся результат весьма интересен и красив. Обозначим через τ наименьший корень скалярного уравнения $t^2 - 3t + 1 = 0$. Тогда $\tau = (3 - \sqrt{5})/2$. Это число связано с хорошо известным "золотым сечением", так как $\tau/(1-\tau) = 1 - \tau$.

Установим сначала следующую лемму о минимаксе (см. [18; лемма 3.1]).

Лемма 2.4.1. *Имеют место равенства*

$$\nu := \min_{0 \leq t \leq s < 1} \max\left(\frac{(1-s)(1-t)}{1-st}, \frac{s}{1-st}\right) =$$

$$= \frac{1-\tau}{1+\tau} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \tag{4.1}$$

Минимум в (4.1) *достигается лишь при* $s = t = \tau$.

Доказательство. В области $\Omega := \{(s,t) : 0 \leq t \leq s < 1\}$ равенство выражений

$$\Phi_1(s,t) := \frac{(1-s)(1-t)}{1-st}, \qquad \Phi_2(s,t) := \frac{s}{1-st}$$

имеет место для $s = (1-t)/(2-t)$. Этим уравнением задаётся гипербола. Обозначим через Γ ту её часть, которая принадлежит Ω. Покажем, что на любом наклонном отрезке $s = rt$, $0 \leq t \leq 1/r$, $1 \leq r < \infty$, а также на вертикальном отрезке $t = 0$, $0 \leq s < 1$ минимакс

$$\min_{s,t} \max\left(\Phi_1(s,t), \Phi_2(s,t)\right)$$

достигается на пересечении рассматриваемого отрезка с Γ.

Действительно, для $s = rt$

$$\Phi_1(s,t) = \varphi_1(t) := \frac{(1-rt)(1-t)}{1-rt^2},$$

$$\Phi_2(s,t) = \varphi_2(t) := \frac{rt}{1-rt^2}.$$

При $t \in [0, 1/r]$ функция φ_1 убывает, а φ_2 возрастает. Их значения в концах отрезка $[1, 1/r]$ суть

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{r}{r-1}.$$

Поэтому

$$\min_{0 \le t \le 1/r} \max\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right) = \varphi_1(t') = \varphi_2(t'),$$

где t' — корень уравнения $rt = (1-t)/(2-t)$. Если же $t = 0$, то минимакс равен

$$\min_{0 \le s < 1} \max(1-s, s) = 1/2$$

и также достигается при $s = (1-t)/(2-t)$.

Пересечение прямой $s = t$ и гиперболы Γ имеет место в точке с координатами $s = t = \tau$. Итак,

$$\nu = \min_{0 \le t \le \tau} \Phi_2\left(\frac{1-t}{2-t}, t\right) = \min_{0 \le t \le \tau} \frac{1-t}{2-2t+t^2}.$$

Функция

$$\eta(t) := \frac{1-t}{2-2t+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4-4t+2t^2} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(4-4t)/t^2+2}$$

убывает. Значит,

$$\nu = \eta(\tau) = \frac{1-\tau}{2-2\tau+\tau^2} = \frac{1-\tau}{1+\tau} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Равенство (4.1) доказано. $\square$

Следующая теорема приведена в [18] с кратким доказательством, которое ниже дополняется вычислениями из [15].

Теорема 2.4.1. *Для любого интерполяционного проектора* $P : C(Q_2) \to \Pi_1(\mathbb{R}^2)$ *по трём узлам, принадлежащим* Q_2, *выполняется точное неравенство*

$$\|P\| \geq 2\nu + 1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89442719\ldots \qquad (4.2)$$

Равенство в (4.2) *имеет место лишь для проектора по узлам* $(0,0)$, $(1,\tau)$, $(\tau,1)$ *и для тех трёх проекторов, узлы которых получаются из указанных поворотами вокруг центра* Q_2 *на углы, равные* $\pi/2$, π *и* $3\pi/2$. *Для других* P, *кроме этих четырёх отмеченных, в* (4.2) *выполняется строгое неравенство.*

Доказательство. Используя редукцию для $n = 2$, описанную в п. 2.3.1, сведём задачу к оценке нормы проектора P по узлам

$$x^{(1)} = (0,0), \quad x^{(2)} = (1,t), \quad x^{(3)} = (s,1); \qquad 0 \leq t \leq s < 1$$

(см. (3.3)). В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель $\mathbf{A}$ равен $\Delta := 1 - st \neq 0$. Обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -1+t & 1 & -t \\ -1+s & -s & 1 \\ 1-st & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{\Delta}\left((-1+t)x_1 + (-1+s)x_2 + 1 - st\right),$$

$$\lambda_2(x) = \frac{1}{\Delta}\left(x_1 - sx_2\right), \quad \lambda_3(x) = \frac{1}{\Delta}\left(-tx_1 + x_2\right); \qquad (4.3)$$

$$p(x) = Pf(x) = \frac{1}{\Delta}\big\{f_1\left[(-1+t)x_1 + (-1+s)x_2 + 1 - st\right] +$$

$$+ f_2\left[x_1 - sx_2\right] + f_3\left[-tx_1 + x_2\right]\big\}.$$

Значения p в вершинах Q_2 равны

$$p(0,0) = f_1, \quad p(1,0) = \frac{1}{\Delta}\left[f_1(t - st) + f_2 - tf_3\right],$$

$$p(0,1) = \frac{1}{\Delta}\left[f_1(s - st) - sf_2 + f_3\right],$$

$$p(1,1) = \frac{1}{\Delta}\left[-f_1(1-s)(1-t) + f_2(1-s) + f_3(1-t)\right].$$

Поэтому

$$\|P\| = \max_{f_j=\pm 1} \max\Big\{1, \frac{1}{\Delta}\left|f_1 t(1-s) + f_2 - tf_3\right|, \frac{1}{\Delta}\left|f_1 s(1-t) - sf_2 + f_3\right|,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left|-f_1 t(1-s)(1-t) + f_2(1-s) + f_3(1-t)\right|\Big\} =$$

$$= \max_{f_j=\pm 1} M.$$

Вычислим значения M на наборах $f_1 = f_2 = f_3 = 1$; $f_1 = f_2 = 1, f_3 = -1$; $f_1 = f_3 = 1, f_2 = -1$; $f_1 = 1, f_2 = f_3 = -1$. С учётом неравенства $s \geq t$ это даст возможность записать

$$\|P\| = \max\left\{1, \frac{1+st}{\Delta}, \frac{|2s+1-st|}{\Delta}, \frac{|2s-1-st|}{\Delta}, \frac{|3+st-2s-2t|}{\Delta}\right\}.$$

Третье слева выражение в фигурных скобках не меньше первого, второго и четвёртого. Кроме того,

$$2s + 1 - st \geq 0, \quad 3 + st - 2s - 2t = (2-s)(2-t) - 1 \geq 0,$$

поэтому

$$\|P\| = \max\left\{\frac{2s+1-st}{\Delta}, \frac{3+st-2s-3t}{\Delta}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{2s}{\Delta} + 1, \frac{2(1-s)(1-t)}{\Delta} + 1\right\} =$$

$$= \frac{2}{\Delta}\max\Big((1-s)(1-t), s\Big) + 1.$$

То же равенство

$$\|P\| = \frac{2}{\Delta}\max\Big((1-s)(1-t), s\Big) + 1 \tag{4.4}$$

может быть получено и другим путём (см. [15]). Очевидно, что Q_2 имеет 1-вершину относительно симплекса, соответствующего S. Поэтому применимо следствие 2.2.1, согласно которому

$$\|P\| = 2 \max_{1\leq j\leq n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\max_{x\in\mathrm{ver}(Q_2)}(-\lambda_1(x)) = \frac{1}{\Delta}(1-s)(1-t),$$

$$\max_{x\in\mathrm{ver}(Q_2)}(-\lambda_2(x)) = \frac{1}{\Delta}s, \quad \max_{x\in\mathrm{ver}(Q_2)}(-\lambda_3(x)) = \frac{1}{\Delta}t.$$

Так как $s \geq t$, то эти равенства также дают (4.4).

Для завершения доказательства остаётся вспомнить, что $\Delta = 1 - st$, и применить для оценки правой части (4.4) соотношение (4.1). Мы получим, что норма минимального проектора P^* равна

$$\|P^*\| = \frac{2}{1-st}\max\Big((1-s)(1-t), s\Big) + 1 \geq 2\nu + 1.$$

Неравенство (4.2) следует из леммы 2.4.1. Точность константы $1.8944\ldots$, а также возможные варианты равенства следуют из леммы 2.4.1 и того обстоятельства, что норма проектора не зависит от поворота системы узлов относительно центра квадрата на любой из указанных углов.

Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2.4.1 следует, что $\theta_2 = 2\sqrt{5}/5 + 1$. Неравенство теоремы 2.2.2 теперь даёт оценку

$$\xi_2 \leq \frac{3}{2}\left(\theta_2 - 1\right) + 1 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1. \tag{4.5}$$

Для определения экстремального треугольника $S \subset Q_2$ (т. е. такого, для которого $\xi(S) = \xi_2$) применим тот же подход, что и для определения минимального проектора P^*. Для этого требуется несколько видоизменить редукцию, описанную в п. 2.3.1, приспособив её для оценивания $\xi(S)$. На этот раз редукция использует аналоги лемм 2.3.2 и 2.3.3 для $\xi(S)$ и произвольного (не обязательно прямоугольного) параллелепипеда D. Например, аналог леммы 2.3.2 выглядит следующим образом. *Пусть S — невырожденный симплекс, D — n-мерный параллелепипед (не обязательно прямоугольный). Если $S \subset D \subset Q_n$, то $\xi(D;S) \leq \xi(S) = \xi(Q_n;S)$.* Здесь $\xi(D;S) = \min\{\sigma \geq 1 : D \subset \sigma S\}$ (см. § 1.3). При редукции существенно, что D может быть отображён на Q_n с помощью невырожденного аффинного преобразования, сохраняющего отношения длин.

На этом пути получается, что минимальное значение $\xi(S)$, как и минимальное значение $\|P\|$, реализуется на треугольнике с вершинами $(0,0)$,

$(1,t)$, $(s,1)$ $(0 \le t \le s < 1)$. Но для каждого такого треугольника S в правой части (2.5) имеет место равенство:

$$\xi(S) = \frac{3}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1.$$

Отсюда следует, что в (4.5) левое неравенство можно заменить на равенство. Таким образом, $\xi_2 = 3\sqrt{5}/5 + 1 = 2.34164078....$

Описанные в теореме 2.4.1 экстремальные расположения узлов имеют красивые геометрические свойства. Каждый такой набор состоит из вершины квадрата $x^{(1)}$ и двух точек $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$, принадлежащих сторонам квадрата, не содержащим $x^{(1)}$. Точки $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$ осуществляют "золотое сечение" сторон квадрата, на которых они находятся, причём меньший отрезок прилегает к ближайшей для $x^{(1)}$ вершине квадрата. Это приводит к тому, что оказываются равными площади всех трёх треугольников, которые отсекаются сторонами треугольника $S = x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}$ от углов квадрата. Но главное экстремальное свойство треугольника S состоит в том, что для него $\xi(S) = \xi_2 = 2.3416....$ Других треугольников, принадлежащих Q_2, кроме отмеченных четырёх, с таким свойством нет.

Интересно, что точное неравенство (4.2) содержит новую характеризацию классического "золотого сечения".

Проектор по узлам $(0,0)$, $(1,\tau)$, $(\tau,1)$ был рассмотрен в [11], но там не была доказана его минимальность. Этот пробел был восполнен автором в [16].

§ 2.5. Точные значения θ_3 и ξ_3

В этом параграфе мы покажем, что $\theta_3 = 2$ и $\xi_3 = 3$. Точные значения θ_3 и ξ_3 получаются при использовании результатов предыдущей главы, а также работы Лассака [58]. Этот подход реализован в статье [18].

Пусть $P' : C(Q_3) \to \Pi_1(\mathbb{R}^3)$ — интерполяционный проектор, узлы которого имеют вид $x^{(1)} = (0,1,1)$, $x^{(2)} = (1,0,1)$, $x^{(3)} = (1,1,0)$, $x^{(4)} = (0,0,0)$. Симплекс S' с вершинами $x^{(j)}$ является правильным симплексом, вписанным в Q_3. При этом каждая его вершина совпадает с вершиной Q_3. Длина ребра S' равна $\sqrt{2}$. Центр тяжести S' совпадает с центром куба; каждой грани Q_3 принадлежат пара вершин S'. В этой ситуации

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2}\left(-x_1 + x_2 + x_3\right), \quad \lambda_2(x) = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_2 + x_3\right),$$

$$\lambda_3(x) = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - x_3\right), \quad \lambda_4(x) = \frac{1}{2}\left(-x_1 - x_2 - x_3 + 2\right),$$

что даёт $\|P'\| = 2$.

Теорема 2.5.1. *Имеют место равенства $\theta_3 = 2, \xi_3 = 3$. Иначе говоря, для любого проектора $P : C(Q_3) \to \Pi_1(\mathbb{R}^3)$ и любого тетраэдра $S \subset Q_3$ выполняются точные неравенства*

$$\|P\| \geq 3, \quad \xi(S) \geq 3. \tag{5.1}$$

Левое равенство в (5.1) *достигается лишь для проекторов по узлам* $(1-t, 0, 0)$, $(t, 1, 0)$, $(1, 1-t, 1)$, $(0, t, 1)$ *при* $t = 0$ *и при* $t = 1/2$ *и тем узлам, которые сводятся к отмеченным с помощью замены переменных. Правое неравенство является равенством только для тех* S, *которые соответствуют отмеченным* P.

Доказательство. Норма рассмотренного выше проектора P' равна 2. Поэтому $\theta_3 \leq 2$. Теперь воспользуемся следствием 2.2.2. Применяя при $n = 3$ правое неравенство из (2.10), имеем $\theta_3 \geq 2$. Поэтому $\theta_3 = 2$. Левое соотношение из (2.10) даёт $\xi_3 \geq 3$. Для оценки ξ_n сверху применим (2.9). При $n = 3$ это соотношение даёт

$$\xi_3 \leq 2\left(\theta_3 - 1\right) + 1 \leq 3. \tag{5.2}$$

Таким образом, $\xi_3 = 3$. Значит, (5.2) представляет собой двойное равенство. Итак, рассмотренный выше проектор P' является минимальным — для него $\|P'\| = \theta_3 = 2$. Из (2.5) получаем, что соответствующий тетраэдр S' обладает свойством $\xi(S') = \xi_n = 3$. Оказывается, что в трёхмерной ситуации есть и другие экстремальные P и S, которые не сводятся к указанным с помощью замены переменных. Заметим, что для осевых диаметров любого тетраэдра S с условием $\xi(S) = 3$ в силу следствия 1.6.3 выполняются равенства $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Иначе говоря, в каждом таком S содержится ровно один отрезок длины 1, параллельный любой из координатных осей.

Рассмотрим любой проектор P со свойством $\|P\| = 2$. Для тетраэдра $S \subset Q_3$ с вершинами в его узлах соотношение (2.5) даёт $\xi(S) = 3$. Положим $T = 3S$. Тогда $S = (1/3)T$. Так как $(1/3)T \subset Q_3$ и куб является центрально-симметричным телом: $-Q_3 = Q_3$, то некоторый транслят

$-(1/3)T$, а именно результат симметрии $(1/3)T$ относительно центра куба, содержится в кубе. В силу условия $Q_3 \subset T$ этот транслят принадлежит также T. Таким образом, он представляет собой не что иное, как $-(1/3)T$. Итак, справедливы включения

$$-\frac{1}{3}T \subset Q_3 \subset T. \tag{5.3}$$

Описание тетраэдров T со свойством (5.3) дано в статье [58], см. там лемму 2 и рис. 4–6. Из этого описания мы получаем следующее. Если $\|P\| = 2$, то невозможна никакая ситуация, кроме одной из перечисленных:

1) узлы P расположены в вершинах Q_3 и образуют правильный тетраэдр с длиной ребра $\sqrt{2}$;

2) узлы P имеют вид $(t,0,0)$, $(t,1,0)$, $(0,s,1)$, $(1,s,1)$, $0 \le s,t \le 1$, или сводятся к ним заменой переменных;

3) узлы P имеют вид $(1,0,0)$, $(0,u,0)$, $(1,1,0)$, $(s,t,1)$, $0 \le s,t,u \le 1$, или сводятся к ним заменой переменных.

Остаётся проанализировать эти ситуации. В первом случае, как отмечалось в начале пункта, $\|P\| = 2$. Во второй ситуации формула Лагранжа приводит к равенству

$$Pf(x) = f_1\left(-x_2 + (s-1)x_3 + 1\right) + f_2\left(x_2 - sx_3\right) +$$

$$+ f_3\left(-x_1 + (1-t)x_3 + t\right) + f_4\left(x_1 + tx_3 - t\right),$$

f_j — значение f в j-м узле. Из него с помощью стандартных вычислений следует, что $\|P\| = \max\Bigl(1+2t, 3-2t, 1+2s, 3-2s\Bigr)$. Так как $\max(1+2t, 3-2t) \ge 2$, то $\|P\| \ge 2$. При этом $\|P\| = 2$ лишь при $t = s = 1/2$.

В третьем случае тетраэдр S с вершинами в узлах содержит вписанный в него транслят Q куба $(1/3)Q_3$, отличный от $(1/3)Q_3$, так как грань Q лежит на грани S, принадлежащей плоскости $x_3 = 0$. Из соображений подобия следует, что некоторый транслят S' тетраэдра $3S$ аналогичным образом содержит Q_3, откуда $S^* \ne 3S$. Поэтому никакой транслят S^*, в том числе $3S$, не содержит Q_3. Итак, в третьем случае включение $Q_3 \subset 3S$ невозможно. Значит, здесь $\xi(S) > 3$. Правое неравенство из (2.5) даёт

$$2\left(\|P\| - 1\right) + 1 \ge \xi(S) > 3.$$

Следовательно, для проекторов третьего типа всегда $\|P\| > 2$.

Таким образом, если $\|P\| = 2$, что эквивалентно $\xi(S) = 3$, то либо узлы P расположены в вершинах Q_3 и образуют правильный тетраэдр, либо они совпадают с серединами противоположных рёбер двух противоположных граней Q_3 и при этом не имеют общей плоскости. Эти расположения узлов и отмечены в условии.

Теорема доказана $\square$

Подчеркнём, что для тетраэдра S, соответствующего любому минимальному проектору из условия теоремы 2.5.1, выполняется экстремальное свойство $\xi(S) = \xi_3 = 3$. Других тетраэдров, принадлежащих Q_3, кроме отмеченных, с таким свойством нет.

ГЛАВА 3
СООТНОШЕНИЯ $\theta_n \asymp n^{1/2}$ И $\xi_n \asymp n$

§ 3.1. Симплексы максимального объёма в Q_n и оценки для ν_n

3.1.1. Матрицы и числа Адамара. Величина ν_n. Под (a/b)-*матрицей* будем понимать матрицу, каждый элемент которой равен одному из двух чисел a или b. Через h_n и g_n обозначим максимальные величины определителей $(0/1)$ и $(-1/1)$-матриц порядка n соответственно. Эти числа связаны соотношением $g_{n+1} = 2^n h_n$ [52; теорема 2.1].

Матрицей Адамара порядка n называется невырожденная $(n \times n)$-матрица $\mathbf{H}_n$, каждый элемент которой равен 1 или -1 и такая, что $\mathbf{H}_n^{-1} = n^{-1}\mathbf{H}_n^T$. Многие сведения о матрицах Адамара содержатся в монографии Холла [42]. Если $\mathbf{H}_n$ существует, то $n = 1$, $n = 2$ или n кратно 4. Для бесконечного множества чисел вида $n = 4k$, включая серию степеней $n = 2^m$, существование $\mathbf{H}_n$ давно установлено. Наименьшее n, для которого неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка n, с 1985 г. равняется 428. Если для натурального n матрица Адамара существует, то n будем называть *числом Адамара или адамаровым числом.*

Симплексом максимального объёма или максимальным симплексом в кубе Q_n будем называть такой n-мерный симплекс $S \subset Q_n$, что для любого n-мерного симплекса $S' \subset Q_n$ верно $\nu_n := \mathrm{vol}(S) \geq \mathrm{vol}(S')$. Симплексы максимального объёма в Q_n обладают рядом красивых свойств. Примечательно, что некоторые из них вытекают и из наших предыдущих результатов. Например, следствие 1.6.10 для случая $V = Q_n$ даёт такое свойство. *Если симплекс $S \subset Q_n$ имеет максимальный объём, т. е.* $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$, *то для осевых диаметров S выполняются равенства*

$$d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1.$$

Первое доказательство этого утверждения было дано Лассаком [58].

Величина ν_n объёма максимального симплекса весьма важна для получения оценок для чисел θ_n. Верхние границы ν_n позволяют установить оценки этих чисел снизу (см. § 3.4). Для получения точных по порядку верхних оценок θ_n нам понадобятся подходящие двусторонние неравенства для ν_n. Перед формулировкой соответствующего утверждения отметим, что выполняется равенство $n!\nu_n = h_n$, см. [52; теорема 2.1].

Лемма 3.1.1. *Для всех $n \in \mathrm{N}$ имеют место соотношения:*

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\log(4/3)}{\log n}\right) < \log(2^{n-1}h_{n-1}) \leq \frac{1}{2}\cdot n\log n, \tag{1.1}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} < h_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \tag{1.2}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} < \nu_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \tag{1.3}$$

Равенство справа в каждом из соотношений эквивалентно каждому из следующих условий:

$n+1$ — число Адамара;

в Q_n существует максимальный по объёму симплекс, который является правильным.

Нетрудно видеть, что соотношения (1.1)–(1.3) попарно эквивалентны. Двойное неравенство (1.3) объединяет результаты Адамара [51] (правая оценка), а также Клементса и Линдстрёма [45] (левая оценка).

Пусть $n+1$ — число Адамара. В этом случае найдётся совокупность $n+1$ вершин куба Q_n с одинаковыми попарными расстояниями между ними. Такая система вершин названа в [12] *эквидистантной*. Другими словами, в этом случае существует правильный n-мерный симплекс S, вершины которого совпадают с некоторыми из вершин Q_n. Из свойств матриц Адамара следует, что длина ребра S равна $\sqrt{(n+1)/2}$. Величина ν_n совпадает с объёмом симплекса S и равна правой части (4.3).

Отметим, что указанное свойство является характеристическим. Именно (см. [52; теорема 4.5]), *для любого $n \in \mathbb{N}$ следующие три условия эквивалентны:*

1) число $n+1$ — адамарово;

2) каждый симплекс максимального объёма в Q_n является правильным;

3) множество $\mathrm{ver}(Q_n)$ содержит эквидистантную систему, содержащую $n+1$ элементов.

3.1.2. Определители Кэли–Менгера. Приведём способ доказательства равенства

$$\nu_n = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}, \quad n+1 \text{ — адамарово,}$$

отмеченный в [16]. Пусть $x^{(1)},\dots,x^{(n+1)}\in\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathrm{Gr}(\cdot)$ определитель Грама системы векторов $(\cdot)$. Положим $a_{ij}:=\|x^{(i)}-x^{(j)}\|$ и введём в рассмотрение определители

$$\Gamma(x^{(1)},\dots,x^{(n+1)}):=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2\\ 1 & a_{21}^2 & 0 & \dots & a_{2,n+1}^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & a_{n+1,1}^2 & a_{n+1,2}^2 & \dots & 0\end{vmatrix}, \qquad (1.4)$$

$$\delta(x^{(1)},\dots,x^{(n+1)}):=\begin{vmatrix} 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2\\ a_{21}^2 & 0 & \dots & a_{2,n+1}^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n+1,1}^2 & a_{n+1,2}^2 & \dots & 0\end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Определитель (1.5) назван в [2] *определителем Кэли–Менгера точек* $x^{(i)}$.

Лемма 3.1.2. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Gr}(\overline{x^{(1)}x^{(2)}},\dots,\overline{x^{(1)}x^{(n+1)}})=(-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}\Gamma(x^{(1)},\dots,x^{(n+1)}). \qquad (1.6)$$

Если точки $x^{(1)},\dots,x^{(n+1)}$ *таковы, что определитель* (1.4) *отличен от нуля, то радиус* R *сферы, описанной вокруг симплекса с вершинами в* $x^{(i)}$*, удовлетворяет соотношению*

$$R^2=-\frac{1}{2}\frac{\delta(x^{(1)},\dots,x^{(n+1)})}{\Gamma(x^{(1)},\dots,x^{(n+1)})}. \qquad (1.7)$$

Красивые соотношения (1.6)–(1.7) доказаны в [2; с. 290–293].

Теорема 3.1.1. *Пусть* $n+1$ *— адамарово. Тогда*

$$\nu_n=\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \qquad (1.8)$$

Доказательство. Произвольный симплекс, содержащийся в Q_n, находится внутри сферы, описанной вокруг Q_n. Известно, что максимальным объёмом из всех симплексов, находящихся внутри сферы, обладает правильный симплекс, вписанный в эту сферу (см. [49], [65]). Таковым, в частности, является симплекс с эквидистантной системой вершин, совпадающих с некоторыми из вершин Q_n. Как отмечалось выше, при указанном n этот правильный симплекс существует.

Заметим далее, что объём V правильного n-мерного симплекса с длиной ребра a равен

$$V = \frac{a^n\sqrt{n+1}}{2^{n/2}n!}. \tag{1.9}$$

Это известное равенство мы получим с помощью (1.6). Обозначим вершины указанного симплекса через $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ и применим (1.6) с $a_{ij} = a$.

$$V^2 = \frac{1}{(n!)^2}\mathrm{Gram}(\overline{x^{(1)}x^{(2)}}, \ldots, \overline{x^{(1)}x^{(n+1)}}) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n\,(n!)^2}\Gamma(x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}) =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n\,(n!)^2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & \ldots & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 & \ldots & a^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a^2 & a^2 & \ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{a^{2(n+2)}}{a^4 2^n\,(n!)^2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Последний числовой определитель порядка $n+2$ равен $(-1)^{n+1}(n+1)$. Поэтому

$$V^2 = \frac{a^{2n}(n+1)}{(n!)^2},$$

откуда и следует (1.9).

Длина ребра правильного симплекса с объёмом ν_n равна $\sqrt{(n+1)/2}$. Как отмечалось, это следует из свойств матрицы Адамара порядка $n+1$. Интересно, что тот же результат получается и из (1.7). Положим $a_{ij} = a$ и вычислим определители (1.4) и (1.5) так, как было отмечено выше. Применяя (1.7), мы получим два известных эквивалентных равенства, связывающих длину a ребра любого правильного симплекса с радиусом R

описанной сферы:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}, \quad a = R\sqrt{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}. \tag{1.10}$$

Для симплекса максимального объёма $R = \mathrm{diam}(Q_n)/2 = \sqrt{n}/2$, поэтому (1.10) даёт $a = \sqrt{(n+1)/2}$. Наконец, подставляя в (1.9) это значение a, получим равенство (1.8). Теорема доказана. $\square$

3.1.3. Частные случаи. В некоторых случаях правое неравенство из (1.3) было улучшено. Следующее утверждение объединяет результаты ряда математиков, см. теоремы 2.5 и 2.6 из [52].

Лемма 3.1.3. *Если n — чётное, то*

$$\nu_n \leq \frac{n^{n/2}\sqrt{2n+1}}{2^n n!}. \tag{1.11}$$

Если $n > 1$ и $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, то

$$\nu_n \leq \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}(n-1)!}. \tag{1.12}$$

Для многих конкретных n значения ν_n известны точно. Подробная информация по данным на 1996 г. приводится в [52; с. 9–11]. В частности, первые 12 значений ν_n есть

$$\nu_1 = 1, \quad \nu_2 = \frac{1}{2}, \quad \nu_3 = \frac{1}{3}, \quad \nu_4 = \frac{1}{8}, \quad \nu_5 = \frac{1}{24},$$

$$\nu_6 = \frac{1}{80}, \quad \nu_7 = \frac{2}{315}, \quad \nu_8 = \frac{1}{720}, \quad \nu_9 = \frac{1}{2520},$$

$$\nu_{10} = \frac{1}{11340}, \quad \nu_{11} = \frac{9}{246400}, \quad \nu_{12} = \frac{3}{394240}.$$

Правое равенство в (1.3) выполняется для бесконечного множества n, удовлетворяющих условию $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$, включая все такие $n < 427$. Из интервала $4 \leq n < 60$ равенство в (1.11) имеет место только для $n = 4, 12, 24, 40$. Из интервала $1 < n < 109$ равенство в (1.12) достигается только для n = 5, 9, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 45, 61, 65, 73, 81, 85, 89, 97, 101. Известны также точные значения ν_n для n = 13, 16, 20. Для n = 14, 18, 21, 22, 26, 28 значения ν_n к 1996 г. не были найдены. Более свежая информация имеется на сайте www.indiana.edu/∼maxdet, где приводятся значения максимальных определителей h_n и $g_n = 2^{n-1}h_{n-1}$ (см. по этому поводу § 3.9). Как отмечалось выше, $\nu_n = h^n/n!$.

3.1.4. Нижние оценки ξ_n и θ_n через ν_n. Приведём неравенства, оценивающие ξ_n и θ_n снизу через ν_n. Эти соотношения получены в [18] с помощью следующего красивого результата.

Лемма 3.1.4. *Пусть D — невырожденный параллелепипед, S — симплекс в $\mathbb{R}^n$. Если $D \subset S$, то*

$$\frac{\mathrm{vol}(D)}{\mathrm{vol}(S)} \le \frac{n!}{n^n}. \tag{1.13}$$

Доказательство соотношения (1.13), а также описание параллелепипедов максимального объёма в S дано в статье Лассака [58].

Теорема 3.1.2. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$\xi_n \ge \frac{n}{(n!\nu_n)^{1/n}}, \tag{1.14}$$

$$\theta_n \ge \frac{2}{n+1}\left[\frac{n}{(n!\nu_n)^{1/n}} - 1\right] + 1. \tag{1.15}$$

Доказательство. Для произвольного симплекса $S \subset Q_n$ с ненулевым объёмом число $\xi := \xi(S)$ удовлетворяет равенству

$$\xi^n = \frac{\mathrm{vol}(\xi S)}{\mathrm{vol}(S)}.$$

Так как $S \subset Q_n \subset \xi S$, то $\mathrm{vol}(S) \le \nu_n$, а $\mathrm{vol}(\xi S) \ge n^n/n!$. Последнее неравенство следует из леммы 3.1.4, применённой к $D = Q_n$ и симплексу ξS. Поэтому

$$\xi(S) = \left(\frac{\mathrm{vol}(\xi S)}{\mathrm{vol}(S)}\right)^{1/n} \ge \left(\frac{n^n}{n!\nu_n}\right)^{1/n} = \frac{n}{(n!\nu_n)^{1/n}}.$$

В силу произвольности $S \subset Q_n$ из этого неравенства следует (1.14). Оценка (1.15) получается из (1.14) и установленного выше неравенства $\xi_n \le ((n+1)/2)(\theta_n - 1) + 1$, см. теорему 2.2.2. □

Объём симплекса с вершинами $(0,\ldots,0)$, $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,1)$ равен $1/n!$. Поэтому $\nu_n \ge 1/n!$ и знаменатели в (1.14)–(1.15)

≥ 1. По этой причине правая часть (1.14) не превосходит n, а правая часть (1.15) не превосходит $3-4/(n+1)$. Таким образом, оценки теоремы 3.1.2 не точнее, чем ранее установленные неравенства $\xi_n \geq n$, $\theta \geq 3-4/(n+1)$ следствия 2.2.2.

§ 3.2. Соотношение $\xi_n \asymp n$

В этом параграфе мы покажем, что при всех n верны неравенства $n \leq \xi_n < n+1$. Это означает, что $\xi_n \asymp n$.

3.2.1. Неравенство $\xi_n \leq n+2$. Следующее утверждение приведено в [24; теорема 4.1].

Теорема 3.2.1. *Для любого максимального симплекса $S \subset Q_n$ имеет место неравенство $\xi(S) \leq n+2$. Если $n+1$ — адамарово и S — правильный симплекс, вписанный в Q_n, то $\xi(S) = n$.*

Доказательство. Пусть $x^{(j)}$ — вершины симплекса S, удовлетворяющего условию $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$, а определители Δ и $\Delta_j(x)$ вводятся через набор точек $x^{(j)}$ (см. § 1.1). Тогда $|\Delta| = n!\nu_n$ есть максимальное значение определителя порядка $n+1$, j-я строка которого есть $\left(y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}, 1\right)$, $0 \leq y_k^{(j)} \leq 1$. В частности, при любом $j = 1, \ldots, n+1$ и любом $x \in Q_n$ выполняется $|\Delta_j(x)| \leq |\Delta|$. Поэтому

$$-\lambda_j(x) \leq |\lambda_j(x)| = \left|\frac{\Delta_j(x)}{\Delta}\right| \leq 1, \quad x \in Q_n.$$

Отсюда и из (1.3.6) следует, что для максимального симплекса S

$$\xi(S) = (n+1) \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \max_{1\leq j\leq n+1} (-\lambda_j(x)) + 1 \leq$$

$$\leq (n+1)\cdot 1 + 1 = n+2.$$

Пусть теперь $n+1$ есть адамарово число. В этом случае, как отмечено в п. 3.1.1, существует и имеет максимальный объём правильный симплекс, вписанный в Q_n. Вершины любого такого симплекса совпадают с некоторыми вершинами Q_n, длина ребра равняется $\sqrt{(n+1)/2}$, а центром тяжести является точка $c = (1/2, \ldots, 1/2)$. Возьмём правильный симплекс S с вершиной $x^{(n+1)} = 0$. Нетрудно убедиться, что

$$\max_{1\leq j\leq n+1, x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = -\lambda_{n+1}(e) = \frac{\|e-c\|}{\|b-c\|} = \frac{n-1}{n+1},$$

где $e = (1, \ldots, 1)$, а b есть точка пересечения прямой (ce) с границей S. Поэтому имеем $\xi(S) = (n+1)\max(-\lambda_j(x)) + 1 = n$.

Дадим другое доказательство равенства $\xi(S) = n$, если $n+1$ — число Адамара. Так как S имеет максимальный объём в Q_n, то $S \subset Q_n \subset -nS$ (см. доказательство следствия 1.6.10). Положим $T := -S$. Так как центр тяжести S совпадает с центром куба, то $-S \subset Q_n$. Поэтому $T \subset Q_n \subset nT$, откуда $\xi(S) = \xi(T) \leq n$. Осталось привлечь оценку $\xi(S) \geq n$ следствия 1.6.3. $\Box$

Отметим, что вторая часть доказательства теоремы 3.2.1 содержит обоснование следующего утверждения. *Пусть существует симплекс $S \subset Q_n$ максимального возможного объёма, центр тяжести которого совпадает с центром куба. Тогда $\xi(S) = n$.* Если число $n+1$ — адамарово, то таковым является правильный симплекс, вписанный в S.

Следствие 3.2.1. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\xi_n \leq n+2$. Если $n+1$ — адамарово, то $\xi_n = n$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.2.1 и оценку $\xi_n \geq n$ следствия 2.2.2. $\Box$

Приведём одно геометрическое свойство максимального симплекса, вытекающее из теоремы 3.2.1.

Следствие 3.2.2. *Если S — максимальный симплекс в Q_n, то справедливо включение $Q_n \subset (-nS) \bigcap (n+2)S$.*

Доказательство. Как мы уже отмечали, для любого симплекса $S \subset Q_n$, имеющего максимальный объём, выполняется $Q_n \subset -nS$. Если бы это включение не имело места, то некоторая вершина S могла бы быть перемещена в Q_n так, что расстояние от неё до противоположной грани симплекса увеличилось. В этом случае объём S не был бы максимальным. Остаётся заметить, что включение $Q_n \subset (n+2)S$ следует из предыдущей теоремы. $\Box$

3.2.2. Неравенство $\xi_n \leq (n^2-3)/(n-1)$. Покажем, что оценка $\xi_n \leq n+2$ следствия 3.2.1 может быть уточнена. Следующее утверждение доказано в [27; теорема 2.2].

Теорема 3.2.2. *Если $n > 2$, то*

$$\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}. \tag{2.1}$$

При любом n верно

$$\xi_n < n+1. \tag{2.2}$$

Доказательство. Сначала пусть $n \geq 2$. Рассмотрим n-мерный симплекс S с вершинами $x^{(1)} = (0,1,\ldots,1)$, $x^{(2)} = (1,0,\ldots,1)$, $\ldots$, $x^{(n)} = (1,1,\ldots,0)$, $x^{(n+1)} = (0,0,\ldots,0)$. В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -(n-2) & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & -(n-2) & 1 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -(n-2) & \ldots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -(n-2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 \end{pmatrix},$$

$\Delta = \det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)$, $\mathrm{vol}(S) = (n-1)/n!$. Коэффициенты многочленов λ_j составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$, поэтому

$$\lambda_j(x) = -(n-2)x_j + \sum_{k \neq j} x_k, \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$\lambda_{n+1}(x) = -\sum_{k=1}^{n} x_k + n - 1.$$

При $n = 2$ по формуле (1.3.6) имеем:

$$\xi(S) = -3\lambda_3(1,1) + 1 = 4.$$

Если $n > 2$, та же формула даёт

$$\xi(S) = -(n+1)\lambda_1(e_1) + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{n-1} + 1 = \frac{n^2-3}{n-1}.$$

Так как $\xi_n \leq \xi(S)$, то при $n > 2$ выполняется (2.1).

Очевидно, $\xi_1 = 1 < 2$. Значение ξ_2 найдено в § 2.4: $\xi_2 = 1 + 3\sqrt{5}/5 = 2.3416\ldots < 3$. Поскольку при $n > 2$ верно неравенство $(n^2-3)/(n-1) < n+1$, то при любом n справедливо (2.2). $\square$

3.2.3. Жёсткий симплекс и его свойства. Рассмотренный в доказательстве теоремы 3.2.2 симплекс S при $n \geq 3$ обладает следующим свойством [52; лемма 3.3]: замена любой вершины S на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. По этой причине симплекс S при $n \geq 3$ назван в [52] *жёстким (rigid)*. При $n = 2, 3, 4$ (и только в этих ситуациях) объём S является максимально возможным для симплекса, содержащегося в Q_n. При любом $n \geq 2$ из (1.2.2) следуют равенства $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$. Они эквивалентны тому, что сумма модулей элементов каждой из верхних n строк матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ равна 2, а каждая из сумм положительных или модулей отрицательных элементов любой из этих строк равна 1 (см. § 1.2).

Матрица $\mathbf{B}$ порядка n, составленная построчно из координат ненулевых вершин $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ симплекса S, возникает в ряде задач комбинаторики и теории графов. Так, например, её перманент

$$\operatorname{per} \mathbf{B} := \sum_{\omega} b_{1\omega_1} \ldots b_{n\omega_n} = n! \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!}$$

равен числу q_n перестановок ω^* порядка n таких, что $\omega_i^* \neq i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ (оно называется *числом беспорядков порядка* n), см. [38]. Первые значения равны $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 9$, $q_5 = 44$, $q_6 = 265$. При большом n q_n приближённо равно $n!e^{-1}$. В то же время $\det \mathbf{B} = (-1)^{n-1}(n-1)$.

Отметим здесь ещё один результат, связанный с рассмотрением этого симплекса (см. [12; теорема 1]).

