Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

В.С. Климов

Одномерный математический анализ
Часть II

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальностей
Математика и Прикладная математика и информатика

Ярославль 2006

УДК 517
ББК В16я73
К 49

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2006 года

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ Е.И. Смирнов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ

К 49 **Климов, В.С.** Одномерный математический анализ. Часть II: Учебное пособие / В.С. Климов; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 126 с.
ISBN 5-8397-0454-7

Вторая часть пособия содержит следующие разделы дисциплины "Математический анализ": интегралы, векторные интегралы, ряды, несобственные интегралы.

Предназначено для студентов первого курса университетов, обучающихся по специальностям 010101 Математика, 010501 Прикладная математика и информатика и направлению подготовки 010100 Математика (дисц. «Математический анализ», блок ЕН), очной формы обучения.

Пособие подготовлено с использованием издательской системы LaTeX.

Рис. 2. Библиогр.: 20 назв.

УДК 517
ББК В16я73

ISBN 5-8397-0454-7

Оглавление

Глава 4. Интегралы

§19. Первообразная

1. Первообразные и неопределенный интеграл

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на промежутке $X \subset \mathbb{R}$ ($\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$). Функцию F класса $C(X) \cap D^1(\overset{\circ}{X})$ называют первообразной функции f, если $F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in \overset{\circ}{X}$ или, что то же самое, $dF(x) = f(x)dx$.

Примеры:

$f(x) = x^\alpha \ \ (0 < x < \infty,\ \alpha \neq -1),\ F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$;

$f(x) = \dfrac{1}{x} \ \ (0 < x < \infty),\ F(x) = \ln x$;

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2} \ \ (x \in \mathbb{R},\ a \neq 0),\ F(x) = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$.

Возникают два вопроса: 1) для каких функций существуют первообразные; 2) сколько существует первообразных для данной функции. Далее будет доказано, что для любой функции класса $C(X)$ существует первообразная. Для разрывных функций подобное утверждение может быть неверным. Действительно, в силу теоремы Дарбу область значений производной $F'(x)$ на множестве $\overset{\circ}{X}$ есть промежуток, поэтому, например, функция $f(x) = \operatorname{sgn}\, x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ не имеет первообразной.

Если F_1, F_2 — две первообразные функции $f : X \to \mathbb{R}$, то $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in \overset{\circ}{X}$, следовательно, $(F_1 - F_2)'(x) = 0\ \forall\, x \in \overset{\circ}{X}$. Отсюда вытекает, что разность $F_1(x) - F_2(x)$ — постоянная на X функция.

Совокупность первообразных функции f называют неопределенным интегралом от функции f и обозначают символом $\int f(x)dx$. Знак $\int$ именуют знаком неопределенного интеграла, f — подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ — подынтегральным выражением. Если $F(x)$ — одна из первообразных функции f, то любая другая первообразная отличается от нее лишь константой, поэтому

$$\int f(x)dx = F(x) + C;$$

справеливы равенства

$$d\int f(x)dx = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx, \tag{1}$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{2}$$

Формулы (1), (2) показывают, что операции дифференцирования и интегрирования в некотором смысле обратны. Интегрированием функции называют операцию отыскания неопределенного интеграла этой функции. Слово "неопределенный"отражает произвольность постоянной C.

2. Правила интегрирования

Каждое правило дифференцирования порождает соответствующее правило интегрирования. Вначале приведем таблицу неопределенных интегралов

1°. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad (\alpha \neq -1);$

2°. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad (x \neq 0);$

3°. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad (0 < a \neq 1);$

4°. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C;$

5°. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C;$

6°. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C;$

8°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C;$

9°. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C;$

10°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad (a > 0);$

11°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x \pm \sqrt{x^2+a^2}) + C, \qquad (a > 0).$

Формулы $1^\circ - 11^\circ$ справедливы на тех промежутках, на которых определены подынтегральные функции. Для их проверки достаточно убедиться в том, что производные функций, находящихся в правых частях этих формул, совпадают с соответствующими подынтегральными функциями.

Перейдем теперь к общим правилам интегрирования. Отметим вначале линейные свойства интеграла

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \tag{3}$$

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

Равенства в формулах (3), (4) имеют условный характер. Их следует понимать как равенство правой и левой частей с точностью до произвольного постоянного слагаемого (напомним, каждый из интегралов, фигурирующих в формулах (3), (4), определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого).

Для доказательства формулы (3) достаточно установить, что если $F(x), G(x)$ — первообразные функций $f(x), g(x)$ соответственно, то функция $F(x) \pm G(x)$ есть первообразная функции $f(x) \pm g(x)$. Это вытекает из равенства $(F(x) \pm G(x))' = F'(x) \pm G'(x)$. Аналогично доказывается формула (4); в этом случае используется равенство $(\lambda F(x))' = \lambda F'(x)$.

Если функции u, v принадлежат $C(U) \cap D^1(\overset{\circ}{X})$, то их произведение uv также принадлежит $C(X) \cap D^1(\overset{\circ}{X})$ и $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ $(x \in \overset{\circ}{X})$. Отсюда вытекает равенство

$$\int (uv)'(x)dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx,$$

обычно записываемое в дифференциальной форме

$$\int udv = u(x)v(x) - \int vdu \tag{5}$$

и называемое правилом интегрирования по частям.

Один из самых эффективных методов интегрирования основан на замене переменных. Пусть $G(t)$ — первообразная функции $g(t)$ на некотором промежутке T, φ — функция класса $C(X)\cap D^1(\overset{\circ}{X})$ на промежутке X, причем $\varphi(\overset{\circ}{X}) \subset \overset{\circ}{T}$, $\varphi(X) \subset T$. Тогда функция $G\circ\varphi$ принадлежит $C(X)\cap D^1(X)$ и $(G\circ\varphi)'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)\ \forall\ x \in \overset{\circ}{X}$ (правило дифференцирования суперпозиции). Это влечет за собой формулу

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C, \tag{6}$$

называемую правилом замены переменных.

Схема применения этого правила следующая. Пусть требуется найти первообразную функции $f(x)$. Если удается подобрать такую дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, что имеет место равенство

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x) \tag{7}$$

и легко находится первообразная G функции g, то в силу (6), (7)

$$\int f(x)dx = G[\varphi(x)] + C. \tag{8}$$

Описанный прием называют интегрированием путем замены переменной.

Иногда используют другую версию замены переменной. Для вычисления интеграла от функции f полагают $x = \psi(z)$; при этом функция ψ предполагается обратимой, так что из равенства $x = \psi(z)$ можно выразить z как функцию от $x : z = \psi^{-1}(x)$. Соответствующая формула замены переменной имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(z)]\psi'(z)dz = \Phi[\psi^{-1}(x)] + C. \tag{9}$$

Здесь $\Phi(z)$ — первообразная функции $f[\psi(z)]\psi'(z)$. Равенство (9) следует из правила дифференцирования суперпозиции функций. Эффективность этой версии зависит от сложности интегрирования функции $f[\psi(z)]\psi'(z)$ и обращения функции ψ.

3. Примеры

Пример 1. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n),\ a_n \neq 0$. Тогда

$$\int (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \tag{10}$$

первообразная от многочлена — снова многочлен.

Пример 2. Если $\varphi(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$, то

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C \qquad (x \in X). \tag{11}$$

Формула (11) вытекает из (6) при $g(t) = \dfrac{1}{t}$; ее называют правилом логарифмического интегрирования. В частности,

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{\cos' x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

на соответствующем промежутке.

Пример 3. На любом промежутке X, не содержащем точку x_0, справедливо равенство

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^k} = \begin{cases} \ln|x-x_0|, & \text{если} \quad k=1; \\ \dfrac{(x-x_0)^{1-k}}{1-k}, & \text{если} \quad k=2,3,\dots. \end{cases} \tag{12}$$

Для доказательства формулы (12) достаточно положить $\varphi(x) = x - x_0,\ g(t) = t^{-k}$ $(k \in \mathbb{N})$ и воспользоваться равенством (6).

Пример 4. Пусть многочлен $x^2 + px + q$ всюду положителен, т.е. $4q - p^2 > 0$. Положим $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$, тогда $x^2 + px + q = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 + a^2$. Справедливы равенства

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \ln(x^2+px+q) + C, \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C. \tag{14}$$

Равенство (13) следует из (11) при $\psi(x) = x^2 + px + q$; для доказательства (14) достаточно положить $g(t) = \dfrac{1}{t^2+a^2}$, $\varphi(x) = x + \dfrac{p}{2}$ и воспользоваться равенством (6).

Пример 5. При любых действительных $M,\ N$

$$Mx + N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{pM}{2}, \tag{15}$$

поэтому, в силу (13)-(15),

$$\int \frac{Mx+n}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{pM}{2}\right) \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C. \tag{16}$$

Здесь $a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}} > 0$.

Пример 6.

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Пример 7. Положим

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},$$

где $a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$. Выведем рекуррентную формулу, связывающую интегралы $I_n(t),\ I_{n+1}(t)$. Для вычисления $I_n(t)$ применим правило интегрирования по частям, полагая $u(t) = (t^2+a^2)^{-n},\ v(t) = t$. В этом случае $u'(t) = -2nt(t^2+a^2)^{-n-1}$, следовательно,

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \int \frac{2nt^2}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt =$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(t^2+a^2) - a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\, dt = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n(t) - 2na^2 I_{n+1}(t).$$

Из последнего равенства получаем рекуррентную формулу

$$I_{n+1}(t) = \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n(t) + \frac{1}{2na^2}\,\frac{t}{(t^2+a^2)^n},\ n = 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Согласно правилу 8° $I_1(t) = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{t}{a} + C$; формула (17) позволяет найти $I_2(t)$, по той же формуле можно найти $I_3(t)$; продолжая этот процесс, можно найти выражения для любого интеграла $I_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Следствие. *Пусть $n > 1$, тогда*

$$I_n(t) = \frac{K(t)}{(t^2+a^2)^{n-1}} + L\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C, \tag{18}$$

где $K(t)$ — некоторый многочлен степени $< 2(n-1)$, $L \in \mathbb{R}$.

§20. Интегрирование рациональных функций

1. Рациональные функции

Рациональной называется функция $R(x)$, представимая в виде отношения двух многочленов: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно). Функцию $R(x)$ называют правильной, если степень числителя m меньше степени знаменателя $n : m < n$. Каждую неправильную рациональную функцию можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции.

Действительно, пусть $m \geqslant n$. Тогда имеет место равенство

$$p(x) = h(x)Q(x) + P_0(x),$$

где h — неполное частное, P_0 — остаток от деления P на Q, так что степень P_0 меньше степени Q. Таким образом,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = h(x) + \frac{P_0(x)}{Q(x)},$$

т.е. дробь $\dfrac{P}{Q}$ представима в виде суммы многочлена h и правильной рациональной функции $\dfrac{P_0}{Q}$.