Теорема 3.2.3. *При всех $n \neq 2$ справедливо неравенство*

$$\theta_n \leq \frac{n+1}{2}. \tag{2.3}$$

Более того, если $n > 3$ — чётное, то

$$\theta_n \leq \frac{n^2 - 2}{2n - 2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Если $n = 1$, то (2.3) выполняется в силу равенства $\theta_1 = 1$. Считаем $n \geq 2$. Пусть P — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами симплекса S из доказательства теоремы 3.2.2. Многочлен $p = Pf$ имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{n-1} \Big(f_1(-(n-2)x_1 + x_2 + \ldots + x_n) +$$

$$+f_2(x_1-(n-2)x_2+x_3+\ldots+x_n)+\ldots+$$
$$+f_n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}-(n-2)x_n)+$$
$$+f_{n+1}(-x_1-x_2-\ldots-x_n+(n-1))\Big).$$

В связи с предыдущим $\|P\|=\max\limits_{f_i=\pm1;x_i=0,1}|p(x)|$. Так как выражение для $p(x)$ симметрично по x_i, рассмотрим точки $x_1=\ldots=x_k=1$, $x_{k+1}=\ldots=x_n=0$, так что k есть число единиц среди компонент x. Нетрудно видеть, что

$$\|P\|=\frac{1}{n-1}\max\{\sigma,\tau\};$$

$$\sigma:=\max_{1\le k\le n-1,f_i=\pm1}\Big(f_1(-(n-2)+\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1})+$$
$$+f_2(-(n-2)+\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1})+\ldots+$$
$$+f_k(-(n-2)+\underbrace{1+\ldots+1}_{k-1})+f_{k+1}k+\ldots+$$
$$+f_nk+f_{n+1}(n-1-k)\Big)=2\max_{1\le k\le n-1}\Big(nk-k^2-k\Big)+n-1,$$
$$\tau:=n+1.$$

Величина τ соответствует $k=n$. Положим $\varphi(k):=nk-k^2-k$. Тогда

$$\varphi(1)=n-2,\quad \varphi(n-1)=n^2-n-n^2+2n-1-n+1=0.$$

Внутренняя точка максимума k_0 находится из условия $\varphi'(k_0)=n-2k_0-1=0$. При чётном n число $k_0=(n-1)/2$ не является целым. Простой анализ показывает, что целая точка максимума всегда имеет вид $k^*:=\lfloor n/2\rfloor$. Здесь и ниже $\lfloor\delta\rfloor$ — целая часть δ. Действительно, если $n=2m$, то

$$\varphi(k_0)=\varphi(m-\frac{1}{2})=m^2-m+\frac{1}{4},$$
$$\varphi(m)=\varphi(m-1)=m^2-m.$$

Так как последние значения одинаковы, то можно взять $k^*:=m=\lfloor n/2\rfloor$. Если же $n=2m+1$, то $k_0=k^*$ — целое число. Значение σ, таким образом, равно

$$\sigma=2\varphi(k^*)+n-1=2\lfloor n/2\rfloor(n-\lfloor n/2\rfloor-1)+n-1.$$

Остаётся заметить, что в случае $n = 2$ выполнено $\tau > \sigma$, в случае $n = 3$ — равенство $\tau = \sigma$, а при $n > 3$ всегда $\tau < \sigma$. Таким образом,

$$\|P\| = \begin{cases} \quad 3 & , \quad n = 2 \\ \frac{2\lfloor n/2\rfloor(n-\lfloor n/2\rfloor-1)}{n-1}+1 & , \quad n \geq 3 \end{cases} \tag{2.5}$$

При нечётном $n \geq 3$ имеет место $2\lfloor n/2\rfloor = n - 1$, поэтому

$$w := \frac{2\lfloor n/2\rfloor(n - \lfloor n/2\rfloor - 1)}{n-1} + 1 = n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}.$$

Если же $n > 3$ является чётным, то

$$w = \frac{n(n/2-1)}{n-1} + 1 = \frac{n^2-2}{2n-2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)}.$$

Поэтому (2.5) эквивалентно

$$\|P\| = \begin{cases} \quad 3 & , \quad n = 2 \\ \quad \frac{n+1}{2} & , \quad n \geq 3 \text{ нечётное} \\ \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} & , \quad n > 3 \text{ чётное} \end{cases} \tag{2.6}$$

Так как $\theta_n \leq \|P\|$ при всех $n \geq 2$, а $\theta_1 = 1$, то имеют место соотношения (2.3) и (2.6). Теорема доказана. $\square$

§ 3.3. Многочлены Лежандра и мера множества E_γ

3.3.1. *Стандартизованным многочленом Лежандра степени* n называется функция действительного аргумента t, определяемая равенством

$$\Psi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(формула Родрига). Многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом $w(x) = 1$. Первые стандартизованные многочлены Лежандра имеют вид

$$\Psi_0(t) = 1, \quad \Psi_1(t) = t, \quad \Psi_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right),$$

$$\Psi_3(t) = \frac{1}{2}\left(5t^3 - t\right), \quad \Psi_4(t) = \frac{1}{8}\left(35t^4 - 30t^2 + 3\right),$$

$$\Psi_5(t) = \frac{1}{8}\left(63t^5 + 15t\right).$$

Справедливо рекуррентное соотношение

$$\Psi_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t\Psi_n(t) - \frac{n}{n+1}\Psi_{n-1}(t).$$

По поводу этих и многих других свойств Ψ_n см., например, [36].

3.3.2. Появление многочленов Лежандра в круге наших вопросов связано со следующим утверждением, доказанным автором в [12]. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 1$. Введём в рассмотрение множество

$$E_\gamma = E_{n,\gamma} := \{x \in \mathrm{R}^n : \ |1 - \sum_{i=1}^n x_i| + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \gamma\}.$$

Теорема 3.3.1. *Имеют место соотношения*

$$\mathrm{mes_n}(E_\gamma) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma - 1)^{n-i} (\gamma + 1)^i = \frac{\Psi_n(\gamma)}{n!}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Установим сначала левое равенство из (3.1). Положим $E^{(1)} := \{x \in E_\gamma : \sum x_i > 1\}$, $E^{(2)} := \{x \in E_\gamma : \sum x_i \leq 1\}$. Найдём последовательно $m_1 = \mathrm{mes_n}(E^{(1)})$ и $m_2 = \mathrm{mes_n}(E^{(2)})$.

Временно зафиксируем k и рассмотрим непустое подмножество $G \subset E^{(1)}$, соответствующее неравенствам $x_1, \ldots, x_k \geq 0; x_{k+1}, \ldots, x_n < 0$. Ясно, что $1 \leq k \leq n$. Пусть $y_1 = x_1$, $\ldots$, x_k; $y_{k+1} = -x_{k+1}$, $\ldots$, $y_n = -x_n$. Тогда

$$G = \{y : 1 + y_{k+1} + \ldots + y_n \leq y_1 + \ldots + y_k \leq \frac{\gamma + 1}{2}, y_i \geq 0\},$$

поэтому

$$\mathrm{mes_n}(G) = \int\limits_1^{\alpha} dy_1 \int\limits_1^{\alpha - y_1} dy_2 \ldots \int\limits_1^{\alpha - y_1 - \ldots - y_{k-1}} dy_k \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{y_1 + \ldots + y_k - 1} dy_{k+1} \int\limits_0^{y_1 + \ldots + y_k - 1 - y_{k+1}} dy_{k+2} \ldots \int\limits_0^{y_1 + \ldots + y_k - 1 - y_{k+1} - \ldots - y_{n-1}} dy_n.$$

В этом доказательстве $\alpha := (\gamma+1)/2$. Так как при $b>0$

$$\int\limits_0^b dz_1 \int\limits_0^{b-z_1} dz_2 \ldots \int\limits_0^{b-z_1-\ldots-z_m} dz_l = \frac{b^l}{l!},$$

то

$$\mathrm{mes_n}(G) =$$

$$= \int\limits_1^{\alpha} dy_1 \int\limits_1^{\alpha-y_1} dy_2 \ldots \int\limits_1^{\alpha-y_1-\ldots-y_{k-1}} \frac{1}{(n-k)!}(y_1+\ldots+y_k-1)^{n-k}\,dy_k =$$

$$= \Big(\int\limits_{y_1+\ldots+y_k\le\alpha} - \int\limits_{y_1+\ldots+y_k\le 1} \Big) \frac{1}{(n-k)!}(y_1+\ldots+y_k-1)^{n-k}\,dy_1\ldots dy_k =$$

$$= J_1 - J_2.$$

Первый интеграл равен

$$J_1 = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!}\frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{(-1)^{n+k}}{n!}.$$

Значение J_2 получается из последнего выражения, если вместо α взять 1. Поэтому

$$\mathrm{mes_n}(G) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!}\frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{n!}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i.$$

Множество $E^{(1)}$ есть объединение всех подобных множеств G с различными $k=1,\ldots,n$, поэтому мера $E^{(1)}$ равна

$$m_1 = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{n!}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i.$$

Преобразуем последнее выражение, меняя порядок суммирования и используя тождество

$$\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{n}{k} = (-1)^i\binom{n-1}{i} \tag{3.2}$$

(см., например, [35]):

$$m_1 = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^i\sum_{k=0}^{i}(-1)^k\binom{n}{k} =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i. \tag{3.3}$$

Перейдём теперь к $E^{(2)}$. Прежде всего заметим, что $E^{(2)}$ содержит область $S := \{x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$, мера которой равна $1/n!$. Далее, фиксируя k в пределах от 1 до n, рассмотрим подмножество $G' \subset E^{(2)}$, соответствующее неравенствам $x_1, \ldots, x_k < 0$; $x_{k+1}, \ldots, x_n \geq 0$. Положим $y_1 = -x_1, \ldots, y_k = -x_k$; $y_{k+1} = x_{k+1}, \ldots, y_n = x_n$, тогда

$$G' = \{y : y_{k+1} + \ldots + y_n \leq 1 + y_1 + \ldots + y_k \leq \frac{\gamma-1}{2}, y_i \geq 0\}.$$

Обозначим $\beta := (\gamma-1)/2$. Имеют место равенства:

$$\mathrm{mes_n}(G') = \int\limits_0^{\beta} dy_1 \int\limits_0^{\beta-y_1} dy_2 \ldots \int\limits_0^{\beta-y_1-\ldots-y_{k-1}} dy_k \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{1+y_1+\ldots+y_k} dy_{k+1} \int\limits_0^{1+y_1+\ldots+y_k-y_{k+1}} dy_{k+2} \ldots \int\limits_0^{1+y_1+\ldots+y_k-y_{k+1}-\ldots-y_{n-1}} dy_n =$$

$$= \int\limits_0^{\beta} dy_1 \int\limits_0^{\beta-y_1} dy_2 \ldots \int\limits_0^{\beta-y_1-\ldots-y_{k-1}} \frac{(1+y_1+\ldots+y_k)^{n-k}}{(n-k)!} dy_k =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\frac{(1+\beta)^{n-j}\beta^j}{(n-j)!j!} + \frac{(-1)^k}{n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{n!}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}(1+\beta)^{n-j}(-\beta)^j - 1\Big).$$

Область $E^{(2)}$ есть объединение всех таких множеств G', отвечающих различным $k = 1, \ldots, n$, а также симплекса S. Поэтому

$$m_2 = \mathrm{mes_n}(E^{(2)}) =$$

$$= \frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\Big(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}(1+\beta)^{n-j}(-\beta)^{j} - 1\Big) + 1\Big).$$

Заметим, что

$$1+\beta = \frac{\gamma+1}{2} = \alpha, \quad \beta = \frac{\gamma-1}{2} = \alpha - 1.$$

С помощью замены $i = n - j$ во внутренней сумме получаем

$$m_2 = \frac{1}{n!}\Big(1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\Big((-1)^n \sum_{i=n-k+1}^{n}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^{i} - 1\Big)\Big) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^{i}.$$

Мы учли, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} + 1 = 0.$$

Меняя порядок суммирования, приходим к равенству

$$m_2 = \frac{(-1)^n}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\alpha-1)^{n-i}(-\alpha)^{i}\sum_{k=n+1-i}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}.$$

В соответствии с (3.2)

$$\sum_{k=n+1-i}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=n+1-i}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{n-k} =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{n-j+1}\binom{n}{j} = (-1)^{n+i}\binom{n-1}{j-1},$$

поэтому

$$m_2 = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i-1}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^{i}. \tag{3.4}$$

Равенства (3.3) и (3.4) означают, что

$$\mathrm{mes_n}(E_\gamma) = m_1 + m_2 =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i + \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\binom{n-1}{i-1}(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\Bigl(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\Bigr)(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i +$$

$$+\frac{1}{n!}\Bigl((\alpha-1)^n + \alpha^n\Bigr) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\alpha-1)^{n-i}\alpha^i =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i.$$

Мы приняли во внимание, что $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$. Левое равенство из (3.1) установлено.

Правое равенство в (3.1) следует из тождества

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 t^i = (1-t)^n\Psi_n\Bigl(\frac{1+t}{1-t}\Bigr),$$

см. [35]. Положим $t = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, тогда

$$(1-t)^n = 2^n(\gamma+1)^{-n}, \quad \frac{1+t}{1-t} = \gamma.$$

Следовательно,

$$\mathrm{mes_n}(G) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2(\gamma+1)^{n-i}(\gamma-1)^i =$$

$$= \frac{1}{2^n n!}(\gamma+1)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\Bigl(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\Bigr)^i = \frac{\Psi_n(\gamma)}{n!}.$$

Теорема полностью доказана. □

§ 3.4. Неравенство $\theta_n \ge cn^{1/2}$

Метод получения нижних оценок чисел θ_n с применением многочленов Лежандра был впервые предложен автором в [12] и затем модифицирован в [18].

3.4.1. Неравенство $\theta_n \geq \Psi_n^{-1}(1/\nu_n)$. Справедливо следующее утверждение, приведённое в [18; теорема 6.1] (по поводу некоторых деталей доказательства см. также [17; теорема 3.3]).

Теорема 3.4.1. *Выполняется неравенство*

$$\theta_n \geq \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right). \tag{4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$. Пусть $\mathbf{A}$ — соответствующая матрица узлов порядка $n+1$, определённая в § 1.1, S — симплекс с вершинами $x^{(j)}$. Так как $S \subset Q_n$, то объём S не превосходит ν_n — максимального объёма симплекса, содержащегося в Q_n. Таким образом,

$$|\det(\mathbf{A})| = n!\mathrm{vol}(S) \leq n!\nu_n.$$

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ вычтем из i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ её $(n+1)$-ю строку. Обозначим через $\mathbf{B}$ подматрицу порядка n, которая будет располагаться в первых n строках и столбцах преобразованной матрицы. По свойствам определителя

$$|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n!\mathrm{vol}(S) \leq n!\nu_n.$$

Иначе говоря,

$$\frac{|\det(\mathbf{B})|}{n!\nu_n} \leq 1. \tag{4.2}$$

Выше мы доказали (см. равенство (2.1) леммы 2.2.1), что

$$\|P\| = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| =$$

$$= \max\left\{\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)\right\}.$$

Тот же результат получится, если вместо $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$ записать $x \in Q_n$. Кроме этого, заменим β_{n+1} равной величиной $1 - \sum_{j=1}^n \beta_j$. Условие $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in Q_n$ эквивалентно $\sum_{j=1}^n \beta_j((x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in Q_n - x^{(n+1)}$. Таким образом,

$$\|P\| = \max\left\{\sum_{i=j}^{n} |\beta_j| + |1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j|\right\}. \tag{4.3}$$

Максимум в (4.3) берётся по совокупности всех числовых наборов $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, для которых

$$\beta_1(x^{(1)} - x^{(n+1)}) + \ldots + \beta_n(x^{(n)} - x^{(n+1)}) \in Q' := Q_n - x^{(n+1)}.$$

Очевидно, $\mathrm{vol}(Q') = \mathrm{vol}(Q_n) = 1$. Обозначим правую часть (4.1) через γ_n.

Рассмотрим невырожденный линейный оператор $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющий $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ точку $x = F(\beta)$ по правилу

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(x^{(j)} - x^{(n+1)} \right).$$

Справедливо матричное равенство $F(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — введённая выше матрица порядка n с элементами $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$. Положим $\gamma^* := \Psi_n^{-1}(n!/|\det \mathbf{B}|)$. В силу (4.2)

$$\frac{n!}{|\det(\mathbf{B})|} \geq \frac{1}{\nu_n} \geq 1.$$

Значит, определение γ^* корректно. Более того, $1 \leq \gamma_n \leq \gamma^*$. Заметим, что

$$\Psi_n(\gamma^*) = \frac{n!}{|\det(\mathbf{B})|}.$$

Для $\gamma \geq 1$ рассмотрим множество

$$E_\gamma := \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| + |1 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j| \leq \gamma\}.$$

Убедимся, что $Q' \not\subset F(E_\gamma)$, если $\gamma < \gamma^*$. Для этого достаточно проверить, что $\mathrm{mes_n}(F(E_\gamma) < \mathrm{mes_n}(Q') = 1$. Последнее следует из теоремы 3.3.1:

$$\mathrm{mes_n}(F(E_\gamma)) < \mathrm{mes_n}(F(E_{\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \mathrm{mes_n}(E_{\gamma^*}) =$$

$$= |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\Psi_n(\gamma^*)}{n!} = 1.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x^{(\varepsilon)} = \sum \beta_j^{(\varepsilon)} \big(x^{(j)} - x^{(n+1)} \big)$, принадлежащая Q' и такая, что $|\sum \beta_j^{(\varepsilon)}| + |1 - \sum \beta_j^{(\varepsilon)}| \geq \gamma^* - \varepsilon$. В силу (4.3) это гарантирует неравенство $\|P\| \geq \gamma^* - \varepsilon$. Отсюда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ следует

$$\|P\| \geq \gamma^* = \Psi_n^{-1} \left(\frac{n!}{|\det(\mathbf{B})|} \right) = \Psi_n^{-1} \left(\frac{n!}{|\det(\mathbf{A})|} \right).$$

Поскольку $\gamma^* \geq \gamma_n$, то имеем

$$\|P\| \geq \gamma_n = \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right).$$

Последнее неравенство справедливо для любого P. Следовательно, имеет место оценка (4.1). Теорема доказана. $\square$

Как мы видим, изложенная схема позволяет получить оценки снизу для нормы P через величину $|\det \mathbf{B}|$ или равную ей величину $|\det \mathbf{A}|$. Кроме установленного в доказательстве теоремы соотношения

$$\|P\| \geq \Psi_n^{-1}\left(\frac{n!}{|\det(\mathbf{A})|}\right),$$

отметим ещё следующий результат (см. [12; замечание 6]). Для любого проектора P выполняется неравенство

$$\|P\| \ > \frac{1}{2e} \cdot \left\{\frac{n^{n+1}}{|\det \mathbf{B}|}\right\}^{1/n}. \tag{4.4}$$

Действительно, если взять γ равным правой части (4.4), то для соответствующего множества E_γ будет иметь место $|\det \mathbf{B}| \cdot \mathrm{mes_n}(E_\gamma) < 1$. Это означает, что справедливо (4.4). Например, если $|\det \mathbf{B}| \leq n$, то $\|P\| > n/(2e)$.

3.4.2. Неравенство $\theta_n > \sqrt{n-1}/e$. Перейдём к конкретизации полученной выше оценки. Приведённые ниже соотношения были получены в [18]. В дальнейшем нам потребуется формула Стирлинга [41; с. 371]

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \cdot e^{\zeta_n/(12n)}, \quad 0 < \zeta_n < 1.$$

Из неё вытекает, что при всех n

$$n! > \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{4.5}$$

Отметим также, что имеет место неравенство

$$\Psi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}\right)^{1/n}, \quad n > 1. \tag{4.6}$$

Действительно, в соответствии с правым равенством из (3.1) при любом $t \geq 1$ и $n > 1$

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 (t-1)^{n-i}(t+1)^i <$$

$$< \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \cdot \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(t-1)^{n-i}(t+1)^i =$$

$$= \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \cdot (2t)^n \cdot 2^{-n} = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} t^n.$$

Отсюда в силу монотонности Ψ_n^{-1} получается (4.6). Если n — чётное, то $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \binom{n}{n/2} = (n!)/((n/2)!)^2$, значит,

$$\Psi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s\,((n/2)!)^2}{n!}\right)^{1/n}. \qquad (4.7)$$

Если же n — нечётное, то

$$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} = \frac{n!}{\frac{n+1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!},$$

и (4.6) имеет вид

$$\Psi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s\frac{n+1}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}{n!}\right)^{1/n}. \qquad (4.8)$$

Перед конкретизацией оценки теоремы 3.4.1 отметим следующее обстоятельство. Так как $\theta_n \ge 1$, то неравенство $\theta_n > c$ в случае $c < 1$ может быть автоматически заменено на оценку $\theta_n \ge 1$.

Теорема 3.4.2. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\theta_n > \frac{\sqrt{n-1}}{e}. \qquad (4.9)$$

Доказательство. Случай $n = 1$ тривиален. Если $n > 1$, мы можем применять неравенства (4.6)–(4.8). Кроме того, для оценки ν_n сверху воспользуемся правым неравенством из (1.3). В случае чётного n из (4.1), (4.5) и (4.7) получаем:

$$\theta_n \ge \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) \ge \Psi_n^{-1}\left(\frac{2^n n!}{(n+1)^{(n+1)/2}}\right) >$$

$$> 2\left(\frac{[(n/2)!]^2}{(n+1)^{(n+1)/2}}\right)^{1/n} >$$

$$> \frac{2}{(n+1)^{1/2+1/(2n)}}\left(\sqrt{\pi n}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}\right)^{2/n} =$$

$$= \frac{(\pi n)^{1/n}\, n}{e(n+1)^{1/2+1/(2n)}} > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

В случае нечётного n применим (4.8):

$$\theta_n \geq \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) \geq \Psi_n^{-1}\left(\frac{2^n n!}{(n+1)^{(n+1)/2}}\right) >$$

$$> \left(\frac{2^n \frac{n+1}{2}!\, \frac{n-1}{2}!}{(n+1)^{(n+1)/2}}\right)^{1/n} >$$

$$> 2\left(\frac{\pi\sqrt{n^2-1}\,\left(n^2-1\right)^{(n-1)/2}(n+1)}{(2e)^n}\right)^{1/n} =$$

$$= \frac{1}{e}\pi^{1/n}\sqrt{n-1}(n+1)^{1/(2n)} > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Таким образом, (4.9) имеет место при всех n. $\square$

В некоторых ситуациях оценки теоремы 3.4.2 могут быть несколько улучшены.

Теорема 3.4.3. *Для всех чётных n верно $\theta_n > \sqrt{n}/e$. Для всех $n > 1$ таких, что $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, выполняется $\theta_n > n/(e\sqrt{n-1})$.*

Доказательство. Достаточно использовать схему доказательства теоремы 3.4.2 и оценки (1.11)–(1.12). $\square$

Неравенство (4.9) означает, что $\theta_n > \mathrm{const} \cdot n^{1/2}$. Следует отметить, что для первых значений n оценка (4.9) и неравенства теоремы 3.4.3 малоэффективны. Например, правая часть (4.9) больше 1 лишь при $n \geq 9$.

§ 3.5. Верхние оценки $\|P\|$ в случае $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$

Как отмечено в [52], для любого n в Q_n существует максимальный симплекс, некоторая вершина которого является вершиной куба. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие максимальные симплексы; это обстоятельство ниже специально не оговаривается. При доказательстве утверждений в силу симметрии можно считать, что вершиной максимального симплекса S является точка $x^{(n+1)} = (0, \ldots, 0)$. Ненулевые вершины S обозначаются $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$. Поместим их компоненты построчно в матрицу $\mathbf{M} = (x_j^{(i)})$ порядка n :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Если S — симплекс с вершинами $x^{(j)}$, то $\mathrm{vol}(S) = |\det(\mathbf{A})|/n!$, где $\mathbf{A}$ — матрица порядка $n+1$, введённая в § 1.1. В важном для нас частном случае, когда $x^{(n+1)} = 0$, очевидно, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{M})$.

3.5.1. Оценка $\|P\|$ для симплекса максимального объёма. В работе [19] автором было доказано следующее утверждение.

Теорема 3.5.1. *Пусть S — максимальный симплекс в Q_n; P — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Тогда*

$$\|P\| \le \min\left(n+1, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}+1\right). \tag{5.1}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.2.1) для нормы P :

$$\|P\| = \frac{1}{|\Delta|} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\Delta_j(x)|. \tag{5.2}$$

Так как S — максимальный симплекс, то $|\Delta| = h_n$, и для любого $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$ и любого j справедливо $|\Delta_j(x)| \le |\Delta|$. Достаточно использовать связь между определителями и объёмами. Иными словами, $|\lambda_j| \le 1$, $j = 1, \ldots, n+1$. Поэтому из (5.2) сразу получаем оценку $\|P\| \le n+1$. Это означает, что $\|P\| = O(n)$.

Однако более тонкие рассуждения показывают, что $\|P\| = O\left(n^{1/2}\right)$. Именно, теперь мы докажем, что

$$\|P\| < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}+1. \tag{5.3}$$

Пусть $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$. Воспользуемся тем, что $x^{(n+1)} = 0$, и разложим определители $\Delta_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, по последней строке. Это даст возможность представить сумму их абсолютных величин как определитель порядка $n+1$, получающийся некоторым окаймлением определителя матрицы

М. Мы получим следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^{n}|\Delta_j(x)| = \sum_{j=1}^{n}\Delta_j(x)\cdot \operatorname{sign}(\Delta_j(x)) =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & \sigma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & \sigma_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & \mu_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n & 0 \\ x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & -\eta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & -\eta_n \end{vmatrix}.$$

Присутствующие здесь векторы $\sigma, \mu, \eta \in \mathbb{R}^n$ определяются следующим образом. Компоненты σ равны $0, 1$ или -1 и подбираются так, чтобы было выполнено второе равенство в предыдущей цепочке. Далее, если $\sigma_j = 1$, то полагаем $\mu_j := 1$, $\eta_j := 0$. Если $\sigma_j = -1$, то $\mu_j := 0$, $\eta_j := -1$. Наконец, если $\sigma_j = 0$, то $\mu_j = \eta_j := 0$. Строки последних двух определителей суть элементы Q_{n+1}. Используя связь между определителями и объёмами, получаем, что каждый из этих двух определителей не превосходит h_{n+1}. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n}|\Delta_j(x)| \le 2h_{n+1}.$$

Так как $|\Delta| = h_n$, то, применяя оба неравенства из соотношения (1.2) леммы 3.1.1, запишем оценку

$$\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\Delta_j(x)}{\Delta}\right| \le \frac{2h_{n+1}}{h_n} < \frac{4\,(n+2)^{(n+2)/2}}{3\,(n+1)^{(n+1)/2}} =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)/2} < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2}.$$

Как отмечалось, $|\lambda_{n+1}| \le 1$. Итак,

$$\sum_{j=1}^{n+1}|\lambda_j| = \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j| + |\lambda_{n+1}| < \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1. \tag{5.4}$$

Правая часть (5.4) не зависит от $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$. Используя (5.2) и взяв в (5.4) максимум по x, приходим к (5.3). В объединении с тем, что $\|P\| \le n+1$, неравенство (5.3) даёт оценку (5.1).

Теорема доказана. $\square$

3.5.2. Случай, когда $n+1$ — число Адамара. Приведём другой вывод оценки $\|P\| \le \mathrm{const}\cdot n^{1/2}$ в случае, когда число $n+1$ — адамарово (см. [12; теорема 2]). Здесь, как и в п. 3.5.1, P — интерполяционный проектор, соответствующий максимальному симплексу. В отмеченном частном случае этот подход является более простым, чем подход теоремы 3.5.1.

Теорема 3.5.2. *Пусть $n+1$ — число Адамара. Тогда $\|P\| \le \sqrt{n+1}$.*

Доказательство. Положим $m = n+1$. Так как m — число Адамара, то максимальным в n-мерном кубе является правильный симплекс, вписанный в куб. Вычисления удобно провести для куба $Q := [-1,1]^n$. Переход к Q_n осуществляется с помощью леммы 2.3.3.

Пусть $\mathbf{H}_m$ — матрица Адамара, m-й столбец которой состоит из 1. Возьмём в качестве $P : C(Q) \to \Pi_1$ интерполяционный проектор по узлам, соответствующим строкам $\mathbf{H}_m$ (координаты узлов содержатся в первых $m-1$ столбцах). Для $f \in C(Q)$ обозначим через p интерполяционный многочлен, соответствующий значениям в узлах $f_1, \ldots, f_m$. Учитывая, что $\mathbf{H}_m^{-1} = m^{-1}\mathbf{H}_m^T$, для нормы P получаем равенство:

$$\|P\| = \sup_{\|f\|_{C(Q)}=1} \|p\|_{C(Q)} =$$

$$= \max_{x_j, f_k = \pm 1} \left| \left[(x_1, \ldots, x_{m-1}, 1) \frac{1}{m} \mathbf{H}_m^T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \right]^T \right| =$$

$$= \max_{f_k=\pm 1} \max_{x_j=\pm 1} (f_1, \ldots, f_m) \frac{1}{m} \mathbf{H}_m \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{m} \max_{x_1,\ldots,x_{m-1}=\pm 1} \sum_{i=1}^{m} |(\bar{x}, h^{(i)})|.$$

Здесь $\bar{x} := (x_1, \ldots, x_{m-1}, 1)$, $h^{(i)}$ — строки $\mathbf{H}_m$, $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$. Так как $\{h^{(i)}/\sqrt{m}\}$ — ортонормированный базис

$\mathbb{R}^m$, то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\bar{x}, h^{(i)})}{\sqrt{m}} \frac{h^{(i)}}{\sqrt{m}}, \qquad (\bar{x}, \bar{x}) = m = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\bar{x}, h^{(i)})^2}{m},$$

значит, $\sum(\bar{x}, h^{(i)})^2 = m^2$. Применяя неравенство Коши, получим

$$\sum_{i=1}^{m} |(\bar{x}, h^{(i)})| \le \sqrt{m} \Big(\sum_{i=1}^{m} (\bar{x}, h^{(i)})^2 \Big)^{1/2} = m\sqrt{m}.$$

Поэтому

$$\|P\| = \frac{1}{m} \max_{x_1, \ldots, x_{m-1} = \pm 1} \sum_{i=1}^{m} |(\bar{x}, h^{(i)})| \le \frac{m\sqrt{m}}{m} = \sqrt{m}.$$

Отсюда следует, что $c_{m-1} \le \sqrt{m}$. Теорема доказана. □

§ 3.6. Соотношение $\theta_n \asymp n^{1/2}$

3.6.1. Одним из наших основных результатов является следующая теорема, объединяющая результаты статей [18] и [19].

Теорема 3.6.1. *Для $n \ne 2$*

$$\frac{1}{e}\sqrt{n-1} < \theta_n \le \min\left(\frac{n+1}{2}, \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1 \right). \tag{6.1}$$

Левое неравенство из (6.1) *выполняется при любом n. Имеет место соотношение*

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \theta_n < 3\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.2}$$

Доказательство. Левое неравенство из (6.1) содержится в теореме 3.4.2. Неравенство $\theta_n \le (n+1)/2$, $n \ne 2$, установлено теоремой 3.2.3. Таким образом, справедливо (6.1). Далее, (6.2) верно для $n = 1$, так как $\theta_1 = 1$. При $n \ge 2$ выполняется

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < \frac{1}{e}\sqrt{n-1}.$$

Если $n \ge 6$, то

$$\frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1 < 3\sqrt{n}.$$

Последнее объясняется тем, что функция

$$g(n) := \frac{4\sqrt{e}}{3}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

убывает; значит, $g(n) \le g(6) = 2.94\ldots < 3$, если $n \ge 6$. Если же $n \le 5$, то верно $(n+1)/2 \le 3\sqrt{n}$. Поэтому правая часть (6.4) всегда $< 3\sqrt{n}$. Поэтому при $n \ne 2$ (6.2) следует из (6.1). Справедливость (6.2) в случае $n = 2$ следует из равенства $\theta_2 = 1 + 2\sqrt{5}5 = 1.89\ldots$ (см. § 2.4).

Теорема доказана. $\square$

Двойное неравенство (6.2) приводит к важному для нас результату $\theta_n \asymp n^{1/2}$. Отметим другие следствия полученных соотношений.

3.6.2. Следствия. Наши результаты означают, что проектор, соответствующий максимальному симплексу, при всех n является почти-минимальным (в смысле определения θ_n), а сам этот симплекс является почти-экстремальным (в смысле определения ξ_n). Точнее, справедливо такое утверждение (см. [19; следствие 4.6]).

Следствие 3.6.1. *Пусть P — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах максимального симплекса S. Для $n \in \mathbb{N}$ с универсальными константами имеют место соотношения*

$$\|P\| \asymp \theta_n, \quad \xi(S) \asymp \xi_n. \tag{6.3}$$

Доказательство. Из теорем 3.4.2 и 3.5.1 следует, что $\|P\| \asymp n^{1/2}$. Следствие 6.1.3 и теорема 3.2.1 дают $\xi(S) \asymp n$. Для получения (6.3) достаточно ещё привлечь соотношения $\theta_n \asymp n^{1/2}$ (см. теорему 3.6.1) и $\xi_n \asymp n$ (см. § 3.2). $\square$

Следующее утверждение устанавливает связь между величинами θ_n и h_n (см. [19; следствие 4.7]).

Следствие 3.6.2. *Справедливо соотношение $\theta_n \asymp h_n^{1/n}$.*

Доказательство. Из (1.2) следует, что $(1/2)\sqrt{n} < {h_n}^{1/(n+1)} \le \sqrt{n}$. При $n \ge 2$ правое неравенство является строгим. Итак, мы имеем оценки

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)/n} n^{(n+1)/(2n)} < h_n^{1/n} \le n^{(n+1)/(2n)}.$$

Нижняя оценка даёт

$$h_n^{1/n} > \frac{1}{2}\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} n^{1/(2n)} \ge \frac{1}{4}\sqrt{n}.$$

Так как $n^{1/(2n)} \le 3^{1/6} = 1.20\ldots$, то $h_n^{1/n} < 1.21\sqrt{n}$. Поэтому

$$\frac{1}{4}\sqrt{n} < h_n^{1/n} < 1.21\sqrt{n}. \tag{6.4}$$

Таким образом, $h_n^{1/n} \asymp n^{1/2}$. Для завершения доказательства осталось учесть (6.2). $\square$

Отметим теперь соотношение для объёма симплекса, соответствующего минимальному проектору (см. [19; следствие 4.8]).

Следствие 3.6.3. *Пусть P — произвольный проектор, удовлетворяющий условию $\|P\| = \theta_n$, и S — симплекс с вершинами в узлах этого проектора. Существует универсальная константа $c > 0$ такая, что для $n \in \mathbb{N}$*

$$c\nu_n^{1/n} < \mathrm{vol}(S)^{1/n} \le \nu_n^{1/n}. \tag{6.5}$$

Таким образом, $\mathrm{vol}(S)^{1/n} \asymp \nu_n^{1/n}$. *Кроме того,* $\mathrm{vol}(S)^{1/n} \asymp n^{-1/2}$.

Доказательство. Правое неравенство в (6.5) очевидно. Докажем, что если взять $c = 1/20$, то будет выполнено и левое неравенство. Константа $1/20$ не является наилучшей.

Пусть $\mathbf{A}$ — матрица узлов проектора P, определённая в § 1.1. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ вычтем из i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ её $(n+1)$-ю строку. Обозначим через $\mathbf{B}$ подматрицу, которая будет располагаться в первых n строках и первых n столбцах преобразованной матрицы. Если последний узел $x^{(n+1)}$ является нулевым, то $\mathbf{B}$ совпадает с матрицей $\mathbf{M}$ из § 3.5. Ясно, что $|\det(\mathbf{B})| = n!\mathrm{vol}(S)$. Воспользуемся оценкой (4.4) для нормы P, согласно которой

$$\|P\| > \frac{1}{2e} \cdot \left(\frac{n^{n+1}}{|\det(\mathbf{B})|}\right)^{1/n}.$$

Учтём далее соотношение $\|P\| = \theta_n < 3\sqrt{n}$, а также оценку $h_n^{1/n} < 1.21\sqrt{n}$, см. (6.2) и (6.4). Из (4.4) и этих неравенств следует

$$|\det(\mathbf{M}^*)|^{1/n} > \frac{n}{2e\|P\|} = \frac{n}{2e\theta_n} > \frac{1}{6e}\sqrt{n} >$$

$$> \frac{1}{6e \cdot 1.21} h_n^{1/n} = \frac{1}{19.73\ldots} h_n^{1/n} > \frac{1}{20} h_n^{1/n}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{vol}(S)^{1/n} = \left(\frac{|\det(\mathbf{M}^*)|}{n!}\right)^{1/n} >$$

$$> \frac{1}{20}\left(\frac{h_n}{n!}\right)^{1/n} = \frac{1}{20}\nu_n^{1/n}.$$

Теперь укажем неравенства, означающие, что $\mathrm{vol}(S)^{1/n} \asymp n^{-1/2}$. Из формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\ (n/e)^n \cdot e^{\zeta_n/(12n)}$, $0 < \zeta_n < 1$, следует, что при всех n

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/12}. \tag{6.6}$$

Применим (6.6) к двусторонней оценке (1.3) для ν_n. С одной стороны,

$$\nu_n^{1/n} \le \left(\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}\right)^{1/n} < \frac{(n+1)^{(n+1)/(2n)}}{2\left(\sqrt{2\pi n}(n/e)^n\right)^{1/n}} =$$

$$= \frac{e\sqrt{n+1}}{2n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2\pi n}}\right)^{1/n} < \frac{e\sqrt{n+1}}{2n} < 2n^{-1/2}.$$

С другой стороны,

$$\nu_n^{1/n} > \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}\right)^{1/n} >$$

$$> \frac{e\sqrt{n+1}}{2n}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2n}\left(\frac{\sqrt{1/(2\pi)}}{e^{1/12}}\right)^{1/n}.$$

Каждый из трёх последних сомножителей принимает своё минимальное значение при $n = 1$. Значит,

$$\nu_n^{1/n} > \frac{e\sqrt{n+1}}{2n}\cdot\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{1/(2\pi)}}{e^{1/12}} =$$

$$= \frac{3e^{11/12}}{8\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{n+1}}{n} = 0.52\ldots\frac{\sqrt{n+1}}{n} >$$

$$> 0.52\ldots n^{-1/2} > \frac{1}{2}n^{-1/2}.$$

Итак, при всех n

$$\frac{1}{2}n^{-1/2} < \nu_n^{1/n} < 2n^{-1/2}. \tag{6.7}$$

Как мы показали выше, $\mathrm{vol}(S)^{1/n} > (1/20)\nu_n^{1/n}$. Поэтому

$$\frac{1}{40}n^{-1/2} < \mathrm{vol}(S)^{1/n} < 2n^{-1/2}. \tag{6.8}$$

Следствие доказано. □

Заметим, что константы в неравенствах (6.7)–(6.8) не являются точными.

§ 3.7. О выполнении равенства $\xi_n = \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1$

Обратимся к вопросу о выполнении равенств справа в двусторонних оценках (2.2.5) и (2.2.9). Этот вопрос был рассмотрен в [24; п. 5]. Некоторое уточнение полученных там оценок было затем дано в [27]. В настоящем параграфе используются обе эти работы.

Необходимое и достаточное условие для данных P и S справедливости правого равенства в (2.2.5) — существование 1-вершины Q_n относительно симплекса S — уже отмечалось в теореме 2.2.1. Ниже мы остановимся на проекторе, узлы которого являются вершинами симплекса максимального объёма в Q_n. Кроме того, мы покажем, что совокупность тех n, при которых справедливо правое равенство в (2.2.9), является конечной. Иными словами, *существует такое* n_0, *что при* $n \geq n_0$ *справа в* (2.2.9) *выполняется строгое неравенство.* Для этого мы воспользуемся полученными ранее оценками.

3.7.1. Основные утверждения. Сначала сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.7.1. *Пусть* $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — *интерполяционный проектор, соответствующий максимальному симплексу* S *в* Q_n. *Если* $\|P\| > 3$, *то*

$$\xi(S) < \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1. \tag{7.1}$$

Если имеет место (7.1), *то* $\|P\| > 3 - 4/(n+1)$.

Пусть $n > 2$ *таково, что* $\theta_n > (3n-5)/(n-1)$. *Тогда*

$$\xi_n < \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1. \tag{7.2}$$

Если при данном n *имеет место* (7.2), *то* $\theta_n > 3 - 4/(n+1)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала (7.1). Если при $\|P\| > 3$ в этом соотношении вместо строгого неравенства имеет место равенство (другой вариант невозможен ввиду (2.2.5)), то

$$\xi(S) = \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1 > \frac{n+1}{2} \cdot 2 + 1 = n + 2.$$

Это противоречит оценке $\xi(S) \le n+2$ теоремы 3.2.1, и (7.1) доказано.

Допустим теперь, что выполняется (7.1). Применяя ещё следствие 1.6.3, запишем

$$\frac{n+1}{2}\left(\|P\|-1\right)+1 > \xi(S) \ge n,$$

откуда $\|P\| > 3 - 4/(n+1)$.

Неравенство (7.2) доказывается по аналогичной схеме с помощью (2.2.9) и оценки $\xi_n \le (n^2-3)/(n-1)$ теоремы 3.2.2. Наконец, из (7.2) и оценки $\xi_n \ge n$ следствия 1.6.3 получается $\theta_n > 3 - 4/(n+1)$.

Теорема доказана. $\square$

Пусть

$$\Psi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}$$

— рассмотренный выше стандартизованный многочлен Лежандра степени n. При $t \ge 1$ справедливо равенство ($0^0 := 1$)

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 (t-1)^{n-i}(t+1)^i. \tag{7.3}$$

Оно эквивалентно соотношению 6 из [35; с. 625]. Две последние формулы распространяются и на $n=0$, что даёт $\Psi_0(t)=1$. Мы учтём это ниже в рекуррентных соотношениях, но во всех других случаях по-прежнему считаем $n \ge 1$. Выше было доказано, что при всех n

$$\theta_n \ge \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}. \tag{7.4}$$

Левое неравенство содержится в теореме 3.4.1; правое неравенство было установлено в ходе доказательства теоремы 3.4.2.