Приведем без доказательства некоторые факты из алгебры (см., например, [12]). Любой многочлен $Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0$ с действительными коэффициентами b_0, b_1, …, b_{n-1} допускает представление

$$Q(x) = (x-x_1)^{r_1}\ldots(x-x_l)^{r_l}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_kx+q_k)^{s_k}, \tag{1}$$

в котором $x_1, \ldots, x_l$ — различные действительные числа; $x^2 + p_1x + q_1, \ldots, x^2 + p_kx + q_k$ — различные всюду положительные квадратные многочлены, $r_1 + \ldots + r_l + 2s_1 + \ldots + 2s_k = n$. Как нетрудно видеть, $Q(x_1) = \ldots = Q(x_l) = 0$, так что $x_1, \ldots, x_l$ — корни многочлена $Q(x)$; числа $r_1, \ldots, r_l$ называют кратностями корней $x_1, \ldots, x_l$. Если многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней, то

$$Q(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_kx + q_k)^{s_k}. \tag{2}$$

Аналогично, если многочлен $Q(x)$ имеет лишь действительные корни $x_1, \ldots, x_l$ и $r_1 + \ldots + r_l = n$, то

$$Q(x) = (x - x_1)^{r_1} \ldots (x - x_l)^{r_l}. \tag{3}$$

Равенства (2), (3) можно считать частными случаями равенства (1), возникающими при $r_j = 0$ ($s_j = 0$) соответственно.

Любая правильная рациональная функция $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ допускает (см., например, [12]) представление

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = f_1(x) + \ldots + f_l(x) + g_1(x) + \ldots + g_k(x), \tag{4}$$

где

$$f_t(x) = \sum_{j=1}^{r_t} \frac{A_{jt}}{(x - x_t)^j} \text{ — } \qquad t = 1, \ldots, l$$

слагаемое, соответствующее множителю $x - x_t$ в разложении (1),

$$g_t(x) = \sum_{j=1}^{s_t} \frac{B_{jt}x + C_{jt}}{(x^2 + p_tx + q_t)^j} \text{ — } \qquad t = 1, \ldots, k$$

слагаемое, соответствующее множителю $x^2 + p_tx + q_t$ в разложении (1). Постоянные $r_1, \ldots, r_l, s_1, \ldots, s_k$ те же, что и в равенстве (1). Таким образом, правильная рациональная функция есть сумма конечного числа функций вида

$$\frac{A}{(x - x_0)^j}, \qquad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^j}, \tag{5}$$

где x_0 — один из корней многочлена Q, $x^2 + px + q$ совпадает с одним из многочленов $x^2 + p_1x + q_1, \ldots, x^2 + p_kx + q_k$.

2. Формула Остроградского[1]

Пусть $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная функция, знаменатель которой $Q(x)$ допускает представление (1). Положим

$$Q_1(x) = (x - x_1)^{r_1 - 1} \ldots (x - x_l)^{r_l - 1}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1 - 1} \ldots (x^2 + p_kx + q_k)^{s_k - 1}, \tag{6}$$

$$Q_2(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_l)(x^2 + p_1x + q_1) \ldots (x^2 + p_kx + q_k). \tag{7}$$

Очевидно, что $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

Из курса алгебры известно, что многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $Q(x)$ и $Q'(x)$ и поэтому может быть найден, например, с

[1] М.В. Остроградский (1801-1861) — русский математик

помощью алгоритма Евклида, без знания разложения (1). Найдя многочлен $Q_1(x)$, мы можем определить многочлен $Q_2(x)$, используя равенство $Q(x) = Q_1(x)Q_2(x)$.

Теорема 1. ***(Теорема Остроградского).*** *Пусть* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная функция. Тогда справедливо равенство*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx, \tag{8}$$

где многочлены $Q(x), Q_1(x), Q_2(x)$ *определены равенствами (2), (6), (7) соответственно,* $\dfrac{P_1}{Q_1}$ *и* $\dfrac{P_2}{Q_2}$ *— правильные рациональные функции.*

▲ Так как всякая правильная рациональная функция есть сумма конечного числа функций вида (5), то формулу (8) достаточно проверить для функций данного вида. Поскольку

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^j}dx = A\frac{(x-x_0)^{1-j}}{1-j} + C, \qquad (j > 1),$$

то для первой из дробей (5) равенство (8) верно.

Из равенства $Mx + N = B(2x+p) + D$ $(B = \dfrac{M}{2},\ D = N - p\ \dfrac{M}{2})$ вытекают соотношения

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^j} = B\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^j}dx + D\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^j} =$$
$$= B\frac{(x^2+px+q)^{1-j}}{1-j} + D\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^j} \qquad (j>1).$$

Таким образом, формулу (8) достаточно установить для функции $(x^2+px+q)^{-j}$, интеграл от которой с помощью замены переменной $x + \dfrac{p}{2} = t$ сводится к интегралу от функции $(t^2+a^2)^{-j}$ с $a = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Следовательно, (см. п. 19.3, формула (19.18))

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^j} = I_j\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

Требуемое утверждение вытекает теперь из установленных в п. 19.3 результатов. ▲

Равенство (8) эквивалентно соотношению

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \tag{9}$$

называемому формулой Остроградского. Обсудим вопрос о нахождении числителей $P_1(x),\ P_2(x)$. Если $n_1,\ n_2$ — степени многочленов Q_1, Q_2, то $n_1 + n_2 = n,\ n_2 = l + 2k$. Степень многочлена $P_1(x)$ не выше $n_1 - 1$, так что

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^{n_1} D_i x^{i-1}. \tag{10}$$

Дробь $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ можно записать в виде суммы простейших дробей, т.е. в виде

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_l}{x-x_l} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_kx+C_k}{x^2+p_kx+q_k}. \tag{11}$$

Коэффициенты $A_1, \ldots, A_l, B_1, C_1, \ldots, B_k, C_k, D_1, \ldots, D_{n_1}$ находятся на основе равенств (9)-(11). Именно, подставим в (9) вместо дробей $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ их выражения, вычисленные в соответствии с равенствами (10), (11). Приводя дроби к общему знаменателю, получаем для числителей равенство вида

$$P(x) = H(x),$$

где H — многочлен степени $\leqslant n-1$, коэффициенты которого линейным образом выражаются через коэффициенты $A_1, \ldots, D_{n_1}$ из (10), (11). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов $P(x), H(x)$, получаем систему из n линейных уравнений относительно n неизвестных $A_1, \ldots, D_{n_1}$. Так как возможность разложения (10) установлена для любого многочлена P степени $\leqslant n-1$, соответствующая система линейных уравнений должна быть совместной при любых свободных членах. Отсюда вытекает, что система уравнений является определенной, а коэффициенты $A_1, \ldots, D_{n_1}$ существуют и единственны.

3. Первообразная рациональной функции

Интегрирование рациональной функции $R = \dfrac{P}{Q}$ разбивается на три этапа.

1-й этап Выделение целой части рациональной функции путем деления с остатком (см. п. 1). Интеграл от многочлена легко находится, поэтому на последующих этапах дробь $R = \dfrac{P}{Q}$ считается правильной.

2-й этап На данном этапе методом неопределенных коэффициентов находятся дроби $\dfrac{P_1}{Q_1}$, $\dfrac{P_2}{Q_2}$. Здесь $\dfrac{P_1}{Q_1}$, $\dfrac{P_2}{Q_2}$ — дроби, фигурирующие в формуле Остроградского (9), причем дробь $\dfrac{P_2}{Q_2}$ ищется в виде (11).

3-й этап Из равенств (8), (11) получаем

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \sum_{i=1}^{l} A_i \int \frac{dx}{x-x_i} + \sum_{i=1}^{k} \int \frac{B_ix+C_i}{x^2+p_ix+q_i}dx.$$

Таким образом, интегрирование произвольной рациональной функции сводится к интегрированию многочленов и функции вида (5) при $j=1$. Эти задачи рассматривались в п. 19.3. Нами доказана

Теорема 2. *Первообразная любой рациональной функции* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *выражается через рациональные функции, а также трансцендентные функции* ln *и* arctg. *Знаменатель рациональной части интеграла совпадает с многочленом* Q_1, *равным наибольшему общему делителю многочленов* Q *и* Q'.

Разумеется, в конкретных случаях схема упрощается, некоторые этапы оказываются лишними. Пусть, например, $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь, все корни многочлена Q действительны и различны, так что $Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Положим

$$L_1(x) := (x-x_2)\dots(x-x_n), \dots, L_n(x) := (x-x_1)\dots(x-x_{n-1}),$$

так что $Q(x) = (x-x_i)L_i(x)$ $(i = 1, \dots, n)$. Как нетрудно видеть, $L_1(x), \dots, L_n(x)$ — многочлены степени $n-1$, $L_i(x_i) \neq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ и

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{L_i(x_i)} L_i(x) \tag{12}$$

для любого многочлена $P(x)$ степени $\leqslant n-1$. Из равенства (12) вытекает следующее представление

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{L_i(x_i)} \frac{1}{x-x_i}. \tag{13}$$

Для читателей, знакомых с комплексными числами, нелишне заметить, что формула (13) верна и в случае комплексных и различных корней $x_1, \dots, x_n$.

Пример 1. Вычислим интеграл

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$$

В данном случае $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $P(x) = x^2$, $L_1(x) = (x-2)(x-3)$, $L_2(x) = (x-1)(x-3)$, $L_3(x) = (x-1)(x-2)$,

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-3}.$$

Поэтому

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 2\ln|x-1| - \ln|x-2| + 2\ln|x-3| + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

В этом примере $P(x) = 1$, $Q(x) = (x^2+1)^2$, многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней. Формула Остроградского (9) приводит к равенству

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{k_1x+k_2}{x^2+1}\right)' + \frac{k_3x+k_4}{x^2+1}.$$

Выполним дифференцирование и приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{k_1(1+x^2) - 2x(k_1x+k_2) + (k_3x+k_4)(1+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Числители этих дробей совпадают, следовательно,

$$1 = k_3x^3 + (k_4 - k_1)x^2 + (k_3 - 2k_2)x + k_1 + k_4.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему

$$k_1 + k_4 = 1,\ k_3 - k_2 = 0,\ k_4 - k_1 = 0,\ k_3 = 0.$$

Отсюда получаем,

$$k_1 = \frac{1}{2},\ k_4 = \frac{1}{2},\ k_2 = 0,\ k_3 = 0.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Для вычисления этого интеграла можно, разумеется, использовать рекуррентную формулу (19.17).