Теорема 3.7.2. *Если $n > 2$ таково, что*

$$\Psi_n\left(\frac{3n-5}{n-1}\right)\cdot \nu_n < 1, \tag{7.5}$$

то имеет место строгое неравенство (7.2). *Далее,* (7.2) *справедливо при любом $n \ge 68$.*

Доказательство. Пусть $n > 2$ таково, что верно (7.5). Из (7.4) следует, что

$$\theta_n \ge \Psi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) > \frac{3n-5}{n-1}.$$

Последнее неравенство эквивалентно (7.5). Итак, при данном $n > 2$ выполняется неравенство $\theta_n > (3n-5)/(n-1)$ из условия теоремы 3.7.1. Значит, имеет место (7.2).

Пусть теперь $n \geq 68$. Тогда $n > 9e^2 + 1 = 67.501\ldots$, то есть

$$\frac{\sqrt{n-1}}{e} > 3 > \frac{3n-5}{n-1}.$$

Поэтому в связи с (7.4) вновь получаем $\theta_n > (3n-5)/(n-1)$. Остаётся ещё раз применить теорему 3.7.1. Теорема доказана. □

3.7.2. Уточнение границы n_0. Из (7.4) следует, что если $n \geq 68$, то имеет место (7.5), но обратное неверно. Границу $n_0 = 68$, гарантирующую при $n \geq n_0$ выполнение (7.2), можно понизить за счёт более точного анализа условия (7.5). Продемонстрируем это.

Заменим (7.5) менее жёстким, но более простым по записи условием

$$\Psi_n(3) \cdot \nu_n < 1. \tag{7.6}$$

Ясно, что из (7.6) вытекает (7.5). Представление (7.3) даёт

$$\alpha_n := \Psi_n(3) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 2^i.$$

Другой способ вычисления α_n состоит в использовании рекуррентного соотношения для многочленов Лежандра [36; с. 82]

$$\Psi_{n+1}(t) = \frac{(2n+1)t\Psi_n(t) - n\Psi_{n-1}(t)}{n+1};$$

$$\Psi_0(t) = 1, \quad \Psi_1(t) = t.$$

Из него видно, что

$$\alpha_{n+1} = \frac{3(2n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}}{n+1}; \qquad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 3. \tag{7.7}$$

По индукции имеем $\alpha_n \leq 6^n$, то есть $\alpha_n^{1/n} \leq 6$. Оказывается, при $n \to \infty$ верно $\alpha_n^{1/n} \to 3 + \sqrt{8} = 5.828\ldots$ Последнее вытекает из асимптотического соотношения Лапласа–Гейне [6, с. 202]

$$\Psi_n(t) \cong (2\pi n)^{-1/2} \left(t^2 - 1\right)^{-1/4} \left[t + \left(t^2 - 1\right)^{1/2}\right]^{n+1/2} \tag{7.8}$$

(равномерно по $t \in [1+\varepsilon, \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$). Запись $a_n \cong b_n$ означает, что $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$. Применение (7.8) даёт

$$\alpha_n = \Psi_n(3) \cong \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{8\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^n}{\sqrt{n}},$$

откуда и получается значение предела $\alpha_n^{1/n}$.

Величина ν_n при любом n удовлетворяет оценке

$$\nu_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}$$

(см.(1.3)).Таким образом,

$$(\alpha_n \nu_n)^{1/n} \leq \delta_n := \alpha_n^{1/n} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2n}}{2(n!)^{1/n}}.$$

Вычисления с применением (7.7) показывают, что $\delta_{56} > 1$, а при $57 \leq n \leq 68$ справедливо $\delta_n < 1$. Получаем, что условие (7.6), а с ним и (7.5) выполняются при $n \geq 57$. Привлекая теперь теорему 3.7.2, получаем, что (7.2) справедливо по крайней мере при $n \geq 57$.

§ 3.8. Примеры

Проиллюстрируем примерами утверждения этой и предыдущей глав. Особое внимание мы уделим выполнению равенства в правом неравенстве из (2.5), то есть соотношению

$$\xi(S) = \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1. \tag{8.1}$$

Здесь $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор с узлами в вершинах симплекса $S \subset Q_n$. Согласно теореме 2.2.1, (8.1) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S. В других случаях в (8.1) знак $=$ заменяется на $<$. Напомним также, что $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$ называется μ-вершиной ($1 \leq \mu \leq n$) относительно S, если

$$\|P\| = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$$

и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных.

Два симплекса назовём *эквивалентными,* если они подобны с коэффициентом 1.

Материалы этого пункта взяты из статей [24] и [18].

3.8.1. Жёсткий симплекс. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим симплекс S с вершинами $x^{(1)} = (0,1,\ldots,1)$, $x^{(2)} = (1,0,\ldots,1)$, $\ldots$, $x^{(n)} = (1,1,\ldots,0)$, $x^{(n+1)} = (0,0,\ldots,0)$ из доказательств теорем 3.2.2, 3.2.3. Как отмечалось в п. 3.2.3, по терминологии статьи [52] этот симплекс является жёстким: замена любой вершины S на любую точку Q_n уменьшает объём симплекса. Вместе с тем $\mathrm{vol}(S) = (n-1)/n!$ максимален лишь для $2 \leq n \leq 4$ (см. [52; лемма 3.3]). Покажем, что значения $n = 2,3,4$ исчерпывают также и все случаи выполнения равенства (8.1).

При доказательстве теоремы 3.2.3 для соответствующего проектора установлено равенство

$$\|P\| = \begin{cases} 3 & , \quad n = 2; \\ \frac{n+1}{2} & , \quad n \geq 3 \text{ нечётное}; \\ \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} & , \quad n > 3 \text{ чётное}. \end{cases}$$

Информация о многочленах $\lambda_j(x)$ и тех экстремальных $x \in \mathrm{ver}(Q_n)$, на которых достигается $\|P\|$, то есть выполняется равенство $\|P\| = \sum |\lambda_j(x)|$, содержится в доказательстве теоремы 3.2.3 В силу симметрии там рассматривались вершины вида $x = (1,\ldots,1,0,\ldots,0)$; остальные получаются перестановками координат. Пусть k — число единиц в экстремальном наборе x. Эта величина принимает следующие значения. Для $n = 2$ и $n = 3$ можно взять $k = n$; в обеих ситуациях это соответствует 1-вершине. Далее, в случае $n > 2$ возможные значения k находятся по правилам: $k = m$, если $n = 2m + 1$; $k = m$ или $k = m - 1$, если $n = 2m$. Однако начиная с $n = 4$ экстремальная точка указанного вида является 1-вершиной лишь при условии $k = 1$. В этом случае $x^* = (1,0,\ldots,0)$ даёт $\lambda_1(x^*) < 0$, $\lambda_2(x^*) > 0$, $\ldots$, $\lambda_{n+1}(x^*) > 0$. Для x со значениями $k > 1$ число отрицательных $\lambda_j(x)$ всегда отлично от 1.

Применяя теорему 2.2.1, приходим к следующему. В двумерной ситуации имеется 1-вершина Q_2, а именно $(1,1)$. Так как при $n = 2$ справедливо $\|P\| = 3$, то

$$\xi(S) = \frac{2+1}{2}(3-1) + 1 = 4.$$

Если $n = 3$, то 1-вершины получаются при $k = 3$ или $k = 1$ — точки

$(1,1,1)$ и $(1,0,0)$. Так как $\|P\| = 2$, то

$$\xi(S) = \frac{3+1}{2}(2-1) + 1 = 3.$$

Если $n = 4$, то для экстремальных точек $k = 1$ или $k = 2$, но только первое значение соответствует 1-вершине, а именно $(1,0,0,0)$. В этой ситуации $\|P\| = 7/3$. Выполняется

$$\xi(S) = \frac{4+1}{2}\left(\frac{7}{3} - 1\right) + 1 = \frac{13}{3}.$$

Начиная с $n = 5$ для экстремальных x всегда $k > 1$. Значит, для любого $n \geq 5$ не существует 1-вершины Q_n относительно S. Это гарантирует при $n \geq 5$ строгое неравенство

$$\xi(S) < \frac{n+1}{2}(\|P\| - 1) + 1. \tag{8.2}$$

Если $n > 5$, то $\|P\| > 3$. Но поскольку при $n \geq 5$ симплекс S не является максимальным, получить (8.2) с помощью теоремы 3.7.1 не удаётся.

Заметим, что равенство $\|P\| = 7/3$ для $n = 4$ даёт оценку $\theta_4 \leq 7/3$.

3.8.2. О проекторах с условием $\|P\| > 3$. Из теоремы 3.7.1 следует, что *если выполняется* (8.1) *и* $\|P\| > 3$, *то обязательно* $\mathrm{vol}(S) < \nu_n$. Симплексы и соответствующие им проекторы с такими свойствами существуют для любого n. При $n = 1$ (8.1) выполняется для любых S и P. В двумерной ситуации подходит симплекс S с вершинами $(1/2, 0)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Имеем: $\mathrm{vol}(S) = 1/4 < \nu_2 = 1/2$, $\xi(S) = 7$, $\|P\| = 5$, и выполняется (8.1). Точка $x = (1,1)$ является 1-вершиной Q_2 относительно S.

В качестве примера, подходящего для любого $n \geq 3$, возьмём "угловой" симплекс, одна из вершин которого — произвольная $v \in \mathrm{ver}(Q_n)$, а n остальных — вершины Q_n, соседние с v. Пусть вершинами S являются $v = x^{(n+1)} = 0$, $x^{(1)} = (1,0,\ldots,0)$, $\ldots$, $x^{(n)} = (0,0,\ldots,1)$. В п. 2.3.2 отмечено, что $\|P\| = 2n-1$, поэтому при $n > 2$ выполняется $\|P\| > 3$. Как нетрудно найти, $\xi(S) = n^2$. Так как

$$n^2 = \frac{n+1}{2}(2n-2) + 1,$$

то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется (8.1). Многочлены $\lambda_i(x)$ имеют вид (см. п. 2.3.2)

$$\lambda_1(x) = x_1, \ \ldots, \ \lambda_n(x) = x_n, \ \lambda_{n+1}(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i + 1.$$

Для вершины $e = (1, \ldots, 1)$ имеем

$$\lambda_1(e) = \ldots = \lambda_n(e) = 1, \quad \lambda_{n+1}(e) = -(n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i(e)| = 2n - 1 = \|P\|.$$

Значит, при любом $n > 1$ точка e является 1-вершиной Q_n относительно S. Наконец, отметим, что S есть максимальный симплекс в Q_n лишь при $n = 1$ и $n = 2$. Действительно, если $n \geq 3$, то $\mathrm{vol}(S) = 1/n! < \nu_n$. Это неравенство следует, например, из оценки

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} < \nu_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

см. (1.3). Достаточно убедиться, что при $n > 2$ левая часть последнего соотношения превышает $1/n!$.

3.8.3. Симплексы максимального объёма в Q_n для $n \leq 7$. Покажем, что при $1 \leq n \leq 5$ и $n = 7$ для любого максимального симплекса S и соответствующего проектора P выполняется равенство (8.1), а при $n = 6$ для одних таких S выполняется (8.1), а для других — (8.2). Попутно мы проиллюстрируем следующий факт: *возможно, что* $\mathrm{vol}(S_1) = \mathrm{vol}(S_2)$ *и* $\|P_1\| = \|P_2\|$, *но* $\xi(S_1) \neq \xi(S_2)$.

Для $n = 1$ существует единственный максимальный симплекс, вершины которого совпадают с концами $[0, 1]$. Норма соответствующего проектора равна 1, поэтому (8.1) выполняется тривиальным образом.

Для $n = 2$ каждый максимальный симплекс эквивалентен симплексу S с вершинами $(0, 1)$, $(\tau, 1)$, $(0, 0)$, $0 \leq \tau \leq 1$. Если $\tau = 1/2$, то существуют две 1-вершины Q_2 относительно S, а именно $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Если $\tau \neq 1/2$, то имеется единственная 1-вершина из двух указанных. Во всех вариантах для S и соответствующего P справедливо (8.1).

Перейдём к $n \geq 3$. Введём в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Справедливо следующее утверждение [52; теорема 2.3]. *Для любого $3 \le n \le 5$ каждый симплекс, максимальный в Q_n, эквивалентен симплексу, ненулевые вершины которого задаются строками матрицы $\mathbf{M}_n$, а последняя вершина совпадает с началом координат. Каждый симплекс, максимальный в Q_6, эквивалентен симплексу, ненулевые вершины которого задаются отдельно строками (S_1) или столбцами (S_2) матрицы $\mathbf{M}_6$; последняя вершина каждого симплекса есть* 0. Заметим, что S_1 и S_2 не являются подобными с коэффициентом 1, так как длины их максимальных рёбер равны $\sqrt{5}$ для S_1 и 2 для S_2.

При $n = 3$ и $n = 4$ любой максимальный симплекс эквивалентен жёсткому симплексу, рассмотренному в примере 3.8.1. По изложенным там соображениям для каждого S с условием $\mathrm{vol}(S) = \nu_n$ верно (8.1). Случаи $5 \le n \le 7$ требуют дополнительного анализа.

Пусть $n = 5$ и S — симплекс, ненулевые вершины которого задаются строками матрицы $\mathbf{M}_5$, а последняя вершина есть 0. Так как $\det(\mathbf{M}_5) = 5$, то $\mathrm{vol}(S) = 5/5! = 1/24 = \nu_5$, и S является максимальным в Q_5. Для соответствующего интерполяционного проектора $\|P\| = 13/5 = 2.6$ (см. [18]), что даёт $\theta_5 \le 2.6$. Вычисления показывают, что μ-вершины Q_5 относительно S существуют для $\mu = 1, 2, 3$. В эту совокупность входят: три 1-вершины — $(0,1,1,0,0)$, $(0,1,0,1,0)$, $(0,0,1,1,0)$; семь 2-вершин — $(0,1,0,0,0)$, $(0,0,1,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,0,1,1,1)$, $(0,1,0,1,1)$, $(0,1,1,0,1)$, $(1,0,1,1,0)$; три 3-вершины — $(1,1,0,0,0)$, $(1,0,1,0,0)$, $(1,0,0,1,0)$. Наличие 1-вершины гарантирует (8.1). В частности, это даёт

$$\xi(S) = \frac{5+1}{2}\left(\frac{13}{5} - 1\right) + 1 = \frac{29}{5} = 5.8.$$

Пусть теперь $n = 6$, а S_1 и S_2 — симплексы, введённые выше с помощью строк (S_1) и столбцов (S_2) матрицы $\mathbf{M}_6$. Так как $\det(\mathbf{M}_6) = 9$, то $\mathrm{vol}(S_1) = \mathrm{vol}(S_2) = 9/6! = 1/80 = \nu_6$, поэтому каждый симплекс S_1, S_2 является максимальным в Q_6. Для соответствующих проекторов $\|P_1\| = \|P_2\| = 3$ (см. [18]). Это даёт $\theta_6 \le 3$.

Вычисления показывают, что μ-вершины Q_6 относительно S_1 существуют для $\mu = 2, 3$. Ими являются семь 2-вершин: $(1,1,0,1,0,0)$,

$(1,1,0,0,1,0)$, $(1,0,0,0,1,1)$, $(1,0,1,0,1,1)$, $(1,1,1,0,1,0)$, $(1,1,1,1,0,0)$, $(1,0,1,1,0,1)$ и 3-вершина $(0,0,1,0,0,0)$. Ни одной 1-вершины Q_6 относительно S_1 не существует, следовательно,

$$\xi(S_1) < \frac{6+1}{2}(3-1)+1 = 8.$$

Далее, μ-вершины Q_6 относительно S_2 существуют для $\mu = 1,3$. Ими являются 1-вершина $(1,0,0,1,1,0)$, а также следующие шесть 3-вершин: $(0,0,0,1,0,1)$, $(0,0,0,0,1,1)$, $(1,0,1,0,1,1)$, $(1,1,1,0,1,0)$, $(1,1,1,1,0,0)$, $(1,0,1,1,0,1)$. Существование 1-вершины влечёт выполнение (8.1), а последнее даёт $\xi(S_2) = 8$. Итак, хотя $\mathrm{vol}(S_1) = \mathrm{vol}(S_2)$ и $\|P_1\| = \|P_2\|$, но $\xi(S_1) \neq \xi(S_2)$.

Используя соображения подобия, наши задачи можно решать для куба $Q_n' := [-1,1]^n$. При $n = 7$ единственный с точностью до эквивалентности симплекс S максимального объёма в Q_7' задаётся с помощью матрицы Адамара восьмого порядка

$$\mathbf{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координаты i-й вершины симплекса содержатся в первых семи столбцах i-й строки матрицы. В данном случае симплекс S оказывается правильным. Норма соответствующего проектора $P : C(Q_7') \to \Pi_1(\mathbb{R}^7)$ равна $5/2$. Так как $\mathbf{H}_8$ — матрица Адамара, то $\mathbf{H}_8^{-1} = (1/8)\mathbf{H}_8^T$. Поэтому коэффициенты многочлена λ_j составляют j-ю строку матрицы $(1/8)\mathbf{H}_8$:

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{8}\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + 1\right),$$

$$\lambda_2(x) = \frac{1}{8}\left(-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + 1\right)$$

и так далее. Для $x^* = (-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$ имеем:

$$\lambda_1(x^*) = -\frac{3}{4},\ \lambda_2(x^*) = \ldots = \lambda_8(x^*) = \frac{1}{4},$$

$$\sum_{i=1}^{8} |\lambda_i(x^*)| = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot 7 = \frac{5}{2} = \|P\|.$$

Следовательно, x^* есть 1-вершина Q_7' относительно S. Поэтому S и P удовлетворяют аналогу равенства (8.1) для куба $[-1,1]^7$. Значит, (8.1) выполняется также и для правильного симплекса, вписанного в куб $[0,1]^7$. В заключение заметим, что значение $\|P\|$ совпадает с правой частью правого неравенства из (2.2.10). Учитывая подобие, из следствия 2.2.2 получаем, что $\theta_7 = 5/2$. Так как $\xi_7 = 7$ (следствие 3.2.1), то при $n = 7$ правое соотношение из (2.9) является равенством.

3.8.4. Оценки θ_n и ξ_n для $n \le 7$. Приведём здесь наиболее точные из полученных нами соотношений для первых семи чисел θ_n и ξ_n :

$$\theta_1 = 1, \qquad \theta_2 = 1.89\ldots, \qquad \theta_3 = 2,$$

$$2.2\ldots \le \theta_4 \le 2.33\ldots, \qquad 2.33\ldots \le \theta_5 \le 2.6,$$

$$2.42\ldots \le \theta_6 \le 3, \qquad \theta_7 = 2.5;$$

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = 2.34\ldots, \qquad \xi_3 = 3,$$

$$4 \le \xi_4 \le 4.33\ldots, \qquad 5 \le \xi_5 \le 5.5,$$

$$6 \le \xi_6 \le 6.6, \qquad \xi_7 = 7.$$

Нижние оценки θ_n, $n = 4,5,6$, получены с помощью соотношения $\theta_n \ge 3 - 4/(n+1)$ следствия 2.2.2. При оценивании ξ_n применялись неравенства $n \le \xi_n \le (n^2-3)/(n-1)$ следствий 2.2.2 и теоремы 3.2.2.

3.8.5. Соотношение между $\alpha(S)$, $\beta(S)$, $\xi(S)$ и $\|P\|$. Приведём неравенства, в которых участвуют введённые выше геометрические характеристики $\alpha(S)$, $\beta(S)$, $\xi(S)$ и норма интерполяционного проектора P : $C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах симплекса $S \subset Q_n$:

$$n \le n\beta(S) \le \alpha(S) \le \xi(S) \le \frac{n+1}{2}(\|P\|-1)+1. \tag{8.3}$$

Цепочка (8.3) объединяет многие предыдущие результаты. Отметим случаи, когда все неравенства в (8.3) обращаются в равенства. Для $n = 1$

таковым является единственный симплекс $S = [0,1] = Q_1$. Для $n = 2$ симплекса с таким свойством не существует, так как для любого S верно $\xi(S) \geq \xi_2 = 2.34\ldots > 2$. В трёхмерной ситуации все равенства в (8.3) выполняются для любого проектора с минимальной нормой. Наконец, при $n = 7$ подходящим является правильный симплекс, вписанный в Q_7.

§ 3.9. Улучшение оценок θ_n для конкретных n

Этот параграф написан по материалам статьи [23].

3.9.1. Об одном соответствии между $(-1/1)$-матрицами и $(0/1)$-матрицами. Для установления оценок сверху величины θ_n будут использоваться $(0/1)$-матрицы порядка n с максимальным определителем h_n. Строки или столбцы такой матрицы, пополненные $(0,\ldots,0)$, дают систему узлов почти-минимального интерполяционного проектора. Симплекс с вершинами в этих узлах является симплексом максимального объёма в Q_n. Подробности этого подхода описаны в § 3.5.

Покажем, что $(0/1)$-матрицы с максимальным определителем могут быть получены и из экстремальных $(-1/1)$-матриц с помощью специальной процедуры, предложенной в [52]. Мы приведём здесь описание этой процедуры и установим нужное нам свойство.

Пусть $\mathbf{A}$ — $(-1/1)$-матрица порядка $n+1$, причём $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, $\mathbf{D}$ — $(0/1)$-матрица порядка n. *Будем говорить, что* $\mathbf{D}$ *получается из* $\mathbf{A}$ *с помощью процедуры* $(*)$, *если эти матрицы связывает следующая последовательность шагов.*

1. Каждый столбец $\mathbf{A}$, начинающийся с -1, умножается на -1.

2. Каждая строка новой матрицы, начинающаяся с -1, также умножается на -1. Матрицу порядка $n+1$, которая получится в результате выполнения шагов 1–2, обозначим через $\mathbf{B}$. У этой $(-1/1)$-матрицы первый столбец и первая строка целиком состоят из 1.

3. Пусть $\mathbf{C}$ — подматрица порядка n матрицы $\mathbf{B}$, стоящая в строках и столбцах с номерами 2, $\ldots$, $n+1$. В этой матрице производится следующая замена элементов: 1 заменяется на 0, а -1 на 1. Получившаяся $(0/1)$-матрица порядка n есть $\mathbf{D}$.

Теорема 3.9.1. *Пусть* $\mathbf{D}$ *получается из* $\mathbf{A}$ *с помощью процедуры* $(*)$. *Тогда имеет место равенство*

$$|\det(\mathbf{D})| = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{2^n}. \tag{9.1}$$

Если $|\det(\mathbf{A})| = g_{n+1}$, *то* $|\det(\mathbf{D})| = h_n$.

Доказательство базируется на рассуждениях п. 2 статьи [52] и дополнено здесь необходимыми деталями.

Пусть S_1 — $(n+1)$-мерный симплекс, одна вершина которого совпадает с 0, а ненулевые вершины покоординатно задаются строками $\mathbf{B}$; S_2 — n-мерный симплекс, одна вершина которого есть $(1,\ldots,1)$, а остальные n вершин соответствуют строкам $\mathbf{C}$; наконец, пусть S_3 — n-мерный симплекс, одна вершина которого есть 0, а остальные n вершин соответствуют строкам $\mathbf{D}$. Используя связь между определителями и объёмами, запишем сначала равенство

$$\mathrm{vol}(S_1) = \frac{|\det(\mathbf{B})|}{(n+1)!} = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{(n+1)!}. \tag{9.2}$$

Ненулевые вершины S_1 принадлежат грани $x_1 = 1$ куба $[-1,1]^n$, поэтому высота этого симплекса, опущенная из нулевой вершины, равна 1. Далее, симплекс S_2 конгруэнтен грани симплекса S_1, лежащей на указанной грани куба. Из формулы для объёма симплекса следует, что

$$\mathrm{vol}(S_1) = \frac{\mathrm{vol}(S_2)}{n+1}. \tag{9.3}$$

Замены чисел, отмеченные в шаге 3, есть результат аффинного преобразования куба $[-1,1]^n$ в куб $[0,1]^n$, при котором вершина $(1,\ldots,1)$ первого куба переходит в вершину $(0,\ldots,0)$ второго. При этом преобразовании меры множеств умножаются на 2^{-n}. Так как S_3 есть образ S_2, то

$$\mathrm{vol}(S_3) = \frac{\mathrm{vol}(S_2)}{2^n}. \tag{9.4}$$

Наконец,

$$\mathrm{vol}(S_3) = \frac{|\det(\mathbf{D})|}{n!}. \tag{9.5}$$

Последовательно выражая объёмы с помощью равенств (9.5), (9.4) и (9.3), получим:

$$|\det(\mathbf{D})| = n!\mathrm{vol}(S_3) = \frac{n!\mathrm{vol}(S_2)}{2^n} =$$
$$= \frac{(n+1)!\mathrm{vol}(S_1)}{2^n} = \frac{|\det(\mathbf{B})|}{2^n}.$$

Соотношение (9.1) доказано.

Пусть теперь $|\det(\mathbf{A})| = g_{n+1}$, тогда из (9.1) следует, что $|\det(\mathbf{D})| = 2^{-n}g_{n+1}$. Однако по теореме 2.1 из [52] величины h_n и g_{n+1} для всех n связаны равенством

$$h_n = \frac{g_{n+1}}{2^n}.$$

Поэтому в рассматриваемой ситуации $|\det(\mathbf{D})| = h_n$.

Теорема доказана. $\square$

Пусть, например,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В ходе реализации процедуры $(*)$ получаются матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det(\mathbf{A}) = 48 = g_5$, то по теореме $|\det(\mathbf{D})| = h_4 = 3$. Действительно, $\det(\mathbf{D}) = -3$. Пополняя систему строк матрицы $\mathbf{D}$ нулевой, получим точки $x^{(1)} = (0,1,1,1)$, $x^{(2)} = (1,0,1,1)$, $x^{(3)} = (1,1,0,1)$, $x^{(4)} = (1,1,1,0)$, $x^{(5)} = (0,0,0,0)$. Симплекс S с вершинами $x^{(j)}$ имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в Q_4. Объём S равен $|\det(\mathbf{D})|/4! = 1/8$. Пусть P — интерполяционный проектор из $C(Q_4)$ на пространство линейных функций, построенный по узлам $x^{(j)}$. Тогда $\|P\| = 7/3$, см. п. 3.8.1. Таким образом, $\theta_4 \le 7/3 = 2.33\ldots$

Заметим, что шаги 3 и 2 процедуры $(*)$ допускают обращение. В результате выполнения обратной процедуры из (0/1)-матрицы $\mathbf{D}$ порядка n получается $(-1/1)$-матрица $\mathbf{B}$ порядка $n+1$, первая строка и первый столбец которой полностью состоят из 1. Точно так же, как равенство (1.1), устанавливается соотношение $|\det(\mathbf{B})| = 2^n|\det(\mathbf{D})|$. Поэтому если $|\det(\mathbf{D})| = h_n$, то $|\det(\mathbf{B})| = g_{n+1}$.

В таблице 1 даны первые 20 значений максимальных определителей h_n и $g_n = 2^{n-1}h_{n-1}$. Информация взята с сайта www.indiana.edu/$\sim$maxdet; там же приводятся экстремальные $(-1/1)$-матрицы. Их явный вид и был использован для получения оценок θ_n. Первые 16 чисел h_n приводятся также в статье Циглера [68], содержащей много полезных сведений о (0/1)-многогранниках.

n	h_n	g_n
1	1	1
2	1	$2\cdot 1=2$
3	2	$2^2\cdot 1=4$
4	3	$2^3\cdot 2=16$
5	5	$2^4\cdot 3=48$
6	9	$2^5\cdot 5=160$
7	$4\cdot 2^3=32$	$2^6\cdot 9=576$
8	$7\cdot 2^3=56$	$2^7\cdot 32=4096$
9	$18\cdot 2^3=144$	$2^8\cdot 56=14336$
10	$40\cdot 2^3=320$	$2^9\cdot 144=73728$
11	$6\cdot 3^5=1458$	$2^{10}\cdot 320=327680$
12	$15\cdot 3^5=3645$	$2^{11}\cdot 1458=2985984$
13	$39\cdot 3^5=9477$	$2^{12}\cdot 3645=14929920$
14	$105\cdot 3^5=25515$	$2^{13}\cdot 9477=77635584$
15	$8\cdot 4^7=131072$	$2^{14}\cdot 25515=418037760$
16	$20\cdot 4^7=327680$	$2^{15}\cdot 131072=4294967296$
17	$68\cdot 4^7=1114112$	$2^{16}\cdot 327680=21474836480$
18	$(?)833\cdot 4^6=3411968$	$2^{17}\cdot 1114112=146028888064$
19	$10\cdot 5^9=19531250$	$(?)2^{18}\cdot 3411968=894426939392$
20	$29\cdot 5^9=56640625$	$2^{19}\cdot 19531250=10240000000000$

Таблица 1

3.9.2. Верхние оценки чисел θ_n для $n \le 20$. Выше мы получили ряд оценок чисел θ_n, означающих, что $c_1 n^{1/2} \le \theta_n \le c_2 n^{1/2}$. Приведём здесь установленные оценки сверху. Определим последовательность $\{r_n\}$ следующим образом. Первые семь значений r_n равны

$$r_1 := 1, \quad r_2 := 3, \quad r_3 := 2, \quad r_4 := \frac{7}{3},$$

$$r_5 := \frac{13}{5}, \quad r_6 := 3, \quad r_7 := \frac{5}{2}.$$

Пусть $n > 7$. Если существует матрица Адамара порядка $n+1$, положим $r_n := \sqrt{n+1}$; в противном случае возьмём

$$r_n := \frac{4\sqrt{e}}{3}\sqrt{n+2} + 1.$$

Наши результаты (теремы 2.4.1, 2.5.1, 3.5.2; см. также § 3.8) означают, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\theta_n \le r_n$. Кроме того, при $n \ne 2$ справедливо $\theta_n \le (n+1)/2$, см. теорему 3.2.3.

Располагая сведениями о максимальных определителях, состоящих из -1 и 1, и действуя так, как отмечалось в п. 3.9.1, можно получить явный вид узлов интерполяции, совпадающих с вершинами симплекса максимального объёма в Q_n. Для соответствующего проектора P^*, очевидно, $\theta_n \le \|P^*\|$. Вычислив норму P^*, получим оценку сверху величины θ_n. Если при некотором n значение $\|P^*\|$ меняется в зависимости от имеющегося выбора S^*, то в качестве верхней границы для θ_n естественно взять минимальную из найденных норм.

В таблице 2 приводятся результаты вычисления норм интерполяционных проекторов с помощью компьютера для $n \le 20$. Эти результаты взяты из статьи автора и И. В. Хлестковой [23]. Для каждого $n \ne 18$ верхняя граница θ_n, помещённая в четвёртой графе таблицы 2, равна $\|P^*\|$ при некотором выборе экстремальной (0/1)-матрицы порядка n и связанного с ней симплекса S^* максимального объёма в Q_n. В исключительном случае $n = 18$ указана норма проектора, для которого соответствующий симплекс *предположительно* имеет максимальный объём. Нетрудно видеть, что при любом $n = 8, \ldots, 20$ найденная таким путём граница меньше, чем $\min(r_n, (n+1)/2)$. Таким образом, для $8 \le n \le 20$ полученные на компьютере верхние оценки величин θ_n точнее тех, которые следуют из приведённых выше общих теоретических результатов. Разумеется, этот метод может быть перенесён и на $n > 20$.

n	r_n	$(n+1)/2$	$\theta_n \leq$
1	1	1	1
2	3	1.5	3
3	2	2	2
4	2.3333...	2.5	2.3333...
5	2.6	3	2.6
6	3	3.5	3
7	2.5	4	2.5
8	7.9516	4.5	3.1428...
9	8.2909...	5	3.0000...
10	8.6151...	5.5	3.8000...
11	3.4641...	6	3.0000...
12	9.2256...	6.5	3.4000...
13	9.5139...	7	3.7692...
14	9.7931...	7.5	4.1999...
15	4	8	3.5
16	10.3265...	8.5	4.2000...
17	10.5821...	9	4.0882...
18	10.8310...	9.5	5.5882...
19	4.4721...	10	4
20	11.3109...	10.5	4.7241...

Таблица 2

§ 3.10. Открытые вопросы и замечания

В круге рассматриваемых проблем имеются интересные вопросы, ответы на которые автору не известны. Сформулируем и прокомментируем соответствующие гипотезы (см. [27]).

(H1) *Пусть* $S \subset Q_n$ — *невырожденный* n*-мерный симплекс. Если* $\xi(S) = \xi_n$, *то*

$$\xi(S) = \alpha(S). \tag{10.1}$$

(H2) *Для любого n существует константа $\varkappa_n \geq 1$ такая, что если $S \subset Q_n$, то*

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \varkappa_n\bigl(\xi(S) - \xi_n\bigr). \tag{10.2}$$

Здесь и далее $\varkappa_n$ обозначает наименьшую возможную константу, стоящую в (10.2).

(H3) *$n+1$ является числом Адамара тогда и только тогда, когда $\xi_n = n$.*

Напомним, что $\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} 1/d_i(S)$ (см. гл. 1).

Как отмечалось выше, равенство (10.1) выполняется тогда и только тогда, когда каждая $(n-1)$-мерная грань симплекса $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n. При этом грань $\xi(S)S$, параллельная грани S с уравнением $\lambda_j(x) = 0$, содержит ту вершину Q_n, на которой достигается $\max\{(-\lambda_j(x)) : x \in \mathrm{ver}(Q_n)\}$. Таким образом, предложение (H1) эквивалентно следующему: *если $S \subset Q_n$ и $\xi(S) = \xi_n$, то каждая $(n-1)$-мерная грань симплекса $\xi(S)S$ содержит вершину Q_n.* Любые два невырожденных параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$ связаны аффинным преобразованием. Поэтому последнее утверждение эквивалентно такому.

(H4) *Пусть S — симплекс, D — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ и для некоторого $\sigma > 0$ верны включения $S \subset D \subset \sigma S$. Предположим, что некоторая $(n-1)$-мерная грань σS не содержит вершин D. Тогда существует параллелепипед D', для которого одновременно $S \subset D' \subset \sigma S$ и $\mathrm{ver}(D') \subset \mathrm{int}(\sigma S)$.*

Из предыдущих результатов следует, что утверждения гипотез (H1) и (H4) выполняются по крайней мере для $n = 2$ и случая, когда $n+1$ есть число Адамара. Представляют интерес уже двумерный и трёхмерный варианты (H4).

Если $\xi(S) = \xi_n$, то из (10.2) сразу получаем (10.1). Поэтому для доказательства (H1) и (H4) достаточно установить (H2). В ситуации, когда $n+1$ — число Адамара, для любого симплекса $S \subset Q_n$

$$\xi_n = n \leq \alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S),$$

следовательно, (10.2) выполняется с неулучшаемой константой $\varkappa_n = 1$. Равенство в (10.2) эквивалентно условию $\alpha(S) = n$, т. е. $d_1(S) = \ldots = d_n(S) = 1$. Этим свойством обладает, в частности, правильный симплекс, вписанный в Q_n.

Итак, $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 1$. Существуют ли отличные от 1 числа $\varkappa_n$? Первый нетривиальный случай, когда справедливость (10.2) не ясна, — двумерный. Отметим здесь, что если (10.2) выполняется для $n = 2$, то

$$\varkappa_2 \geq \frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.15737865\ldots \tag{10.3}$$

Достаточно учесть, что $\xi_2 = 1 + 3\sqrt{5}/5$ (см. теорему 2.4.1), и рассмотреть в качестве S треугольник с вершинами

$$(1,0)\,,\ \left(\frac{1}{2},1\right),\ (0,0)\,.$$

Для этого треугольника $\xi(S) = 5/2$, $d_1(S) = d_2(S) = 1$, $\alpha(S) = 2$. По предположению автора, в случае своего существования константа $\varkappa_2$ в точности равна правой части (10.3). Вопрос о точных значениях $\varkappa_n$ в неадамаровой ситуации представляется весьма трудным.

По поводу гипотезы (Н3) заметим следующее. Как отмечалось выше, если $n+1$ — число Адамара, то $\xi_n = n$, но справедливость обратного автору не ясна. Интересно заметить, что из условия $\xi(S) = n$ не следует, что симплекс $S \subset Q_n$ является правильным. Например, тетраэдр $S \subset Q_3$ с вершинами

$$\left(\frac{1}{2},0,0\right),\ \left(\frac{1}{2},1,0\right),\ \left(1,\frac{1}{2},1\right),\ \left(0,\frac{1}{2},1\right),$$

очевидно, не является правильным. Теорема 2.5.1 даёт $\xi(S) = 3$, откуда $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Последний факт геометрически очевиден, но может быть выведен и с помощью (1.2.2). Заметим также, что в этом случае $\|P\| = 2$, $\alpha(S) = 3$, $\beta(S) = 1$, поэтому все неравенства в (8.3) обращаются в равенства.

ГЛАВА 4

МИНИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

§ 4.1. Норма ортогонального проектора

4.1.1. Определим в $C(Q_n)$ скалярное произведение равенством

$$(f,g) := \int\limits_{Q_n} f(x)g(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Обозначим через H ортогональный проектор на $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий скалярному произведению (1.1). Пусть $\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — ортонормированный относительно этого скалярного произведения базис пространства $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. По определению положим

$$Hf(x) := \sum_{i=0}^{n}(f,\varphi_i)\varphi_i(x). \tag{1.2}$$

Ортогональный проектор H можно рассматривать и как оператор из $L_2(Q_n)$ в $L_2(Q_n)$. Хорошо известно, что $\|H\|_{L_2(Q_n)\to L_2(Q_n)} = 1$. В дальнейшем мы будем рассматривать H как оператор из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$. Обозначим $\|H\| := \|H\|_{C(Q_n)\to C(Q_n)}$. Для $f\in C(Q_n)$ считаем $\|f\| := \|f\|_{C(Q_n)}$.

Настоящая глава написана по материалам статьи автора [20], из которой взяты формулировки и доказательства всех теорем. Основной результат главы составляет эквивалентность $\|H\| \asymp \theta_n$, означающая, что с константами $c_1, c_2 > 0$, не зависящими от $n\in\mathbb{N}$, выполняется двойное неравенство

$$c_1\theta_n \le \|H\| \le c_2\theta_n. \tag{1.3}$$

Другими словами, *существуют положительные константы c_1 и c_2 со следующим свойством. Для любого натурального n найдётся такой набор узлов, принадлежащих Q_n, что для соответствующего интерполяционного проектора P и ортогонального проектора H выполняются соотношения*

$$c_1\|P\| \le \|H\| \le c_2\|P\|.$$

Одно из неравенств, ведущих к (1.3), имеет вид $\|H\| \ge \mathrm{const}\cdot\sqrt{n}$. Последняя оценка получается ниже двумя способами: с привлечением эйлеровых чисел (§ 4.4) и с использованием центральных B-сплайнов (§ 4.5).

По этой причине значительная часть главы связана с изложением известных и установлением новых свойств указанных объектов.

4.1.2. Получим формулу для нормы H как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Теорема 4.1.1 *Имеет место равенство*

$$\|H\| = 6\int\limits_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{3n+1}{6} \right| dy. \tag{1.4}$$

Доказательство. Ортонормированный относительно скалярного произведения (1.1) базис пространства $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ составляют функции

$$1,\ \sqrt{12}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right),\ \ldots,\ \sqrt{12}\left(x_n - \frac{1}{2}\right).$$

Это легко следует из результата для $n = 1$. В соответствии с (1.2) действие H на $f \in C(Q_n)$ задаётся равенством

$$Hf(x) = \int\limits_{Q_n} f(y)\,dy \cdot 1 + 12\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q_n} \left(y_i - \frac{1}{2}\right) f(y)\,dy \cdot \left(x_i - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_{Q_n} \left(3n + 1 - 6\sum_{i=1}^{n} y_i\right) f(y)\,dy + 12\sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{Q_n} \left(y_i - \frac{1}{2}\right) f(y)\,dy \right) x_i.$$

Так как $Hf \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|Hf\| = \max_{v \in \mathrm{ver}(Q_n)} |Hf(v)|.$$

Очевидно,

$$Hf(0) = \int\limits_{Q_n} \left(3n + 1 - 6\sum_{i=1}^{n} y_i\right) f(y)\,dy.$$

Для произвольной вершины $v = (v_1, \ldots, v_n)$ положим $\Lambda_0 := \{i : v_i = 0\}$, $\Lambda_1 := \{i : v_i = 1\}$. В этих обозначениях

$$Hf(v) = \int\limits_{Q_n} \left(3n + 1 - 6\sum_{i \in \Lambda_0} y_i + 6\sum_{i \in \Lambda_1} (y_i - 1)\right) f(y)\,dy. \tag{1.5}$$

Ввиду (1.5) имеем:

$$\|H\| = \sup_{\|f\|=1} \|Hf\| =$$

$$= \sup_{\|f\|=1} \max_{v \in \mathrm{ver}(Q_n)} |Hf(v)| = \max_{v \in \mathrm{ver}(Q_n)} \sup_{\|f\|=1} |Hf(v)| =$$

$$= \max_{v \in \mathrm{ver}(Q_n)} \int\limits_{Q_n} \left| 3n + 1 - 6 \sum_{i \in \Lambda_0} y_i + 6 \sum_{i \in \Lambda_1} (y_i - 1) \right| dy. \tag{1.6}$$

В случае $v \neq 0$ интеграл из (1.6) имеет то же значение, что и в случае $v = 0$. Достаточно использовать замену переменных $z_i := 1 - y_i$ для $i \in \Lambda_1$ и $z_i := y_i$ для $i \in \Lambda_0$. Поэтому окончательно получаем равенство

$$\|H\| = \int\limits_{Q_n} \left| 3n + 1 - 6 \sum_{i=1}^{n} y_i \right| dy,$$

которое эквивалентно (1.4). Теорема доказана. □

Следствие 4.1.1. *Если* $n = 1$, *то* $\|H\| = 5/3 = 1.66(6)$. *Если* $n = 2$, *то* $\|H\| = 233/108 = 2.15(740)$. *Далее, для всех* $n \in \mathbb{N}$

$$\|H\| \leq \sqrt{3n+1}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Значения $\|H\|$ для $n = 1$ и $n = 2$ легко находятся с помощью прямого вычисления. Оценка (1.7) получается из (1.4) и неравенства Коши:

$$\|H\| = 6 \int\limits_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{3n+1}{6} \right| dy \leq$$

$$\leq 6 \left(\int\limits_{Q_n} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{3n+1}{6} \right)^2 dy \right)^{1/2} = \sqrt{3n+1}.$$

Следствие доказано. □

§ 4.2. Эйлеровы числа, B-сплайны, слои и сечения куба

В настоящей главе мы отметим интересную возможность использования в оценках для $\|H\|$ эйлеровых чисел и центральных B-сплайнов.