§21. Интегрирование трансцендентных и иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int \mathbf{R}(\mathbf{cosx}, \sin \boldsymbol{x})\mathbf{dx}$

Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция от переменных u, v, т.е. отношение $\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ многочленов, являющихся суммами одночленов cu^mv^n, где $c \in \mathbb{R}$, $m = 0, 1, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots$. Для вычисления интегралов указанного вида используют подстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, называемую универсальной. Она позволяет свести интегрирование функции $R(\cos x, \sin x)$ к вычислению интеграла от некоторой рациональной функции одного переменного (такого рода подстановки называют рационализирующими). При этом используются равенства

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = 2\frac{dt}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)dt.$$

Таким образом, все сводится к интегрированию рациональной функции $R_1(t)$. Если $\Phi(t)$ — первообразная функции $R_1(t)$, то

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \Phi\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Если функция $R(u,v)$ нечетна по $u(v)$, то следует применить подстановку $t=\sin x\ \ (t=\cos\ x)$.

Пример 2.

$$\int \sin^2 x\cos^3 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\cos x dx = \int t^2(1-t^2)dt =$$
$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Интегралы вида $\int R_1(\operatorname{tg}\ x)dx$ (R_1 — рациональная функция одного переменного) находятся с помощью подстановки $t=\operatorname{tg}\ x$. Тогда $x=\operatorname{arctg}\ t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$ и

$$\int R_1(\operatorname{tg}\ x)dx = \int \frac{R_1(t)}{1+t^2}\,dt = \Phi_1(\operatorname{tg}\ x)+C.$$

Пример 3.

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2}dt = \int \left(t-\frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)+C.$$

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что подстановка $t=\operatorname{tg}\ x$ используется в случае, когда функция R четна по совокупности переменных.

2. Интегралы вида $\int \mathbf{R(e^x)dx}$

Пусть $R(u)$ — рациональная функция одного переменного u. Интегралы от функции $R(e^x)$ вычисляются с помощью замены переменной $t=e^x$. Тогда $x=\ln t$, $dx=\dfrac{dt}{t}$ и

$$\int R(e^x)dx = \int \frac{R(t)}{t}dt = \Phi(t)+C=\Phi(e^x)+C,$$

где Φ — первообразная функции $\dfrac{R(t)}{t}$. Поскольку

$$\operatorname{ch}\ x := \frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{sh}\ x := \frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

то интегралы от функции вида $R(\operatorname{ch}\ x, \operatorname{sh}\ x)$ (R — рациональная функция двух переменных) также вычисляется заменой переменной $t=e^x$. При этом

$$\int R(\operatorname{ch}\ x, \operatorname{sh}\ x)\ dx = \int R\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right), \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)\frac{1}{t}\ dt = \Phi(t)+C=\Phi(e^x)+C.$$

3. Интеграл от квазимногочлена

Квазимногочленом называют функцию вида $e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — обычные многочлены, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$. При $\alpha=\beta=0$ квазимногочлен совпадает с многочленом $P(x)$. Рассмотрим вопрос об интегрировании квазимногочлена в случае $\alpha^2+\beta^2>0$. Оказывается, верно равенство

$$\int e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)dx = e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)+C, \qquad (1)$$

где A, B — многочлены, степени которых равны наибольшей из степеней многочленов $P(x), Q(x)$. Для отыскания многочленов $A(x), B(x)$ следует воспользоваться вытекающим из (1) равенством

$$(e^{\alpha x}(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x))' = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x). \tag{2}$$

Приравнивая выражение при $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$ в левой и правой частях (2), получим некоторую систему линейных уравнений относительно многочленов $A(x)$, $B(x)$. Возникающая система уравнений является определенной, т.е. имеющей единственное решение.

Уточним и докажем соответствующий результат. Вычисляя производную в левой части (2), приходим к равенству

$$\begin{aligned}&\alpha e^{\alpha x}A(x)\cos\beta x + e^{\alpha x}A'(x)\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x + \alpha e^{\alpha x}B(x)\sin\beta x +\\ &+e^{\alpha x}B'(x)\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}B(x)\cos\beta x = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x).\end{aligned}$$

Это равенство будет выполнено, если многочлены $A(x), B(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{array}{l} A'(x) + \alpha A(x) + \beta B(x) = P(x),\\ B'(x) - \beta A(x) + \alpha B(x) = Q(x).\end{array} \tag{3}$$

Пусть $P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n,\ Q(x) = q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n,$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\ B(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

Приравнивая коэффициенты при $x^n, \ldots, x^k, \ldots, 1$ в соотношениях (3), получаем системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha\, a_n & + & \beta\, b_n & = & p_n,\\ -\beta\, a_n & + & \alpha\, b_n & = & q_n;\end{array}\right. \tag{4}$$

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcl} (k+1)\, a_{k+1} & + & \alpha\, a_k & + & \beta\, b_k & = & p_k\\ (k+1)\, b_{k+1} & - & \beta\, a_k & + & \alpha\, b_k & = & q_k\end{array}\right. \qquad (k = n-1, \ldots, 1, 0). \tag{5}$$

Поскольку $\alpha^2+\beta^2 > 0$, то из системы (4) однозначно определяются коэффициенты a_n, b_n. Далее, применяя (5), последовательно находим пары a_{n-1}, $b_{n-1}, \ldots,$ a_1, b_1, a_0, b_0. Тем самым, равенство (1) обосновано.

Обозначим через $\mathcal{K}$ совокупность функций, представимых в виде суммы конечного числа квазимногочленов. Отметим, что сумма (разность, произведение) двух функций класса $\mathcal{K}$ снова принадлежит тому же классу. В частности, классу $\mathcal{K}$ принадлежат произведения $\cos mx\cos x,\ \cos mx\sin x,\ \sin mx\sin x$. Класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно операций дифференцирования и интегрирования: если $f \in \mathcal{K}$, то производная и первообразная функции f входят в тот же класс.

К интегрированию квазимногочленов сводятся интегралы вида

$$\int x^k \ln^m x dx,$$

где $k \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}$. Подстановка $\ln x = t,\ x = e^t,\ dx = e^t dt$ приводит к следующему интегралу

$$\int x^k \ln^m x dx = \int e^{kt} t^m e^t dt = \int e^{(k+1)t} t^m dt$$

от квазимногочлена $e^{(k+1)t}t^m$. Для вычисления интегралов от квазимногочленов иногда применяют и метод интегрирования по частям.

4. Интегралы вида $\int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \sqrt[n]{\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}}\right)\mathbf{dx}$

Как и в п. 1, $R(u,v)$ — рациональная функция переменных u, v. Ниже n — натуральное число; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$. Рационализирующая подстановка имеет вид

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$$

Тогда

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n, \;\; ax+b = (cx+d)t^n, \;\; x = \rho(t) := \frac{dt^n - b}{a - ct^n}, \;\; dx = \rho'(t)dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R(\rho(t), t)\rho'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) + C;$$

здесь $\Phi(t)$ — первообразная рациональной функции $R(\rho(t), t)\rho'(t)$.

Иногда рассматриваются интегралы несколько более общего вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_1/l_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{k_s/l_s}\right)dx,$$

где $R(u, v_1, \ldots, v_s)$ — рациональная функция переменных $u, v_1, \ldots, v_s$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $l_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Этот интеграл сводится к интегралу вида

$$\int R_1\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$

где натуральное число n делится на каждое из чисел l_i $(i = 1, \ldots, s)$, $R_1(u,v)$ — рациональная функция двух переменных. Например, для вычисления интеграла

$$\int \frac{1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x^2} - x}dx$$

целесообразна подстановка $x = t^6$, рационализирующая данный интеграл.

5. Интеграл от биномиального дифференциала

Биномиальным дифференциалом называют выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$. Для его интегрирования используют подстановку $x^n = t$. Полагая $q := \dfrac{m+1}{n}$ и используя равенства

$$x = t^{1/n}, \; dx = \frac{1}{n}t^{1/n-1}dt,$$

имеем

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int (a+bt)^p t^q dt. \tag{6}$$

Предположим, что p, q — рациональные числа. Если одно из чисел $p, q, p+q$ целое, то интеграл в правой части (6) находится с помощью метода, изложенного в п. 4.

Пусть, к примеру, $p \in \mathbb{Z},\ q = \dfrac{r}{s}$ $(r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N})$. Тогда интеграл (6) подстановкой $t = v^s$ сводится к интегралу от рациональной функции:

$$\int (a+bt)^p t^{r/s} dt = \int (a+bv^s)^p v^r s v^{s-1} dv.$$

Если $q \in \mathbb{Z}$ и $p = \dfrac{r}{s}$ $(r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{N})$, то рационализация интеграла достигается с помощью подстановки $a + bt = v^s$. Наконец, если $p+q$ — целое число, то

$$\int (a+bt)^p t^q dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt;$$

интеграл в правой части относится к изученным в п. 4.

Как показано П.Л. Чебышевым[2], только в отмеченных трех случаях $\int (a+bt)^p t^q dt$ выражается через элементарные функции.

6. Интегрирование квадратичных иррациональностей

В этом пункте рассматривается интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{7}$$

где $R(u,v)$ — рациональная функция переменных u, v; $a \neq 0$, многочлен $ax^2+bx+c > 0$ для x из некоторого промежутка X положительной длины. В случае $a > 0$ полагают

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t. \tag{8}$$

Из этого уравнения вытекает равенство

$$x = \rho(t) := \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}t},\ dx = \rho'(t)dt,\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \rho(t)\sqrt{a} + t.$$

Следовательно,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R_1(t)dt,$$

где

$$R_1(t) := R(\rho(t), \rho(t)\sqrt{a} + t)\rho'(t)$$

— рациональная функция от t.

Если $a < 0$, то многочлен ax^2+bx+c отрицателен на больших по модулю x, поэтому он имеет действительные и различные корни x_1, x_2. Следовательно, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Положим

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1). \tag{9}$$

Отсюда

$$x = \rho_1(t) := \frac{ax_2 - x_1t^2}{a - t^2},\ \sqrt{ax^2+bx+c} = \rho_2(t) := \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2},\ dx = \rho_2'(t)dt.$$

Следовательно,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R_2(t)dt,$$

---

[2] П.Л. Чебышев (1821-1894) — русский математик и механик

где

$$R_2(t) := R(\rho_1(t), \rho_2(t))\rho_2'(t) \text{ —}$$

рациональная функция от t.