4.2.1. Эйлеровы числа $A_{n,k}$ и их свойства. Пусть k — натуральное, $k \leq n$. *Эйлеровым числом* $A_{n,k}$ называется количество перестановок порядка n, каждая из которых имеет ровно $k-1$ *снижений (descents),* то есть инверсий своих соседних компонент. Это определение даётся в [50; § 6.2] и [48].

Возьмём для примера $n = 3$. Перестановки $(1,2,3)$ и $(3,2,1)$ имеют соответственно нуль снижений и два снижения, а любая из остальных четырёх перестановок $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ обладает одним снижением. Значит, $A_{3,1} = A_{3,3} = 1$, $A_{3,2} = 4$.

К введению этих чисел имеются и другие подходы. Например, начиная с ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} t^j = \frac{t}{1-t},$$

сходящегося при $|t| < 1$, с помощью последовательного дифференцирования и умножения на t получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j t^j = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 t^j = \frac{t}{(1-t)^3}(1+t),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^3 t^j = \frac{t}{(1-t)^4}(1+4t+t^2)$$

и так далее. Коэффициенты $A_{n,k}$ из правой части равенства

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^n t^j = \frac{t}{(1-t)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} A_{n,k} t^{k-1}$$

и есть эйлеровы числа (см. по этому поводу: http//mathworld.wolfram.com /EulerianNumber.html).

Характеристическими свойствами эйлеровых чисел являются также приводимые ниже соотношения (2.1), (2.2) и (2.4).

Введём в рассмотрение следующие подмножества куба Q_n, а именно *слои (slices),* получающиеся при пересечении этого куба гиперплоскостью, ортогональной вектору $\{1,\ldots,1\}$. k-й слой ($k = 1, \ldots, n$) определяется равенством

$$T_{n,k} := \Big\{x \in Q_n : k-1 \le \sum_{i=1}^{n} x_i \le k\Big\}.$$

Лемма 4.2.1. *Имеют место равенства:*

$$A_{n,k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)^n, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{vol}(T_{n,k}) = \frac{A_{n,k}}{n!}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n,k} = n!, \tag{2.3}$$

$$A_{n,k} = (n-k+1)A_{n-1,k-1} + kA_{n-1,k}. \tag{2.4}$$

Равенство (2.1) получено в [46]. Как отмечено в [48], соотношение (2.2) найдено Лапласом [55]; короткое доказательство принадлежит Стенли [67]. В связи с установлением некоторых свойств B-сплайнов геометрические построения, ведущие к (2.2), рассматривались Соммерфельдом [66]; см. также обзор [44]. Так как $\sum \mathrm{vol}(T_{n,k}) = \mathrm{vol}(Q_n) = 1$, то из (2.2) следует (2.3). Но ещё проще (2.3) получается из того, что число всех перестановок порядка n равно $n!$.

Для эффективного вычисления эйлеровых чисел может использоваться рекуррентное соотношение (2.4); при $k < 1$ и при $k > n$ надо взять $A_{n,k} = 0$. Получается бесконечная треугольная таблица, начало которой приводится ниже (см. таблицу 3). В n-й строке k-е слева число есть $A_{n,k}$. Например, $A_{7,4} = 2416$. В силу (2.3) сумма всех чисел n-й строки равна $n!$. Мы приводим числа $A_{n,k}$ для $1 \le n \le 9$.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	14608	502	1

Таблица 3

Отметим другие важные для нас свойства эйлеровых чисел. Для $u \in \mathbb{R}$ положим

$$G_{n,u} := \Big\{x \in Q_n : \sum_{i=1}^{n} x_i = u\Big\},$$

$$s(n,u) := \mathrm{mes_{n-1}}(G_{n,u}).$$

Лемма 4.2.2. *Если $j = 1, \ldots, n-1$, то*

$$s(n,j) = \sqrt{n} \cdot \frac{A_{n-1,j}}{(n-1)!}, \tag{2.5}$$

причём

$$\sum_{j=1}^{n-1} s(n,j) = \sqrt{n}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Обозначим через $F_{n,j}$ проекцию $G_{n,j}$ на гиперплоскость $x_n = 0$. Это множество имеет вид

$$F_{n,j} = \Big\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) : \ 0 \le x_1, \ldots, x_{n-1} \le 1, \ j-1 \le \sum_{i=1}^{n-1} x_i \le j\Big\}.$$

Ясно, что $\mathrm{mes_{n-1}}(F_{n,j}) = \mathrm{mes_{n-1}}(T_{n-1,j})$. Согласно (2.2) последняя величина есть $A_{n-1,j}/(n-1)!$. Кроме того, $\mathrm{mes_{n-1}}(F_{n,j}) = \mathrm{mes_{n-1}}(G_{n,j}) \cdot \cos\varphi$, где φ есть угол между векторами $\{1/\sqrt{n},\, \ldots,\, 1/\sqrt{n}\}$ и $\{0,\, \ldots,\, 0, 1\}$, нормальными к гиперплоскостям $\sum x_i = j$ и $x_n = 0$. Очевидно, $\cos\varphi = 1/\sqrt{n}$. Поэтому

$$s(n,j) = \mathrm{mes_{n-1}}(G_{n,j}) = \sqrt{n}\cdot \mathrm{mes_{n-1}}(F_{n,j}) =$$
$$= \sqrt{n}\cdot \mathrm{mes_{n-1}}(T_{n-1,j}) = \sqrt{n}\cdot \frac{A_{n-1,j}}{(n-1)!},$$

и (2.5) установлено. Соотношение (2.6) получается теперь с учётом равенства $\sum A_{n-1,j} = (n-1)!$, см. (2.3). Лемма доказана. □

Лемма 4.2.3. *Пусть $n = 2m$. Тогда*

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} > \frac{A_{n,m+1}}{n!}. \tag{2.7}$$

Если справедлива оценка

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} \geq \frac{1}{\gamma\sqrt{n}}, \tag{2.8}$$

где $\gamma > 0$, то верно и неравенство

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} > \frac{1}{\gamma\sqrt{n+1}}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Так как $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$, то (2.9) сразу следует из (2.7) и (2.8). Поэтому достаточно доказать (2.7). Применим рекуррентное соотношение (2.4) и учтём, что в нашей ситуации $A_{n,m} = A_{n,m+1}$:

$$A_{n+1,m+1} = (m+1)A_{n,m} + (m+1)A_{n,m+1} =$$
$$= 2(m+1)A_{n,m+1} = (n+2)A_{n,m+1}.$$

Значит,

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{A_{n,m+1}}{n!} > \frac{A_{n,m+1}}{n!}.$$

Неравенство (2.7) может быть получено и геометрическим путём. Заметим, что

$$\min_{m\leq u\leq m+1} \mathrm{mes}_n(G_{n+1,u}) = s(n+1, m+1),$$

а ширина слоя $T_{n+1,m+1}$ в направлении вектора $\{1,\, \ldots,\, 1\}$ равна $1/\sqrt{n+1}$. Поэтому в силу (2.2) и (2.5)

$$\frac{A_{n+1,m+1}}{(n+1)!} = \mathrm{vol}(T_{n+1,m+1}) >$$

$$> \frac{s(n+1,m+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{A_{n,m+1}}{n!}.$$

Лемма доказана. □

4.2.2. Центральные B-сплайны и оценки для эйлеровых чисел. Пусть

$$B_n(t) := \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^n \cos(2t\xi)\,d\xi.$$

Определённая таким образом функция B_n называется *центральным B-сплайном порядка n*. Это чётная кусочно-полиномиальная функция степени $n-1$, принадлежащая $C^{n-2}(\mathbb{R})$. Носитель B_n есть $(-n/2, n/2)$; если $|t| < n/2$, то $B_n(t) > 0$. Кроме того,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_n(t)\,dt = 1,$$

см. (5.4) для $g(u) \equiv 1$. Для вычислений с B-сплайнами могут применяться приводимые в § 4.5 формулы (5.2) и (5.3).

Эти и другие свойства, а также история B-сплайнов приводятся в обзорной статье [44]. В частности, там отмечено, что первым, кто выявил связь B-сплайнов с сечениями n-мерного куба, был Соммерфельд. Им доказано следующее утверждение (см. [66]).

Лемма 4.2.4. *Имеют место соотношения:*

$$B_n(t) = \frac{s\left(n, t+\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{n}}, \quad n > 1; \tag{2.10}$$

$$B_n(t) \cong \sqrt{\frac{6}{\pi n}} \cdot e^{-6t^2/n}. \tag{2.11}$$

Запись $a_n \cong b_n$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

С помощью (2.10) и (2.11) мы получим следующий результат. Как и ранее, $\lfloor a \rfloor$ обозначает целую часть a.

Лемма 4.2.5. *Существует константа $\gamma \geq 2$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и $m = \lfloor n/2 \rfloor$ справедливо неравенство*

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} > \frac{1}{\gamma\sqrt{n}}. \tag{2.12}$$

Доказательство. Согласно лемме 4.2.3 из справедливости (2.12) для данного чётного n следует справедливость этой оценки для следующего нечётного $n+1$, так как $\lfloor n/2 \rfloor = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Поэтому достаточно гарантировать выполнение (2.12) для чётных n и заметить, что неравенство выполняется и для $n=1$.

Из леммы 4.2.2 следует, что

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} = \frac{s(n+1, m+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

Если $n = 2m$, то $m+1 = (n+2)/2$, поэтому согласно (2.10)

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} = B_{n+1}\left(m+1-\frac{n+1}{2}\right) = B_{n+1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Теперь воспользуемся асимптотическим соотношением (2.11). Из него следует, что

$$\sigma_n := \frac{A_{n,m+1}}{n!} \cdot 2\sqrt{n} \cong \sqrt{\frac{24n}{\pi(n+1)}} \cdot e^{-3/(2n+2)}.$$

Существует натуральное n_0 такое, что при $n > n_0$ выполняется

$$\frac{\sigma_n}{\sqrt{\frac{24n}{\pi(n+1)}} \cdot e^{-3/(2n+2)}} > \frac{1}{2},$$

то есть

$$\sigma_n > \tau_n := \sqrt{\frac{6n}{\pi(n+1)}} \cdot e^{-3/(2n+2)}.$$

Каждый из двух выделенных сомножителей, входящих в τ_n, возрастает по n, поэтому при $n > 8$

$$\sigma_n > \tau_8 = \sqrt{\frac{16}{3\pi}} \cdot e^{-1/6} > 1.$$

Таким образом, если $n \geq \max(n_0, 8)$ и n — чётное, то имеет место

$$\sigma_n = \frac{A_{n,m+1}}{n!} \cdot 2\sqrt{n} > 1,$$

то есть

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}. \tag{2.13}$$

Следовательно, существует такая константа $\gamma \geq 2$, с которой для всех чётных n выполняется неравенство (2.12). Как отмечалось, это означает выполнение (2.12) для всех $n \geq 2$.

Приведём для полноты асимптотическое соотношение для величины $A_{n,m+1}/n!$ в случае нечётных n. Если $n = 2m+1$, то $m+1 = (n+1)/2$, поэтому для таких n (2.10) и (2.11) дают

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} = B_{n+1}\left(m+1-\frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= B_{n+1}(0) \cong \sqrt{\frac{6}{\pi(n+1)}}$$

и

$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} \cdot 2\sqrt{n} \cong \sqrt{\frac{24n}{\pi(n+1)}}.$$

Добавляя в последнее выражение множитель $e^{-3/(2n+2)}$, убеждаемся, что асимптотика, полученная выше для чётных n, верна и для всех n. Это позволяет завершить доказательство леммы 4.2.5 и без использования редукции леммы 4.2.3. $\square$

Заметим, что по крайней мере для $1 \leq n \leq 20$ выполняется более точное, чем (2.12), неравенство (2.13).

§ 4.3. Оценки $\|H\|$ через эйлеровы числа

Применим эйлеровы числа для оценивания нормы ортогонального проектора.

Введём в рассмотрение величины

$$M_{n,k} := \max_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6} \right|,$$

$$m_{n,k} := \min_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6} \right|.$$

Пусть

$$s_1 := k - 1 - \frac{3n+1}{6}, \quad s_2 := k - \frac{3n+1}{6}.$$

Очевидно, $M_{n,k} = \max\{|s_1|, |s_2|\}$. Если $s_1 s_2 > 0$, то $m_{n,k} = \min\{|s_1|, |s_2|\}$. Нетрудно видеть, что $s_1 s_2 \le 0$ тогда и только тогда, когда $0 \le s_2 \le 1$. В этом случае $m_{n,k} = 0$. Неравенство $0 \le s_2 \le 1$ эквивалентно

$$k = k^* := \left\lfloor \frac{3n+1}{6} + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n+7}{6} \right\rfloor.$$

Итак, для всех $k = 0, 1, \ldots, n$

$$M_{n,k} = \max\left\{ \left| k - 1 - \frac{3n+1}{6} \right|, \left| k - \frac{3n+1}{6} \right| \right\}.$$

Если $k \ne k^* = \lfloor (3n+7)/6 \rfloor$, то

$$m_{n,k} = \min\left\{ \left| k - 1 - \frac{3n+1}{6} \right|, \left| k - \frac{3n+1}{6} \right| \right\}.$$

Если же $k = k^*$, то значение $m_{n,k}$ равно 0.

Теорема 4.3.1. *Для $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{6}{n!} \sum_{k=1}^{n} m_{n,k} A_{n,k} \le \|H\| \le \frac{6}{n!} \sum_{k=1}^{n} M_{n,k} A_{n,k}. \qquad (3.1)$$

Разность правой и левой частей двойного неравенства (3.1) *не превосходит* 6. *Если левая часть* (3.1) *меньше* 1, *то она может быть заменена на* 1.

Доказательство. Применяя (1.5), запишем:

$$\|H\| = 6 \int\limits_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx =$$

$$= 6 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx.$$

Так как $\mathrm{vol}(T_{n,k}) = A_{n,k}/n!$, см. (2.2), то

$$\frac{m_{n,k} A_{n,k}}{n!} \le \int\limits_{T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx \le \frac{M_{n,k} A_{n,k}}{n!}.$$

Суммируя эти неравенства, получаем (3.1).

Обозначим левую и правую части (3.1) соответственно через α_n и β_n. Покажем, что $\beta_n - \alpha_n \le 6$. Пусть

$$\operatorname{osc}(g; C(\Omega)) := \sup_{x,y\in\Omega} |g(x) - g(y)|$$

есть колебание функции $g \in C(\Omega)$. В силу неравенства $\big||g(x)| - |g(y)|\big| \le |g(x) - g(y)|$ колебание $|g|$ не превышает колебания g. Поэтому, полагая $g_n(x) := \sum x_i - (3n+1)/6$, имеем:

$$M_{n,k} - m_{n,k} = \operatorname{osc}(|g_n|; C(T_{n,k})) \le \operatorname{osc}(g_n; C(T_{n,k})) = 1.$$

Отсюда и из равенства (2.3) следует:

$$\beta_n - \alpha_n = \frac{6}{n!}\sum_{k=1}^{n}(M_{n,k} - m_{n,k})A_{n,k} \le \frac{6}{n!}\sum_{k=1}^{n} A_{n,k} = 6.$$

Справедливость последнего утверждения из условия теоремы очевидна: норма H как любого проектора не меньше 1. Теорема доказана. □

Приведём результаты применения оценок (3.1) и (1.7) для $1 \le n \le 9$. В таблице 4 α_n и β_n — левая и правая части (3.1), $\delta_n := \sqrt{3n+1}$ — правая часть (1.7). Последний столбец таблицы содержит точные значения $\|H\|$ для $n = 1$, 2, 3 (см. пункты 4.1 и 4.5).

n	α_n	β_n	$\beta_n - \alpha_n$	δ_n	$\|H\|$
1	0	4	4	2	1.66(6)
2	0.5	6	5.5	2.645...	2.15(740)
3	1	5.66(6)	4.66(6)	3.162...	2.561...
4	0.958(3)	6.5	5.541(6)	3.605...	
5	1.45	6.35	4.9	4	
6	1.402(7)	6.983(3)	5.580(5)	4.358...	
7	1.852...	6.893...	5.040...	4.690...	
8	1.812...	7.425...	5.612...	5	
9	2.225...	7.364...	5.139...	5.291...	

Таблица 4

§ 4.4. Соотношение $\|H\| \asymp \theta_n$

Пусть

$$I_n := \int\limits_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2} \right| dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим для $k = 1, \ldots, n$

$$D_{n,k} := \max_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2} \right|,$$

$$d_{n,k} := \min_{x \in T_{n,k}} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2} \right|.$$

Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.3.1, получим двойное неравенство

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} d_{n,k} A_{n,k} \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} D_{n,k} A_{n,k}, \tag{4.1}$$

разность правой и левой частей которого не превосходит 1.

В этом параграфе m обозначает целую часть числа $n/2$, то есть $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Таким образом, $n = 2m$ или $n = 2m + 1$ в зависимости от чётности n.

Если $n = 2m$, то для всех $j = 1, \ldots, m$ выполняются равенства $D_{n,m+j} = j$, $d_{n,m+j} = j - 1$. В этом случае положим

$$Y_n := \sum_{j=1}^{m} j A_{n,m+j}.$$

Если же $n = 2m + 1$, то при любом $j = 1, \ldots, m + 1$ выполняется $D_{n,m+j} = j - 1/2$. Теперь $d_{n,m+1} = 0$, а для $j = 2, \ldots, m + 1$ справедливо $d_{n,m+j} = j - 3/2$. Положим в случае $n = 2m + 1$

$$Y_n := \frac{1}{4} A_{n,m+1} + \sum_{j=2}^{m+1} \left(j - \frac{1}{2} \right) A_{n,m+j}.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ — и чётных, и нечётных — правая часть (4.1) равна $2Y_n/n!$. Так как разность правой и левой частей (4.1) не больше 1, то

$$I_n \geq \frac{2}{n!} Y_n - 1. \tag{4.2}$$

Рассмотрим вопрос о нижних оценках величин Y_n.

Лемма 4.4.1. *Для $n = 2m$ справедливы соотношения*

$$A_{n+2,m+1+j} = (m-j+2)^2 A_{n,m+j-1} +$$

$$+(2m^2+4m-2j^2+2j+1)A_{n,m+j} + (m+j+1)^2 A_{n,m+1+j}, \qquad (4.3)$$

$$Y_{n+2} = \frac{(n+2)^2}{4} A_{n,m} + \frac{(n+1)!}{2} + (n^2+n)Y_n. \qquad (4.4)$$

Если же $n = 2m+1$, то

$$A_{n+2,m+1+j} = (m-j+3)^2 A_{n,m+j-1} +$$

$$+(2m^2+6m-2j^2+4j+2)A_{n,m+j} + (m+j+1)^2 A_{n,m+1+j}, \qquad (4.5)$$

$$Y_{n+2} = \frac{(n+1)^2}{4} A_{n,m+1} + \frac{(n+1)!}{2} + (n^2+n)Y_n. \qquad (4.6)$$

Доказательство. Докажем сначала (4.3) и (4.4) для чётного n. Применяя рекуррентное соотношение (3.4) и равенство $n = 2m$, получим:

$$A_{n+2,m+1+j} = (m-j+2)A_{n+1,m+j} + (m+1+j)A_{n+1,m+1+j},$$

$$A_{n+1,m+j} = (m-j+2)A_{n,m+j-1} + (m+j)A_{n,m+j},$$

$$A_{n+1,m+1+j} = (m-j+1)A_{n,m+j} + (m+1+j)A_{n,m+1+j},$$

откуда следует (4.3). Поэтому

$$Y_{n+2} = \sum_{j=1}^{m+1} jA_{n+2,m+1+j} = \sum_{j=1}^{m+1} j(m-j+2)^2 A_{n,m+j-1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m+1} j(2m^2+4m-2j^2+2j+1)A_{n,m+j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m+1} j(m+j+1)^2 A_{n,m+1+j} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

В сумме Σ_2 последнее слагаемое равно нулю. Первая и третья суммы преобразуются к следующему виду:

$$\Sigma_1 = \sum_{l=0}^{m} (l+1)(m-l+1)^2 A_{n,m+l} =$$

$$= (m+1)^2 A_{n,m} + \sum_{l=1}^{m} (l+1)(m-l+1)^2 A_{n,m+l},$$

$$\Sigma_3 = \sum_{l=2}^{m+2} (l-1)(m+l)^2 A_{n,m+l} = \sum_{l=1}^{m} (l-1)(m+l)^2 A_{n,m+l}.$$

Мы учли, что $A_{n,2m+1} = A_{n,2m+2} = 0$. Значит,

$$Y_{n+2} = (m+1)^2 A_{n,m} + \sum_{j=1}^{m} \Big\{ (j+1)(m-j+1)^2 +$$

$$+ (j-1)(m+j)^2 + j(2m^2 + 4m - 2j^2 + 2j + 1) \Big\} A_{n,m+j} =$$

$$= (m+1)^2 A_{n,m} + \sum_{j=1}^{m} (4m^2 j + 2mj + 2m + 1) A_{n,m+j} =$$

$$= (m+1)^2 A_{n,m} + (4m^2 + 2m) Y_n + (2m+1) \sum_{j=1}^{m} A_{n,m+j}.$$

Подставляя $n = 2m$ и пользуясь тем, что $\sum A_{n,m+j} = n!/2$, см. (3.3), представим последнее выражение в виде

$$\frac{(n+2)^2}{4} A_{n,m} + (n^2 + n) Y_n + \frac{(n+1)!}{2}.$$

Таким образом, (4.4) доказано.

Теперь рассмотрим случай $n = 2m+1$. На этот раз (3.4) даёт соотношения

$$A_{n+2,m+1+j} = (m-j+3) A_{n+1,m+j} + (m+1+j) A_{n+1,m+1+j},$$

$$A_{n+1,m+j} = (m-j+3) A_{n,m+j-1} + (m+j) A_{n,m+j},$$

$$A_{n+1,m+1+j} = (m-j+2) A_{n,m+j} + (m+1+j) A_{n,m+1+j},$$

из которых вытекает (4.5).

Установим (4.6). По определению

$$Y_{n+2} = \frac{1}{4} A_{n+2,m+2} + \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2} \right) A_{n+2,m+1+j}.$$

Для преобразования первого слагаемого в правой части применим (4.5) с $j = 1$ и используем то, что в нашей ситуации $A_{n,m+2} = A_{n,m}$. Применяя (4.5) также и к сумме, запишем:

$$Y_{n+2} = \frac{1}{2}\Big\{(m+2)^2 A_{n,m} + (m^2+3m+2)A_{n,m+1}\Big\} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right)(m-j+3)^2 A_{n,m+j-1} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right)(2m^2+6m-2j^2+4j+2)A_{n,m+j} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m+2} \left(j - \frac{1}{2}\right)(m+j+1)^2 A_{n,m+1+j} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{(m+2)^2 A_{n,m} + (m^2+3m+2)A_{n,m+1}\Big\} + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3.$$

В сумме Θ_2 последнее слагаемое равно нулю. Первая и третья суммы преобразуются к следующему виду:

$$\Theta_1 = \frac{3}{2}(m+1)^2 A_{n,m+1} + \sum_{l=2}^{m+1} \left(l + \frac{1}{2}\right)(m-l+2)^2 A_{n,m+l},$$

$$\Theta_3 = \sum_{l=3}^{m+3} \left(l - \frac{3}{2}\right)(m+l)^2 A_{n,m+l} =$$

$$= \sum_{l=2}^{m+1} \left(l - \frac{3}{2}\right)(m+l)^2 A_{n,m+l} - \frac{1}{2}(m+2)^2 A_{n,m+2}.$$

Мы учли, что $A_{n,2m+2} = A_{n,2m+3} = 0$. Так как $A_{n,m+2} = A_{n,m}$, то в выражении для Y_{n+2} слагаемое с $A_{n,m}$ исчезает. Коэффициент при $A_{n,m+1}$ равен

$$\frac{(m^2+3m+2) + (3m^2+6m+3)}{2} = \frac{4m^2+9m+5}{2}.$$

Значит,

$$Y_{n+2} = \frac{4m^2+9m+5}{2} A_{n,m+1} + \sum_{j=2}^{m+1} \Big\{ \left(j + \frac{1}{2}\right)(m-j+2)^2 +$$

$$+\left(j-\frac{1}{2}\right)(2m^2+6m-2j^2+4j+2)+\left(j-\frac{3}{2}\right)(m+j)^2\Big\}A_{n,m+j}.$$

Последняя сумма приводится к виду

$$\sum_{j=2}^{m+1}(4m^2j-2m^2+6mj+2j-m+1)A_{n,m+j}=$$

$$=\sum_{j=2}^{m+1}\left\{4m^2\left(j-\frac{1}{2}\right)+6m\left(j-\frac{1}{2}\right)+2\left(j-\frac{1}{2}\right)+2m+2\right\}A_{n,m+j}=$$

$$=(4m^2+6m+2)\sum_{j=2}^{m+1}\left(j-\frac{1}{2}\right)A_{n,m+j}+(2m+2)\sum_{j=2}^{m+1}A_{n,m+j}.$$

Так как $n=2m+1$, то получаем равенство

$$Y_{n+2}=\frac{2n^2+5n+3}{4}A_{n,m+1}+(n^2+n)\sum_{j=2}^{m+1}\left(j-\frac{1}{2}\right)A_{n,m+j}+$$

$$+(n+1)\sum_{j=2}^{m+1}A_{n,m+j}.$$

Для завершения доказательства (4.6) осталось учесть, что

$$\sum_{j=2}^{m+1}\left(j-\frac{1}{2}\right)A_{n,m+j}=Y_n-\frac{1}{4}A_{n,m+1},$$

$$\sum_{j=2}^{m+1}A_{n,m+j}=\frac{1}{2}\Big(n!-A_{n,m+1}\Big),$$

и привести подобные члены. Лемма доказана. □

Лемма 4.4.2. *Существует константа $\gamma\geq 2$ такая, что для всех $n\in\mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\frac{Y_n}{n!}>\frac{\sqrt{n}}{12\gamma}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Пусть γ — константа из условия леммы 4.2.5. Отдельно разберём случаи чётных и нечётных n и в каждом из них используем индукцию.

Пусть n — чётное. При $n = 2$, то есть $m = 1$, утверждение верно, так как
$$\frac{Y_2}{2!} = \frac{A_{2,2}}{2} = \frac{1}{2} > \frac{1}{24} \geq \frac{1}{12\gamma}.$$
Предположим, что неравенство (4.7) имеет место для данного n, и докажем его справедливость для $n+2$.

Введём в рассмотрение величину

$$W_n := \frac{(n+2)(n+1)\sqrt{n+2} - n(n+1)\sqrt{n} - 6\gamma(n+1)}{(n+2)^2}$$

и покажем, что $W_n < 3/\sqrt{n}$. Действительно,

$$W_n =$$

$$= \frac{n^2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + n(3\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + 2\sqrt{n+2} - 6\gamma(n+1)}{(n+2)^2} =$$

$$= \frac{2n^2}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)(n+2)^2} + \frac{n(8n+18)}{\left(3\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)(n+2)^2} -$$

$$- \frac{6\gamma(n+1) - 2\sqrt{n+2}}{(n+2)^2} <$$

$$< \frac{2n^2}{2n^2\sqrt{n}} + \frac{8(n+2)^2}{4\sqrt{n}(n+2)^2} = \frac{3}{\sqrt{n}}. \tag{4.8}$$

Как мы допустили, $\gamma \geq 2$ — такая константа, с которой имеет место неравенство
$$\frac{A_{n,m+1}}{n!} \geq \frac{1}{\gamma\sqrt{n}}. \tag{4.9}$$
В исследуемой сейчас ситуации ($n = 2m$) $A_{n,m} = A_{n,m+1}$, поэтому из (4.8) и (4.9) следует, что

$$\frac{A_{n,m}}{n!} \geq \frac{1}{3\gamma} \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} > \frac{1}{3\gamma} W_n.$$

Это эквивалентно неравенству

$$3\gamma(n+2)^2 A_{n,m} + (n^2+n)n!\sqrt{n} + 6\gamma(n+1)! >$$

$$> (n+2)!\sqrt{n+2}.$$

По предположению индукции $12\gamma Y_n > n!\sqrt{n}$, поэтому

$$3\gamma(n+2)^2 A_{n,m} + 12\gamma(n^2+n)Y_n + 6\gamma(n+1)! >$$

$$> (n+2)!\sqrt{n+2},$$

или

$$12\gamma\left\{\frac{(n+2)^2}{4}A_{n,m} + (n^2+n)Y_n + \frac{(n+1)!}{2}\right\} >$$

$$> (n+2)!\sqrt{n+2}.$$

Согласно (4.4) величина в фигурных скобках есть Y_{n+2}, и мы приходим к неравенству

$$\frac{Y_{n+2}}{(n+2)!} > \frac{\sqrt{n+2}}{12\gamma},$$

которое и нужно было установить.

Теперь применим индукцию по нечётным n. Для $n = 1$ и $n = 3$ утверждение проверяется непосредственно:

$$\frac{Y_1}{1!} = \frac{1}{4} > \frac{1}{24} > \frac{1}{12\gamma},$$

$$\frac{Y_3}{3!} = \frac{5}{6} > \frac{\sqrt{3}}{24} \geq \frac{\sqrt{3}}{12\gamma}.$$

Предположим, что утверждение леммы верно для $n = 2m+1$, и докажем его справедливость для значения $n+2 = 2m+3$.

Пусть

$$V_n := \frac{(n+2)\sqrt{n+2} - n\sqrt{n} - 6\gamma}{n+2}.$$

Тогда

$$\frac{n+2}{n+1}\cdot V_n < \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{(n+2)\sqrt{n+2} - n\sqrt{n}}{n+2} =$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{2n}{(n+2)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} + \frac{2\sqrt{n+2}}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{2n}{(n+1)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)} + \frac{2\sqrt{n+2}}{n+1} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому

$$V_n < \frac{3}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{3(n+1)^2 n!}{\sqrt{n}(n+2)!}.$$

Применим теперь неравенство (4.9), записав его в виде $3n!/\sqrt{n} \leq 3\gamma A_{n,m+1}$. Объединяя это с предыдущим, получим, что

$$V_n < \frac{3\gamma(n+1)^2}{(n+2)!} A_{n,m+1}.$$

Это эквивалентно соотношению

$$3\gamma(n+1)^2 A_{n,m+1} + (n+1)!n\sqrt{n} + 6\gamma(n+1)! > \\ > (n+2)!\sqrt{n+2}. \tag{4.10}$$

По предположению индукции $Y_n > n!\sqrt{n}/(12\gamma)$, поэтому

$$(n^2+n)Y_n > \frac{(n+1)!n\sqrt{n}}{12\gamma}. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) следует, что

$$12\gamma \left\{ \frac{(n+1)^2}{4} A_{n,m+1} + (n^2+n)Y_n + \frac{(n+1)!}{2} \right\} > \\ > (n+2)!\sqrt{n+2}.$$

В силу (4.6) величина в фигурных скобках есть Y_{n+2}. Значит,

$$\frac{Y_{n+2}}{(n+2)!} > \frac{\sqrt{n+2}}{12\gamma},$$

и мы получили нужное соотношение. Лемма доказана. □

Теорема 4.4.1. *Существует положительная константа $C \leq 1/2$ со следующим свойством. Для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\|H\| > c\sqrt{n} - 7. \tag{4.12}$$

Доказательство. Пусть $\gamma \geq 2$ — константа из условия лемм 4.2.5 и 4.4.2. Применяя (2.1) и определение I_n, запишем неравенство

$$\|H\| = 6 \int\limits_{Q_n} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6} \right| dx \geq$$

$$\geq 6\left(I_n - \frac{1}{6}\right) = 6I_n - 1.$$

Для продолжения оценки применим сначала (4.2) и затем (4.7). Мы получим:

$$\|H\| \geq 6I_n - 1 \geq 6\left(\frac{2}{n!}Y_n - 1\right) - 1 =$$

$$= \frac{12}{n!}Y_n - 7 > \frac{12}{n!} \cdot \frac{n!\sqrt{n}}{12\gamma} - 7 = \frac{\sqrt{n}}{\gamma} - 7.$$

Осталось положить $c := 1/\gamma$. Теорема доказана. □

Следствие 4.4.1. *Существует константа* $0 < c \leq 1/2$ *такая, что для любого* $n \in \mathbb{N}$

$$c\sqrt{n} - 7 < \|H\| \leq \sqrt{3n+1}. \tag{4.13}$$

Доказательство. Оценка сверху отмечена в следствии 2.1. Остаётся учесть неравенство (4.12) предыдущей теоремы. □

Теорема 4.4.2. *Для* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место эквивалентность* $\|H\| \asymp \theta_n$. *Иначе говоря, существуют такие константы* $c_1, c_2 > 0$, *что для всех* n

$$c_1\theta_n \leq \|H\| \leq c_2\theta_n. \tag{4.14}$$

Доказательство. Как мы показали выше, $\theta_n \asymp \sqrt{n}$, см. теорему 3.6.1. Двойная оценка (4.13) означает, что $\|H\| \asymp \sqrt{n}$. Отсюда $\|H\| \asymp \theta_n$, то есть существуют универсальные (не зависящие от n) константы c_1 и c_2 такие, что справедливы соотношения (4.14).

Покажем здесь, что правое неравенство в (4.14) имеет место, если взять $c_2 = 5e/\sqrt{7} = 5.137\ldots$, и в этом случае оно является строгим.

Для $n \geq 8$ выполняется неравенство

$$\sqrt{3n+1} \leq \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{n-1}. \tag{4.15}$$

Действительно, функция

$$\psi(n) := \frac{n-1}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4}{3n+1}\right)$$

возрастает, её минимум на промежутке $[8, \infty)$ равен $\psi(8) = 7/25$. Поэтому при $n \geq 8$ выполняется $7/25 \leq (n-1)/(3n+1)$, что эквивалентно (4.15). Как мы установили выше (см. теорему 3.6.1 и оценки п. 3.8.4),

$$\frac{1}{e}\sqrt{n-1} < \theta_n, \tag{4.16}$$

$$\theta_1 = 1, \qquad \theta_2 = 1.89\ldots, \qquad \theta_3 = 2, \qquad 2.2\ldots \le \theta_4 \le 2.33\ldots,$$
$$2.33\ldots \le \theta_5 \le 2.6, \qquad 2.42\ldots \le \theta_6 \le 3, \qquad \theta_7 = 2.5. \tag{4.17}$$

Если $n \ge 8$, то

$$\|H\| \le \sqrt{3n+1} \le \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{n-1} < \frac{5e}{\sqrt{7}} \cdot \theta_n.$$

Мы применили (4.13), (4.15) и (4.16). Остаётся заметить, что оценка $\|H\| < (5e/\sqrt{7}) \cdot \theta_n$ верна и для всех n от 1 до 7 включительно. Это следует из (4.13) и (4.17). Теорема доказана. $\Box$

Хотя бы для некоторых n имеет место неравенство $\theta_n \le \|H\|$. Таковыми являются, например, $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$.

Сформулируем уточнение теоремы 4.4.2, которое получается с применением наших предыдущих результатов. Пусть $S \subset Q_n$ — симплекс максимального объёма, хотя бы одна из вершин которого совпадает с вершиной Q_n; P — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах S.

Теорема 4.4.3. *С универсальными константами справедлива эквивалентность* $\|H\| \asymp \|P\|$.

Доказательство. Согласно следствию 3.6.1, имеет место соотношение $\|P\| \asymp \theta_n$. Остаётся применить (4.14). $\Box$

§ 4.5. Вычисление $\|H\|$ с помощью однократного интеграла

Отметим подход, при котором $\|H\|$ выражается через интеграл от функции одного переменного. Этот способ может быть применён как для оценивания нормы ортогонального проектора, так и для её приближённого вычисления.

В действиях с B-сплайнами наряду с интегральным представлением

$$B_n(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^n \cos(2t\xi)\, d\xi \tag{5.1}$$

полезно иметь в виду следующие две формулы, приведённые в [44]:

$$B_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(t + \frac{n}{2} - k \right)_+^{n-1}, \tag{5.2}$$

$$B_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[n/2-|t|]} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{n}{2} - |t| - k\right)^{n-1}, \quad |t| \le \frac{n}{2}. \qquad (5.3)$$

В (5.2) используются обозначения:

$$a_+^m := \begin{cases} a^m, & a \ge 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \text{ если } a \text{ или } m \ne 0; \quad 0_+^0 := \frac{1}{2}.$$

В дополнение к (5.3) полагаем $B_n(t) = 0$ при $|t| > n/2$. Для построения B_2 и B_3 удобно применить (3.10).

Лемма 4.5.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, g — функция одного переменного, непрерывная на отрезке $[0, n]$. Тогда*

$$\int\limits_{Q_n} g\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) dx = \int\limits_0^n g(u) B_n\left(u - \frac{n}{2}\right) du =$$

$$= \int\limits_{-n/2}^{n/2} g\left(t + \frac{n}{2}\right) B_n(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(t + \frac{n}{2}\right) B_n(t)\, dt. \qquad (5.4)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что цепочка (5.4) верна для $n = 1$. Согласно (5.1)

$$B_1(t) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} \cos(2t\xi)\, d\xi.$$

Следовательно, B_1 есть так называемый *разрывный множитель Дирихле,* равный 1 на $(-1/2, 1/2)$ и 0 вне $[-1/2, 1/2]$; $B_1(\pm 1/2) = 1/2$. Эти свойства следуют из равенств

$$2 \sin \xi \cos(2t\xi) = \sin((2t+1)\xi) - \sin((2t-1)\xi),$$

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin \sigma\xi}{\xi}\, d\xi = \operatorname{sign} \sigma.$$

Пусть теперь $n \ge 2$. Гиперплоскость $\sum x_i = u$ $(u \ge 0)$ лежит на расстоянии $\tau = u/\sqrt{n}$ от начала координат, а нормаль к ней коллинеарна главной диагонали куба, соединяющей вершины $(0, \ldots, 0)$ и $(1, \ldots, 1)$. Поэтому элемент объёма Q_n, равный объёму слоя ширины $d\tau$, есть $s(n, \sqrt{n}\tau)\, d\tau$. Отсюда

$$\int\limits_{Q_n} g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\, dx = \int\limits_{0}^{\sqrt{n}} g(\sqrt{n}\tau) s(n, \sqrt{n}\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{0}^{n} g(u) s(n, u)\, du.$$

Теперь применим соотношение (2.10), согласно которому

$$s(n, u) = \sqrt{n} \cdot B_n\left(u - \frac{n}{2}\right).$$

В результате получим:

$$\int\limits_{Q_n} g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\, dx = \int\limits_{0}^{n} g(u) B_n\left(u - \frac{n}{2}\right)\, du =$$

$$= \int\limits_{-n/2}^{n/2} g\left(t + \frac{n}{2}\right) B_n(t)\, dt.$$

Последнее равенство в (5.4) связано с тем, что $\operatorname{supp} B_n = (-n/2, n/2)$.

Лемма доказана. □

Теорема 4.5.1. *Для всех* $n \in \mathbb{N}$

$$\|H\| = 6 \int\limits_{0}^{n} \left|u - \frac{3n+1}{6}\right| B_n\left(u - \frac{n}{2}\right)\, du =$$

$$= 6 \int\limits_{-n/2}^{n/2} \left|t - \frac{1}{6}\right| B_n(t)\, dt = 6 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t - \frac{1}{6}\right| B_n(t)\, dt. \tag{5.5}$$

Доказательство. По теореме 4.1.1

$$\|H\| = 6 \int\limits_{Q_n} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{3n+1}{6}\right|\, dx.$$

Для вычисления последнего интеграла достаточно привлечь формулы (5.4) с $g(t) = |t - (3n+1)/6|$. $\square$

Рассмотрим для примера случаи $n = 1, 2, 3$. Сплайн B_1 описан в начале доказательства леммы 4.5.1. Если $n = 1$, то

$$\|H\| = 6 \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_1(t)\, dt = \int\limits_{-1/2}^{1/6} (1 - 6t)\ dt +$$

$$+ \int\limits_{1/6}^{1/2} (6t - 1)\ dt = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = 1.66(6).$$

Пусть $n = 2$. Из геометрических соображений нетрудно найти явное выражение для величины $s(2, u)$:

$$s(2, u) = \sqrt{2} \begin{cases} u, & 0 \le u \le 1, \\ 2 - u, & 1 \le u \le 2, \\ 0, & u \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Применив (3.10), получим, что

$$B_2(t) = \frac{s(2, t+1)}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 + t, & -1 \le t \le 0, \\ 1 - t, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

То же выражение для B_2 дают (5.2) и (5.3). Именно, (5.2) сводится к представлению

$$B_2(t) = (t+1)_+ - 2t_+ + (t-1)_+ =$$

$$= \max(t+1, 0) - 2\max(t, 0) + \max(t-1, 0),$$

а (5.3) — к равенству $B_2(t) = 1 - |t|$ при $|t| \le 1$. Итак, в двумерной ситуации

$$\|H\| = 6 \int\limits_{-1}^{1} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_2(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (1 - 6t)(1 + t)\, dt + \int\limits_{0}^{1/6} (1 - 6t)(1 - t)\, dt + \int\limits_{1/6}^{1} (6t - 1)(1 - t)\, dt =$$

$$= \frac{233}{108} = 2.15(740).$$

Значения $\|H\|$ для $n = 1$ и $n = 2$ приводились в следствии 4.1.1.

В трёхмерной ситуации справедливо равенство

$$s(3, u) = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} u^2, & 0 \le u \le 1, \\ u^2 - 3(u-1)^2, & 1 \le u \le 2, \\ u^2 - 3(u-1)^2 + 3(u-2)^2, & 2 \le u \le 3, \\ 0, & u \notin [0, 3]. \end{cases}$$

Значит,

$$B_3(t) = \frac{s\,(3, t + 3/2)}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{cases} (t+3/2)^2, & -3/2 \le t \le -1/2, \\ (t+3/2)^2 - 3(t+1/2)^2, & -1/2 \le t \le 1/2, \\ (t+3/2)^2 - 3(t+1/2)^2 + 3(t-1/2)^2, & 1/2 \le t \le 3/2, \\ 0, & t \notin [-3/2, 3/2], \end{cases}$$

или

$$B_3(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} t^2 + 3t + 9/4, & -3/2 \le t \le -1/2, \\ -2t^2 + 3/2, & -1/2 \le t \le 1/2, \\ t^2 - 3t + 9/4, & 1/2 \le t \le 3/2, \\ 0, & t \notin [-3/2, 3/2]. \end{cases}$$

Таким образом, для $n = 3$

$$\|H\| = 6 \int\limits_{-3/2}^{3/2} \left| t - \frac{1}{6} \right| B_3(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{-3/2}^{-1/2} \left(\frac{1}{2} - 3t \right) \left(t^2 + 3t + \frac{9}{4} \right) dt + \int\limits_{-1/2}^{1/6} \left(\frac{1}{2} - 3t \right) \left(-2t^2 + \frac{3}{2} \right) dt +$$

$$+ \int\limits_{1/6}^{1/2} \left(3t - \frac{1}{2} \right) \left(-2t^2 + \frac{3}{2} \right) dt + \int\limits_{1/2}^{3/2} \left(3t - \frac{1}{2} \right) \left(t^2 - 3t + \frac{9}{4} \right) dt =$$

$$= \frac{11}{12} + \frac{70}{81} + \frac{16}{81} + \frac{7}{12} = \frac{415}{162} = 2.561\ldots.$$

Равенства (5.5) можно положить в основу нового подхода к получению оценки $\|H\| \ge \mathrm{const} \cdot \sqrt{n}$, доказанной нами в § 4.4 с помощью эйлеровых чисел. Таким образом, предлагается несколько иной способ доказательства теоремы 4.5.2.

Перепишем асимптотическое соотношение (2.11) в виде

$$\sqrt{\frac{n}{6}}\,B_n\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\cdot t\right) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}, \quad n\to\infty. \tag{5.6}$$

Как следует из результатов Курри и Шёнберга [47] (см. также [44]), сходимость в (5.6) является локально равномерной по t. В связи с (5.6) можно ожидать, что при $n\to\infty$

$$J_n := \int\limits_0^\infty tB_n(t)\,dt = \sqrt{\frac{n}{6}}\int\limits_0^\infty \tau\sqrt{\frac{n}{6}}B_n\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\cdot\tau\right)\,d\tau \cong$$

$$\cong \sqrt{\frac{n}{6\pi}}\int\limits_0^\infty \tau e^{-\tau^2}\,d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{6\pi}}. \tag{5.7}$$

Если асимптотическое соотношение (5.7) имеет место, то существует константа $c_3 > 0$ такая, что для всех n выполняется $J_n \geq c_3\sqrt{n}$. Последнее ведёт к аналогичной оценке для $\|H\|$, см. окончание доказательства теоремы 4.5.2. Асимптотика (5.7) требует аккуратного обоснования, но интересующее нас неравенство $J_n \geq c_3\sqrt{n}$ всё же оказывается верным.

Теорема 4.5.2. *Существуют такие константы $c_3, c_4 > 0$, что для всех $n\in\mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$J_n \geq c_3\sqrt{n}, \quad \|H\| \geq c_4\sqrt{n}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $B_n(t)$ не возрастает по t при $t>0$ (если $n>1$ — строго убывает на $(0,n/2)$). Это следует, например, из представления [44; с. 138]

$$B_n(t) = \int\limits_{t-1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u)\,du = \int\limits_{-1/2}^{1/2} B_{n-1}(t+w)\,dw.$$

Напомним, что $B_1(t) = 1$ для $t\in(-1/2,1/2)$ и $B_1(t)=0$ для $t\notin[-1/2,1/2]$. Предположим, что B_{n-1} не возрастает, тогда аналогичным свойством обладает и B_n. Действительно, при $t>r\geq 1/2$

$$B_n(r) - B_n(t) =$$

$$= \int\limits_{-1/2}^{1/2} \Big(B_{n-1}(r+w) - B_{n-1}(t+w) \Big)\, dw \geq 0.$$

Если $t \geq 1/2 > r > 0$, то

$$\int\limits_{r-1/2}^{0} B_{n-1}(u)\, du = \int\limits_{0}^{1/2-r} B_{n-1}(u)\, du \geq \int\limits_{r+1/2}^{1} B_{n-1}(u)\, du,$$

значит

$$\int\limits_{r-1/2}^{r+1/2} B_n(u)\, du = \int\limits_{r-1/2}^{0} + \int\limits_{0}^{r+1/2} \geq$$

$$\geq \int\limits_{r+1/2}^{1} + \int\limits_{0}^{r+1/2} = \int\limits_{0}^{1} B_n(u)\, du.$$

Поэтому

$$B_n(r) - B_n(t) =$$

$$= \int\limits_{r-1/2}^{r+1/2} B_{n-1}(u)\, du - \int\limits_{t-1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u)\, du \geq$$

$$\geq \int\limits_{0}^{1} B_{n-1}(u)\, du - \int\limits_{t+1/2}^{t-1/2} B_{n-1}(u)\, du \geq 0.$$

Наконец, при $1/2 > t > r > 0$

$$\int\limits_{r-1/2}^{t-1/2} B_{n-1}(u)\, du = \int\limits_{1/2-t}^{1/2-r} B_{n-1}(u)\, du \geq \int\limits_{r+1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u)\, du,$$

откуда

$$B_n(r) - B_n(t) =$$

$$= \int\limits_{r-1/2}^{r+1/2} B_{n-1}(u)\, du - \int\limits_{t-1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u)\, du =$$

$$= \int\limits_{r-1/2}^{t-1/2} B_{n-1}(u)\,du - \int\limits_{r+1/2}^{t+1/2} B_{n-1}(u)\,du \geq 0.$$

Для $n > 1$ невозрастание B_n на $(0, \infty)$ геометрически иллюстрируется равенством (2.10).

Из отмеченного свойства B_n вытекает

$$J_n = \int\limits_0^{\infty} tB_n(t)\,dt \geq \int\limits_{\sqrt{n/24}}^{\sqrt{n/6}} tB_n(t)\,dt \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{n}{24}}\right)^2 \cdot B_n\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \sqrt{\frac{n}{6}} B_n\left(\sqrt{\frac{n}{6}} \cdot 1\right) \cong \frac{1}{4e}\sqrt{\frac{n}{6\pi}}.$$

Мы применили (5.6). Таким образом, существует константа $c_3 > 0$, с которой для всех n выполняется левое неравенство в (5.8). Из него и (5.5) следует, что

$$\|H\| = 6 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|t - \frac{1}{6}\right| B_n(t)\,dt \geq$$

$$\geq 6\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t| B_n(t)\,dt - \frac{1}{6}\right) =$$

$$= 6\left(2J_n - \frac{1}{6}\right) \geq 12c_3\sqrt{n} - 1.$$

Поэтому с некоторой константой $c_4 > 0$ имеет место оценка $\|H\| \geq c_4\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Теорема доказана. $\square$

§ 4.6. О некоторых свойствах центрального сечения Q_n

В этой главе мы рассматривали множества

$$G_{n,u} = \left\{x \in Q_n : \sum_{i=1}^{n} x_i = u\right\}.$$

Ниже в иллюстративных целях обсуждаются некоторые свойства сечения единичного куба $(n-1)$-мерной гиперплоскостью $\sum x_i = n/2$, то есть множества $G_{n,n/2}$. Сначала мы докажем следующую лемму.

Лемма 4.6.1. *Пусть $n \geq 2$. Допустим, что действительные числа $y_1, \ldots, y_n$ удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \frac{n}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 0. \tag{6.1}$$

Тогда $|y_i| \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Можно использовать индукцию по n, но здесь мы отметим более короткий путь. Равенство из (6.1) вместе с неравенством Коши даёт оценку

$$y_1^2 = \left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right)^2 \leq (n-1)\sum_{i=2}^{n} y_i^2.$$

Левое условие запишем в виде

$$\sum_{i=2}^{n} y_i^2 \leq \frac{n}{n-1} - y_1^2.$$

Таким образом,

$$y_1^2 \leq (n-1)\left(\frac{n}{n-1} - y_1^2\right) = n - (n-1)y_1^2,$$

откуда $y_1^2 \leq 1$. Аналогично доказывается, что $y_2^2, \ldots, y_n^2 \leq 1$. □

Число $n/(n-1)$ из условия леммы увеличить нельзя. Точнее, если в неравенстве из (6.1) правую часть заменить величиной $n/(n-1) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то утверждение леммы 7.1 станет неверным. Контрпример доставляет набор

$$y_1 = \ldots = y_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{\varepsilon}{n(n-1)}}, \quad y_n = -\sqrt{1 + \varepsilon\frac{n-1}{n}}.$$

Теорема 4.6.1. *Пусть $n \geq 2$,*

$$G_n := \Big\{x \in Q_n : \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2}\Big\}.$$

Обозначим через R_n минимальный радиус $(n-1)$-мерного шара, содержащего G_n, а через r_n — максимальный радиус $(n-1)$-мерного шара, содержащегося в G_n. Имеют место равенства:

$$R_n = \frac{\sqrt{n}}{2}, \text{ если } n \text{ — чётное;} \tag{6.2}$$

$$R_n = \frac{\sqrt{n-1}}{2}, \text{ если } n \text{ — нечётное;} \tag{6.3}$$

$$r_n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{6.4}$$

Доказательство. В силу симметрии центр указанных шаров есть точка $c = (1/2, \ldots, 1/2)$. При чётном n множество G_n содержит точку $a = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0,)$ а при нечётном n — точку $b = (1, \ldots, 1,\ 1/2,\ 0,\ \ldots, 0)$ (количество 1 и количество 0 в обоих случаях равны $\lfloor n/2 \rfloor$).

Пусть n — чётное. Так как $\|a-c\| = \sqrt{n}/2$, то $R_n \geq \sqrt{n}/2$. Однако шар с центром в точке c радиуса $\sqrt{n}/2$ содержит весь куб Q_n, а следовательно, и G_n. Поэтому справедливо (6.2).

Пусть n — нечётное. Так как $\|b - c\| = \sqrt{n-1}/2$, то $R_n \geq \sqrt{n-1}/2$. Но в этом случае расстояние от точки c до внутренней точки произвольной грани куба, принадлежащей также G_n, меньше $\|b - c\|$. Поэтому шар с центром в точке c радиуса $\sqrt{n-1}/2$ полностью содержит G_n, откуда следует (6.3).

Теперь для любого $n \geq 2$ докажем (6.4). Так как точка

$$m = \left(\frac{n}{2(n-1)}, \ldots, \frac{n}{2(n-1)}, 0\right)$$

принадлежит одновременно G_n и грани куба, то

$$r_n \leq \|m - c\| = \left\{(n-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2(n-1)}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{4(n-1)} + \frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Докажем, что $(n-1)$-мерный шар с радиусом, равным $\|m - c\|$, и центром в c принадлежит G_n. Для этого достаточно установить, что если одновременно

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{n}{4(n-1)}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2},$$

то $x \in Q_n$, то есть $0 \le x_i \le 1$. Положив $y_i = 2x_i - 1$, то есть $x_i - 1/2 = y_i/2$, сведём задачу к следующей: установить, что если

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \frac{n}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i = 0,$$

то $-1 \le y_i \le 1$. Последнее совпадает с утверждением леммы 4.6.1.

Теорема доказана. □

Как известно, $(n-1)$-объём $(n-1)$-мерного шара $U_{n-1}(r)$ радиуса r с центром в нуле равен

$$\mathrm{mes}_{n-1}\left(U_{n-1}(r)\right) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \tag{6.5}$$

Пусть U^* и U^{**} обозначают $(n-1)$-мерные шары радиусов r_n и R_n соответственно, о которых идёт речь в условии теоремы 4.6.1. Тогда справедливы включения $U^* \subset G_n \subset U^{**}$. Из формул (6.2)–(6.5) и известных оценок для Г-функции получается, что при $n \to \infty$

$$\mathrm{mes}_{n-1}\left(U^*\right) \to 0, \quad \mathrm{mes}_{n-1}\left(U^{**}\right) \to \infty.$$

В то же время $(n-1)$-мера множества G_n ведёт себя иначе, чем любая из мер этих шаров: она хотя и ограничена по n, но не стремится к нулю. Более того, из соотношений (2.10), (2.11) следует, что

$$\mathrm{mes}_{n-1}(G_n) = s\left(n, \frac{n}{2}\right) = \sqrt{n} \cdot B_n(0) \cong$$

$$\cong \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{6}{\pi n}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}},$$

то есть

$$\mathrm{mes}_{n-1}(G_n) \to \sqrt{\frac{6}{\pi}} = 1.3819\ldots, \quad n \to \infty.$$

Интересно ещё сравнить $\mathrm{mes}_{n-1}(G_n)$ с $(n-1)$-мерой μ_n проекции куба Q_n на гиперплоскость $\sum x_i = n/2$. Пусть $n > 1$. Мера $\mu_{n,j}$ проекции j-й грани куба на эту гиперплоскость равна $\cos\alpha_j$, где α_j — острый угол между нормалью к грани и вектором $\{1/\sqrt{n}, \ldots, 1/\sqrt{n}\}$. Очевидно, $\cos\alpha_j = 1/\sqrt{n}$. Суммируя по j, получим:

$$2\mu_n = \sum_{j=1}^{2n} \cos\alpha_j = \frac{2n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n},$$

откуда $\mu_n = \sqrt{n}$, что численно совпадает с длиной диагонали куба. Значит, при любом $n > 1$ равенство (2.10) может быть переписано в виде

$$\frac{s\left(n, t + \frac{n}{2}\right)}{\mu_n} = B_n(t).$$

В частности,

$$\frac{\mathrm{mes}_{n-1}(G_n)}{\mu_n} = \frac{s\left(n, \frac{n}{2}\right)}{\mu_n} = B_n(0) =$$

$$= \max_{t\in\mathbb{R}} B_n(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^n d\xi =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k \binom{n}{k}\left(\frac{n}{2} - k\right)^{n-1}.$$

Таким образом, *отношение* $(n-1)$*-мер сечения куба* Q_n *гиперплоскостью* $\sum x_i = n/2$ *и проекции куба на эту гиперплоскость равно* $B_n(0)$. *При* $n \to \infty$ *указанное отношение асимптотически эквивалентно* $\sqrt{6/\pi}\cdot n^{-1/2}$.

ГЛАВА 5

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОБЩЕГО ВИДА

§ 5.1. Интерполяция функций из $C(\Omega)$

Пусть Ω — замкнутое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Напомним, что под $C(\Omega)$ понимается пространство непрерывных функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ введём в рассмотрение величину $\xi(\Omega; S)$, определяемую по аналогии со случаем, когда Ω есть выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ (см. § 1.3). По определению,

$$\xi(\Omega; S) := \min\left\{\sigma \geq 1 : \Omega \subset \sigma S\right\}.$$

Как и ранее, считаем $\xi(S) := \xi(Q_n; S)$. Включение $\Omega \subset S$ эквивалентно равенству $\xi(S; \Omega) = 1$.

В настоящей главе рассматриваются вопросы, связанные с интерполяцией функций из $C(\Omega)$ с помощью алгебраических многочленов, принадлежащих одному из некоторых конечномерных пространств. Каждое такое пространство Π вводится следующим образом. Для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ под *мономом* x^α, как обычно, понимается выражение $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq n+1$; $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)$ — линейно независимые функции, представляющие собой мономы. В дальнейшем предполагается, что

$$\varphi_1(x) \equiv 1,\ \varphi_2(x) = x_1,\ \ldots,\ \varphi_{n+1}(x) = x_n.$$

Под *допустимым* d-мерным пространством многочленов от n переменных ниже понимается совокупность $\Pi := \mathrm{lin}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$. Отметим важные варианты $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов общей степени $\leq k$ $(k \in \mathbb{N})$ и $\Pi = \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов степени $\leq \alpha_i$ по x_i $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$.

Совокупность точек $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)} \in \Omega$ будем называть *допустимым* набором узлов для интерполяции с помощью Π, если $\Delta := \det(\mathbf{A}) \neq 0$. Здесь и ниже $\mathbf{A}$ есть $(d \times d)$-матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & \varphi_2\left(x^{(1)}\right) & \ldots & \varphi_d\left(x^{(1)}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_2\left(x^{(d)}\right) & \ldots & \varphi_d\left(x^{(d)}\right) \end{pmatrix}.$$

Интерполяционный проектор $P: C(\Omega) \to \Pi$ по этому набору узлов определяется с помощью равенств

$$Pf\left(x^{(j)}\right) = f_j := f\left(x^{(j)}\right), \quad j = 1, \ldots, d.$$

Аналогом интерполяционной формулы Лагранжа является представление

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{d} f\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x), \quad \lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}, \tag{1.1}$$

где $\Delta_j(x)$ — определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $\big(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x)\big)$. Многочлены $\lambda_j \in \Pi$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_j^k$. Их коэффициенты в базисе $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ составляют столбцы $\mathbf{A}^{-1}$. Аналогично рассмотренной выше ситуации $\Pi = \Pi_1(\mathbf{R}^n)$, $d = n+1$ и $\varphi_j(x) = x_{j-1}$ $(j = 2, \ldots, d)$ мы будем называть λ_j *базисными многочленами Лагранжа* для P. В дальнейшем рассматриваются лишь допустимые наборы узлов и те множества Ω, каждое из которых содержит такой набор.

Заметим, что матрица $\mathbf{A}$ отличается от матрицы, соответствующей рассмотренному в предыдущих главах проектору на $\Pi_1(\mathbf{R}^n)$ (см. § 2.1), тем, что столбец из 1 в ней является первым. Указанное обстоятельство связано с выбранной в этой главе системой нумерации мономов ($\varphi_1 = 1$) и, очевидно, вносит лишь формальные, а не содержательные изменения.

Пусть $\|P\|_\Omega$ обозначает норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$; положим $\|P\| := \|P\|_{Q_n}$. Из (1.1) с помощью стандартных рассуждений следует, что

$$\|P\|_\Omega = \max_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{d}|\lambda_j(x)| = \frac{1}{|\Delta|}\max_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{d}|\Delta_j(x)|. \tag{1.2}$$

Наряду с (1.2) отметим полезное равенство

$$\|P\|_\Omega = \max\Big\{|p(x)| : p \in \Pi,\, p\left(x^{(i)}\right) = \pm 1,\, x \in \Omega\Big\}, \tag{1.3}$$

которое также следует из (1.1).

Равенства $\lambda_j = \lambda_j(x) = \Delta_j(x)/\Delta$ эквивалентны матричному соотношению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varphi_2\left(x^{(1)}\right) & \varphi_2\left(x^{(2)}\right) & \ldots & \varphi_2\left(x^{(d)}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_d\left(x^{(1)}\right) & \varphi_d\left(x^{(2)}\right) & \ldots & \varphi_d\left(x^{(d)}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_d(x) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

В дальнейшем важную роль будет играть отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d-1}$, определяемое равенством

$$y = T(x) := (\varphi_2(x), \ldots, \varphi_d(x)) = (x_1, \ldots, x_n, \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_d(x)).$$

Мы будем рассматривать T на множестве Ω. Отмеченный выше выбор первых мономов $\varphi_j(x)$ обеспечивает обратимость T. Как обычно, $T(\Omega)$ обозначает образ Ω при отображении T.

Из (1.4) следует, что

$$\lambda_1 y^{(1)} + \ldots + \lambda_d y^{(d)} = y, \quad \sum_{j=1}^{d} \lambda_j = 1. \tag{1.5}$$

Поэтому

$$\|P\|_\Omega = \max_{x\in\Omega} \sum_{j=1}^{d} |\lambda_j(x)| =$$

$$= \max\Big\{ \sum_{j=1}^{d} |\beta_j| : \ \sum_{j=1}^{d} \beta_j = 1, \ y = \sum_{j=1}^{d} \beta_j y^{(j)} \in T(\Omega) \Big\}. \tag{1.6}$$

Записывая правую часть (1.6) несколько иначе, имеем

$$\|P\|_\Omega = \max\Big(\sum_{j=1}^{d-1} |\beta_j| + \Big|1 - \sum_{j=1}^{d-1} \beta_j \Big| \Big). \tag{1.7}$$

Максимум в (1.7) взят по наборам действительных чисел $\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}$, для которых $\beta_1(y^{(1)} - y^{(d)}) + \ \ldots \ + \beta_{d-1}(y^{(d-1)} - y^{(d)}) \in T(\Omega) - y^{(d)}$. Формулы (1.6), (1.7) выражают норму P через барицентрические координаты точек y относительно невырожденного $(d-1)$-мерного симплекса с вершинами $y^{(j)}$. Они обобщают полученные ранее равенства (2.2.1) и (3.4.3) со случая $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и $\Omega = Q_n$ на произвольные Π и Ω.

Через $\theta_n(\Pi;\Omega)$ обозначим минимальную величину нормы проектора $P : C(\Omega) \to \Pi$ при условии, что соответствующие P узлы интерполяции принадлежат Ω :

$$\theta_n(\Pi;\Omega) := \min_{x^{(j)}\in\Omega} \|P\|_\Omega.$$

Проектор, норма которого равна $\theta_n(\Pi;\Omega)$, будем называть *минимальным*. Положим $\theta_n(\Omega) := \theta_n(\Pi_1(\mathbb{R}^n);\Omega)$. Для согласования с предыдущим считаем $\theta_n := \theta_n(Q_n)$.

Целью настоящей главы является доказательство и обсуждение неравенств, связывающих нормы проекторов с геометрическими характеристиками множеств. Величина $\|P\|_\Omega$ оказывается равной норме интерполяционного проектора $\overline{P}$ на пространство многочленов степени ≤ 1 от $d-1$ переменных, рассматриваемых на множестве $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^{d-1}$. В свою очередь величина $\|\overline{P}\|_{T(\Omega)}$ связана с определённой характеристикой множества $T(\Omega)$. Кроме того, мы докажем неравенства для величины $\theta_n(\Pi;\Omega)$. Получающиеся оценки переносят на случай допустимых пространств Π результаты, установленные выше для $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$.

§ 5.2. Оценки нормы проектора $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

Пусть $\Omega \subset Q_n$. Введём в рассмотрение следующую геометрическую характеристику множества Ω :

$$\xi_n(\Omega) := \min\Big\{\xi(\Omega;S) : S - n\text{-мерный симплекс}, \mathrm{ver}(S) \subset \Omega, \, \mathrm{vol}(S) \ne 0\Big\}.$$

Считаем $\xi_n := \xi_n(Q_n)$.

В этом параграфе в связи с дальнейшими конструкциями мы вернёмся к интерполяции с помощью $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, но рассмотрим эту задачу на множестве Ω. Так как в этом случае $d = \dim \Pi = n+1$, то узлы интерполяции являются вершинами невырожденного n-мерного симплекса.

Пусть $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный с узлами $x^{(j)} \in \Omega$, S — симплекс с вершинами в этих точках. Обозначим через $\theta_n(\Omega)$ величину минимальной нормы P :

$$\theta_n(\Omega) := \theta_n(\Pi_1(\mathbb{R}^n);\Omega) = \min_{x^{(i)} \in \Omega} \|P\|_\Omega.$$

В соответствии с обозначениями § 5.1 $\theta_n(Q_n) = \theta_n(\Pi_1(\mathbb{R}^n);Q_n) = \theta_n$.

Докажем неравенства, связывающие $\|P\|_\Omega$ с $\xi(\Omega;S)$, а также $\theta_n(\Omega)$ с $\xi_n(\Omega)$. Для случая $\Omega = Q_n$ эти результаты были получены в главе 2. В [21; теорема 2.1] было доказано следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. *Для любого интерполяционного проектора* $P : C(\Omega) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ *справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(\|P\|_\Omega - 1) + 1 \le \xi(S;\Omega) \le$$

$$\le \frac{n+1}{2}(\|P\|_\Omega - 1) + 1. \qquad (2.1)$$

Для любого n

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(\theta_n(\Omega)-1)+1 \le \xi_n(\Omega) \le$$

$$\le \frac{n+1}{2}(\theta_n(\Omega)-1)+1. \tag{2.2}$$

Доказательство. Неравенство (2.1) может быть установлено по схеме доказательства теоремы 2.2.1, относящейся к случаю $\Omega = Q_n$. Однако мы приведём здесь независимое рассуждение для рассматриваемой более общей ситуации.

Пусть S — симплекс с вершинами в узлах P. Будем использовать следующие обозначения: c — центр тяжести S; v — точка $\Omega \setminus \mathrm{int}(S)$; b — точка пересечения прямой (cv) с границей симплекса. Пусть H есть $(n-1)$-мерная гиперплоскость, содержащая грань симплекса, на которой лежит b. Тогда a обозначает вершину S, не принадлежащую H. Заметим, что в случае $\Omega = Q_n$ в следующих ниже рассуждениях $v \in \mathrm{ver}(Q_n)$.

Мы будем использовать тот факт, что если $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то на любой прямой p есть линейная функция длины отрезка этой прямой от любой фиксированной точки. Поэтому колебание $|p(x)-p(z)|$ пропорционально $\|x-z\|$. Применим формулу (1.3) для нормы проектора.

Пусть сначала точка v выбрана так, что

$$\xi := \xi(S;\Omega) = \frac{\|v-c\|}{\|b-c\|}.$$

Из (1.3) следует, что для любого многочлена p, принимающего значения ± 1 в вершинах S, выполняется $\delta := p(v) \le \|P\|_\Omega$. Допустим, что $p(a) = -1$, а в других вершинах симплекса p принимает значение 1. Тогда $p(c) = (n-1)/(n+1) = 1 - 2/(n+1)$, поэтому

$$\xi = \frac{\|v-c\|}{\|b-c\|} = \frac{\delta-(1-2/(n+1))}{1-(1-2/(n+1))} =$$

$$= \frac{\delta - 1 + 2/(n+1)}{2/(n+1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{n+1}\xi = \delta - 1 + \frac{2}{n+1} \le$$

$$\le \|P\|_\Omega - 1 + \frac{2}{n+1}.$$

Это даёт правое неравенство в (2.1).

Пусть теперь точка $v \in \Omega \setminus \operatorname{int}(S)$ обладает свойством: существует многочлен p, принимающий в вершинах S некоторый набор значений ± 1, такой, что $p(v) = \|P\|_\Omega$. Очевидно, $\|v-c\|/\|b-c\| \le \xi$. Заметим, что

$$\frac{\|v-c\|}{\|b-c\|} = \frac{\|b-c\| + \|v-b\|}{\|b-c\|} =$$

$$= 1 + \frac{\|v-b\|}{\|b-c\|}.$$

Оценим отношение $\|v-b\|/\|b-c\|$. Ясно, что $|p(v) - p(b)| \ge \|P\|_\Omega - 1$. Кроме того,

$$|p(b) - p(c)| \le 1 - \left(-1 + \frac{2}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Равенство $|p(b) - p(c)| = 2 - 2/(n+1)$ имеет место лишь в случае, когда b совпадает с некоторой вершиной S, $p(b) = 1$, а в остальных вершинах симплекса, включая и a, p принимает значение -1. Итак,

$$\xi \ge \frac{\|v-c\|}{\|b-c\|} = 1 + \frac{\|v-b\|}{\|b-c\|} \ge 1 + \frac{\|P\|_\Omega - 1}{2 - 2/(n+1)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(\|P\|_\Omega - 1\right).$$

Отсюда следует левое неравенство в (2.1).

В дополнение к последнему рассуждению заметим, что если точка w пересечения прямой (av) с гранью, противоположной a, принадлежит симплексу S, то справа в (2.1) имеет место равенство. Это следует из (1.3) и условия $p(v) = \|P\|_\Omega$. Действительно, если $\|P\|_\Omega = 1$, то из доказанного выше соотношения получается и $\xi = 1$, что обеспечивает нужное равенство. Если же $\|P\|_\Omega > 1$, то обязательно $p(a) = -1$, а для остальных $a' \in \operatorname{ver}(S)$ имеет место $p(a') = 1$. Но тогда

$$\frac{\|v-w\|}{\|w-a\|} = \frac{p(v) - p(w)}{p(w) - p(a)} = \frac{\|P\|_\Omega - 1}{2},$$

поскольку $p(w) = 1$. С другой стороны, из геометрических соображений

$$\frac{\|v-w\|}{\|w-a\|} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\|v-c\|}{\|b-c\|} - 1\right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\|P\|_\Omega - 1}{2} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\|v-c\|}{\|b-c\|} - 1\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n+1}\,(\xi - 1)\,.$$

Таким образом, в данной ситуации имеет место также и неравенство, противоположное уже доказанному, что гарантирует справа в (2.1) равенство.

Теперь докажем (2.2). Из (2.1) следует, что для любого допустимого P

$$\xi_n(\Omega) \le \frac{n+1}{2}\,(\|P\|_\Omega - 1) + 1 \tag{2.3}$$

и для любого допустимого S

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)(\theta_n(\Omega) - 1) + 1 \le \xi(S;\Omega). \tag{2.4}$$

Взяв в (2.3) минимум по P, а в (2.4) — минимум по S, получим (2.2). $\square$

§ 5.3. Общий случай

Вернемся к задаче интерполяции функций $f \in C(\Omega)$ с помощью многочленов из d-мерного пространства $\Pi = \mathrm{lin}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$, $d \ge n+1$ (см. § 5.1). В пунктах 5.3.1 и 5.3.2 приводятся утверждения статьи [21].

5.3.1. Соотношение между $\|P\|_\Omega$ и $\xi(S;T(\Omega)$. Пусть $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d-1}$ — отображение, введённое в § 5.1. Напомним, что

$$y = T(x) = (\varphi_2(x), \ldots, \varphi_d(x)) = (x_1, \ldots, x_n, \varphi_{n+1}(x), \ldots, \varphi_d(x)).$$

Каждой функции $f \in C(\Omega)$ сопоставим функцию $g \in C(T(\Omega))$ с помощью равенства $g(y) = g(T(x)) := f(x)$. Оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами $C(\Omega)$ и $C(T(\Omega))$, при котором $\|g\|_{C(T(\Omega))} = \|f\|_{C(\Omega)}$. В частности, многочлену $p \in \Pi$ соответствует многочлен $q \in \Pi_1\left(\mathbb{R}^{d-1}\right)$. Если $y = T(x)$, то

$$p(x) = \sum_{j=1}^{d} a_j \varphi_j(x) = q(y) = a_1 + \sum_{j=2}^{d} a_j y_{j-1}.$$

Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(d)}$ — допустимый набор узлов интерполяции функций из $C(\Omega)$ с помощью многочленов из Π, $P: C(\Omega) \to \Pi$ — соответствующий проектор. Тогда $y^{(j)} = T\left(x^{(j)}\right)$ составляют допустимый набор узлов интерполяции функций из $C(T(\Omega))$ с помощью многочленов из $\Pi_1\left(\mathbb{R}^{d-1}\right)$. Рассмотрим интерполяционный проектор $\overline{P}: C(T(\Omega)) \to \Pi_1\left(\mathbb{R}^{d-1}\right)$ по системе узлов $y^{(1)}, \ldots, y^{(d)}$. Если $f \in C(\Omega)$, $g \in C(T(\Omega))$ и $g(y) = f(x)$ при $y = T(x)$, то равенствам $Pf\left(x^{(i)}\right) = f_i$ соответствуют равенства $\overline{P}g\left(y^{(i)}\right) = g_i := g\left(y^{(i)}\right)$. Поэтому интерполяционные многочлены $p \in \Pi$ и $q \in \Pi_1\left(\mathbb{R}^{d-1}\right)$ также связаны соотношением $p(x) = q(y)$.

Лемма 5.3.1. *Имеет место равенство*

$$\|\overline{P}\|_{T(\Omega)} = \|P\|_{\Omega}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Соответствие между f и g, выражаемое равенством $g(y) = f(x)$, если $y = T(x)$, является изометрией между $C(\Omega)$ и $C(T(\Omega))$. Кроме того, $Pf(x) = \overline{P}g(y)$. Поэтому

$$\|\overline{P}\|_{T(\Omega)} = \sup_{\|g\|_{C(T(\Omega))}=1} \|\overline{P}g\|_{C(T(\Omega))} =$$

$$= \sup_{\|f\|_{C(\Omega)}=1} \|Pf\|_{C(\Omega)} = \|P\|_{\Omega}.$$

□

Из леммы 5.3.1 и теоремы 5.2.1 получается следующий важный для нас результат.

Теорема 5.3.1. *Для проектора $P: C(\Omega) \to \Pi$ с узлами $x^{(j)}$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{d-1}\right)(\|P\|_{\Omega} - 1) + 1 \le \xi(S; T(\Omega)) \le$$

$$\le \frac{d}{2}(\|P\|_{\Omega} - 1) + 1, \tag{3.2}$$

где S — $(d-1)$-мерный симплекс с вершинами $T\left(x^{(j)}\right)$. Кроме того,

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{d-1}\right)(\theta_n(\Pi; \Omega) - 1) + 1 \le \xi_{d-1}(T(\Omega)) \le$$

$$\le \frac{d}{2}(\theta_n(\Pi; \Omega) - 1) + 1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим проектор $\overline{P} : C(T(\Omega)) \to \Pi_1\left(\mathbb{R}^{d-1}\right)$, связанный с P так, как отмечено выше. Применим неравенство (2.1) с $n = d-1$ и $T(\Omega)$ вместо Ω. Это даст соотношение

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{d-1}\right)\left(\|\overline{P}\|_{T(\Omega)}-1\right)+1 \le \xi(S;T(\Omega)) \le$$

$$\le \frac{d}{2}\left(\|\overline{P}\|_{T(\Omega)}-1\right)+1.$$

Из этого соотношения с учётом (3.1) получается двойное неравенство (3.2). Оценки (3.3) получаются непосредственно из (3.2), см. конец доказательства теоремы 5.2.1. Теорема доказана. □

5.3.2. Верхние оценки чисел $\theta(\Pi;\Omega)$. Отметим глобальные оценки величин $\theta_n(\Pi;\Omega)$ и $\xi_{d-1}(T(\Omega))$, которые сразу следуют из формулы (1.2). Пусть $P^* : C(\Omega) \to \Pi$ — интерполяционный проектор, узлы $x^{*(i)}$ которого максимизируют $|\Delta|$ при ограничениях $x^{(i)} \in \Omega$; S^* — $(d-1)$-мерный симплекс с вершинами $T\left(x^{*(i)}\right)$.

Теорема 5.3.2. *Имеют место соотношения*

$$\theta_n(\Pi;\Omega) \le \|P^*\| \le d, \tag{3.4}$$

$$\xi_{d-1}(T(\Omega)) \le \xi(S^*;T(\Omega)) \le \frac{1}{2}\left(d^2-d+2\right) \le \frac{1}{2}d^2. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть Δ^*, Δ_i^* соответствуют P^*. Тогда при всех $x \in \Omega$ и $i = 1,\ldots,d$ выполняются неравенства $|\Delta_i^*(x)| \le |\Delta^*|$. Поэтому в силу (1.2) верно $\|P^*\| \le d$, что совпадает с правым неравенством в (3.4). Из него и из предыдущей теоремы вытекают все другие соотношения (3.4)–(3.5). Теорема доказана. □

Неравенство $\|P^*\| \le d$ отмечалось в статье [53].

Размерность пространства $\Pi_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ равна $d = \binom{n+k}{k}$, поэтому для $\Pi = \Pi_k\left(\mathbb{R}^n\right)$ имеем:

$$\theta\left(\Pi_k\left(\mathbb{R}^n\right);\Omega\right) \le \binom{n+k}{k}, \tag{3.6}$$

$$\xi_{d-1}(T(\Omega)) \le \frac{1}{2}\binom{n+k}{k}^2. \tag{3.7}$$

Если же $\Pi = \Pi_\alpha\left(\mathbb{R}^n\right)$, то $d = (\alpha_1 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$, поэтому

$$\theta\left(\Pi_\alpha\left(\mathbb{R}^n\right);\Omega\right) \leq \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1), \tag{3.8}$$

$$\xi_{d-1}(T(\Omega)) \leq \frac{1}{2}\left[\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i + 1)\right]^2. \tag{3.9}$$

Оценки (3.6)–(3.9) не являются точными.

5.3.3. Нижние оценки чисел $\theta(\Pi; Q_n)$. Перейдём к установлению нижних оценок для нормы проектора. Их мы получим в случае $\Omega = Q_n$ по методу работы [17].

Пусть $P : C(Q_n) \to \Pi$ — интерполяционный проектор с узлами $x^{(1)}$, …, $x^{(d)}$. Так как для $x \in Q_n$ выполняется $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, то справедливо включение $T(Q_n) \subset Q_{d-1}$. Введём в рассмотрение множество

$$K = K(\Pi) := \operatorname{conv}(\operatorname{ver}(Q_{d-1}) \bigcap T(Q_n)).$$

Через $u = u(\Pi)$ обозначим максимальную величину определителя $\Delta = \det \mathbf{A}$ при условии принадлежности всех узлов кубу Q_n. Пусть Ψ_k — стандартизованный многочлен Лагранжа степени k, введённый в § 3.3.

Теорема 5.3.3. *Справедливо неравенство*

$$\theta(\Pi; Q_n) \geq \Psi_{d-1}^{-1}\left(\frac{(d-1)!\operatorname{mes}_{d-1}(K)}{u}\right). \tag{3.10}$$

Доказательство. Рассмотрим интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to \Pi$ с узлами $x^{(j)} \in Q_n$. Пусть T — отображение, введённое в начале пункта, $y = T(x)$, $y^{(j)} = T\left(y^{(j)}\right)$. По лемме 5.3.1 имеем

$$\|P\|_{Q_n} = \|\overline{P}\|_{T(Q_n)}.$$

Так как K — выпуклый многогранник, вершины которого принадлежат $T(Q_n)$, то в силу линейности функции $\overline{P}g$ имеем

$$\|\overline{P}\|_{T(Q_n)} \geq \|P\|_{C(Q_n) \to C(K)} \geq$$

$$\geq \|\overline{P}\|_{C(Q_{d-1} \to C(K)}.$$

Последнее неравенство следует из включения $T(Q_n) \subset Q_{d-1}$. Таким образом,

$$\|P\|_{Q_n} \geq \|\overline{P}\|_{C(Q_{d-1} \to C(K)} \qquad (3.11).$$

Правая часть (3.11) может быть вычислена с помощью равенства

$$\|\overline{P}\|_{C(Q_{d-1} \to C(K)} = \max\Big(\sum_{j=1}^{d-1} |\beta_j| + \Big|1 - \sum_{j=1}^{d-1} \beta_j\Big|\Big). \qquad (3.12)$$

Максимум в (3.12) взят по наборам действительных чисел $\beta_1, \ldots, \beta_{d-1}$, для которых $\beta_1(y^{(1)} - y^{(d)}) + \ldots + \beta_{d-1}(y^{(d-1)} - y^{(d)}) \in K - y^{(d)}$. Соотношение (3.12) устанавливается так же, как формула (3.4.3), соответствующая частному случаю $\Pi = \Pi_1(\mathbf{R}^n)$, когда $d = n+1$, T — тождественное преобразование, а $K = Q_n$.