Подстановки (8), (9) называют подстановками Эйлера. Наряду с ними для интегрирования квадратичных иррациональностей используют подстановки, преобразующие рассматриваемые интегралы к интегралам от трансцендентных функций. Например, для вычисления интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx, \ \int R(x, \sqrt{x^2-1})dx, \ \int R(x, \sqrt{1-x^2})dx \tag{10}$$

применяют подстановки $x = \operatorname{sh} t,\ x = \operatorname{ch} t,\ x = \cos t$, приводящие интегралы (10) к виду

$$\int R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)dt, \ \int R(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)dt, \ -\int R(\cos t, \sin t)dt.$$

В математике важную роль играют интегралы вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где $P(x)$ — многочлен степени $n > 2$. Такие интегралы, как показано Абелем[3] и Лиувиллем[4], вообще говоря, уже не выражаются через элементарные функции.

§22. Определение и свойства интеграла Римана

1. Верхний и нижний интегралы

Разбиением отрезка $[a, b]$ $(a < b)$ называют набор $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, где $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$. Отрезки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{N-1}, x_N]$ называют частичными отрезками разбиения T. Максимальную из длин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, N)$ этих отрезков обозначают $\lambda(T)$ и именуют диаметром разбиения T. Разбиение T' называют продолжением (измельчением) разбиения T, если каждая точка разбиения T содержится среди точек разбиения T', в этом случае пишут $T \prec T'$. Разбиение $T_1 \cup T_2$, определенное точками, входящими в каждое из разбиений T_1 и T_2, называют объединением этих разбиений. Ясно, что $T_1 \prec T_1 \cup T_2,\ T_2 \prec T_1 \cup T_2$.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Положим

$$M := \sup_{[a,b]} f(x), \ m := \inf_{[a,b]} f(x).$$

Сопоставим разбиению $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ отрезка $[a, b]$ числа

$$M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \ m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \tag{1}$$

$$\overline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i, \ \underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i. \tag{2}$$

---

[3] Н. Абель (1802-1829) — норвежский математик

[4] Ж. Лиувилль (1809-1882) — французский математик

Числа $\overline{S}_T(f)$, $\underline{S}_T(f)$ называют верхней (нижней) суммой Дарбу.

Остановимся на геометрической интерпретации сумм Дарбу для неотрицательной функции f. Рассмотрим фигуру E_f на плоскости Oxy, ограниченную отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $y = f(x)$, т.е.

$$E_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Такую фигуру называют криволинейной трапецией, а отрезок $[a, b]$ ее основанием (см. рис. 1).

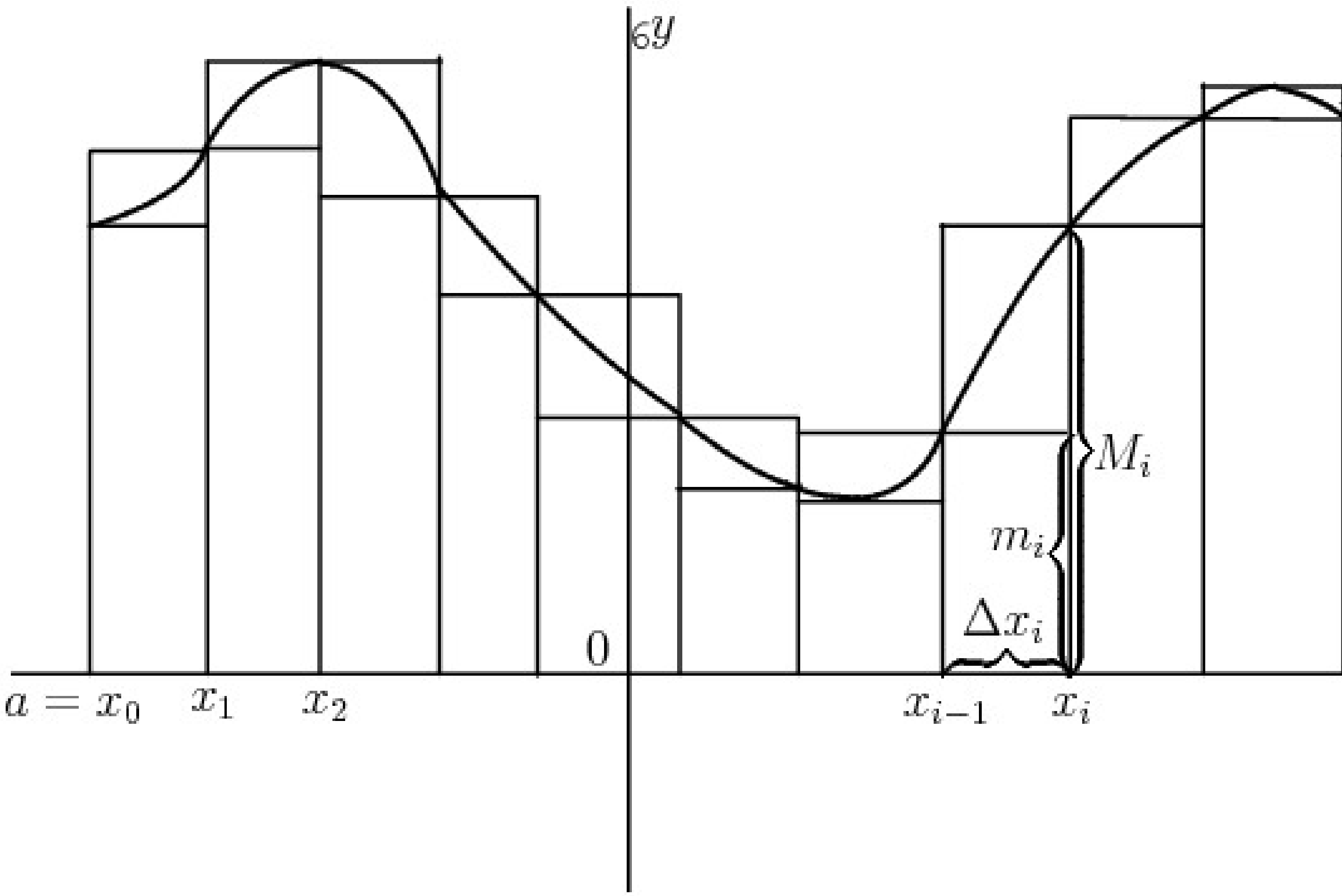

Рис. 1.

Пусть $T = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, числа M_i, m_i $(i = 1, \dots, N)$ определены равенствами (1). Введем в рассмотрение множества

$$A_i := [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i],\ B_i := [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i],$$
$$E_i := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Как нетрудно видеть, $A_i \subset E_i \subset B_i$, A_i и B_i — прямоугольники, основаниями которых являются отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \dots, N)$. Площади прямоугольников A_i, B_i равны $m_i \Delta x_i$ и $M_i \Delta x_i$ соответственно. Числа $\underline{S}_T(f)$, $\overline{S}_T(f)$ совпадают с площадями фигур A, B, определяемых равенствами

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i.$$

Фигуры A, B являются объединениями прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат; при этом $A \subset E_f \subset B$.

Возвращаясь к случаю произвольной ограниченной функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, заметим, что всегда выполнены неравенства

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_T(f) \leqslant M(b-a). \tag{3}$$

Так как $\underline{S}_T(f) = -\overline{S}_T(-f)$, то достаточно изучить свойства верхних сумм Дарбу. Исследуем зависимость $\overline{S}_T(f)$ от разбиения T.

Лемма 1. *Пусть разбиение T' получается из разбиения T добавлением p новых точек деления. Тогда*

$$\overline{S}_T(f) - p(M-m)\lambda(T) \leqslant \overline{S}_{T'}(f) \leqslant \overline{S}_T(f). \tag{4}$$

▲ Достаточно рассмотреть случай $p = 1$. Пусть T' получается из разбиения T путем добавления точки z из (x_{i-1}, x_i). Положим

$$M_i' := \sup_{[x_{i-1},z]} f(x),\ M_i'' := \sup_{[z,x_i]} f(x).$$

Как нетрудно видеть,

$$\overline{S}_T(f) - \overline{S}_{T'}(f) = M_i \Delta x_i - M_i'(z - x_{i-1}) - M_i''(x_i - z).$$

Оценки (4) следуют из неравенств

$$M_i \geqslant M_i' \geqslant m,\ M_i \geqslant M_i'' \geqslant m.▲$$

В силу неравенства (3) совокупность верхних (нижних) сумм Дарбу есть ограниченное числовое множество. Числа

$$I^*(f) := \inf_T \overline{S}_T(f),\ I_*(f) := \sup_T \underline{S}_T(f)$$

называют верхним (нижним) интегралом функции f. Как отмечалось выше, $\underline{S}_T(f) = -\overline{S}_T(-f)$. Это влечет за собой равенство

$$I_*(f) = -I^*(-f). \tag{5}$$

Отметим равенство

$$I^*(f) = \inf_{T_0 \prec T} \overline{S}_T(f), \tag{6}$$

т.е. можно ограничиться разбиениями T, содержащими фиксированное разбиение T_0. Действительно,

$$\inf_{T_0 \prec T} \overline{S}_T(f) \geqslant \inf_T \overline{S}_T(f)$$

(inf по более узкому множеству $\geqslant$ inf по более широкому множеству). В то же время для любого разбиения T согласно лемме 1

$$\overline{S}_{T \cup T_0}(f) \leqslant \overline{S}_T(f).$$

Два последних неравенства и приводят к формуле (6).

2. Свойства верхнего и нижнего интегралов

Лемма 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что*

$$|\overline{S}_T(f) - I^*(f)| < \varepsilon, \text{ если } \lambda(T) < \delta;$$

краткая запись

$$I^*(f) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \overline{S}_T(f).$$

▲ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберем такое разбиение T_0 отрезка $[a,b]$, что $\overline{S}_{T_0}(f) < I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть p — число точек из (a,b), входящих в разбиение T_0; T — такое разбиение отрезка $[a,b]$, что $\lambda(T)p(M-m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Справедливы оценки

$$\overline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_{T_0\cup T}(f) + p(M-m)\lambda(T) < \overline{S}_{T_0\cup T}(f) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{S}_{T_0}(f) + \frac{\varepsilon}{2} < I^*(f) + \varepsilon.$$

Действительно, первая из оценок следует из (4), вторая — из неравенства $\lambda(T)p(M-m) < \frac{\varepsilon}{2}$, третья — из (4), последняя оценка верна в силу выбора разбиения T_0. Очевидно, что $\overline{S}_T(f) \geqslant I^*(f)$. Итак, если

$$\lambda(T) < \delta := \frac{\varepsilon}{2p(M-m)},$$

то $|\overline{S}_T(f) - I^*(f)| < \varepsilon$. ▲

Лемма 3. *Если* T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *последовательность разбиений отрезка* $[a,b]$ *и* $\lambda(T_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $\overline{S}_{T_n}(f) \to I^*(f)$.

▲ Лемма 3 — это переформулировка леммы 2 на языке последовательностей. ▲

Ниже f, g — ограниченные на $[a,b]$ функции, $\lambda \geqslant 0$, $a < c < b$. Отметим следующие свойства верхнего интеграла

1° $I^*(f+g) \leqslant I^*(f) + I^*(g)$ (неравенство треугольника);

2° $I^*(\lambda f) = \lambda I^*(f)$ (положительная однородность);

3° Если $f(x) \leqslant g(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, то $I^*(f) \leqslant I^*(g)$ (монотонность);

4° Если $I_1^*(f)$, $I_2^*(f)$ — верхние интегралы от сужений функции f на отрезки $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно, то $I^*(f) = I_1^*(f) + I_2^*(f)$ (аддитивность).

5° $I^*(k) = k(b-a)$ для любой константы k (нормировка). ▲

Для доказательства 1° заметим, что

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} [f(x) + g(x)] \leqslant \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{[x_{i-1},x_i]} g(x),$$

поэтому $\overline{S}_T(f+g) \leqslant \overline{S}_T(f) + \overline{S}_T(g)$ для любого разбиения T отрезка $[a,b]$. Устремляя диаметр $\lambda(T)$ разбиения T к 0, в пределе получаем свойство 1°.

Свойства 2°, 3°, 5° очевидны. Для доказательства свойства 4° заметим, что для содержащих точку c разбиений T имеем $\overline{S}_T(f) = \overline{S}_{T_1}(f) + \overline{S}_{T_2}(f)$, где T_1, T_2

— соответствующие T разбиения отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Устремляя диаметры $\lambda(T_1),\ \lambda(T_2)$ разбиений $T_1,\ T_2$ к 0, в пределе приходим к 4°. ▲

Замечание. Пусть $a<b,\ a\leqslant x\leqslant b$ и

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально,}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

$g(x)=1-f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Тогда $I^*(f)=I^*(g)=I^*(f+g)=b-a$, в частности, $I^*(f+g)<I^*(f)+I^*(g)$.

Свойства нижнего интеграла выводятся из равенства (5) и свойств верхнего интеграла. Свойства $2^\circ-5^\circ$ сохраняются без изменения формулировок. Подробнее остановимся на свойстве 1°. Имеем последовательно

$$I_*(f+g)=-I^*(-f-g)\geqslant-(I^*(-f)+I^*(-g))=$$
$$=-I^*(-f)-I^*(-g)=I_*(f)+I_*(g).$$

Таким образом, $I_*(f+g)\geqslant I_*(f)+I_*(g)$ (обратное неравенство треугольников). Далее

$$I^*(f)-I_*(f)=I^*(f)+I^*(-f)\geqslant I^*(0)=0,$$

т.е. $I_*(f)\leqslant I^*(f)$ — нижний интеграл не превосходит верхнего интеграла.

Из леммы 3 вытекает

Лемма 4. *Если T_n $(n=1,2,\ldots)$ — последовательность разбиений отрезка $[a,b]$ и $\lambda(T_n)\to 0$, то $\underline{S}_{T_n}(f)\to I_*(f)$.*

3. Определение интеграла Римана

Ограниченную функцию $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ называют интегрируемой по Риману, если $I^*(f)=I_*(f)$ (верхний интеграл совпадает с нижним). Общее значение $I^*(f),\ I_*(f)$ называют интегралом Римана функции f по отрезку $[a,b]$ и обозначают

$$I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Например, постоянная функция $f(x)=k$ интегрируема и

$$\int\limits_a^b kdx=k(b-a);$$

свойство нормировки интеграла Римана. Если $f(x)=1_Q(x)$ — функция Дирихле, то $I^*(f)=b-a>I_*(f)=0$. Класс интегрирумых по Риману функций $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ обозначают символом $\mathcal{R}[a,b]$. Интегрируемость ограниченной функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ эквивалентна равенству $I^*(f)+I^*(-f)=0$, в котором фигурирует лишь верхний интеграл.

Теорема 1. ***(Критерий Римана).*** *Ограниченная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение T отрезка $[a,b]$, что*

$$\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon. \tag{7}$$

▲ **Необходимость.** Пусть $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $I(f)$ — интеграл Римана функции f по отрезку $[a,b]$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем разбиения T_1, T_2 отрезка $[a,b]$, для которых

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}_{\,T_1}(f),\ \overline{S}_{\,T_2}(f) < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $T = T_1 \cup T_2$, то

$$\underline{S}_{\,T_1}(f) \leqslant \underline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_T(f) \leqslant \overline{S}_{\,T_2}(f).$$

Отсюда следует, что $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$.

Достаточность. Из (7) следует, что $I^*(f) < \underline{S}_T(f)+\varepsilon$, поэтому $I^*(f)-I_*(f) < \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $I^*(f) = I_*(f)$, т.е. $f \in \mathcal{R}[a,b]$. ▲

Замечание 1. Если $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, то

$$\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^{N}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N}\omega_i(f)\Delta x_i,$$

где $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $\omega_i(f) = M_i - m_i = \sup\{|f(x') - f(x'')|,$ $x',\ x'' \in [x_{i-1}, x_i]\}$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N$.

Поэтому неравенство (7) равносильно оценке

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon. \tag{8}$$

Замечание 2. Ограниченная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману в том и только в том случае, если для каждой последовательности T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ разбиений отрезка $[a,b]$, такой, что $\lambda(T_n) \to 0$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{T_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{T_n}(f);$$

общие значения этих пределов совпадает с $I(f)$.

▲ Для доказательства достаточно сослаться на леммы 3, 4. ▲

4. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций

Теорема 2. *Каждая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема по Риману ($C([a,b]) \subset \mathcal{R}[a,b]$).*

▲ В силу теорем Вейерштрасса и Кантора непрерывная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена и равномерно непрерывна. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta > 0$, что из условий $a \leqslant x'$, $x'' \leqslant b$, $|x'-x''| < \delta$ следует, что $|f(x')-f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Если

$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ — такое разбиение отрезка $[a, b]$, что $\lambda(T) < \delta$, то колебания $\omega_i(f)$ функции f на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$ меньше $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \varepsilon,$$

т.е. выполнено (8), поэтому $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ▲

Теорема 3. *Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема.*

▲ Пусть (для определенности) функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ возрастает. Если $T = \{x_0,\ x_1, \ldots, x_N\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$, то колебание $\omega_i(f)$ функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ равно $f(x_i) - f(x_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, N)$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(T) \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \lambda(T)(f(b) - f(a)). \tag{9}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, что $\delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon$. Если $\lambda(T) < \delta$, то оценка (9) влечет за собой оценку (8). Поэтому $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ▲

Далее будет доказано, что интегрируема любая ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция, имеющая конечное или счетное число точек разрыва. Этот и более общие результаты вытекают из критерия Лебега интегрируемости по Риману (см. § 28).

5. Операции над интегрируемыми функциями

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall\ x \in [a, b]$. Пусть функция $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|\ \forall\ y_1, y_2 \in [m, M]. \tag{10}$$

Тогда $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

▲ Пусть $T = \{x_0,\ x_1, \ldots,\ x_N\}$ — разбиение отрезка $[a, b], \omega_i$ и ω_i' — колебания функций f и $\varphi \circ f$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$. Из оценки (10) вытекает неравенство $\omega_i' \leqslant L\omega_i$ $(i = 1, \ldots, N)$. В самом деле, для любых $x',\ x''$ из $[x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$|\varphi(f(x')) - \varphi(f(x''))| \leqslant L|f(x') - f(x'')| \leqslant L\omega_i,$$

а это влечет за собой неравенство $\omega_i' \leqslant L\omega_i$ $(i = 1, \ldots, N)$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i'\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{N} \omega_i\Delta x_i. \tag{11}$$

Так как $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то правая часть (11) может быть сделана (за счет выбора разбиения T) меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Отсюда и следует включение $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$. ▲

Следствие 1. *Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то функции $|f|$, f^2, λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ также интегрируемы по Риману.*

Теорема 5. *Сумма (разность, произведение) двух интегрируемых функций есть интегрируемая функция.*

▲ Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Установим, что $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$. Очевидно, что $f+g$ — ограниченная функция. Имеем далее

$$I^*(f+g) \leqslant I^*(f) + I^*(g) = I_*(f) + I_*(g) \leqslant I_*(f+g) \leqslant I^*(f+g).$$

Так как левая и правая части совпадают, то все неравенства являются равенствами. В частности, $f+g \in \mathcal{R}[a,b]$ и

$$I(f+g) = I(f) + I(g). \tag{12}$$

Поскольку $-g \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f - g = f + (-g) \in \mathcal{R}[a,b]$. Интегрируемость произведения fg следует из равенства

$$f(x)\ g(x) = \frac{1}{4}[(f(x+g(x)))^2 - (f(x) - g(x))^2]. \ ▲$$

Частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ двух функций может быть неинтегрируемой функцией. Например, если $f(x) = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ -1, & \text{если} \quad\quad x = 0, \end{cases}$$

то частное $\dfrac{f}{g}$ — неограниченная функция, а значит, и неинтегрируемая функция. Однако, если частное $\dfrac{f}{g}$ двух интегрируемых на отрезке $[a,b]$ функций определено и ограничено на $[a,b]$, то $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ (что будет доказано в § 28).

Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $-f \in \mathcal{R}[a,b]$, при этом

$$I(-f) = I_*(-f) = -I^*(f) = -I(f).$$

Отсюда и из свойства 2° верхнего интеграла вытекает равенство

$$I(\lambda f) = \lambda I(f) \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) влекут за собой свойство линейности интеграла:

$$I\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k I(f_k); \tag{14}$$

здесь $f_k \in \mathcal{R}[a,b]$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $\qquad (k = 1, \ldots, m)$.

6. Монотонность интеграла

Ранее отмечалась монотонность верхнего и нижнего интегралов. Если $f \leqslant g$, то $I^*(f) \leqslant I^*(g),\ I_*(f) \leqslant I_*(g)$. Разумеется, это свойство сохраняется для интегрируемых по Риману функций.

Лемма 5. *Если $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, то*

$$I(f) \leqslant I(g)$$

(свойство монотонности интеграла Римана).