В связи с равенством (3.12) норма $\|\overline{P}\|_{C(Q_{d-1} \to C(K)}$ может быть оценена по методу доказательства теоремы 3.4.1. Некоторая модификация приведённых там выражений связана с тем, что в настоящей ситуации действовать надо в пространстве $\mathbb{R}^{d-1}$ (вместо $\mathbb{R}^n$) и появляется множество K (вместо единичного куба Q_n). Кроме того, аналогом ν_n (напомним, что $\nu_n = h_n/n!$) теперь выступает величина $u/(d-1)!$ Общая схема рассуждений остаётся прежней и поэтому здесь не дублируется. На этом пути получается оценка

$$\|\overline{P}\|_{C(Q_{d-1}) \to C(K)} \geq \Psi_{d-1}^{-1}\Big(\frac{(d-1)!\,\mathrm{mes}_{d-1}(K)}{u}\Big).$$

Отсюда с учётом предыдущего имеем

$$\|P\|_{Q_n} \geq \Psi_{d-1}^{-1}\Big(\frac{(d-1)!\,\mathrm{mes}_{d-1}(K)}{u}\Big).$$

В силу произвольности P последнее неравенство влечёт (3.10).

Теорема доказана. $\square$

§ 5.4. Примеры

В случае, когда Π инвариантно относительно сдвигов и растяжений аргумента, вместо основного куба $Q_n = [0,1]^n$ из соображений подобия можно рассматривать куб $Q'_n = [-1,1]^n$. Иногда это является более удобным, например, с точки зрения симметрии или наглядности. Установленные соотношения переносятся и на эту ситуацию. В дальнейшем такой выбор дополнительно не комментируется.

Как и ранее, $x^{(j)}$ и $y^{(j)} = T\left(x^{(i)}\right)$ — допустимые узлы интерполяционных проекторов $P : C(\Omega) \to \Pi$ и $\overline{P} : C(T(\Omega)) \to \Pi_1\left(\mathbb{R}^{d-1}\right)$, см. § 5.3. Изменим естественным образом смысл некоторых обозначений из доказательства теоремы 5.2.1. Именно, в настоящем пункте S — $(d-1)$-мерный симплекс с вершинами $y^{(j)}$; c — центр тяжести S; $v \in T(\Omega)\setminus\mathrm{int}(S)$; b — точка пересечения прямой (cv) с границей симплекса S; H — $(d-2)$-мерная гиперплоскость, содержащая ту грань S, которой принадлежит b; a — вершина S, не лежащая в H; w — точка пересечения прямой (av) с гиперплоскостью H.

Для краткости в этом параграфе пишем $\|P\| := \|P\|_\Omega$, $\xi(S) := \xi(S; T(\Omega))$, $C[a,b] := C([a,b])$. Все примеры взяты из [21].

5.4.1. Случай $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. В этой ситуации $d = \dim \Pi_1(\mathbb{R}^n) = n+1$ и отображение T является тождественным. По поводу этой ситуации см. предыдущие главы.

5.4.2. Случай $\Omega = Q_1'$, $\Pi = \Pi_2(\mathbb{R})$. Известно (см., например, [33]), что минимальная величина нормы интерполяционного проектора в этой ситуации равна $5/4$ и эта величина реализуется для равномерных узлов. Покажем, как отмеченный результат получается с помощью теоремы 5.3.2. Дополнительно мы увидим, что минимальных проекторов здесь бесконечно много.

В рассматриваемом случае $d = \dim \Pi = 3$, то есть $d - 1 = 2$; S представляет собой треугольник. Отображение T имеет вид $x \longmapsto (x, x^2)$, и множество

$$T(\Omega) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 \le x \le 1\}$$

есть часть параболы. Для произвольных узлов $-1 \le x^{(1)} < x^{(2)} < x^{(3)} \le 1$ норма интерполяционного проектора $P : C[-1,1] \to \Pi_2(\mathbb{R})$ удовлетворяет равенству

$$\xi(S) = \frac{3}{2}\left(\|P\| - 1\right) + 1 = \frac{3\|P\| - 1}{2}. \tag{4.1}$$

Действительно, для любой $v \in T(\Omega)$ и соответствующей ей $a \in \mathrm{ver}(S)$ выполняется условие $w \in S$. Это немедленно следует из выпуклости функции $\psi(x) = x^2$. Как отмечено в доказательстве теоремы 5.3.2, в этом случае справа в (3.2) имеет место равенство, то есть справедливо (4.1). Из (4.2) получается, что равенство выполняется и справа в (3.3), то есть

$$\xi = \frac{3\theta - 1}{2},$$

где обозначено $\theta := \theta_1 \left(\Pi_2 \left(\mathbb{R}\right); [-1,1]\right)$, $\xi := \xi_2(T([-1,1]))$. Поэтому нахождение минимальной нормы проектора θ эквивалентно вычислению ξ. В качестве узлов минимального проектора следует взять вершины обнаруженного в итоге треугольника. Задача нахождения ξ редуцируется к треугольнику S с вершинами $(-s,s^2)$, $(0,0)$, (s,s^2), $0 < s \leq 1$. Для него экстремальными точками $v \in T(\Omega)$ могут быть лишь $(\pm 1,1), (\pm s/2, s^2/4)$. Две последние точки определяются тем, что в каждой из них касательная к параболе параллельна боковой стороне S. Вычисления дают

$$\xi(S) = \max\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{s^2} - 2\right),$$

$$\|P\| = \max\left(\frac{5}{4}, \frac{2}{s^2} - 1\right).$$

Интересно, что при $2\sqrt{2}/3 \leq s \leq 1$ эти величины не зависят от s и равны $\xi(S) = 11/8$, $\|P\| = 5/4$, причём это минимальные возможные значения. Итак, $\theta = 5/4$, $\xi = 11/8$; минимальным является любой проектор P с узлами $-s$, 0, s при $s \in [2\sqrt{2}/3, 1]$. Других минимальных проекторов здесь нет.

5.4.3. Случай $\Omega = Q_1'$, $\Pi = \Pi_3\left(\mathbb{R}\right)$. В этой ситуации $d = \dim \Pi = 4$, поэтому $d - 1 = 3$; S является тетраэдром. Отображение T имеет вид $x \longmapsto (x, x^2, x^3)$, поэтому

$$T(\Omega) = \{(x, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 1\}.$$

Множество $T(\Omega)$ устроено довольно интересно. Это есть линия с концами в точках $(-1,1,-1)$ и $(1,1,1)$, проекции которой на координатные плоскости конгруэнтны кривым $Y = X^2$, $Y = X^3$ и $X(t) = t^2$, $Y(t) = t^3$; последняя имеет нулевой угол в точке $X = Y = 0$. Обсудим оценки (3.2) в случае, когда $P : C[-1,1] \to \Pi_3(\mathbb{R})$ есть интерполяционный проектор по *чебышёвским узлам*

$$x^{(1)} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad x^{(2)} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$

$$x^{(3)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad x^{(4)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

то есть узлам, совпадающим с корнями многочлена Чебышёва четвёртой степени $8x^4 - 8x^2 + 1$. Положим здесь $\sigma := x^{(4)} = 0.9238\ldots$, $\tau := x^{(3)}$

$= 0.3826\ldots$ Тогда $\sigma^2 + \tau^2 = 1$, $\sigma^2 - \tau^2 = \sqrt{2}/2$. Известно (см. [33]), что $\|P\|$ приближённо равна 1.848.

Каждое из значений $\|\overline{P}\|_{T(\Omega)}$ и $\xi(S)$ достигается в точке $v = (1,1,1)$, поэтому надо взять $a = y^{(3)}$. Если $q \in \Pi_1\left(\mathbb{R}^3\right)$ такой, что

$$q\left(y^{(1)}\right) = -q\left(y^{(2)}\right) = q\left(y^{(3)}\right) = -q\left(y^{(4)}\right) = -1,$$

то

$$q(V) = \|\overline{P}\|_{T(\Omega)} = \|P\| =$$
$$= \frac{1}{a-b} = \sqrt{2}(a+b) = 1.8477\ldots$$

Кроме того,

$$\xi(S) = \frac{CV}{CB} = 2\sqrt{2}\left(\tau + \tau^2\right) + 1 = 2.4965\ldots$$

Оценки (3.2) выглядят следующим образом:

$$\frac{2\|P\|+1}{3} \le \xi(S) \le 2\|P\| - 1,$$

или в числах $1.5651\ldots \le 2.4965\ldots \le 2.6954\ldots$ То, что правое неравенство можно заменить на строгое, означает, что в рассматриваемой ситуации $w \notin S$.

5.4.4. Случай $\Omega = Q_1'$, $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R})$. Если $k \in \mathbb{N}$, то $T(\Omega)$ есть подмножество $[-1,1]^k$, имеющее вид

$$T(\Omega) = \{(x, x^2, \ldots, x^k) \in \mathbb{R}^k : \, -1 \le x \le 1\}.$$

Отметим здесь оценки, справедливые для чебышёвских и равномерных узлов. Классические результаты, касающиеся соответствующих интерполяционных проекторов $P : C[-1,1] \to \Pi_k(\mathbb{R})$, состоят в том, что $\|P\| \asymp \ln k$ (чебышёвские узлы) и $\|P\| \ge \mathrm{const} \cdot e^{k/2}$ (равномерные узлы), см., например, [33], [9], [62]. Логарифмический рост $\|P\|$ при $k \to \infty$, достигаемый на чебышёвских узлах, за счёт выбора узлов уменьшить нельзя [62]. В этом смысле интерполяционный проектор по чебышёвским узлам является почти-минимальным.

Так как $d = k+1$, то неравенства (3.1)–(3.2) дают для чебышёвских узлов $\xi(S) = O(k \ln k)$, поэтому $\xi_k(T([-1,1])) = O(k \ln k)$. Кроме того,

$$\theta_1\left(\Pi_k(\mathbb{R}); [-1,1]\right) \asymp \ln k.$$

Что же касается равномерных узлов, то для них справедливо соотношение $\xi(S) \geq \mathrm{const} \cdot e^{k/2}$.

5.4.5. Случай $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_{(1,\ldots,1)}(\mathbb{R}^n)$**.** Ограничимся рассмотрением таких $d = 2^n$ узлов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, когда x_j принимает одно из значений $t_j^{(1)}$ или $t_j^{(2)}$, $0 \leq t_j^{(1)} < t_j^{(2)} \leq 1$. Этот способ интерполяции есть суперпозиция покомпонентных действий, j-е из которых представляет собой линейную интерполяцию на отрезке $[0,1]$ с узлами $t_j^{(1)}, t_j^{(2)}$. Из интерполяционной формулы Лагранжа и одномерного результата следует, что

$$\|P\| = \prod_{j=1}^{n} \frac{\max\left(t_j^{(1)} + t_j^{(2)}, 2 - t_j^{(1)} - t_j^{(2)}\right)}{t_j^{(2)} - t_j^{(1)}}. \tag{4.2}$$

Отображение T в данном случае задаётся следующим образом:

$$x \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n, x_1x_2x_3, \ldots, x_1x_2x_3\ldots x_n).$$

Применение (3.2) и (4.2) даёт двустороннюю оценку

$$\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{\max\left(t_j^{(1)} + t_j^{(2)}, 2 - t_j^{(1)} - t_j^{(2)}\right)}{t_j^{(2)} - t_j^{(1)}} - 1\right] + 1 \leq \xi(S) \leq$$

$$\leq 2^{n-1}\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{\max\left(t_j^{(1)} + t_j^{(2)}, 2 - t_j^{(1)} - t_j^{(2)}\right)}{t_j^{(2)} - t_j^{(1)}} - 1\right] + 1. \tag{4.3}$$

В случае $n = 1$ или $\|P\| = 1$ оба соотношения в (4.3) являются равенствами. Пример строгих неравенств даёт интерполяционный проектор $P : C(Q_2) \to \Pi_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^2\right)$ по узлам $(0,0)$, $(1/2,0)$, $(0,1/2)$, $(1/2,1/2)$. Для него $\|P\| = \xi(S) = 9$, а левая и правая части (4.3) равны соответственно $19/3$ и 17.

Из (4.2) следует, что $\|P\| = 1$ лишь тогда, когда для всех j одновременно $t_j^{(1)} = 0$ и $t_j^{(2)} = 1$, то есть множество узлов совпадает с $\mathrm{ver}(Q_n)$. Оптимальность интерполяции по вершинам Q_n эквивалентна условию $T(\Omega) \subset S$. При $n = 1, 2$ последнее включение проверяется непосредственно. Возьмём $n = 2$. Множество $T(\Omega) = \{(x_1, x_2, x_1x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ представляет собой часть гиперболического параболоида $y_3 = y_1y_2$, содержащуюся в Q_3. Если узлы есть вершины квадрата, то S — тетраэдр с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$. Грани S лежат в плоскостях $y_3 = 0$, $y_3 = y_1$, $y_3 = y_2$, $y_3 = y_1 + y_2 - 1$. При $y_1, y_2 \in [0,1]$

$$y_1y_2 \geq 0, \quad y_1y_2 \leq y_1, \quad y_1y_2 \leq y_2, \quad y_1y_2 \geq y_1 + y_2 - 1.$$

Поэтому $T(\Omega) \subset S$, что даёт $\xi(S) = \|P\| = 1$. В качестве основного квадрата интересно взять и $[-1,1]^2$. Выбор узлов $(\pm 1, \pm 1)$ приводит к правильному тетраэдру с вершинами $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$. Указанный тетраэдр целиком содержит часть той же поверхности $y_3 = y_1 y_2$, но заключённую в кубе $[-1,1]^3$. Это включение, как и отмеченное выше, равносильно минимальности соответствующего проектора.

5.4.6. Случай $\Omega = Q_3$, $\Pi = \mathrm{lin}(1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$. Рассматриваемая схема применима не только к пространствам $\Pi_k(\mathbb{R}^n)$ или $\Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Возьмём в качестве Π линейную оболочку X_n мономов $1, x_i, x_i x_j$; $i, j = 1, \ldots, n$ (предполагается, что в произведениях переменных $i \neq j$). В этом случае $d = n(n+1)/2 + 1$. Отображение T имеет вид

$$x \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, x_1x_3, \ldots, x_1x_n, \ldots, x_{n-1}x_n).$$

Некоторые оценки для норм интерполяционных проекторов в случае $n \in \mathbb{N}$ приводятся в §5.6. Если $n = 2$, то $\Pi = \Pi_{(1,1)}\left(\mathbb{R}^2\right)$, поэтому $\theta(X_2; Q_2) = 1$.

Рассмотрим вариант $n = 3$, когда $d = 7$, $d - 1 = 6$ и T действует следующим образом:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \longmapsto y = (x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3).$$

В качестве узлов интерполяции на кубе Q_3 естественно выбрать семь из восьми вершин куба. Норма любого из этих восьми проекторов равна 7. Поэтому $\theta(X_3; Q_3) \leq 7$.

Пусть, например, $P : C(Q_3) \to \Pi$ есть проектор по узлам $x^{(1)} = (0,0,0)$, $x^{(2)} = (1,0,0)$, $x^{(3)} = (0,1,0)$, $x^{(4)} = (0,0,1)$, $x^{(5)} = (1,1,0)$, $x^{(6)} = (1,0,1)$, $x^{(7)} = (0,1,1)$. Вычисления показывают, что $\|\overline{P}\|$ достигается на точке $v = (1,1,1,1,1,1)$. При этом $q(v) = \|\overline{P}\| = 7$ для многочлена $q \in \Pi_1\left(\mathbb{R}^6\right)$ со значениями

$$q\left(y^{(1)}\right) = -q\left(y^{(2)}\right) = -q\left(y^{(3)}\right) = -q\left(y^{(4)}\right) =$$

$$= q\left(y^{(5)}\right) = q\left(y^{(6)}\right) = q\left(y^{(7)}\right) = 1.$$

Левая и правая части (3.2) оказываются равными соответственно $9/2$ и 22. Прямая, проходящая через $y^{(1)}$ и v, параллельна грани S, противоположной $y^{(1)}$. Поэтому в качестве a следует взять $y^{(2)} = (1,0,0,0,0,0)$. Точка пересечения прямой (av) и гиперплоскости $y_1 - y_4 - y_5 = 0$, содержащей грань симплекса, противоположную a, есть $w = (1, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$. Имеем:

$$\xi(S) \geq \frac{\|v - w\|}{\|w - a\|} \cdot d + 1 = 1 \cdot 7 + 1 = 8 > 9/2,$$

значит, левое неравенство из (3.2) в нашем случае является строгим. Так как не все значения $q\left(y^{(i)}\right)$, $i \neq 2$, равны 1, то и правое соотношение в (3.2) также не является равенством.

§ 5.5. Оценки нормы проектора через осевые диаметры

5.5.1. Основная теорема. Пусть V — невырожденный n-мерный параллелепипед. Предположим, что рёбра V задаются линейно независимыми векторами $v_1, \ldots, v_n$. В случае $V = Q_n$ считаем, что v_i направлен из 0 в e_i. Через $a_i(V)$ обозначим длину v_i. Для выпуклого $G \subset \mathbb{R}^n$ через $\delta_i^V(G)$ обозначим максимальную длину отрезка, содержащегося в G и параллельного v_i. В дальнейшем мы существенно используем следующий результат.

Лемма 5.5.1. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(V)}{\delta_i^V(S)} \leq \xi(V; S). \tag{5.1}$$

Доказательство. Введём в рассмотрение величину $\alpha(V; S)$, определённую в § 1.4. Она равна минимальному $\sigma > 0$, для которого транслят симплекса σS содержит V. Как было доказано в главе 1 (см. там следствие 1.4.1), $\alpha(V; S)$ равно левой части (5.1) Поэтому (5.1) эквивалентно очевидному неравенству $\alpha(V; S) \leq \xi(V; S)$. $\square$

В случае $V = Q_n$ неравенство леммы 5.5.1 имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S).$$

Здесь $d_i(S) = \delta_i^{Q_n}(S)$ есть максимальная длина отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Величина $d_i(S)$ была введена в § 1.2 и названа там i-м осевым диаметром S. По аналогии со случаем $V = Q_n$ величину $\delta_i^V(S)/a_i(V)$ мы назовём *i-м осевым диаметром* S, но относительно V. Фактически это отношение равно максимальной длине отрезка из S, параллельного i-й оси координатной системы, базисные векторы которой совпадают с v_i.

Неравенство (5.1), соединённое с результатами § 5.3, позволяет получить новые оценки для норм интерполяционных проекторов. Следующее утверждение доказано в [26; теорема 3.1]. В его формулировке и доказательстве используются обозначения предыдущих пунктов.

Теорема 5.5.1. *Пусть* Π — *допустимое пространство многочленов размерности* d, $G := \mathrm{conv}(T(\Omega))$. *Тогда*

$$\max_{D\subset G}\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \le \frac{d}{2}\left(\theta_n(\Pi;\Omega)-1\right)+1. \tag{5.2}$$

Максимум в левой части (5.1) *берётся по совокупности невырожденных* $(d-1)$*-мерных параллелепипедов* $D\subset G$.

Если интерполяционный проектор $P^*: C(\Omega)\to\Pi$ *и параллелепипед* $D^*\subset G$ *удовлетворяют равенству*

$$\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D^*)}{\delta_i^{D^*}(G)} = \frac{d}{2}\left(\|P^*\|_\Omega-1\right)+1, \tag{5.3}$$

то P^* *является минимальным.*

Доказательство. Пусть $P: C(\Omega)\to\Pi$ — интерполяционный проектор по допустимому набору узлов $x^{(1)},\ldots,x^{(d)}$. Для этих узлов $\Delta\ne 0$. Рассмотрим симплекс $S\subset\mathbb{R}^{d-1}$ с вершинами $y^{(j)} := T\left(x^{(j)}\right)$, $j=1,\ldots,d$. Так как $\mathrm{vol}(S)=|\Delta|/(d-1)!>0$, то S является невырожденным. По теореме 5.3.1 имеем

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{d-1}\right)\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1 \le \xi(T(\Omega);S)\le$$
$$\le\frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1. \tag{5.4}$$

Воспользуемся правым неравенством из (5.4). В силу выпуклости S верно $\xi(T(\Omega);S)=\xi(G;S)$. Пусть $D\subset G$ — произвольный невырожденный параллелепипед. Тогда

$$\xi(D;S)\le\xi(G;S)=\xi(T(\Omega);S)\le$$
$$\le\frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega-1\right)+1. \tag{5.5}$$

Величину $\xi(D;S)$ оценим снизу с помощью (5.1):

$$\xi(D;S)\ge\sum_{i=1}^{d-1}\frac{a_i(D)}{\delta_i^D(S)}. \tag{5.6}$$

Из (5.5) и (5.6) следует, что норма P удовлетворяет неравенству

$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(S)} \leq \frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega - 1\right) + 1. \tag{5.7}$$

Так как G содержит точки $y^{(j)}$ и является выпуклым, то G содержит S. Поэтому при $i = 1, \ldots, d-1$ выполняется $\delta_i^D(S) \leq \delta_i^D(G)$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \leq \frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega - 1\right) + 1. \tag{5.8}$$

Правая часть (5.8) не зависит от D. Взяв в (5.8) максимум по параллелепипедам $D \subset G$, видим, что для любого интерполяционного проектора $P : C(\Omega) \to \Pi$

$$\max_{D \subset G} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \leq \frac{d}{2}\left(\|P\|_\Omega - 1\right) + 1.$$

Для получения (5.2) остаётся взять в последнем соотношении минимум по P.

Вторая часть утверждения (достаточность (5.3) для минимальности P^*, т. е. для равенства $\|P^*\|_\Omega = \theta_n(\Pi; \Omega)$) легко следует из первой. Именно, допустим, что (5.3) выполняется, но P^* не является минимальным. Тогда, очевидно,

$$\max_{D \subset G} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} > \frac{d}{2}\left(\theta_n(\Pi; \Omega) - 1\right) + 1,$$

что противоречит (5.2).

Теорема доказана. $\square$

Дадим несколько замечаний и примеров к теореме 5.5.1 (см. [26; п. 4]).

5.5.2. Об эффективности полученных оценок. При оценивании нормы конкретного проектора можно применять неравенство (5.7), в котором $D \subset G$ — произвольный невырожденный параллелепипед. Однако следует иметь в виду, что в случае $D \subset S$ левая часть (5.7) не превышает 1; это вытекает из леммы 5.5.1 и равенства $\xi(D; S) = 1$. Так как норма любого проектора ≥ 1, то для $D \subset S$ оценка (5.7) тривиальна.

Если $D \subset G$, то $a_i(D) \leq \delta_i^D(G)$, поэтому левые части (5.2) и (5.3) не превышают $d-1$. Пусть выполняется (5.3), тогда

$$\|P^*\|_\Omega = \frac{2}{d}\left(\sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D^*)}{\delta_i^{D^*}(G)} - 1\right) + 1 \leq$$

$$\leq \frac{2(d-2)}{d} + 1 = 3 - \frac{4}{d}.$$

Следовательно, *сфера действия условия* (5.3) *охватывает лишь проекторы, норма которых не превышает* $3-4/d$. Это весьма ограничительно уже в случае $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. В § 3.4 (см. там теорему 3.4.2) было доказано, что при любом n

$$\theta_n = \theta\left(\Pi_1(\mathbb{R}^n); Q_n\right) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}. \tag{5.9}$$

В этом варианте $d = n+1$. Из предыдущего и (5.9) следует, что при достаточно больших n проекторов, удовлетворяющих (5.3), не существует. Это справедливо и для $n = 2$, см. далее. Таким образом, *условие* (5.3), *достаточное для минимальности* P^*, *не является необходимым.*

5.5.3. Случай $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. В этом примере имеем $T(x) = x$ и $G = Q_n$. Левая часть (5.2) в точности равна $d-1 = n$. Максимум в ней достигается на $D = Q_n$, и (5.2) приводится к виду

$$\theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \tag{5.10}$$

Как отмечалось в главе 3, известные случаи равенства в (5.10) исчерпываются $n = 1, n = 3$ и $n = 7$; они соответствуют $\theta_1 = 1, \theta_3 = 2, \theta_7 = 5/2$. При $n = 1, 3, 7$ каждый из минимальных проекторов удовлетворяет (5.3), если взять $D^* = Q_n$; тогда (5.3) эквивалентно $\|P^*\|_\Omega = 3 - 4/(n+1)$. Первое значение n, при котором в (5.10) выполняется строгое неравенство, есть $n = 2$. По теореме 2.4.1 $\theta_2 = 1 + 2\sqrt{5}/5 = 1.8944\ldots$, а правая часть (5.10) при $n = 2$ равна $5/3$. Значит, в двумерной ситуации (5.3) не верно для всех P^* и D^*.

Минимальное n, для которого наличие равенства в (5.10) не ясно, равно 4. В § 3.7 было отмечено, что строгое неравенство в (5.10) выполняется по крайней мере начиная с $n = 57$. Вопрос о точном значении этой границы открыт.

5.5.4. Случай $\Omega = [-1, 1]$, $\Pi = \Pi_2(\mathbb{R})$. Здесь $d = \dim \Pi_2(\mathbb{R}) = 3$. Отображение T имеет вид $y = T(x) = (x, x^2)$. Поэтому

$$G = \operatorname{conv}(T(\Omega)) = \{(y_1, y_2) : -1 \leq y_1 \leq 1,\ y_2 \geq y_1^2\}$$

есть область, лежащая над параболой $y_2 = y_1^2$ на отрезке $[-1, 1]$. Как известно, $\theta(\Pi_2(\mathbb{R}); [-1, 1]) = 5/4$, а проектор по равномерным узлам является минимальным (см. [33]). С помощью геометрических средств этот результат был получен в п. 5.4.2. Более того, мы показали, что минимальным является любой проектор с узлами $-s$, 0, s при $s \in [2\sqrt{2}/3, 1]$, причём других минимальных проекторов нет. Максимум в левой части (5.2) достигается на прямоугольнике с вершинами $(\pm 1/2, 1/4)$, $(\pm 1/2, 1)$ и равен $5/4$. После простых преобразований (5.2) даёт

$$\theta\left(\Pi_2(\mathbb{R}); [-1,1]\right) \geq \frac{7}{6}.$$

Оказывается, что никакой интерполяционный проектор не удовлетворяет (5.3). Вместе с тем минимальный проектор P с узлами $-2\sqrt{2}/3$, 0, $2\sqrt{2}/3$ удовлетворяет более слабому, чем (5.3), условию

$$\frac{a_1(D)}{\delta_1^D(S)} + \frac{a_2(D)}{\delta_2^D(S)} = \frac{3}{2}\left(\|P\|_\Omega - 1\right) + 1, \tag{5.11}$$

если в качестве D взять прямоугольник с вершинами $(\pm\sqrt{2}/3, 2/9)$, $(\pm\sqrt{2}/3, 1)$. Иначе говоря, в неравенстве (5.7) на этих P и D достигается равенство. Обе части (5.11) равны $11/8$, поэтому $\xi(D; S) = \xi(G; S) = 11/8$ (см. доказательство теоремы 5.5.1).

5.5.5. Случай $\Omega = Q_n$, $\Pi = \Pi_{(1,\ldots,1)}\left(\mathbb{R}^n\right)$**.** Имеем $d = 2^n$. Из одномерного варианта следует, что $\theta\left(\Pi_{(1,\ldots,1)}\left(\mathbb{R}^n\right); Q_n\right) = 1$, а интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами Q_n, является минимальным. Тем самым, (5.2) принимает вид

$$\max_{D \subset G} \sum_{i=1}^{d-1} \frac{a_i(D)}{\delta_i^D(G)} \leq 1. \tag{5.12}$$

Покажем, что при $n = 2$ в (5.12) имеет место равенство. В этом случае $d - 1 = 3$. Трёхмерное множество $T(Q_2) = \{(x_1, x_2, x_1 x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ представляет собой часть гиперболического параболоида $y_3 = y_1 y_2$, содержащуюся в Q_3. Как отмечено в п. 5.4.5, $T(Q_2)$ содержится и в симплексе S с вершинами $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$. Каждая из этих точек принадлежит $T(Q_2)$. Из соображений выпуклости $G = \operatorname{conv}(T(Q_2)) = S$. Пусть D^* — любой из четырёх максимальных "угловых" параллелепипедов, содержащихся в S. Одна из вершин D^* совпадает с вершиной S, исходящие из неё рёбра D^* направлены по рёбрам S, а длина каждого из этих рёбер D^* составляет $1/3$ длины соответствующего ребра S. Имеем:

$$\frac{a_1(D^*)}{\delta_1^{D^*}(G)} + \frac{a_2(D^*)}{\delta_2^{D^*}(G)} + \frac{a_3(D^*)}{\delta_3^{D^*}(G)} =$$

$$= \frac{a_1(D^*)}{\delta_1^{D^*}(S)} + \frac{a_2(D^*)}{\delta_2^{D^*}(S)} + \frac{a_3(D^*)}{\delta_3^{D^*}(S)} = 1.$$

Поэтому максимум в левой части (5.12) равен 1.

§ 5.6. Интерполяция с помощью пространства X_n

Для $n \geq 2$ обозначим через X_n обозначим совокупность многочленов от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, каждый из которых является линейной комбинацией $1, x_i, x_i x_j$. Здесь $i, j = 1, \ldots, n$; в произведениях переменных $i < j$. Например,

$$X_2 = \mathrm{lin}(1, x_1, x_2, x_1x_2),$$

$$X_3 = \mathrm{lin}(1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3),$$

$$X_4 = \mathrm{lin}(1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4).$$

Размерность X_n равна $d = n(n+1)/2 + 1$. Часто встречающееся ниже число $d-1$ равно $n(n+1)/2$.

Мы будем использовать следующий порядок мономов, составляющих $g \in X_n$:

$$1, x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_3, \ldots, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n.$$

Отображение $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{d-1}$ в данном случае задаётся равенством

$$y := T(x) = (x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_3, \ldots, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n).$$

При интерполяции функций, заданных на Q_n, это отображение также рассматривается на Q_n.

Пусть $x^{(j)} \in Q_n$ $1 \leq j \leq d)$ — узлы интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \to X_n$. Матрица $\mathbf{A}$ в данном случае имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & x_1^{(1)}x_2^{(1)} & \ldots & x_{n-1}^{(1)}x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & x_1^{(2)}x_2^{(2)} & \ldots & x_{n-1}^{(2)}x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_1^{(d)} & \ldots & x_n^{(d)} & x_1^{(d)}x_2^{(d)} & \ldots & x_{n-1}^{(d)}x_n^{(d)} \end{pmatrix}.$$

Для допустимого набора узлов выполняется условие $\Delta = \det(\mathbf{A}) \neq 0$. Оно означает, что точки $x^{(j)}$ одновременно не принадлежат никакой поверхности Γ с уравнением $g(x) = 0$, $g \in X_n, g \neq 0$; это следует из линейной независимости столбцов Δ.

Пусть $\lambda_j \in X_n$ — базисные многочлены Лагранжа, соответствующие P. Норма проектора равна

$$\|P\| := \|P\|_{Q_n} = \max_{x\in Q_n} \sum_{j=1}^{d} |\lambda_j(x)|.$$

Функция $p(x)$ из X_n, вообще говоря, не является линейной по x, но линейна по каждому x_i. В силу этого $\|p\|_{C(Q_n)}$ совпадает с $\max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} |p(x)|$, поэтому справедливо равенство

$$\|P\| = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{d} |\lambda_j(x)| =$$

$$= \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{d} \frac{|\Delta_j(x)|}{|\Delta|}.$$

В этом параграфе мы дополним и систематизируем общие результаты настоящей главы по оцениванию минимальной нормы P. Для краткости положим $\chi_n := \theta(X_n; Q_n)$.

Приведём утверждение, в котором объединяются полученные в работе [17] оценки χ_n сверху и снизу. В формулировке и доказательстве этой теоремы используются обозначения §5.3. Считаем $K_n := K(X_n)$, $u_n := u(X_n)$.

Теорема 5.6.1. *При любом $n \ge 2$ имеют место неравенства*

$$\max(A, B, C, D) \le \chi_n \le d, \tag{6.1}$$

где

$$A := \Psi_d^{-1}\left(\frac{(d-1)!\mathrm{mes}_{d-1}(K_n)}{u_n}\right),$$

$$B := \frac{1}{2n+1}\theta_{d-1}, \qquad C := \frac{1}{2n+1}\Psi_N^{-1}\left(\frac{(d-1)!}{u_n}\right),$$

$$D := \frac{n}{8e}\cdot\left(\frac{d-1}{u_n}\right)^{1/(d-1)}.$$

Доказательство. Покажем поочерёдно, что χ_n не меньше каждой из величин A, B, C, D. Неравенство $\chi_n \ge A$ следует из теоремы 5.3.3, см. соотношение (3.10) для $\Pi = X_n$.

Зафиксируем интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \to X_n$ по узлам $x^{(j)} \in Q_n$. Рассмотрим проектор $\overline{P} : C(T(Q_n)) \to \Pi_1(\mathbb{R}^N)$, соответствующий узлам $y^{(j)} = T(x^{(j)}) \in T(Q_n)$. По лемме 5.3.1 $\|P\|_{Q_n} = \|\overline{P}\|_{T(Q_n)}$.

Пусть $g \in X_n$ и $G \in \Pi_1(\mathbb{R}^{d-1})$ — ассоциированная с g линейная функция, то есть такой многочлен степени ≤ 1 на $\mathbb{R}^{d-1}$, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами p. Введём на X_n норму

$$\|g\|^* := \|G\|_{C(Q_N)}.$$

В § 6.6 мы докажем (см. там теорему 6.6.2), что для всех $g \in X_n$ справедливо неравенство

$$\|g\|^* \le (2n+1)\|g\|_{C(Q_n)} = (2n+1)\|G\|_{C(T(Q_n))}.$$

Поэтому для проекторов P, $\overline{P}$ имеем

$$\|P\|_{Q_n} = \|\overline{P}\|_{T(Q_n)} = \sup_{\|g\|_{C(T(Q_n))}=1} \|\overline{P}g\|_{C(T(Q_n))} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2n+1} \sup_{\|g\|_{C(T(Q_n))}=1} \|\overline{P}g\|_{C(Q_{d-1})} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2n+1} \sup_{\|g\|_{C(Q_{d-1})}=1} \|\overline{P}g\|_{C(Q_{d-1})} =$$

$$= \frac{1}{2n+1} \|\overline{P}\|_{Q_{d-1}}.$$

Так как последнее выражение не меньше, чем $1/(2n+1)\theta_{d-1}$, то

$$\|P\|_{Q_n} \ge \frac{1}{2n+1}\theta_{d-1}.$$

Отсюда в силу произвольности P следует, что $\chi_n \ge B$.

Неравенства $\chi_n \ge C$ и $\chi_n \ge D$ выводятся путём оценивания нормы $\overline{P}$ с применением результатов и методов § 3.4. При доказательстве теоремы 3.4.1 было получено неравенство

$$\|\overline{P}\|_{Q_{d-1}} \ge \Psi_{d-1}^{-1}\left(\frac{(d-1)!}{|\Delta|}\right).$$

Здесь, как и выше, Δ есть определитель $\mathbf{A}$. Так как $\Delta \le u_n$, то

$$\|P\|_{Q_n} \ge \frac{1}{2n+1}\|\overline{P}\|_{Q_{d-1}} \ge \frac{1}{2n+1}\Psi_{d-1}^{-1}\left(\frac{N!}{u_n}\right).$$

Отсюда получатся $\chi_n \geq C$.

Наконец, воспользуемся оценкой (3.4.4), приведённой в замечании после доказательства теоремы 3.4.1. В наших обозначениях она имеет вид

$$\|\overline{P}\|_{Q_{d-1}} > \frac{1}{2e} \cdot \left(\frac{(d-1)^d}{|\Delta|} \right)^{1/(d-1)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|P\|_{Q_n} &> \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2e} \cdot \left(\frac{(d-1)^d}{|\Delta|} \right)^{1/(d-1)} = \\ &= \frac{N}{2e(2n+1)} \cdot \left(\frac{d-1}{|\Delta|} \right)^{1/(d-1)} \geq \\ &\geq \frac{n(n+1)}{4e(2n+1)} \cdot \left(\frac{d-1}{u_n} \right)^{1/(d-1)} > \\ &> \frac{n}{8e} \cdot \left(\frac{d-1}{u_n} \right)^{1/(d-1)}. \end{aligned}$$

Для установления оценки $\chi_n \geq D$ осталось учесть произвольность P.

Неравенство $\chi_n \leq d$ совпадает с оценкой (3.4) теоремы 5.3.2.

Теорема доказана. $\square$

Для $n = 2$ неравенство (6.1) принимает вид $1 \leq \chi_2 \leq 4$, а для $n = 3$ —

$$\Psi_6^{-1} \left(\frac{6!\mathrm{mes}_6(K_3)}{u_3} \right) \leq \chi_3 \leq 7.$$

Напомним (см. п. 5.4.6), что $\chi_2 = 1$, $\chi_3 \leq 7$.

Оценки, аналогичные неравенствам $\chi_n \geq C$ и $\chi_n \geq D$, могут быть получены и в случае, если в рассматриваемой задаче вместо X_n используется линейная оболочка $1, x_i$ и *всех* произведений $x_i x_j$, включая и квадраты x_i^2, то есть совокупность $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что использование в качестве узлов интерполяции с помощью $\Pi_2(\mathbb{R}^n)$ вершин Q_n возможно лишь при $n \geq 4$, так как для $n = 2$ и $n = 3$ справедливо соотношение $\dim(\Pi_2(\mathbb{R}^n)) = (n+1)(n+2)/2 > 2^n$.

При использовании (6.1) возникает задача об оценке чисел $\mathrm{mes}_{d-1}(K_n)$ и u_n. Нетрудно видеть, что

$$u_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Приведём здесь грубую оценку для u_n, получающуюся с помощью известного неравенства Адамара для определителя матрицы. Именно, при $n \geq 3$ справедливо неравенство

$$u_n \leq 2^{-n(n+1)/4}(n+1)^{1/2}n^{(n+1)/2}(n-1)^{(n+2)(n-1)/4}(n-2)^{(n+1)(n-2)/4}. \quad (6.2)$$

Оценка (6.2) выводится из следующих соображений. Так как $\Delta_j(x)$ есть функция, линейная по каждому x_i, то максимальное значение u_n реализуется на узлах, являющихся вершинами Q_n. Так как каждый такой определитель связан с объёмом $(d-1)$-мерного симплекса, то он инвариантен относительно перенумерации переменных. Поэтому можно считать, что в экстремальном наборе узлов $x^{(n+1)} = 0$. Разложим максимальный определитель по последней строке. Получается, что значение u_n численно равно максимальному определителю порядка $(d-1)$, составленному из компонент $T(x^{(j)})$ для ненулевых $x^{(j)} \in \mathrm{ver}(Q_n)$.

Частично упорядочим элементы множества $T(Q_n) \bigcap \mathrm{ver}(Q_{d-1})$ по числу их единичных компонент, не ранжируя векторы в группе с одинаковым числом единиц. Первые три наибольших значения числа единиц как компонент вектора из $\mathrm{ver}(T(Q_n))$ равны $n(n+1)/2$, $n(n-1)/2$ и $(n-1)(n-2)/2$. Количество векторов в группе с таким числом единиц есть соответственно $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n-2} = n(n-1)/2$. Заметим, что $1 + n + n(n-1)/2 = d > d-1$. Поэтому произведение евклидовых длин строк определителя порядка $d-1$ (представляющих собой попарно различные элементы $\mathrm{ver}(T(Q_n))$) становится максимальным, если взять одну строку, все компоненты которой равны 1, n строк, содержащих $n(n-1)/2$ единиц, и $d-1-n-1 = (n+1)(n-2)/2$ строк, содержащих $(n-1)(n-2)/2$ единиц. Значение этого максимального произведения равно

$$\mu_n := \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^{(n+1)(n-2)/4} =$$
$$= 2^{-n(n+1)/4}(n+1)^{1/2}n^{(n+1)/2}(n-1)^{(n+2)(n-1)/4}(n-2)^{(n+1)(n-2)/4}.$$

Определитель действительной матрицы $\mathbf{Y} := (y_{ij})$ порядка m удовлетворяет следующему *неравенству Адамара* (см., например, [3; с. 160]):

$$|\det(\mathbf{Y})| \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Применяя это неравенство к максимальному определителю величины u_n, получим $u_n \leq \mu_n$, что эквивалентно (6.2).