▲ Достаточно воспользоваться равенствами $I(f) = I^*(f),\ I(g) = I^*(g)$. ▲

Следствие 1. *Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ и $|I(f)| \leqslant I(|f|)$.*

▲ Интегрируемость функции $|f|$ доказывалась ранее. Поскольку

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

то в силу свойства монотонности интеграла Римана

$$-I(|f|) \leqslant I(f) \leqslant I(|f|),$$

что и влечет за собой неравенство $|I(f)| \leqslant I(|f|)$. ▲

Следствие 2. *Пусть $f, g \in \mathcal{R}[a,b],\ m \leqslant f(x) \leqslant M$ и $g(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in [a,b]$. Тогда*

$mI(g) \leqslant I(fg) \leqslant MI(g)$.

▲ Достаточно воспользоваться неравенством $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)\ \forall\, x \in$ $\in [a,b]$, проинтегрировав которое приходим к неравенству $mI(g) \leqslant I(fg) \leqslant M(g)$. ▲

Теорема 6. *Пусть $f \in C([a,b]),\ g \in \mathcal{R}[a,b]$ и $g(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in [a,b]$. Тогда найдется такое число ξ из отрезка $[a,b]$, что*

$$I(fg) = f(\xi) \cdot I(g). \tag{15}$$

▲ Пусть $m := \min\limits_{[a,b]} f(x),\ M := \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall\ x \in [a,b]$ и $f([a,b]) = [m, M]$. Согласно следствию 2

$$mI(g) \leqslant I(fg) \leqslant MI(g).$$

Если $I(g) = 0$, то и $I(fg) = 0$, поэтому (15) верно при любом выборе ξ из отрезка $[a,b]$. Если же $I(g) > 0$, то

$$m \leqslant \frac{I(fg)}{I(g)} \leqslant M,$$

следовательно, $f(\xi) = \dfrac{I(fg)}{I(g)}$для некоторой точки ξ из отрезка $[a, b]$. ▲

Теорему 6 иногда называют первой теоремой о среднем. В качестве функции g в следствии 2 и теореме 6 можно взять, например, $g(x) \equiv 1$. Число

$$\mathcal{A}(f) := \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$$

именуют средним значением функции f класса $\mathcal{R}[a, b]$. В силу теоремы 6 для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f найдется такое число ξ из $[a, b]$, что $\mathcal{A}(f) = f(\xi)$.

7. Аддитивность интеграла

Лемма 6. *Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то сужения функции f на отрезки $[a, c]$, $[c, b]$ $(a < c < b)$ принадлежат классам $\mathcal{R}[a, c]$ и $\mathcal{R}[c, b]$. Обратно, если сужения функции f на $[a, c]$ и $[c, b]$ принадлежат $\mathcal{R}[a, c]$ и $\mathcal{R}[c, b]$, то $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

▲ Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Тогда сужения функций f, $-f$ на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ являются ограниченными функциями, поэтому имеют смысл верхние интегралы $I_1^*(f)$, $I_1^*(-f)$ функций f и $-f$ по отрезку $[a, c]$ и верхние интегралы $I_2^*(f)$, $I_2^*(-f)$ этих функций по отрезку $[c, b]$. В силу аддитивности верхнего интеграла справедливы равенства

$$I^*(f) = I_1^*(f) + I_2^*(f),\ I^*(-f) = I_1^*(-f) + I_2^*(-f).$$

По условию $f \in \mathcal{R}[a, b]$, поэтому $I^*(f) + I^*(-f) = 0$. Следовательно,

$$I_1^*(f) + I_2^*(f) + I_1^*(-f) + I_2^*(-f) = 0, \tag{16}$$

а поскольку $I_1^*(f) + I_1^*(-f) \geqslant 0$, $I_2^*(f) + I_2^*(-f) \geqslant 0$, то (16) влечет за собой равенства $I_1^*(f) + I_1^*(-f) = 0$, $I_2^*(f) + I_2^*(-f) = 0$, означающие, что сужения функции f на отрезки $[a, c]$, $[c, b]$ интегрируемы.

Пусть теперь дано, что сужения функции f на отрезки $[a, c]$, $[c, b]$ интегрируемы. Установим включение $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Действительно, из равенств $I_1^*(f) + I_1(-f) = 0$, $I_2^*(f)+I_2^*(-f) = 0$ вытекает равенство (16), а затем и равенство $I^*(f)+I^*(-f) = 0$, эквивалентное включению $f \in \mathcal{R}[a, b]$. ▲

Следствие 1. *В условиях леммы 6*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \tag{17}$$

(свойство аддитивности интеграла Римана).

▲ Равенство (17) вытекает из аддитивности верхнего интеграла. ▲

Далее принимается следующее соглашение: если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx,$$

при этом предполагается естественно, что $f \in \mathcal{R}[b, a]$. Полагают

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Данные соглашения позволяют усилить следствие 1.

Следствие 2. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$ и пусть f — функция, интегрируемая на наибольшем из отрезков с концами в указанных точках. Тогда сужение f на каждый из двух других отрезков также интегрируемо и имеет место равенство (17).*

▲ Проведем доказательство (17) в случае $a < b < c$. В этом случае $f \in \mathcal{R}[a, c]$ в силу уже доказанного выше

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{18}$$

Поскольку

$$\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx,$$

то из (18) вытекает (17) в рассматриваемом случае. Остальные случаи рассматриваются аналогично. ▲

Пусть каждой упорядоченной паре (α, β) точек α, β отрезка $[a, b]$ поставлено в соответствие число $J(\alpha, \beta)$, причем

$$J(\alpha, \gamma) = J(\alpha, \beta) + J(\beta, \gamma)$$

для любых точек α, β, γ из $[a, b]$. Тогда $J(\alpha, \beta)$ называют аддитивной функцией ориентированного промежутка, определенной на сегменте $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Например, для любой функции f из $\mathcal{R}[a, b]$ интеграл

$$J(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{19}$$

есть аддитивная функция промежутка интегрирования $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

§23. Основные формулы интегрального исчисления

1. Интеграл с переменным верхним пределом

Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, то функцию

$$\Phi(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \tag{1}$$

называют интегралом с переменным верхним пределом. Очевидно, что

$$\Phi(a) = 0,\ \Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = I(f).$$

Теорема 1. *Функция $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| \leqslant L|x' - x''|; \tag{2}$$

здесь $L = \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|,\ x'$ и x'' — любые точки из $[a,b]$.

▲ Если $a \leqslant x' < x'' \leqslant b$, то

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = \int\limits_a^{x''} f(t)dt - \int\limits_a^{x'} f(t)dt = \int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt$$

в силу аддитивности интеграла. Поэтому

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| = \left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \leqslant \int\limits_{x'}^{x''} Ldt = L|x'' - x'|,$$

что и приводит к оценке (2). ▲

Следствие. *Интеграл с переменным верхним пределом есть непрерывная функция.*

Теорема 2. *Если функция f непрерывна в точке x_0 из (a,b), то определяемая равенством (1) функция $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 и $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

▲ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберем $\delta > 0$ так, что $U(x_0,\delta) := (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \subset [a,b]$ и $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall\, x \in U(x_0,\delta)$, т.е.

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon\ \forall\, x \in U(x_0,\delta).$$

Если $x_0 < x < x_0 + \delta$, то

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0).$$

Аналогично, если $x_0 - \delta < x < x_0$, то

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \leqslant (f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0).$$

Объединяя два последних неравенства, приходим к двусторонней оценке

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon, \tag{3}$$

где $x \in U(x_0, \delta)$, $x \neq x_0$. Так как ε — произвольное положительное число, то оценка (3) влечет за собой равенство $\Phi'(x_0) = f(x_0)$. ▲

Следствие 1. *Если $f \in C([a, b])$, то Φ — первообразная функции f.*

Следствие 2. *У любой непрерывной на отрезке функции существует первообразная.*

2. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 3. *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по отрезку $[a, b]$ $(a < b)$ и имеет первообразную $\mathcal{F} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a). \tag{4}$$

▲ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то найдется такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ отрезка $[a, b]$, что

$$\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon; \tag{5}$$

здесь, как и выше, $\overline{S}_T(f)$ ($\underline{S}_T(f)$) — верхняя (нижняя) сумма Дарбу функции f, соответствующая разбиению T (см. § 22).

Отметим, что

$$\underline{S}_T(f) \leqslant I(f) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \leqslant \overline{S}_T(f).$$

В силу формулы конечных приращений

$$\mathcal{F}(x_i) - \mathcal{F}(x_{i-1}) = \mathcal{F}'(c_i)(x_i - x_{i-1})\Delta x_i, \tag{6}$$

где $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, N)$. Суммируя равенства (6) по всем i от 1 до N, получаем

$$\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) = \sum_{i=1}^{N} (\mathcal{F}(x_i) - \mathcal{F}(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i) \Delta x_i.$$

Поскольку $\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \leqslant f(c_i) \leqslant \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, то

$$\underline{S}_T(f) \leqslant \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a) \leqslant \overline{S}_T(f).$$

Таким образом, и левая, и правая части (4) находятся в промежутке $[\underline{S}_T(f), \overline{S}_T(f)]$. В силу (5) отсюда вытекает оценка

$$|I(f) - (\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a))| < \varepsilon.$$

В виду произвольности $\varepsilon > 0$ левая и правая части (4) равны. ▲

Следствие. *Формула (4) справедлива для любой интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции f, непрерывной на интервале (a, b).*

Равенство (4) называют формулой Ньютона-Лейбница и часто записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x) dx = \mathcal{F}(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, $\mathcal{F}(x)\Big|_a^b := \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$.

Эта формула остается справедливой и при $b \leqslant a$.

Пример 1.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 2.

$$\int\limits_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = \int\limits_{-1}^0 \operatorname{sgn} x dx + \int\limits_0^2 \operatorname{sgn} x dx = \int\limits_{-1}^0 (-1) dx + \int\limits_1^2 1 dx = -1 + 1 = 0.$$

Пример 2 интересен тем, что на отрезке $[-1, 2]$ функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не имеет первообразной, поэтому формула Ньютона-Лейбница здесь неприменима, однако с помощью аддитивности интеграл по отрезку $[-1, 2]$ сводится к сумме интегралов по отрезкам $[-1, 0]$ и $[1, 2]$, для вычисления которых уже можно использовать формулу (4). Приведенное замечание носит общий характер, оно применимо к интегрируемым на отрезке $[a, b]$ функциям, имеющим конечное число точек разрыва.

3. Интегрирование по частям и замена переменной

Теорема 4. *Пусть* u, v *— непрерывно дифференцируемые на отрезке* $[a, b]$ *функции. Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx, \tag{7}$$

именуемое правилом интегрирования по частям для интеграла Римана.

▲ По правилу дифференцирования произведения имеем

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проинтегрировав данное равенство по отрезку $[a, b]$, приходим к формуле

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b v(x)u'(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

эквивалентной формуле (7). ▲

Теорема 5. *Пусть 1) функция* $f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[A, B]$;

2) функция φ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *и* $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [A, B]$;

3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$.

Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt, \tag{8}$$

называемое правилом замены переменных для интеграла Римана.

▲ Пусть $\mathcal{F} : [A, B] \to \mathbb{R}$ — первообразная функции $f : [A, B] \to \mathbb{R}$. Тогда функция $\mathcal{F}(\varphi(t))$ есть первообразная функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$. Левая и правая части (8) равны $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$, что и доказывает теорему 5. ▲

Теоремы 4, 5 могут быть расширены за счет применения общих вариантов формулы Ньютона-Лейбница. Например, теорема 4 сохраняется, если u, v дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции, производные которых интегрируемы по отрезку $[a, b]$. В теореме 5 можно за счет усиления предположений относительно функции φ ослабить ограничения на функцию f. Если, например, $\varphi'(t) > 0\ \forall\, t \in [a, b]$, то достаточно предположить, что $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

§24. Приложения интеграла Римана

1. Квадрируемые фигуры

Прямоугольником на плоскости Oxy назовем множество $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, определяемое равенством

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\} = [a, b] \times [c, d],$$

$(a \leqslant b,\ c \leqslant d)$. Объединение конечного числа прямоугольников назовем элементарной фигурой. Как известно, каждой элементарной фигуре E можно приписать ее площадь $S(E)$. Эта характеристика обладает свойствами:

1° $S(E) \geqslant 0$ (неотрицательность площади);

2° Если $E_1 \subset E_2$, то $S(E_1) \leqslant S(E_2)$ (монотонность площади);

3° Если элементарные фигуры $E_1,\ E_2$ не пересекаются, то

$$S(E_1 \cup E_2) = S(E_1) + S(E_2) \tag{1}$$

(аддитивность площади);

4° Если E_2 — сдвиг E_1, то $S(E_1) = S(E_2)$ (инвариантность площади при сдвиге);

5° Площадь квадрата $\square := \{(x, y),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ равна $1:\ S(\square) = 1$ (свойство нормировки).

Свойства могут быть положены в основу аксиоматического определения площади на классе $\sigma(\mathbb{R}^2)$ элементарных плоских фигур.

Класс $\sigma(\mathbb{R}^2)$ замкнут относительно объединения и пересечения. Из свойства аддитивности площади вытекает равенство

$$S(E_1 \cup E_2) = S(E_1) + S(E_2) - S(E_1 \cap E_2), \tag{2}$$

справедливое для любых элементарных фигур $E_1,\ E_2$.

Распространим понятие площади на более широкий класс плоских фигур. Пусть E — ограниченная плоская фигура. Тогда существуют фигуры $A,\ B$ класса $\sigma(\mathbb{R}^2)$ и такие, что $A \subset E \subset B$. Введем в рассмотрение числа

$$S^*(E) = \inf\{S(B) \mid E \subset B,\ B \in \sigma(\mathbb{R}^2)\},$$

$$S_*(E) = \sup\{S(A) \mid A \subset E,\ A \in \sigma(\mathbb{R}^2)\}$$

называемые верхней и нижней площадями фигуры E.

Лемма 1. *Пусть $E_1,\ E_2$ — ограниченные плоские фигуры. Тогда*

1) $S^*(E_1 \cup E_2) \leqslant S^*(E_1) + S^*(E_2)$, $\qquad$ (3)

2) *если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то*

$$S_*(E_1 \cup E_2) \geqslant S_*(E_1) + S_*(E_2). \tag{4}$$

▲ 1) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберем такие элементарные фигуры $B_1,\ B_2$, что $E_1 \subset B_1$, $E_2 \subset B_2$ и $S(B_1) < S^*(E_1) + \varepsilon$, $S(B_2) < S^*(E_2) + \varepsilon$.

Тогда

$$E_1 \cup E_2 \subset B_1 \cup B_2,\quad S(B_1 \cup B_2) \leqslant S(B_1) + S(B_2) < S^*(E_1) + S^*(E_2) + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $S^*(E_1 \cup E_2) < S^*(E_1) + S^*(E_2) + 2\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает (3).

2) Подберем такие элементарные фигуры $A_1,\ A_2$, что

$$A_1 \subset E_1,\ A_2 \subset E_2,\ S(A_1) \geqslant S_*(E_1) - \varepsilon,\ S(A_2) \geqslant S_*(E_2) - \varepsilon.$$

Тогда

$$A_1 \cup A_2 \subset E_1 \cup E_2,\ S(A_1 \cup A_1) = S(A_1) + S(A_2) > S_*(E_1) + S_*(E_2) - 2\varepsilon.$$

Следовательно, $S_*(E_1 \cup E_2) > S_*(E_1) + S_*(E_2) - 2\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство влечет за собой (4). ▲

Определение 1. *Ограниченную плоскую фигуру E называют квадрируемой, если $S^*(E) = S_*(E)$; общее значение верхней и нижней площадей именуют площадью плоской фигуры E и обозначают символом $S(E)$.*

Теорема 1. *Свойства $1^\circ - 5^\circ$ сохраняются при замене класса $\sigma(\mathbb{R}^2)$ классом квадрируемых плоских фигур.*

▲ Проведем доказательство для свойства 3°. Пусть $E_1,\ E_2$ — непересекающиеся квадрируемые плоские фигуры. В силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} S^*(E_1 \cup E_2) \leqslant S^*(E_1) + S^*(E_2) = S(E_1) + S(E_2) = \\ = S_*(E_1) + S_*(E_2) \leqslant S_*(E_1 \cup E_2) \leqslant S^*(E_1 \cup E_2). \end{aligned}$$

Поскольку левая и правая части совпадают, то всюду знак $\leqslant$ можно заменить знаком равенства. Это означает, что объединение квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура и верно равенство (1) (свойство аддитивности площади в классе квадрируемых фигур).

Другие свойства устанавливаются проще. ▲

Лемма 2. ***(Критерий квадрируемости).*** *Ограниченная плоская фигура E квадрируема в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементарные фигуры $A,\ B$, что*

$$A \subset E \subset B,\ S(B) - S(A) < \varepsilon.$$

▲ Лемма 2 вытекает из определения 1. ▲

Лемма 3. *Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие квадрируемые фигуры $E_1,\ E_2$, что $E_1 \subset E \subset E_2$ и $S(E_2) - S(E_1) < \varepsilon$. Тогда E — квадрируемая фигура.*

▲ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Фиксируем квадрируемые фигуры $E_1,\ E_2$ такие, что $E_1 \subset E \subset E_2$ и $S(E_2) < S(E_1) + \varepsilon$. Подберем такие элементарные фигуры A, B, что

$$A \subset E_1,\ E_2 \subset B \text{ и } S(E_1) < S(A) + \varepsilon,\ S(E_2) > S(B) - \varepsilon.$$

Тогда $A \subset E \subset B$ и $S(B) < S(E_2) + \varepsilon < S(E_1) + 2\varepsilon < S(A) + 3\varepsilon$.

Теперь квадрируемость фигуры E следует из леммы 2. ▲

Замечание. Можно доказать, что пересечение квадрируемых фигур $E_1,\ E_2$ есть квадрируемая фигура. Отсюда без труда выводится равенство (2) (более общий вариант свойства аддитивности площади).

2. Площадь криволинейной трапеции

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная функция на отрезке $[a, b]$, $E_f = \{(x, y) \in \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ — соответствующая криволинейная трапеция.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f(x) \geqslant 0$. Тогда криволинейная трапеция E_f есть квадрируемая фигура и ее площадь*

$$S(E_f) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{5}$$

▲ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ отрезка $[a, b]$, что $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$; здесь, как и ранее, $\overline{S}_T(f)$ и $\underline{S}_T(f)$ — верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению T. Таким образом,

$$\overline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i,\ \underline{S}_T(f) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i,$$

где

$$M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),\ m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}\ (i = 1, \ldots, N).$$

Положим (как и в п. 22.1)

$$A_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i],\ B_i = [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]\ (i = 1, \ldots, N),$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i,\ B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i.$$

Тогда A, B — элементарные фигуры, $A \subset E_f \subset B$, $S(A) = \underline{S}_T(f)$, $S(B) = \overline{S}_T(f)$, следовательно, $S(B) - S(A) = \overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$. В силу леммы 2 E_f — квадрируемая фигура.

Ее площадь $S(E_f)$ заключена между $\underline{S}_T(f)$ и $\overline{S}_T(f)$. В тех же пределах находится и интеграл $I(f)$, поэтому $|S(E_f) - I(f)| < \varepsilon$. Это и приводит к формуле (5). ▲

Замечание 1. Если функции $f_1,\ f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ $\forall\ x \in [a, b]$, то фигура

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\}$$

квадрируема и

$$S(E) = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \tag{6}$$

Замечание 2. Если функции $g_1,\ g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы и $g_1(y) \leqslant g_2(y)$ $\forall\ y \in [a, b]$, то фигура

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant y \leqslant b,\ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\}$$

квадрируема и

$$S(E) = \int\limits_a^b [g_2(y) - g_1(y)]dy. \tag{7}$$

Замечание 3. В общем случае площадь $S(E)$ плоской фигуры E находят, разбивая ее на части, к которым применимы формулы (6),(7). При этом используют свойство аддитивности площади.

Пример 1. Пусть дана гипербола $x^2 - y^2 = 1$ и на ней точка $M = (x, y)$ $(x \geqslant 1,$ $y \geqslant 0)$ (см. рис. 2). Найдем площади криволинейных фигур AKM и OAM, где $K = (x, 0)$, $A = (0, 1)$.