Во всех выражениях этого пункта, оценивающих χ_n снизу, стоящая в знаменателях величина u_n может быть заменена на большее значение μ_n.

ГЛАВА 6

ОЦЕНКИ КОНСТАНТ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НОРМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Вопросы оценивания или нахождения точных значений констант из неравенств для эквивалентных норм многочленов имеют многочисленные приложения в самых разных задачах, совсем не обязательно связанных с полиномиальной интерполяцией. Однако интерес автора к указанным вопросам был мотивирован получением оценок для минимальной $(C-C)$-нормы проектора при полиномиальной интерполяции функций. Первые его результаты относились к интерполяции с помощью многочленов от n переменных степени ≤ 1, см. главы 2 и 3 настоящей книги. В статьях [14, 17, 21] были предприняты попытки применить эти оценки при переходе к более широким пространствам многочленов. Для этой цели в [14, 17] использовалась норма $\|\cdot\|^*$. Так возникла потребность в оценке констант из неравенств для эквивалентных норм многочленов; некоторые результаты в этом направлении приведены в [13, 17].

Естественно поставить вопрос о наименьших константах в подобных неравенствах для обычных пространств алгебраических многочленов, а именно $\Pi_k(\mathbb{R}^n)$ (многочленов от n переменных общей степени $\le k$, $k\in\mathbb{Z}_+$) и $\Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ (многочленов от n переменных векторной степени $\le \alpha$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, то есть степени $\le \alpha_i$ по x_i). Многие задачи в этих ситуациях давно решены. Поэтому материал этой части работы в определённой степени не претендует на новизну. Во всяком случае, сказанное касается теоремы 6.2.1. Однако автору не известны тексты, в которых выводятся или просто приводятся точные значения констант эквивалентности или их оценки. Полученные автором результаты были систематизированы в статье [22], на основе которой написаны §§ 6.1–6.5 настоящей главы. Последний § 6.6 написан по работе [13].

Представляется, что рассматриваемые вопросы могут быть полезны и с точки зрения преподавания математики, в том числе и как весьма интересные иллюстрации связи её различных разделов.

§ 6.1. Эквивалентные нормы на пространствах многочленов

6.1.1. Пусть натуральное $d \geq 2$. Зафиксируем линейно независимые $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in C(Q_n)$. На пространстве $\Pi = \mathrm{lin}\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ размерности d введём следующие нормы:

$$\|g\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |g(x)|, \tag{1.1}$$

$$\|g\|_1 := \sum_{j=1}^{d} |a_j|\,, \tag{1.2}$$

$$\|g\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{d} a_j^2\right)^{1/2}, \tag{1.3}$$

$$\|g\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |a_j|\,, \tag{1.4}$$

$$\|g\|^* := \|G\|_{C(Q_{d-1})}. \tag{1.5}$$

Здесь $g \in \Pi$ имеет вид

$$g(x) = \sum_{j=1}^{d} a_j \varphi_j(x);$$

G — многочлен от $d-1$ переменных $y_1 \ldots, y_{d-1}$ общей степени ≤ 1, имеющий тот же упорядоченный набор коэффициентов, что и g :

$$G(y) = a_1 + \sum_{j=2}^{d} a_j y_{j-1}, \quad y = (y_1, \ldots, y_{d-1}).$$

Так как функция G линейна по y_j, то максимум $|G|$ на Q_{d-1} достигается в вершине Q_{d-1}. Поэтому

$$\|g\|^* = \|G\|_{C(Q_{d-1})} = \max_{v \in \mathrm{ver}(Q_{d-1})} |G(v)|.$$

Из тех же соображений

$$\|g\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |a_j| = \|G\|_{C\left([-1,1]^{d-1}\right)}.$$

Хорошо известно, что любые две нормы, заданные на конечномерном линейном пространстве, являются эквивалентными. (Простое доказательство использует тот факт, что непрерывная функция d переменных, рассматриваемая на сфере $\mathbb{R}^d$, достигает своего минимального значения, см. [32, п. 1.2.3]). Поэтому любая пара норм (1.1)–(1.5) связана двойным неравенством вида $c_1\|g\|^{(1)} \le \|g\|^{(2)} \le c_2\|g\|^{(1)}$, в котором положительные c_1, c_2 не зависят от $g \in \Pi$. Некоторые соотношения такого типа очевидны. Например,

$$\|g\|_\infty \le \|g\|_1 \le d \cdot \|g\|_\infty,$$

$$\|g\|_\infty \le \|g\|_2 \le d \cdot \|g\|_\infty,$$

$$\|g\|_2 \le \|g\|_1 \le \sqrt{d} \cdot \|g\|_2,$$

$$\|g\|_{C(Q_n)} \le \max_{1\le j\le d} \|\varphi_j\|_{C(Q_n)} \cdot \|g\|_1.$$

Отметим здесь и неравенства

$$\|g\|^* \le \|g\|_1 \le 3\|g\|^*, \tag{1.6}$$

которые можно переписать в виде

$$\|G\|_{C(Q_{d-1})} \le \|G\|_{C\left([-1,1]^{d-1}\right)} \le 3\|G\|_{C(Q_{d-1})}.$$

Последние с точностью до обозначений совпадают с доказываемыми ниже оценками теоремы 6.4.2.

Для нас важен случай, когда Π есть d-мерное пространство алгебраических многочленов от n переменных, а $\varphi_j(x)$ представляют собой мономы, причём $\varphi_1 = 1$:

$$\Pi = \mathrm{lin}\left(1, x^{\alpha^{(1)}}, \dots, x^{\alpha^{(d-1)}}\right), \quad \alpha^{(j)} \in \mathbb{Z}^n_+, \ \alpha^{(j)} \ne (0, \dots, 0).$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, то полагаем $|\alpha| := \sum \alpha_j$, $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Мономы $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ упорядочиваются по следующему правилу:

1) если $|\alpha| < |\beta|$, то α предшествует β;

2) если $|\alpha| = |\beta|$, то α предшествует β тогда и только тогда, когда $\alpha_1 > \beta_1$ или существует i такое, что $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}$ и $\alpha_i > \beta_i$.

6.1.2. Константы $\gamma(n,k)$, $\overline{\gamma}(n,\alpha)$, $\delta(n,k)$ и $\overline{\delta}(n,\alpha)$. Ниже рассматриваются ситуации $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R}^n)$ и $\Pi = \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Нас будут интересовать константы в неравенствах, оценивающих норму (1.2) или (1.5) через норму (1.1). Наименьшие константы c в неравенствах

$$\|g\|^* \le c\|g\|_{C(Q_n)}, \quad g \in \Pi_k(\mathbb{R}^n),$$

и

$$\|g\|^* \leq c\|g\|_{C(Q_n)}, \quad g \in \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n),$$

обозначим соответственно $\gamma(n,k)$ и $\overline{\gamma}(n,\alpha)$. Наименьшие константы c в неравенствах

$$\|g\|_1 \leq c\|g\|_{C(Q_n)}, \quad g \in \Pi_k(\mathbb{R}^n),$$

и

$$\|g\|_1 \leq c\|g\|_{C(Q_n)}, \quad g \in \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n),$$

обозначаются соответственно $\delta(n,k)$ и $\overline{\delta}(n,\alpha)$. Отметим, что при любых n, k, α

$$\gamma(n,k) \leq \delta(n,k) \leq 3\gamma(n,k), \tag{1.7}$$

$$\overline{\gamma}(n,\alpha) \leq \overline{\delta}(n,\alpha) \leq 3\overline{\gamma}(n,\alpha). \tag{1.8}$$

Неравенства (1.7)–(1.8) легко следуют из (1.6).

§ 6.2. Точные значения $\delta(1,k)$ и оценки $\gamma(1,k)$

В этом параграфе $n = 1$. Пусть T_k — многочлен Чебышёва первого рода степени k. Если $x \in [-1,1]$, то $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$. Ниже существенно используются также многочлены $g_k(x) := T_k(1-2x)$.

6.2.1. Точные значения $\delta(1,k)$. Центральным моментом в настоящем параграфе является следующее неравенство В. А. Маркова, установленное им в 1892 г. (см. по поводу этой тематики [10; с. 220], [39; с. 239–241], [62; с. 123]).

Лемма 6.2.1. *Для $g \in \Pi_k(\mathbb{R})$ и $0 \leq j \leq k$ имеет место неравенство*

$$\left\|g^{(j)}\right\|_{C[-1,1]} \leq T_k^{(j)}(1) \cdot \|g\|_{C[-1,1]}, \tag{2.1}$$

в котором при $g = T_k$ достигается равенство.

Точное значение $\delta(1,k)$ даётся следующим утверждением.

Теорема 6.2.1. *Для $k > 0$ справедливо равенство*

$$\delta(1,k) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j!} \cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\ldots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2j-1)}. \tag{2.2}$$

Доказательство. С помощью замены переменных из (2.1) получается соотношение

$$\left\|g^{(j)}\right\|_{C[0,1]} \leq 2^j T_k^{(j)}(1) \cdot \|g\|_{C[0,1]}. \tag{2.3}$$

Пусть $g(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k$. Используем равенства $a_j = g^{(j)}(0)/j!$, $T_k(1) = 1$, а также

$$T_k^{(j)}(1) = \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j!} \cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\ldots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2j-1)}, \quad 1 \le j \le k,$$

(последнее приводится, например, в [39; с. 241]). Из них и (2.3) получаем:

$$\|g\|_1 = \sum_{j=0}^{k} |a_j| \le$$

$$\le \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j!} \cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\ldots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2j-1)}\right) \cdot \|g\|_{C[0,1]}. \qquad (2.4)$$

Оценка (2.4) является точной. Действительно, $g_k^{(j)}(0) = (-2)^j T_k^{(j)}(1)$, поэтому

$$g_k(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \frac{2^j}{j!} T_k^{(j)}(1) x^j.$$

Так как $\|g_k\|_{C[0,1]} = 1$ и

$$\|g_k\|_1 = \sum_{j=0}^{k} \frac{2^j}{j!} T_k^{(j)}(1) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j!} \cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\ldots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2j-1)},$$

то в случае $g = g_k$ (2.4) становится равенством. Теорема доказана. □

Из теоремы 6.2.1 получается, что $\delta(1,1) = 3$, $\delta(1,2) = 17$, $\delta(1,3) = 99$, $\delta(1,4) = 577$, $\delta(1,5) = 3363$, $\delta(1,6) = 20369$ и так далее. Например, 99 *есть минимальное значение константы, с которой для любых действительных* a_0, a_1, a_2 *и* a_3 *имеет место неравенство*

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| \le c \max_{0\le x\le 1} \left|a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right|.$$

Равенство здесь достигается для чисел a_0, a_1, a_2, a_3, которые являются коэффициентами многочлена

$$g_3(x) = T_3(1-2x) = 4(1-2x)^3 - 3(1-2x) =$$

$$= 1 - 18x + 48x^2 - 32x^3.$$

6.2.2. Прямое вычисление $\delta(1,1)$ **и** $\delta(1,2)$**.** Точные значения двух первых констант $\delta(1,1)$ и $\delta(1,2)$ могут быть получены и с помощью оценивания значений в равноотстоящих точках отрезка $[0,1]$.

Действительно, пусть $g \in \Pi_1(\mathbb{R})$, $\|g\|_{C[0,1]} \le 1$. Тогда $|g(0)| = |a_0| \le 1$, $|g(1)| = |a_0 + a_1| \le 1$, откуда $|a_1| \le 2$, $\|g\|_1 = |a_0| + |a_1| \le 3$. Для $g_1(x) = T_1(1-2x) = 1-2x$ выполняется $\|g_1\|_{C[0,1]} = 1$, $\|g_1\|_1 = 3$. Значит, $\delta(1,1) = 3$.

Если же $g \in \Pi_2(\mathbb{R})$, $\|g\|_{C[0,1]} \le 1$, то $|g(0)| = |a_0| \le 1$,

$$\left| g\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} \right| \le 1,$$

$$|g(1)| = |a_0 + a_1 + a_2| \le 1.$$

Из этих неравенств последовательно получаем:

$$|4a_0 + 2a_1 + a_2| \le 4, \quad |3a_0 + a_1| \le 5, \quad |a_1| \le 8;$$

$$\left| \frac{a_1}{2} + \frac{3a_2}{4} \right| \le 2, \quad |2a_1 + 3a_2| \le 8;$$

$$\left| \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} \right| \le 2, \quad |2a_1 + a_2| \le 8;$$

$$|2a_2| \le 16, \quad |a_2| \le 8.$$

Поэтому $\|g\|_1 = |a_0| + |a_1| + |a_2| \le 1+8+8 = 17$, то есть $\delta(1,2) \le 17$. Но для многочлена $g_2(x) = T_2(1-2x) = 1 - 8x + 8x^2$ все предыдущие неравенства обращаются в равенства, в частности $\|g_2\|_{C[0,1]} = 1$, $\|g_2\|_1 = 17$. Значит, $\delta(1,2) = 17$.

Точное значение $\delta(1,3)$ получить на этом пути уже не удалось. Это можно объяснить следующим образом. Как мы знаем, в задаче о $\delta(1,k)$ экстремальным является многочлен Чебышёва степени k, адаптированный к отрезку $[0,1]$, то есть $g_k(x) = T_k(1-2x)$. Заметим, что $g_1(x)$ и $g_2(x)$ принимают в равномерных узлах $[0,1]$ значения, максимальные по модулю:

$$g_1(0) = -g_1(1) = 1 = \|g_1\|_{C[0,1]},$$

$$g_2(0) = -g_2\left(\frac{1}{2}\right) = g_2(1) = 1 = \|g_2\|_{C[0,1]}.$$

В то же время $g_3(0) = 1$, $g_3(1/3) = -23/27$, $g_3(2/3) = 23/27$, $g_3(1) = -1$, и в двух внутренних точках $|g_3| < \|g_3\|_{C[0,1]}$.

6.2.3. Оценки $\gamma(1,k)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2.2. *Для* $k>0$

$$\gamma(1,k) \le 1+\sum_{j=1}^{k} \frac{2^{j-1}}{j!}\cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\dots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2j-1)} =$$

$$= \frac{\delta(1,k)+1}{2}. \qquad (2.5)$$

Доказательство. Пусть $g\in \Pi_k(\mathbb{R})$ и $\|g\|_{C[0,1]}\le 1$. Обозначим через a_j коэффициенты многочлена g. Пусть s_1 и s_2 — сумма неотрицательных и сумма отрицательных коэффициентов соответственно. Тогда

$$|g(1)| = \left|\sum_{j=0}^{k} a_j\right| = |s_1+s_2| \le 1,$$

$$|s_1-s_2| = \sum_{j=0}^{k} |a_j|\,,$$

откуда

$$|s_1|\,,|s_2| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{k}|a_j|+1\right).$$

Из этой оценки и (2.4) получаем, что в случае $\|g\|_{C[0,1]}\le 1$

$$\|g\|^* \le \max\left(s_1,-s_2\right) \le \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{k}|a_j|+1\right) \le$$

$$\le 1+\sum_{j=1}^{k} \frac{2^{j-1}}{j!}\cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\dots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2j-1)}.$$

Если же $g\in\Pi_k(\mathbb{R})$ — произвольный многочлен, то

$$\|g\|^* \le \left(1+\sum_{j=1}^{k} \frac{2^{j-1}}{j!}\cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\dots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2j-1)}\right)\cdot \|g\|_{C[0,1]}. \qquad (2.6)$$

Это означает, что выполняется первое соотношение из (2.5). Второе следут из (2.2). Теорема доказана. $\square$

Если $g \in \Pi_1(\mathbb{R})$, то $\|g\|^* = \|g\|_{C[0,1]}$, поэтому $\gamma(1,1) = 1$. Для $k = 1$ неравенство из (2.5) является строгим, так как его правая часть равна 2. Но в случае $k = 2$ это неравенство обращается в равенство, имеющее вид $\gamma(1,2) = 9$. Экстремальным многочленом вновь является $g_2(x) = T_2(1-2x) = 1 - 8x + 8x^2$. Для него $\|g_2\|^* = \|1 - 8y_1 + 8y_2\|_{C(Q_2)} = 9$, $\|g_2\|_{C[0,1]} = 1$ и обе части (2.6) совпадают. В этих случаях проявляется общий характер.

Лемма 6.2.2. *Если натуральное k — чётное, то*

$$\|g_k\|^* = \frac{\delta(1,k)+1}{2}. \tag{2.7}$$

Если k — нечётное, то

$$\|g_k\|^* = \frac{\delta(1,k)-1}{2}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Для произвольного натурального k сумма коэффициентов многочлена $g_k(x) = T_k(1-2x)$ равна $g_k(1) = T_k(-1) = \cos k\pi = (-1)^k$. Свободный член g_k равен $g_k(0) = T_k(1) = 1$. Пусть s_1 и s_2 есть суммы неотрицательных и отрицательных коэффициентов g_k соответственно. Мы используем ниже тот факт, что $\delta(1,k) = \|g_k\|_1 = s_1 - s_2$, см. доказательство теоремы 2.1.

Пусть k — чётное, тогда $s_1 + s_2 = 1$. В этом случае $\|g\|^* = s_1$, $\delta(1,k) = 2s_1 - 1$, откуда следует (2.7).

Если же k —нечётное, то $s_1 + s_2 = -1$. В этой ситуации $\|g\|^* = |s_2 + 1| = -s_2 - 1$, $\delta(1,k) = -2s_2 - 1$, и мы получаем (2.8).

Лемма доказана. $\square$

Теорема 6.2.3. *При чётном $k > 0$ имеет место равенство*

$$\gamma(1,k) = \frac{\delta(1,k)+1}{2}. \tag{2.9}$$

При нечётном k справедливо

$$\frac{\delta(1,k)-1}{2} \le \gamma(1,k) \le \frac{\delta(1,k)+1}{2}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Так как $\|g_k\|_{C[0,1]} = 1$, то из леммы 6.2.2 следуют оценки $\gamma(1,k) \ge (\delta(1,k)+1)/2$, если k — чётное, и $\gamma(1,k) \ge (\delta(1,k)-1)/2$, если k — нечётное. Для получения (2.9) и (2.10) осталось применить неравенство (2.5), справедливое при любом k. $\square$

Выскажем предположение, что если k — нечётное, то слева в (2.10) выполняется равенство.

§ 6.3. Точные значения $\overline{\delta}(n,\alpha)$ и оценки $\overline{\gamma}(n,\alpha)$, $\delta(n,k)$, $\gamma(n,k)$

Пусть $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Обозначим смешанную производную функции f порядка α через $D^\alpha f$. Запись $\beta \le \alpha$ означает, что при всех i выполнено $\beta_i \le \alpha_i$. Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $g_\alpha(x) := T_{\alpha_1}(1-2x_1)\dots T_{\alpha_n}(1-2x_n)$.

6.3.1. Точные значения $\overline{\delta}(n,\alpha)$. Сначала сформулируем следующую лемму.

Лемма 6.3.1. *Если $g \in \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и $0 \le \beta \le \alpha$, то*

$$\left\|D^\beta g\right\|_{C([-1,1]^n)} \le T_{\alpha_1}^{(\beta_1)}(1)\dots T_{\alpha_n}^{(\beta_n)}(1)\cdot \|g\|_{C([-1,1]^n)}. \tag{3.1}$$

При $g(x)=T_{\alpha_1}(x_1)\dots T_{\alpha_n}(x_n)$ в (3.1) достигается равенство.

Доказательство. Этот результат получается из леммы 6.2.1 индукцией по n. □

Оценки констант $\overline{\delta}(n,\alpha)$ даются следующей теоремой.

Теорема 6.3.1. *Для $\alpha > 0$ справедливо равенство*

$$\overline{\delta}(n,\alpha) = 1 + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{2^{|\beta|}}{\beta!}\cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\dots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)}. \tag{3.2}$$

Доказательство. С помощью замены переменных из (3.1) получается неравенство

$$\left\|D^\beta g\right\|_{C(Q_n)} \le 2^{|\beta|} T_{\alpha_1}^{(\beta_1)}(1)\dots T_{\alpha_n}^{(\beta_n)}(1)\cdot \|g\|_{C(Q_n)}. \tag{3.3}$$

Пусть $g(x) = \sum\limits_{0\le\beta\le\alpha} a_\beta x^\beta$. Тогда $a_\beta = D^\beta g(0)/\beta!$, и вследствие неравенства (3.3) имеем

$$\|g\|_1 = \sum_{0\le\beta\le\alpha} |a_\beta| \le$$

$$\le \sum_{0\le\beta\le\alpha} \frac{1}{\beta!} 2^{|\beta|} T_{\alpha_1}^{(\beta_1)}(1)\dots T_{\alpha_n}^{(\beta_n)}(1)\cdot \|g\|_{C(Q_n)}. \tag{3.4}$$

Но $T_k(1)=1$, а при $1 \le j \le k$, как отмечалось,

$$T_k^{(j)}(1) = \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j!}\cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\dots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2j-1)}.$$

Поэтому из (3.4) получается

$$\|g\|_1 = \sum_{0\le\beta\le\alpha} |a_\beta| \le$$

$$\le \left(1 + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{2^{|\beta|}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\dots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)}\right) \cdot \|g\|_{C(Q_n)}. \quad (3.5)$$

При $g(x)=g_\alpha(x)$ в (3.5) достигается равенство. Значит, верно (3.2).

Теорема доказана. $\square$

6.3.2. Оценки $\overline{\gamma}(n,\alpha)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.2. *Для $\alpha>0$ выполняются соотношения*

$$\overline{\gamma}(n,\alpha) \le 1 + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{2^{|\beta|-1}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\dots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)} =$$

$$= \frac{\overline{\delta}(n,\alpha)+1}{2}. \quad (3.6)$$

Доказательство. Пусть $g\in\Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ и $\|g\|_{C(Q_n)}\le 1$. Обозначим через a_β коэффициенты многочлена g. Пусть s_1 и s_2 — сумма неотрицательных и сумма отрицательных коэффициентов соответственно. Тогда

$$|g(e)| = \left|\sum_{0<\beta\le\alpha} a_\beta\right| = |s_1+s_2| \le 1, \quad |s_1-s_2| = \sum_{0\le\beta\le\alpha} |a_\beta|,$$

откуда

$$|s_1|, |s_2| \le \frac{1}{2}\left(\sum_{0\le\beta\le\alpha} |a_\beta| + 1\right).$$

Из этой оценки и (3.2) получаем, что в случае $\|g\|_{C(Q_n)}\le 1$

$$\|g\|^* \le \max(s_1, -s_2) \le \frac{1}{2}\left(\sum_{0\le\beta\le\alpha} |a_\beta| + 1\right) \le$$

$$\le 1 + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{2^{|\beta|-1}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\dots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots(2\beta_i-1)}.$$

Если же $g \in \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ — произвольный многочлен, то

$$\|g\|^* \leq$$

$$\leq \left(1 + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{2^{|\beta|-1}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\ldots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)}\right) \cdot \|g\|_{C(Q_n)}. \tag{3.7}$$

Это доказывает первое соотношение из (3.6). Второе следует из (3.2). Теорема доказана. $\square$

В случае $n = 2, \alpha = e = (1,1)$ неравенство из (3.6) даёт оценку $\overline{\gamma}(2,e) \leq 5$. Можно видеть, однако, что здесь имеет место равенство. Действительно, для многочлена

$$g_e(x) = T_1(1-2x_1)T_1(1-2x_2) = 1 - 2x_1 - 2x_2 + 4x_1x_2,$$

очевидно, $\|g_e\|_{C(Q_2)} = 1$, а левая и правая части (3.7) совпадают и равны 5. Поэтому точное значение $\overline{\gamma}(2,e)$ есть 5. Оно было получено в [4] двумя другими способами, в том числе и непосредственно. В приведённом примере проявляется некоторый результат общего характера.

Лемма 6.3.2. *Пусть $k = |\alpha| \neq 0$. Если k — чётное, то*

$$\|g_\alpha\|^* = \frac{\overline{\delta}(n,\alpha)+1}{2}.$$

Если k — нечётное, то

$$\|g_\alpha\|^* = \frac{\overline{\delta}(n,\alpha)-1}{2}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что для любого α сумма коэффициентов многочлена g_α равна

$$g_\alpha(e) = T_{\alpha_1}(-1)\cdot\ldots\cdot T_{\alpha_n}(-1) = (-1)^{|\alpha|} = (-1)^k,$$

то есть 1 при чётном k и -1 при нечётном k. Свободный член g_α равен

$$g_\alpha(0) = T_{\alpha_1}(1)\cdot\ldots\cdot T_{\alpha_n}(1) = 1.$$

Далее доказательство с точностью до обозначений совпадает с доказательством леммы 6.2.2. $\square$

Теорема 6.3.3. *Пусть $k = |\alpha|$. При чётном $k > 0$ имеет место равенство*

$$\overline{\gamma}(n,\alpha) = \frac{\overline{\delta}(n,\alpha)+1}{2}. \tag{3.8}$$

При нечётном k справедливы оценки

$$\frac{\overline{\delta}(n,\alpha)-1}{2} \le \overline{\gamma}(n,\alpha) \le \frac{\overline{\delta}(n,\alpha)+1}{2}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Соотношения (3.8), (3.9) следуют из теоремы 6.3.2 и предыдущей леммы. $\square$

Выскажем предположение, что если $k = |\alpha|$ — нечётное, то слева в (3.9) выполняется равенство.

6.3.3. Оценки $\delta(n,k)$ и $\gamma(n,k)$. Некоторые оценки величин $\delta(n,k)$ и $\gamma(n,k)$ даются следующей теоремой.

Теорема 6.3.4. *Для $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства:*

$$\max_{|\alpha|=k}\left(1 + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{2^{|\beta|}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\dots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)}\right) \le$$

$$\le \delta(n,k) \le 1 + \sum_{0<\beta\le ke} \frac{2^{|\beta|}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{k^2\left(k^2-1\right)\dots\left(k^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)}, \tag{3.10}$$

$$\gamma(n,k) \le 1 + \sum_{0<\beta\le ke} \frac{2^{|\beta|-1}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{k^2\left(k^2-1\right)\dots\left(k^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2\beta_i-1)}. \tag{3.11}$$

Доказательство. При всех α таких, что $|\alpha| = k$, имеют место включения

$$\Pi_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset \Pi_k(\mathbb{R}^n) \subset \Pi_{(k,\dots,k)}(\mathbb{R}^n).$$

Поэтому

$$\max_{|\alpha|=k} \overline{\delta}(n,\alpha) \le \delta(n,k) \le \overline{\delta}(n,ke), \tag{3.12}$$

$$\gamma(n,k) \le \overline{\gamma}(n,ke). \tag{3.13}$$

Оценки (3.10) следуют из (3.12) и (3.2). Оценка (3.11) вытекает из (3.13) и (3.6). $\square$

§ 6.4. Точные значения $\gamma(n,1)$, $\delta(n,1)$ и оценки $\gamma(n,2)$, $\delta(n,2)$

6.4.1. Точные значения $\gamma(n,1)$ и $\delta(n,1)$. Сначала рассмотрим многочлены от n переменных общей степени ≤ 1. Если $g \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то в обозначениях § 6.1 $G = g$, поэтому $\|g\|^* = \|G\|_{C(Q_n)} = \|g\|_{C(Q_n)}$. Это означает, что при всех $n \in \mathbb{N}$ точное значение $\gamma(n,1) = 1$. Значение $\delta(n,1)$ получается не так просто.

Легко видеть, что

$$\delta(n,1) \leq 2n+1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Действительно, если $\|g\|_{C(Q_n)} \leq 1$, то $|g(0)| = |a_0| \leq 1$, $|g(e_j)| = |a_0 + a_j| \leq 1$, $|a_j| \leq 2$, откуда

$$\|g\|_1 = |a_0| + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq 2n+1.$$

Для $n = 1$ неравенство (4.1) даёт $\delta(1,1) \leq 3$. Как отмечалось в § 6.2, точное значение $\delta(1,1)$ и есть 3, но это единственный случай, когда в (4.1) достигается равенство. Общая оценка $\delta(n,1) = O(n)$ оказывается завышенной. Ниже мы докажем, что $\delta(n,1) = O(1)$.

Теорема 6.4.1. *Для $g \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство*

$$\|g\|_{C(Q_n)} \leq \|g\|_{C([-1,1]^n)} \leq 3\|g\|_{C(Q_n)}, \tag{4.2}$$

в правой части которого 3 — точная константа.

Доказательство. Левое неравенство в (4.2) очевидно. Правое мы установим двумя способами, первый из которых является геометрическим.

Достаточно показать, что если $\|g\|_{C(Q_n)} \leq 1$, то для всех $x \in [-1,1]^n$ выполняется

$$|g(x)| \leq 3. \tag{4.3}$$

При $x \in Q_n = [0,1]^n$ (4.3) очевидно. Допустим, что $x \in [-1,1]^n$, $x \notin Q_n$. Для x найдутся точки y, z со свойствами:

1) y, z принадлежат границе куба Q_n;

2) три точки x, y, z принадлежат некоторой общей прямой l;

3) $\|x-y\| \leq \|y-z\|$; в этом доказательстве $\|\cdot\|$ есть обычная евклидова норма в $\mathbb{R}^n$.

Поясним, каким образом по x выбираются y и z. В силу второго свойства достаточно указать y. Если $x \in [-1,0]^n$, полагаем $y := 0$. Допустим,

x — точка, принадлежащая одному из $2^n - 2$ диадических кубов, составляющих $[-1,1]^n$ и отличных от Q_n и $[-1,0]^n$. Этот куб имеет с Q_n общую грань или ребро, то есть для некоторых i выполнено $0 \le x_i \le 1$. Для всех таких i возьмём $y_i = x_i$. Остальные компоненты вектора y положим равными 0. Иначе говоря,

$$y := \bigl(\max(x_1, 0), \max(x_2, 0), \ldots, \max(x_n, 0)\bigr).$$

Заметим, что $y - x \in Q_n$. Обозначим через l прямую (xy). Точка z есть точка пересечения прямой l с границей Q_n, отличная от y. Выполнение условия 3) связано с соображениями симметрии.

Так как $g \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то колебание $|g(u) - g(w)|$, $u, w \in [x, z]$, пропорционально $|u - w|$. В частности, из третьего свойства следует, что $|g(x) - g(y)| \le |g(y) - g(z)|$. Поэтому

$$|g(x)| \le |g(x) - g(y)| + |g(y)| \le |g(y) - g(z)| + |g(y)| \le$$
$$\le 2|g(y)| + |g(z)| \le 3,$$

и (4.3) установлено.

Остаётся предъявить экстремальный многочлен g^*, на котором в (4.3) достигается равенство. Таковым является

$$g^*(x) = 1 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Для этого многочлена $g^*(0) = 1$; $g^*(e) = -1$;

$$|g^*(v)| = \left|1 - \frac{2j}{n}\right| < 1, \quad v \in \mathrm{ver}(Q_n),\ v \ne 0, v \ne e.$$

Здесь j есть число 1 в наборе v. Это означает, что $\|g^*\|_{C(Q_n)} = 1$. В то же время $g^*(-e) = 3$, то есть $\|g^*\|_{C([-1,1]^n)} = 3$.

Приведём второе, более короткое доказательство правого соотношения из (4.2). Пусть $g(x) = a_0 + \sum a_i x_i$, σ_1 — сумма неотрицательных, σ_2 — сумма неположительных коэффициентов g без учёта a_0. Тогда справедливы соотношения:

$$\|g\|_{C([-1,1]^n)} = a_0 + \sigma_1 - \sigma_2 = 2a_0 + \sigma_1 - \sigma_2 - a_0 \le$$
$$\le 2\,(a_0 + \sigma_1) + |a_0 + \sigma_2| \le$$
$$\le 3\max\bigl(a_0 + \sigma_1, |a_0 + \sigma_2|\bigr) = 3\|g\|_{C(Q_n)}. \tag{4.4}$$

Для введённого выше многочлена g^* имеем: $a_0 = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -2$, и при $g = g^*$ все неравенства в (4.4) обращаются в равенства.

Теорема доказана. $\square$

Следствие 6.4.1. *Для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$\delta(n,1) = 3. \tag{4.5}$$

Доказательство. Неравенство (4.2), переписанное в терминах $\|\cdot\|_1$, означает, что для $g \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\|g\|_{C(Q_n)} \leq \|g\|_1 \leq 3\|g\|_{C(Q_n)}$$

с точной константой 3. Разумеется, это даёт (4.5). $\square$

6.4.2. Оценки $\gamma(n,2)$ и $\delta(n,2)$. Приведём общие оценки для констант $\gamma(n,2)$ и $\delta(n,2)$ вида $O(n)$. В работе [13] установлено следующее утверждение.

Теорема 6.4.2. *Для $n \in \mathbb{N}$*

$$\gamma(n,2) \leq 13n + 9. \tag{4.6}$$

Доказательство. Пусть многочлен

$$g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i \leq j} b_{ij} x_i x_j \in \Pi_2(\mathrm{R}^n)$$

обладает свойством $\|g\|_{C(Q_n)} \leq 1$. Тогда

$$|a_0| = |g(0)| \leq 1, \quad |a_0 + a_i + b_{ii}| = |g(e)| \leq 1.$$

Покажем, что для любых $i_1, \ldots, i_k$ имеет место

$$|a_{i_1} + \ldots + a_{i_k}| \leq 8. \tag{4.7}$$

Метод доказательства (4.7) проиллюстрируем в случае $k = n$, то есть $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$. Общий случай сводится к нему с помощью замены переменных. Используя неравенства

$$|g(1, \ldots, 1)| \leq 1, \quad \left| g\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) \right| \leq 1,$$

получаем последовательно

$$\left|a_0+\sum_{i=1}^n a_i+\sum_{i\le j} b_{ij}\right|\le 1,$$

$$\left|a_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i+\frac{1}{4}\sum_{i\le j} b_{ij}\right|\le 1,$$

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i+\frac{3}{4}\sum_{i\le j} b_{ij}\right|\le 2,$$

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_i+\frac{1}{4}\sum_{i\le j} b_{ij}\right|\le 2,$$

$$\left|\frac{3}{2}\sum_{i=1}^n a_i+\frac{3}{4}\sum_{i\le j} b_{ij}\right|\le 6,$$

откуда и вытекает (4.7) в случае $k=n$.

Используем также неравенства

$$|a_i+b_{i,j_1}+\ldots+b_{i,j_k}|\le 2,\quad j_1,\ldots,j_k\ne i.$$

Левая часть (4.8) совпадает с $|g(v)-g(w)|$, где v,w — точки с компонентами $v_i=1, w_i=0$, $v_{j_m}=w_{j_m}=1$ для $m=1,\ldots,k$ и остальными компонентами, равными 0. Ясно, что $|g(v)-g(w)|\le 2$.

Из соотношений

$$|a_0+a_i+b_{ii}|\le 1,\qquad \left|a_0+\frac{1}{2}a_i+\frac{1}{4}b_{ii}\right|\le 1,$$

получаем

$$\left|\frac{1}{2}a_i+\frac{3}{4}b_{ii}\right|\le 2,\quad \left|\frac{1}{2}a_i+\frac{1}{4}b_{ii}\right|\le 2,$$

откуда $|a_i|\le 8, |b_{ii}|\le 8$. Итак,

$$|b_{i,j_1}+\ldots+b_{i,j_k}|\le 10,\quad j_1,\ldots,j_k\ne i,$$

$$|b_{ii}|\le 8.$$

Для матрицы $\mathbf{B} = (b_{ij}), b_{ij} := b_{ji}$ при $i > j$, модуль суммы любого числа недиагональных элементов, попарно симметричных относительно главной диагонали, не превосходит $10n$. Поэтому сумма произвольного числа коэффициентов b_{ij} многочлена g по модулю не превосходит $10n/2 + 8n = 5n + 8n = 13n$. Получается, что для любого набора чисел ε_i, ε_{ij}, равных 0 или 1, выполняется неравенство

$$\left| a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + \sum_{i \le j} \varepsilon_{ij} b_{ij} \right| \le 1 + 8 + 13n = 13n + 9.$$

Мы использовали (4.7). Это означает, что $\|g\|^* \le 13n + 9$.

Теорема доказана. $\square$

Следствие 6.4.2. *Для* $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(n, 2) \le 39n + 27. \tag{4.8}$$

Доказательство. Для любого $g \in \Pi_2(\mathbb{R}^n)$ справедливо $\|g\|_1 \le 3\|g\|^*$. Это соотношение получается после применения к $G \in \Pi_1(\mathbb{R}^{d-1})$ правого неравенства (4.2). Здесь

$$d - 1 = \dim \Pi_2(\mathbb{R}^n) - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 =$$

$$= \frac{n(n+3)}{2},$$

а многочлены G и g связаны так, как отмечено в § 6.1. Из указанного неравенства следует, что $\delta(n, 2) \le 3\gamma(n, 2)$. Остаётся привлечь (4.6). Заметим, что мы обосновали правое неравенство из (1.7) в частном случае $k = 2$. Следствие доказано. $\square$

Для конкретных n оценки (4.6) и (4.8) являются грубыми. Например, для $n = 1$ (4.6) и (4.8) дают лишь $\gamma(1, 2) \le 22$ и $\delta(1, 2) \le 66$, но, как отмечалось в § 6.2, точное значение $\gamma(1, 2)$ равно 9, а точное значение $\delta(1, 2)$ равно 17.

§ 6.5. Оценки констант через собственные значения

6.5.1. Сначала рассмотрим общий случай. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ — линейно независимая система функций из $C(Q_n)$, $\Pi = \mathrm{lin}(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$.

Теорема 6.5.1. *Обозначим через* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *квадратную матрицу порядка* d, *состоящую из чисел*

$$c_{ij} := \int_{Q_n} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx, \quad i, j = 1, \ldots, d.$$

Минимальное собственное значение $\lambda_{\min}$ *матрицы* $\mathbf{C}$ *является положительным и для* $g \in \Pi$ *имеют место неравенства:*

$$\|g\|_1 \leq \sqrt{\frac{d}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}, \tag{5.1}$$

$$\|g\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}, \tag{5.2}$$

$$\|g\|_\infty \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Пусть $g = a_1\varphi_1 + \ldots + a_d\varphi_d$. Тогда

$$\|g\|^2_{L_2(Q_n)} = \int_{Q_n} \left[a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_d\varphi_d(x)\right]^2 dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d} c_{ij} a_i a_j. \tag{5.4}$$

Очевидно, $Q(a_1, \ldots, a_d) := \|g\|^2_{L_2(Q_n)}$ — положительно определённая квадратичная форма на $\mathbb{R}^d$. По известным результатам линейной алгебры минимальное собственное значение $\lambda_{\min}$ матрицы $\mathbf{C}$ этой квадратичной формы положительно и имеет место неравенство

$$Q(a_1, \ldots, a_d) \geq \lambda_{\min} \sum_{j=1}^{d} a_j^2. \tag{5.5}$$

Из (5.4) и (5.5) следует, что

$$\|g\|^2_{L_2(Q_n)} \geq \lambda_{\min} \sum_{j=1}^{d} a_j^2 = \lambda_{\min} \|g\|_2^2.$$

Следовательно,

$$\|g\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{L_2(Q_n)} \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}.$$

По неравенству Коши

$$\|g\|_1 = \sum_{j=1}^{d} |a_j| \le$$

$$\le \sqrt{d} \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} a_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{d} \cdot \|g\|_2 \le$$

$$\le \sqrt{\frac{d}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}.$$

Кроме того,

$$\|g\|_\infty = \max_{1 \le j \le d} |a_j| \le \|g\|_2 \le \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}.$$

Неравенства (5.1)–(5.3) установлены. □

6.5.2. Отметим следствия теоремы 6.5.1 для пространств алгебраических многочленов.

Следствие 6.5.1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\min} > 0$ — минимальное собственное значение квадратной ганкелевой матрицы порядка $k+1$*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{k} & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k+2} & \frac{1}{k+3} & \dots & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k+1} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Для $g \in \Pi_k(\mathbb{R})$ имеют место неравенства:

$$\|g\|_1 \le \sqrt{\frac{k+1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C[0,1]}, \tag{5.7}$$

$$\|g\|_2 \le \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C[0,1]}, \tag{5.8}$$

$$\|g\|_\infty \le \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C[0,1]}, \tag{5.9}$$

$$\|g\|^* \le \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k+1}{\lambda_{\min}}} \right) \cdot \|g\|_{C[0,1]}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Неравенства (5.7)–(5.9) представляют собой варианты неравенств (5.1)–(5.3) в ситуации $\Pi = \Pi_k(\mathbb{R})$. Неравенство (5.10) получается из (5.7) способом, отмеченным выше при доказательстве теоремы 6.2.2. $\square$

Следствие 6.5.2. *Минимальное собственное значение* $\lambda_{\min}$ *ганкелевой матрицы* (5.6) *удовлетворяет соотношениям*

$$0 < \lambda_{\min} \leq \frac{k+1}{\delta(1,k)^2} =$$

$$= (k+1) \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{2^j}{j!} \cdot \frac{k^2\left(k^2-1\right)\ldots\left(k^2-(j-1)^2\right)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2j-1)}\right)^{-2}. \qquad (5.11)$$

Доказательство. Соотношения (5.11) следуют из (5.7) и теоремы 6.2.1. Очевидно, константа, стоящая в (5.7) не меньше, чем $\delta(1,k)$. $\square$

Из аналогичных соображений получаются результаты, которые касаются пространств многочленов $\Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ или $\Pi_k(\mathbb{R}^n)$. Здесь $k, n \in \mathbb{N}$; $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $|\alpha| > 0$. При составлении матрицы $\mathbf{C}$ в каждой из этих ситуаций следует учесть правило упорядочения мономов, приведённое в § 6.1. Ниже s и t есть порядковые номера наборов α^* и β^* соответственно.

Следствие 6.5.3. *Пусть*

$$d = \dim \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1);$$

$\lambda_{\min} > 0$ — *минимальное собственное значение* $(d \times d)$*-матрицы* $\mathbf{C} = (c_{st})$, *состоящей из чисел*

$$c_{st} := \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^* + \beta_i^* + 1}, \quad 0 \leq \alpha^*, \beta^* \leq \alpha.$$

Для $g \in \Pi_\alpha(\mathbb{R}^n)$ *имеют место неравенства:*

$$\|g\|_1 \leq \sqrt{\frac{d}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}, \qquad (5.12)$$

$$\|g\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}, \qquad (5.13)$$

$$\|g\|_\infty \le \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}}} \cdot \|g\|_{C(Q_n)}, \tag{5.14}$$

$$\|g\|^* \le \frac{1}{2}\Big(1+\sqrt{\frac{d}{\lambda_{\min}}}\Big) \cdot \|g\|_{C(Q_n)}. \tag{5.15}$$

Следствие 6.5.4. *В обозначениях предыдущего следствия выполняются соотношения*

$$0 < \lambda_{\min} \le \frac{d}{\overline{\delta}(n,\alpha)^2} =$$

$$= d \cdot \left(1 + \sum_{0<\beta\le\alpha} \frac{2^{|\beta|}}{\beta!} \cdot \prod_{\beta_i>0} \frac{\alpha_i^2\left(\alpha_i^2-1\right)\ldots\left(\alpha_i^2-(\beta_i-1)^2\right)}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2\beta_i-1)}\right)^{-2}.$$

Следствие 6.5.5. *Пусть*

$$d = \dim \Pi_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k};$$

$\lambda_{\min} > 0$ *— минимальное собственное значение* $(d\times d)$*-матрицы* $\mathbf{C} = (c_{st})$*, состоящей из чисел*

$$c_{st} := \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^* + \beta_i^* + 1}, \quad 0 \le |\alpha^*|, |\beta^*| \le k.$$

Для $g \in \Pi_k(\mathbb{R}^n)$ *имеют место неравенства* (5.12)–(5.15).

Следствие 6.5.6. *В обозначениях предыдущего следствия справедливы оценки:*

$$\delta(n,k) \le \sqrt{\frac{d}{\lambda_{\min}}}, \quad \gamma(n,k) \le \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{d}{\lambda_{\min}}}\right).$$

Результаты следствий 6.5.3–6.5.6 получаются так, как было описано выше.

§ 6.6. Оценки констант η_n

Настоящий параграф написан по материалам работы автора [13].

6.6.1. Константа η_n. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим введённое в § 5.6 пространство X_n многочленов, представляющее собой линейную оболочку функций $1, x_i, x_ix_j$. Здесь $i, j = 1, \ldots, n$; в произведениях переменных $i < j$. Размерность X_n равна $d = n(n+1)/2 + 1$. Часто встречающееся ниже число $d - 1$ равно $n(n+1)/2$. Для $g \in X_n$ мы будем использовать запись

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i + \sum_{i<j} b_{ij}x_ix_j, \quad a_0, a_i, b_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Такое обозначение коэффициентов g отличается от принятого в § 6.1, но в данном случае оно является более подходящим для наших целей.

В соответствии с § 6.1 введём следующий порядок мономов, составляющих $g \in X_n$:

$$1, x_1, \ldots, x_n, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_3, \ldots, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n. \tag{6.2}$$

Упорядоченный набор мономов, стоящий в (6.2) после 1, обозначим через y, а отображение, сопоставляющее вектору $x \in \mathbb{R}^n$ вектор $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, — через T. Очевидно, $T(Q_n) \subset Q_{d-1}$.

Функция $g \in X_n$, вообще говоря, не является линейной по $x = (x_1, \ldots, x_n)$, но линейна по каждому x_i при фиксированных значениях $x_j, j \neq i$. Отсюда следует, что

$$\|g\|_{C(Q_n)} = \max_{x \in Q_n} |g(x)| = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} |g(x)|.$$

Норма $\|\cdot\|^*$ на X_n задаётся с помощью равенства

$$\|g\|^* := \|G\|_{C(Q_{d-1})}.$$

Как и в § 6.1, через G обозначается ассоциированный с g многочлен от m переменных степени ≤ 1, то есть линейная функция, коэффициенты которой совпадают с коэффициентами g. Если g задаётся равенством (6.1), то

$$G(y) = G(y_1, \ldots, y_{d-1}) =$$
$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_iy_i + b_{12}y_{n+1} + b_{13}y_{n+2} + \ldots + b_{n-1,n}y_{d-1}.$$

Будем рассматривать G на кубе Q_{d-1}. Так как $\deg G \leq 1$, то

$$\|G\|_{C(Q_{d-1})} = \max_{y \in \mathrm{ver}(Q_{d-1})} |G(y)| = \max\Big\{\Big|a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + \sum_{i<j} \varepsilon_{ij} b_{ij}\Big|\Big\}. \tag{6.3}$$

Максимум в правой части (6.3) взят по всем наборам чисел $\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}$, каждое из которых равно 0 или 1. Таким образом,

$$\|g\|^* = \max\Big\{\Big|a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + \sum_{i<j} \varepsilon_{ij} b_{ij}\Big| : \ \varepsilon_i, \varepsilon_{ij} = 0 \text{ или } 1\Big\}.$$

Нетрудно видеть также, что $\|g\|^* = \max(|a_0 + \sigma_1|, |a_0 + \sigma_2|)$, где σ_1 и σ_2 есть соответственно сумма отрицательных и сумма положительных коэффициентов g (без учёта свободного члена a_0).

Так как $\mathrm{ver}(T(Q_n)) \subset \mathrm{ver}(Q_{d-1})$, то

$$\|g\|_{C(Q_n)} = \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} |g(x)| = \max_{y \in \mathrm{ver}(F(Q_n))} |G(y)| \le$$

$$\le \max_{y \in \mathrm{ver}(Q_{d-1})} |G(y)| = \|G\|_{C(Q_n)} = \|g\|^*.$$

Поэтому $\|g\|_{C(Q_n)} \le \|g\|^*$ с неулучшаемой (точной) константой 1.

Обозначим через η_n наименьшую константу c, с которой для всех $g \in X_n$ выполняется $\|g\|^* \le c\|g\|_{C(Q_n)}$. Иначе говоря,

$$\eta_n = \sup_{g \in X_n : \|g\|_{C(Q_n)}=1} \|g\|^*.$$

Из этого равенства и включения $X_n \subset X_{n+1}$ следует $\eta_n \le \eta_{n+1}$. Целью настоящего пункта является получение оценок для η_n.

6.6.2. Точные значения η_2 и η_3. Установим с помощью прямого анализа точные значения двух первых констант η_n. Другой путь, использующий общие неравенства для η_n, отмечается в конце п. 6.6.4.

Теорема 6.6.1. *Имеют место равенства $\eta_2 = 5, \eta_3 = 7$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Пусть многочлен

$$g(x) = g(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

обладает свойством $\|g\|_{C(Q_2)} = 1$. Тогда

$$|a_0| = |g(0,0)| \le 1,$$

$$|a_0 + a_1| = |g(1,0)| \le 1, \qquad |a_0 + a_2| = |g(0,1)| \le 1,$$

$$|a_0 + a_1 + a_2 + b_{12}| = |g(1,1)| \le 1.$$

Из этих неравенств легко получаются также следующие:

$$|a_1| \le 2, \qquad |a_2| \le 2, \qquad |b_{12}| \le 4,$$

$$|a_0+b_{12}|\le 5, \qquad |a_0+a_1+a_2|\le 5.$$

Из приведённых оценок следует, что $\|g\|^*\le 5$, поэтому $\eta_2\le 5$.

Рассмотрим теперь многочлен $f(x)=1-2x_1-2x_2+4x_1x_2$. Для него $f(0,0)=g(1,1)=1$, $f(1,0)=g(0,1)=-1$, поэтому $\|f\|_{C(Q_2)}=1$. Очевидно, $\|f\|^*=5$. Это означает, что $\eta_2\ge 5$. Таким образом, $\eta_2=5$, а представленный многочлен f из X_2 является экстремальным.

Случай $n=3$ также допускает не очень большой перебор. Пусть $g\in X_3$, $\|g\|_{C(Q_3)}=1$. Если

$$g(x)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3,$$

то

$$|a_0|\le 1, \qquad |a_0+a_1|\le 1, \qquad |a_0+a_2|\le 1, \qquad |a_0+a_3|\le 1,$$

$$|a_0+a_1+a_2+b_{12}|\le 1, \qquad |a_0+a_1+a_3+b_{13}|\le 1,$$

$$|a_0+a_2+a_3+b_{23}|\le 1, \qquad |a_0+a_1+a_2+a_3+b_{12}+b_{13}+b_{23}|\le 1.$$

С помощью этих оценок получаются неравенства:

$$|a_i|\le 2, \qquad |b_{ij}|\le 4, \qquad |a_0+b_{ij}|\le 5,$$

$$|b_{12}+b_{13}|\le 4, \qquad |b_{12}+b_{23}|\le 4$$

$$(|b_{12}+b_{23}|=|a_0+a_1+a_2+a_3+b_{12}+b_{13}+b_{23}-$$

$$-a_0-a_1-a_2-a_3-b_{13}|\le 1+1+2=4),$$

$$|a_0+a_1+a_2|\le 3, \qquad |a_0+a_1+b_{12}|\le 2, \qquad |a_0+a_1+b_{23}|\le 5,$$

$$|a_0+a_1+a_2+a_3|\le 5, \qquad |a_0+a_1+a_2+b_{23}|\le 3$$

$$(|a_0+a_1+a_2+b_{23}|\le |a_0+a_1|+$$

$$+|a_0+a_3+a_2+b_{23}-a_0-a_3|\le 1+1+1=3),$$

$$|a_0+a_1+b_{12}+b_{13}|\le 5, \qquad |a_0+a_1+b_{12}+b_{23}|\le 5,$$

$$|a_0+b_{12}+b_{13}+b_{23}|\le 7,$$

$$|a_0+a_1+a_2+a_3+b_{ij}|\le 3,$$

$$|a_0+a_1+a_2+b_{12}+b_{23}|\le 5,$$

$$|a_0+a_1+a_2+b_{13}+b_{23}|\le 7,$$

$$|a_0+a_1+b_{12}+b_{13}+b_{23}|\le 5,$$

$$|a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + b_{12} + b_{13}| \le 5,$$

$$|a_0 + a_1 + a_2 + b_{12} + b_{13} + b_{23}| \le 3,$$

а также неравенства, которые следуют из отмеченных с помощью симметрии (перенумерации переменных). Наш анализ показывает, что $\|g\|^* \le 7$. Поэтому $\eta_3 \le 7$.

Рассмотрим многочлен $h(x) = 1-2x_1-2x_2-2x_3+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$. Для него

$$h(0,0,0) = h(1,1,1) = 1,$$

$$h(1,0,0) = h(0,1,0) = h(0,0,1) =$$

$$= h(1,1,0) = h(1,0,1) = h(0,1,1) = -1,$$

поэтому $\|h\|_{C(Q_3)} = 1$. Очевидно, $\|h\|^* = 7$. Это означает, что $\eta_3 \ge 7$. Таким образом, $\eta_3 = 7$. Представленный многочлен h из X_3 является экстремальным.

Теорема доказана. □

6.6.3. Оценка $\eta_n \le 2n+1$. Докажем, что $\eta_n = O(n)$.

Теорема 6.6.2. *При $n \ge 2$ справедливо неравенство $\eta_n \le 2n+1$.*

Доказательство. Пусть $g \in X_n$, то есть

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j,$$

и $\|g\|_{C(Q_n)} = 1$. Это означает, что $|g(x)| \le 1$, если $x \in \operatorname{ver}(Q_n)$. В частности, $|a_0| = |g(0)| \le 1$ и $|a_0 + a_i| = |g(e_i)| \le 1$. Поэтому при любом $i = 1, \ldots, n$ выполнено неравенство $|a_i| \le 2$. Покажем теперь, что при всех $k = 2, \ldots, n$

$$|b_{12} + b_{13} + \ldots + b_{1k}| \le 4. \tag{6.4}$$

Действительно,

$$|a_1 + b_{12} + b_{13} + \ldots + b_{1k}| =$$
$$= |g(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0) - g(\underbrace{0, 1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0)| \le 2, \tag{6.5}$$

и $|a_1| \le 2$, откуда и получается (6.4). Используя соображения, связанные с перенумерацией переменных, приходим сначала к неравенству

$$\Bigl|\sum_{j>1} \varepsilon_{1j} b_{1j}\Bigr| \le 4,$$

а затем — к неравенствам

$$\Big|\sum_{j\neq i}\varepsilon_{ij}b_{ij}\Big|\leq 4,\quad i,j=1,\ldots,n,$$

с любыми числами ε_{ij}, равными 0 или 1. При $i>j$ мы полагаем $\varepsilon_{ij}:=\varepsilon_{ji}$, $b_{ij}:=b_{ji}$. Из последней оценки следует, что

$$\Big|\sum_{i<j}\varepsilon_{ij}b_{ij}\Big|=\Big|\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\varepsilon_{ij}b_{ij}\Big|\leq\frac{1}{2}\cdot 4n=2n. \tag{6.6}$$

С помощью неравенств (6.5) и (6.6) и их следствий можно показать, что $\eta_n=O(n)$.

(a) Зафиксируем набор чисел $\varepsilon_i,\varepsilon_{ij}=0$ или 1. Если $\varepsilon_i=0, i=1,\ldots,n$, то

$$\Big|a_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i+\sum_{i<j}\varepsilon_{ij}b_{ij}\Big|\leq|a_0|+\Big|\sum_{i<j}\varepsilon_{ij}b_{ij}\Big|\leq 1+2n.$$

Если же $\varepsilon_k=1$ при некотором k, то

$$|a_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i+\sum_{i<j}\varepsilon_{ij}b_{ij}|\leq$$

$$\leq|a_0+a_k|+\sum_{i\neq k}|a_i|+|\sum_{i<j}\varepsilon_{ij}b_{ij}|\leq$$

$$\leq 1+2(n-1)+2n=4n-1.$$

Мы использовали (6.5). Так как $2n+1<4n-1$ при $n\geq 2$, то при любом допустимом наборе $\varepsilon_i,\varepsilon_{ij}$

$$\Big|a_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i+\sum_{i<j}\varepsilon_{ij}b_{ij}\Big|\leq 4n-1. \tag{6.7}$$

Взяв в (6.7) максимум по всем наборам чисел $\varepsilon_i,\varepsilon_{ij}=0,1$, получим, что

$$\|g\|^*\leq 4n-1. \tag{6.8}$$

Неравенство (6.8) справедливо для всех $g\in X_n, \|g\|_{C(Q_n)}=1$. Поэтому

$$\eta_n=\sup_{g\in X_n:\|g\|_{C(Q_n)}=1}\|g\|^*\leq 4n-1.$$

(b) С помощью более тонких рассуждений верхнюю границу для η_n можно уменьшить почти вдвое. При оценивании величины

$$W = \Big| a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + \sum_{i<j} \varepsilon_{ij} b_{ij} \Big|$$

будем объединять коэффициенты $a_i (i > 0)$ не с a_0, а с b_{ij}.

Предварительно укажем полезные следствия неравенств (6.5) и (6.6). Речь идёт об оценках

$$\Big| a_l + \sum_{j>l} \varepsilon_{lj} b_{lj} \Big| \le 2, \qquad l = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6.9}$$

$$\Big| \sum_{k<i<j} \varepsilon_{ij} b_{ij} \Big| \le 2(n-k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{6.10}$$

Неравенство (6.9) получается из (6.5) с помощью перенумерации переменных. Неравенство (6.10) получается так же, как (6.6), с заменой n на $n-k$. В (6.9) и (6.10) числа ε_{ij}, равные 0 или 1, произвольны.

Обратимся теперь к оценке величины W с фиксированными $\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}$.

Если $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = 0$, то, как и выше,

$$W \le |a_0| + \Big| \sum_{i<j} \varepsilon_{ij} b_{ij} \Big| \le 1 + 2n.$$

Пусть некоторые из ε_i равны 1. Без ограничения общности будем считать, что

$$\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_k = 1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

и если $k < n$, то $\varepsilon_j = 0$ при $j \ge k+1$. Общий случай сводится к рассматриваемому опять с помощью перенумерации переменных. Обозначим $I := \{(i,j) : \varepsilon_{ij} = 1\}$.

Допустим, что $k \le n-2$. Имеем в этом случае:

$$W = \Big| a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{(i,j)\in I} b_{ij} \Big| =$$

$$= \Big| a_0 + \Big(a_1 + \sum_{(i,j)\in I: i=1} b_{ij} \Big) + \ldots +$$

$$+ \Big(a_k + \sum_{(i,j)\in I: i=k} b_{ij} \Big) + \sum_{(i,j)\in I: i>k} b_{ij} \Big| \le$$

$$\leq |a_0| + \Big|a_1 + \sum_{(i,j)\in I: i=1} b_{ij}\Big| + \ldots +$$

$$+\Big|a_k + \sum_{(i,j)\in I: i=k} b_{ij}\Big| + \Big|\sum_{(i,j)\in I: i>k} b_{ij}\Big| \leq$$

$$\leq 1 + 2k + 2(n-k) = 2n+1.$$

Мы использовали (6.9) для $l = 1, 2, \ldots, k$ и (6.10). Следует также учесть, что если слагаемое $\sum_{(i,j)\in I: i=m} b_{ij}$ отсутствует, то соответствующий член оценивается с помощью неравенства $|a_l| \leq 2$. Это замечание касается и двух следующих ниже вариантов.

Пусть $k = n-1$. Тогда в последней цепочке слагаемое $|\sum_{(i,j)\in I: i>k} b_{ij}|$ отсутствует, в связи с чем

$$W \leq 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

Наконец, в случае $k = n$

$$W = \Big|a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{(i,j)\in I} b_{ij}\Big| =$$

$$= \Big|a_0 + \Big(a_1 + \sum_{(i,j)\in I: i=1} b_{ij}\Big) + \ldots +$$

$$+\Big(a_{n-1} + \sum_{(i,j)\in I: i=n-1} b_{ij}\Big) + a_n\Big| \leq$$

$$\leq |a_0| + \Big|a_1 + \sum_{(i,j)\in I: i=1} b_{ij}\Big| + \ldots +$$

$$+\Big|a_{n-1} + \sum_{(i,j)\in I: i=n-1} b_{ij}\Big| + |a_n| \leq$$

$$\leq 1 + 2(n-1) + 2 = 2n+1.$$

Итак, во всех вариантах части (а)

$$W = \Big|a_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i + \sum_{i<j} \varepsilon_{ij} b_{ij}\Big| \leq 2n+1.$$

В силу произвольности $\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}$, равных 0 или 1, мы получаем неравенство $\eta_n \leq 2n+1$.

Сравнение оценок $\eta_n \le 4n-1$ и $\eta_n \le 2n+1$, выведенных в (a) и (b), тривиально: $2n+1 < 4n-1$ при всех $n \ge 2$.

Теорема доказана. $\square$

6.6.4. Оценка $\eta_n \ge 9-4/\lfloor (n+1)/2 \rfloor$**.** Получим оценку чисел η_n снизу.

Теорема 6.6.3. *При $n \ge 2$ справедливо неравенство*

$$\eta_n \ge 9 - \frac{8}{n}. \tag{6.11}$$

Если n — нечётное, то

$$\eta_n \ge 9 - \frac{8}{n+1}. \tag{6.12}$$

Неравенства (6.11) и (6.12) можно объединить: *для любого $n = 2, 3, \ldots$ выполняется*

$$\eta_n \ge 9 - \frac{4}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}. \tag{6.13}$$

Действительно, если $n = 2k$ — чётное, то

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = k, \quad \frac{8}{n} = \frac{8}{2k} = \frac{4}{k}.$$

Если же $n = 2k+1$ — нечётное, то

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = k+1, \quad \frac{8}{n+1} = \frac{8}{2k+2} = \frac{4}{k+1}.$$

Поэтому (6.13) содержит (6.11) и (6.12).

Доказательство теоремы 6.6.3. Сначала покажем, что для произвольного $n \ge 2$ имеет место неравенство (6.11). Рассмотрим функцию g из X_n вида

$$g(x) = 1 + a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i<j} x_i x_j, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $z^{(k)}$ точку из $\mathrm{ver}(Q_n)$, первые k компонент которой равны 1, а последние $n-k$ компонент равны 0. Тогда

$$g(z^{(k)}) = 1 + ak + b\frac{k(k-1)}{2} = \frac{b}{2}k^2 + (a - \frac{b}{2})k + 1,$$

$k = 0, 1, \ldots, n$. Пусть $\varphi(t)$ — многочлен второй степени, однозначно определяемый условиями

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi\left(\frac{n}{2}\right) = -1, \quad \varphi(n) = 1.$$

Ясно, что $|\varphi(t)| \leq 1, 0 \leq t \leq n$. Явное выражение для $\varphi(t)$ может быть найдено с помощью интерполяционной формулы Лагранжа. Оно имеет вид:

$$\varphi(t) = \frac{8}{n^2}t^2 - \frac{8}{n}t + 1.$$

Выберем теперь a и b так, чтобы было выполнено

$$\frac{b}{2} = \frac{8}{n^2}, \quad a - \frac{b}{2} = -\frac{8}{n},$$

то есть

$$a = \frac{8 - 8n}{n^2}, \quad b = \frac{16}{n^2}.$$

При таком выборе

$$g(x) = 1 - \frac{8n - 8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{16}{n^2} \sum_{i<j} x_i x_j.$$

Так как $g(z^{(k)}) = \varphi(k), k = 0, 1, \ldots, n$, то $|g(z^{(k)})| \leq 1$ при всех k, причём $g(z^{(0)}) = g(0) = 1$, $g(z^{(n)}) = 1$. Это означает, что $\|g\|_{C(Q_n)} = 1$.

Как отмечалось,

$$\|g\|^* = \max(|1 + \sigma_1|, |1 + \sigma_2|),$$

где σ_1 и σ_2 есть суммы отрицательных и положительных коэффициентов многочлена g (без учёта $a_0 = 1$). В рассматриваемой ситуации

$$1 + \sigma_1 = \frac{8n - 8}{n^2} \cdot n - 1 = 7 - \frac{8}{n},$$

$$1 + \sigma_2 = 1 + \frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 9 - \frac{8}{n}.$$

Таким образом, $\|g\|^* = 9 - 8/n$. Учитывая, что $\|g\|_{C(Q_n)} = 1$, получаем оценку (6.11).

В случае нечётного n неравенство (6.11) можно несколько усилить с помощью более тонких рассуждений.

Пусть $n = 2k + 1, k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим многочлен второй степени $\varphi(t)$, однозначно определяемый условиями

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi(k) = -1, \quad \varphi(2k + 1) = 1.$$

В явном виде

$$\varphi(t) = \frac{2}{k(k+1)}t^2 - \frac{2(2k+1)}{k(k+1)}t + 1.$$

Заметим, что $\varphi(k+1) = \varphi(k) = -1$, в связи с чем

$$\left|\varphi\Big(\frac{n}{2}\Big)\right| = \left|\varphi\Big(k+\frac{1}{2}\Big)\right| > 1.$$

Несмотря на это, во всех целочисленных точках $l = 0, 1, \ldots, 2k+1$ выполнено $|\varphi(l)| \le 1$, причём $|\varphi(l)| = 1$ лишь при $l = 0, k, k+1, 2k+1$.

Дальнейшая часть доказательства повторяет наши предыдущие рассуждения. Выберем a и b, исходя из равенств

$$\frac{b}{2} = \frac{2}{k(k+1)}, \quad a - \frac{b}{2} = -\frac{2(2k+1)}{k(k+1)},$$

то есть

$$a = -\frac{4}{k+1}, \quad b = \frac{4}{k(k+1)}.$$

Рассмотрим многочлен g из X_n вида

$$g(x) = 1 + a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i<j} x_i x_j =$$

$$= 1 - \frac{4}{k+1}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{4}{k(k+1)}\sum_{i<j} x_i x_j.$$

Наш выбор a и b означает, что

$$|g(z^{(l)})| = |\varphi(l)| \le 1, \quad l = 0, 1, \ldots, 2k+1,$$

$$|g(z^{(0)})| = |g(z^{(k)})| =$$
$$= |g(z^{(k+1)})| = |g(z^{(2k+1)})| = 1.$$

Поэтому $\|g\|_{C(Q_n)} = 1$, в связи с чем $\eta_n \ge \|g\|^*$. Так как

$$\|g\|^* = \max(|1+\sigma_1|, |1+\sigma_2|),$$

$$\sigma_1 = -\frac{4(2k+1)}{k+1},$$

$$\sigma_2 = \frac{4}{k(k+1)} \cdot k(2k+1) = \frac{4(2k+1)}{k+1},$$

то

$$\|g\|^* = |1+\sigma_2| = 1 + \frac{4(2k+1)}{k+1} =$$

$$= \frac{9k+5}{k+1} = 9 - \frac{4}{k+1} = 9 - \frac{8}{2k+2} =$$

$$= 9 - \frac{8}{n+1} \le \eta_n.$$

Последнее неравенство совпадает с (6.12).

Теорема 6.6.3 доказана.

Как следствие теорем 6.6.2 и 6.6.3 получается результат теоремы 6.6.1, который выше был установлен прямыми методами. Действительно, при $n = 2$ и $n = 3$ выполняется равенство

$$9 - \frac{4}{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = 2n + 1,$$

то есть нижняя и верхняя границы для η_n в этих случаях совпадают. Общее значение этих границ при $n = 2$ равно $\eta_2 = 5$, а при $n = 3$ равно $\eta_3 = 7$. Нетрудно убедиться, что при всех $n \ge 4$ верхняя граница строго больше нижней.

6.6.5. Оценка $\eta_n \ge 3/8\sqrt{n}$ для $n = 2^k$. Обозначим через X_n' подпространство X_n вида

$$X_n' = \mathrm{lin}(x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_3, \ldots, x_2x_n, \ldots, x_{n-1}x_n)$$

размерности $n(n-1)/2$. Пусть η_n' — наименьшая константа c в неравенстве

$$\|g\|^* \le c\|g\|_{C(Q_n)}, \ g \in X_n',$$

то есть

$$\eta_n' = \sup_{g\in X_n' : \|g\|_{C(Q_n)}\le 1} \|g\|^* = \sup_{g\in X_n' : \|g\|_{C(Q_n)}= 1} \|g\|^*.$$

Так как $X_n' \subset X_n$, то $\eta_n' \le \eta_n$.

Если $g(x) = \sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j \in X_n'$, $\|g\|_{C(Q_n)} \le 1$, то при $2 \le k \le n$

$$\left|\sum_{j=2}^{k} b_{1j}\right| = |g(\underbrace{1,\ldots,1}_{k},0,\ldots,0) - g(0,\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1},0,\ldots,0)| \le 2.$$

Отсюда при всех $i = 1, \ldots, n$ и любых ε_{ij}, равных 0 или 1,

$$\left|\sum_{j\ne i}^{n} \varepsilon_{ij} b_{ij}\right| \le 2$$

(мы полагаем $b_{ij} := b_{ji}$ при $i > j$). Это даёт $\|g\|^* \le n$, поэтому $\eta_n' \le n$.

Покажем, что существует такая константа c, что по крайней мере для значений $n = 2^k$ выполнено неравенство $\eta_n' \ge c\sqrt{n}$.

Теорема 6.6.4. *Для* $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, *справедливо неравенство*

$$\eta_n' \ge \frac{3}{8}\sqrt{n}. \tag{6.14}$$

Предварим доказательство теоремы 6.6.4 некоторыми конструкциями с участием матриц Адамара (см. § 3.1). Мы применяем ниже симметричные матрицы Адамара порядков $n = 2^k$ вида

$$\mathbf{A}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2n} := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{A}_n \\ \mathbf{A}_n & -\mathbf{A}_n \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{A}_n^T = \mathbf{A}_n$, то $\mathbf{A}_n^2 = n\mathbf{I}_n$.

Сопоставим матрице $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n = (a_{ij})$ многочлен $\tilde{g} \in X_n'$, коэффициенты которого содержатся в верхней треугольной части $\mathbf{A}$:

$$\tilde{g}(x) = \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j.$$

Пусть, далее, $U(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$, тогда

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{2}\Big((Ax, x) - U(x)\Big).$$

Здесь $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор умножения столбца $(x_1, \ldots, x_n)^T$ на матрицу $\mathbf{A}$; $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через A^* оператор, сопряжённый к A. В силу свойств матрицы $\mathbf{A}$

$$(Ax, Ax) = (x, A^*Ax) = (x, A^2x) = n(x, x),$$

откуда и из неравенства Коши следует, что

$$(Ax, x)^2 \le (Ax, Ax)(x, x) \le n(x, x)^2.$$

Значит,

$$|(Ax, x)| \le \sqrt{n}(x, x),$$

$$\max_{0 \le x_i \le 1} |(Ax, x)| \le n\sqrt{n}.$$

Так как $\sum a_{ii} = 0$ и $a_{ii} = \pm 1$, то $\|U\|_{C(Q_n)} \le n/2$. Получаем:

$$\|\tilde{g}\|_{C(Q_n)} \le \frac{1}{2}\Big(\max_{0\le x_i\le 1} |(Ax,x)| + \|F\|_{C(Q_n)}\Big) \le \frac{1}{2}n\sqrt{n} + \frac{1}{4}n.$$

При $n > 2$ выполняется $1/4n < 1/6n\sqrt{n}$ (это эквивалентно $\sqrt{n} > 1.5$), поэтому при $n > 2$

$$\|\tilde{g}\|_{C(Q_n)} \le \frac{1}{2}n\sqrt{n} + \frac{1}{6}n\sqrt{n} = \frac{2}{3}n\sqrt{n}. \tag{6.15}$$

Если $n = 2$, то $\tilde{g}(x) = x_1x_2$. Таким образом, (6.15) выполнено при всех $n = 2^k$.

Сумма всех элементов матрицы $\mathbf{A}$ равна n. Так как сумма диагональных элементов равна нулю, то сумма коэффициентов $\tilde{g}$ равна $n/2$. Так как общее число коэффициентов $\tilde{g}$ равно $n(n-1)/2$, то многочлен $\tilde{g}$ имеет $n^2/4$ положительных коэффициентов, равных 1, и $n(n-2)/4$ отрицательных коэффициентов, равных -1. Сказанное означает, что

$$\|\tilde{g}\|^* = \frac{1}{4}n^2. \tag{6.16}$$

Перейдём теперь к доказательству теоремы 6.6.4. Положим

$$\hat{g} := \frac{3}{2}\frac{1}{n\sqrt{n}}\tilde{g}.$$

Тогда $\hat{g} \in X_n'$, а в силу (6.15) и (6.16)

$$\|\hat{g}\|_{C(Q_n)} \le 1, \ \|\hat{g}\|^* = \frac{3}{2}\frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{n}.$$

Поэтому

$$\eta_n' \ge \|\hat{g}\|^* = \frac{3}{8}\sqrt{n},$$

что и требовалось доказать. □

Из неравенства $\eta_n \ge \eta_n'$ и монотонности последовательности $\{\eta_n\}$ следует утверждение, дополняющее и уточняющее полученные ранее оценки снизу.

Следствие 6.6.1. *Для* $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$, *имеет место неравенство*

$$\eta_n \ge \frac{3}{8}\sqrt{n}. \tag{6.17}$$

Поэтому $\eta_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$.

Приведём некоторые соображения о возможности уточнения полученных оценок (6.14) и (6.17). Предположим, что матрица Адамара $\mathbf{A}_n$, введённая выше, имеет следующее свойство:

существует универсальная, то есть не зависящая от n, константа $c > 0$ такая, что для любого главного минора M матрицы $\mathbf{A}_n$ (минора, номера строк и номера столбцов которого образуют два равных множества) выполняется неравенство

$$|\Sigma_M| \leq cn; \tag{6.18}$$

здесь Σ_M — сумма элементов минора M.

По приведённой в этом пункте схеме можно получить из (6.18) для $n = 2^k$ неравенства $\eta_n \geq \eta'_n \geq c_1 n$. Справедливость этих неравенств означала бы, что по крайней мере для значений $n = 2^k$ оценка $\eta_n = O(n)$ точна по порядку n. Однако ответ на вопрос о справедливости (6.18) для всех $n = 2^k$ автору неизвестен.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

2. *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984. 560 с.

3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

4. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.

5. *Бронштейн Е. М.* Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37.

6. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 328 с.

7. *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971. 96 с.

8. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. 184 с.

9. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.

10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.

11. *Невский М. В., Иродова И. П.* Некоторые вопросы теории приближения функций. Ярославль: ЯрГУ, 1999. 94 с.

12. *Невский М. В.* Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n-мерного куба // Модел. и анализ информ. систем. 2003. Т. 10, №1. С. 9–19.

13. *Невский М. В.* О константах в неравенствах для эквивалентных норм некоторых многочленов от n переменных. Ярославль, 2005. 16 с. Деп. в ВИНИТИ 28.02.05, № 274–В2005.

14. *Невский М. В.* Об интерполяции функций n переменных с помощью линейных комбинаций $1, x_i, x_i x_j (i < j)$. Ярославль, 2005. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 28.02.05, № 275–В2005.

15. *Невский М. В.* О минимальных проекторах при линейной интерполяции на квадрате и на кубе. Ярославль, 2006. 23 с. Деп. в ВИНИТИ 13.06.06, № 786–В2006.

16. *Невский М. В.* Геометрические конструкции в задаче об оптимальной линейной интерполяции на n-мерном кубе. Ярославль, 2006. 21 с. Деп. в ВИНИТИ 13.06.06, № 785–В2006.

17. *Невский М. В.* Неравенства для норм проекторов при интерполяции по вершинам n-мерного куба // Математика в Ярославском университете. Сборник обзорных статей. К 30-летию математического факультета. Ярославль, 2006. С. 308–330.

18. *Невский М. В.* Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе // Модел. и анализ информ. систем. 2006. Т. 13, № 2. С. 16–29.

19. *Невский М. В.* Минимальные проекторы и максимальные симплексы // Модел. и анализ информ. систем. 2007. Т. 14, № 1. С. 3–10.

20. *Невский М. В.* Ортогональное проектирование и минимальная линейная интерполяция на n-мерном кубе // Модел. и анализ информ. систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 8–28.

21. *Невский М. В.* Неравенства для норм интерполяционных проекторов // Модел. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15, № 3. С. 3–15.

22. *Невский М. В.* О константах эквивалентности для некоторых норм на пространствах алгебраических многочленов // Модел. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15, № 4. С. 65–80.

23. *Невский М. В., Хлесткова И. В.* К вопросу о минимальной линейной интерполяции // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 9. Ярославль, 2008. С. 31–37.

24. *Невский М. В.* Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 2. С. 24–43.

25. *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580 –593. (Английский перевод: *Nevskii M. V.* On a property of n-dimensional simplices // Math. Notes. 2010. V. 87, № 4. P. 543–555.)

26. *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 1. С. 142–148.

27. *Невский М. В.* О геометрических характеристиках n-мерного симплекса // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 2. С. 52–64.

28. *Невский М. В.* Геометрические неравенства для интерполяционных проекторов // Математика в Ярославском университете. Сборник обзорных статей. К 35-летию математического факультета. Ярославль, 2011. С. 143–154.

29. *Невский М. В.* Об осевых диаметрах выпуклого тела // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 313–315. (Английский перевод: *Nevskii M. V.* On the axial diameters of a convex body // Math. Notes. 2011. V. 90, № 2. P. 295–298.)

30. *Невский М. В.* О гипотезе Лассака для выпуклого тела // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 3. С. 5–11.

31. *Невский М. В.* О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело (в печати).

32. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.

33. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.

34. *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 2001. 336 с.

35. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

36. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. 500 с.

37. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

38. *Тараканов В. Е.* Комбинаторные задачи и $(0,1)$–матрицы. М.: Наука, 1985. 192 с.

39. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 624 с.

40. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1987. С. 103–260.

41. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970. 800 с.

42. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.

43. *Balla M. Y.* Approximation of convex bodies by parallelotopes. International Centre for Theoretical Physics. Internal report IC/87/310. Trieste, 1987. 5 p.

44. *Butzer P. L.* Observations on the history of central B-splines // Archive for History of Exact Sciences. 1988. V. 39, № 2. P. 137–156.

45. *Clements G. F., Lindström B.* A sequence of (± 1) determinants with large values // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 548–550.

46. *Comtet L.* Permutations by number of rises; Eulerian numbers // Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht, Netherlands: Reidel. 1974. P. 51, 240–246.

47. *Curry H. B., Schoenberg I. J.* On Pólya distribution functions. The fundamental spline functions and their limits // J. d'Analyse Math. 1966. V. 17. P. 71–107.

48. *Ehrenborg R., Readdy M., Steingrimsson E.* Mixed volumes and slices of the cube // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1998. V. 81. P. 121–126.

49. *Fejes Tóth L.* Regular figures. Macmillan/Pergamon, New York, 1964.

50. *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* Concrete mathematics: A foundation for computer science. Reading, MA: Addison–Wesley. 1994.

51. *Hadamard J.* Résolution d'une question relativ aux déterminants // Bull. Sci. Math. 1893. V. 28. P. 240–246.

52. *Hudelson M., Klee V., Larman D.* Largest j-simplices in d-cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241–243. P. 519–598.

53. *Jonsson A.* Markov's inequality and local polynomial approximation // Funct. Spaces Appl. Lund, 1986. P. 303–316.

54. *Lagrange J. L.* Leçons élémentaires sur les mathématiques // Oeuvres. V. 7. 1795. P. 286.

55. *de Laplace M.* Oeuvres complétes. V. 7. Réédite par Gauthier–Villars. Paris, 1886.

56. *Lassak M.* Approximation of convex bodies by rectangles // Geom. Dedic. 1993. V. 47. P. 111–117.

57. *Lassak M.* Relationships between widths of a convex body and of an inscribed parallelotope // Bull. Austral. Math. Soc. 2001. V. 63. P. 133–140.

58. *Lassak M.* Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 449–462.

59. *Martini H.* Some characterizing properties of the simplex // Geom. Dedic. 1989. V. 29. P. 1–6.

60. *Nevskii M.* Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

61. *Radziszewski K.* Sur une probleme extremal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux fiures convexes // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. 1952. V. 6. P. 5–18.

62. *Rivlin T. J.* Chebyshev polynomials. From approximation theory to algebra and number theory. New York: Wiley Interscience, 1990. 249 p.

63. *Scott P. R.* Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. V. 36. P. 359–362.

64. *Scott P. R.* Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329–333.

65. *Slepian D.* The content of some extreme simplices // Pacific. J. Math. 1969. V. 31. P. 795–808.

66. *Sommerfeld A.* Eine besonders anschauliche Ableitung des Gaussischen Fehlergesetzes // "Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum 60. Geburstage, 20. Februar, 1904." Barth, Leipzig, 1904. P. 848–859.

67. *Stanley R. P.* Eulerian partitions of a unit hypercube // In: "Higher Combinatorics. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute, Berlin, West Germany, September 1–10, 1976." Reidel, Dordrecht/Boston, 1977. P. 49.

68. *Ziegler G.* Lectures on 0/1-polytopes // In: Proc. DMV-Seminars "Polytopes: Combinatoric and Computation", Birkhäuser, 2000. P. 1–44.

Научное издание

Михаил Викторович Невский

Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции

Корректор А. А. Аладьева.
Компьютерный набор, вёрстка М. В. Невский.
Дизайнер обложки А. А. Белова.

Подписано в печать 30.01.2012. Формат $70 \times 100/16$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,41. Уч.-изд. л. 15,7.
Гарнитура Антиква. Бумага офсетная. Тираж 500 экз. Заказ № 003-12.

Оригинал-макет подготовлен
в Управлении научных исследований и инноваций ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000 г. Ярославль, ул. Советская, 14.
http://www.uniyar.ac.ru

Отпечатано в ООО "ИПК Индиго".
г. Ярославль, ул. Свободы, 97.
Тел. 93-06-10.