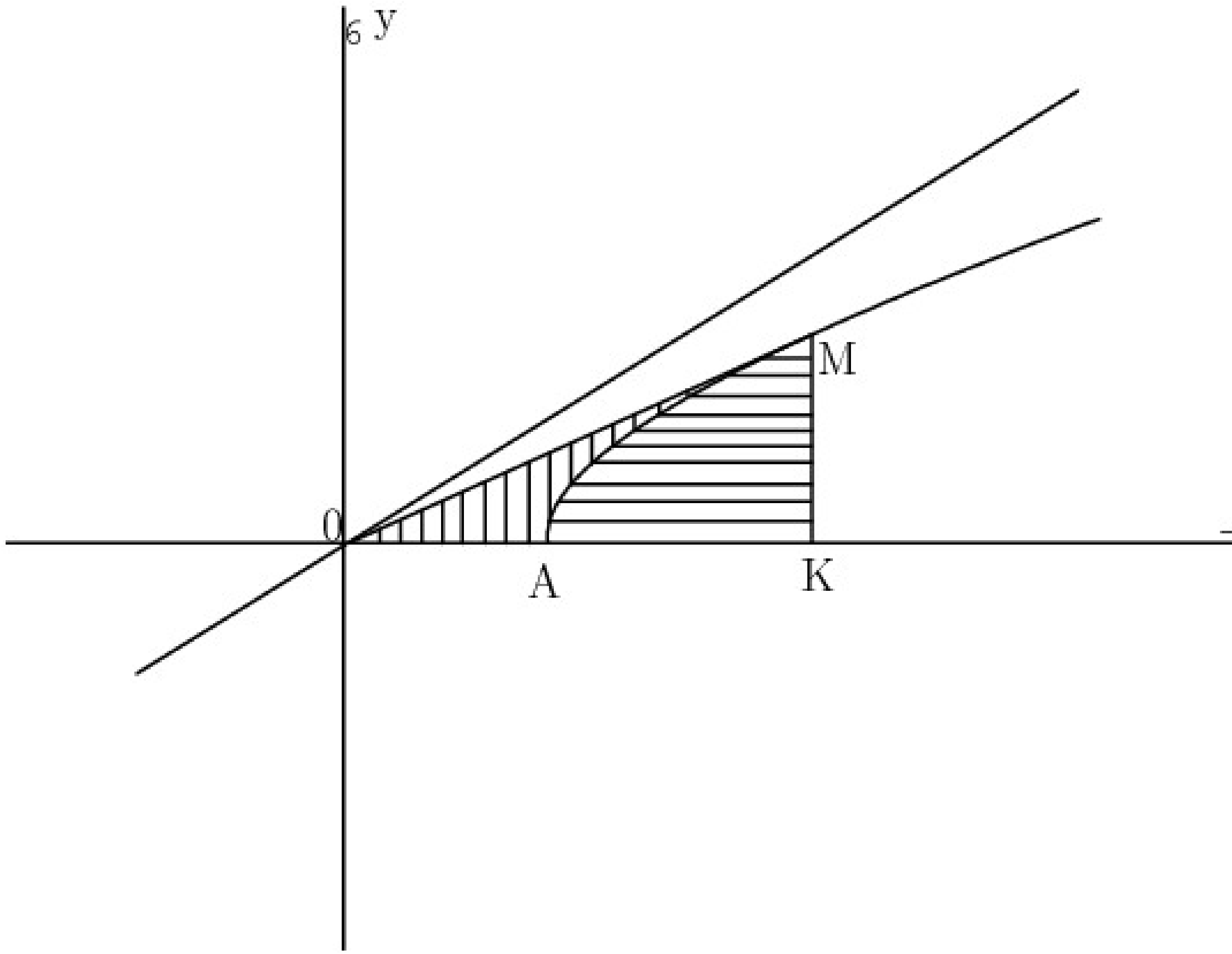

Рис. 2.

Из уравнения гиперболы имеем $y = \sqrt{x^2 - 1}$. В силу формулы (5)

$$S_1 = \text{пл. } AKM = \int\limits_1^x \sqrt{t^2 - 1}dt = \left[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{t^2 - 1})\right]\Bigg|_1^x =$$

$$= \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}\ln(x + y).$$

Отсюда получаем

$$S_2 = \text{пл. } OAM = \frac{1}{2}\ln(x + y).$$

Если координаты точки M суть $x = \operatorname{sh} t,\ y = \operatorname{sh} t$, то $x + y = e^t$ и $t = \ln(x + y)$. Отсюда получаем, что t равно удвоенной площади фигуры OAM. Роль гиперболических функций по отношению к гиперболе $x^2 - y^2 = 1$ вполне аналогична роли тригонометрических функций по отношению к окружности $x^2 + y^2 = 1$.

3. Площадь криволинейного сектора

Для любой точки $M = (x, y)$ плоскости Oxy найдется такая пара чисел (ρ, φ), что

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \geqslant 0.$$

Число ρ совпадает с расстоянием от точки M до начала координат $O = (0, 0)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Если $M \neq 0$, то $\rho > 0$, а число φ определяется однозначно с точностью до кратного 2π. Если не оговаривается противное, будем считать, что φ — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси координат, отсчитываемый против часовой стрелки. Пару (ρ, φ) называют полярными координатами точки $M = (x, y)$.

Пусть на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ $(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi)$ определена неотрицательная функция g. Множество точек

$$H_g = \{(\rho, \varphi) \mid \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant g(\varphi)\}$$

называют криволинейным сектором, порождаемым функцией g. Если $g(\varphi) \equiv R$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, то соответствующий сектор $H_1 = H_g$ является круговым; это квадрируемая фигура и ее площадь $S(H_1) = \dfrac{1}{2}R^2(\beta - \alpha)$. Аналогично, квадрируема фигура

$$H_2 = \{(\rho, \varphi) \mid \alpha < \varphi \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant R\},$$

ее площадь $S(H_2) = \dfrac{1}{2}R^2(\beta - \alpha)$.

Теорема 3. *Пусть $g \in \mathcal{R}[a, b]$, $g(\varphi) \geqslant 0\ \forall\ \varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда криволинейный сектор H_g есть квадрируемая фигура и ее площадь*

$$S(H_g) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi)d\varphi. \tag{8}$$

▲ Пусть $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ — разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$,

$$m_i = \inf_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} g(\varphi),\ M_i = \sup_{[\varphi_{i-1}, \varphi_i]} g(\varphi),\ (i = 1, \ldots, N).$$

Положим

$$A_1 = \{(\rho, \varphi) \mid \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1,\ 0 \leqslant \rho \leqslant m_1\},\ B_1 = \{(\rho, \varphi) \mid \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1,\ 0 \leqslant \rho \leqslant M_1\},$$
$$A_i = \{(\rho, \varphi) \mid \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i,\ 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},\ B_i = \{(\rho, \varphi) \mid \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i,\ 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\}$$
$$(i = 2, \ldots, N),\ A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i,\ B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i.$$

Тогда A, B — квадрируемые фигуры, $A \subset H \subset B$, $S(A) = \underline{S}_T\left(\dfrac{g^2}{2}\right)$, $S(B) = \overline{S}_T\left(\dfrac{g^2}{2}\right)$, где $\overline{S}_T\left(\dfrac{g^2}{2}\right)$, $\underline{S}_T\left(\dfrac{g^2}{2}\right)$ — верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $\dfrac{g^2}{2}$, соответствующие разбиению T.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $g \in \mathcal{R}[a,b]$, то $\dfrac{g^2}{2} \in \mathcal{R}[a,b]$, поэтому найдется такое разбиение T отрезка $[a,b]$, что

$$\overline{S}_T\left(\frac{g^2}{2}\right) - \underline{S}_T\left(\frac{g^2}{2}\right) < \varepsilon.$$

В силу леммы 3 H_g — квадрируемая фигура и

$$\underline{S}_T\left(\frac{g^2}{2}\right) \leqslant S(A) \leqslant S(H_g) \leqslant S(B) \leqslant \overline{S}_T\left(\frac{g^2}{2}\right).$$

Теперь равенство (8) вытекает из произвольности $\varepsilon > 0$. ▲

Пример 2. Пусть $g(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ a > 0)$, кривую $\rho = g(\varphi)$ называют кардиоидой. Площадь соответствующего криволинейного сектора H_g вычисляется по формуле

$$S(H_g) = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos\varphi]^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{3}{4}\cdot 2\pi a^2 = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

4. Физические приложения интеграла

Рассмотрим несколько характерных примеров.

1°. Восстановление пути по известной скорости. Пусть точка M движется по прямой Ox и известна скорость движения $v(t)$ для t из отрезка $[a,b]$. Требуется найти пройденный путь за данный отрезок времени. Если $v(t) \geqslant 0$, то движение происходит в одном и том же направлении, а пройденный путь $S = x(b) - x(a)$ $(a < b)$. Поскольку $x'(t) = v(t)\ \forall\ t \in [a,b]$, то $x(t)$ есть первообразная функции $v(t)$. Если $v \in \mathcal{R}[a,b]$, то согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$s = x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt. \tag{9}$$

Например, формула (9) справедлива для неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции v.

2°. Восстановление заряда по известной силе тока.

Пусть $I(t)$, $q(t)$ — сила тока и количество электричества, протекающего через сечение проводника в момент времени t. Тогда $q(b) - q(a)$ — количество электричества, протекающего через указанное сечение за промежуток времени $[a,b]$. Как известно, $q'(t) = I(t)$, поэтому $q(t)$ есть первообразная функции $I(t)$. Если $I \in \mathcal{R}[a,b]$, то в силу формулы Ньютона-Лейбница

$$q(b) - q(a) = \int_a^b I(t)dt. \tag{10}$$

Равенство (10) позволяет по известной силе тока определить соответствующее количество электричества. Оно справедливо, например, для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции I.

3°. Масса и плотность вещества.

Пусть задан материальный стержень, поперечные размеры которого настолько малы по сравнению с продольными, что стержень можно отождествить с отрезком $[0, l]$ длины l. Обозначим через $m(x)$ массу части стержня $[0, x]$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$. При непрерывном распределении масс функция $m : [0, l] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Если функция m дифференцируема в некоторой точке x_0, то производную $m'(x_0)$ называют плотностью вещества в точке x_0 и обозначают символом $\rho(x_0)$. Таким образом, $\rho(x_0) = m'(x_0)$.

Формула Ньютона-Лейбница позволяет восстановить массу стержня при известной плотности $\rho(x)$. Действительно, пусть $\rho(x)$ определена на $[a, b]$ и интегрируема по отрезку $[a, b]$. Тогда масса m всего стержня связана с плотностью распределения вещества равенством

$$m = \int\limits_0^l \rho(x)dx.$$

Количество таких примеров можно увеличить. Иногда физические величины определены как интегралы. Например, центр массы стержня, распределенной на отрезке $[0, l]$ с плотностью $\rho(x)$, определяют равенством

$$x_c := \frac{1}{m}\int\limits_0^l x\rho(x)dx.$$

5. Аддитивные функции и интегралы

При весьма необременительных предположениях аддитивная функция $J(\alpha, \beta)$ (см. п. 22.7), определенная на сегменте $[\alpha, \beta]$, допускает интегральное представление (22.19).

Теорема 4. *Пусть $J(\alpha, \beta)$ — аддитивная функция, определенная на сегментах $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Пусть существует такая функция f класса $\mathcal{R}[a, b]$, что*

$$\inf_{[\alpha,\beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leqslant J(\alpha, \beta) \leqslant \sup_{[\alpha,\beta]} f(x)(\beta - \alpha), \tag{11}$$

где $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ — произвольный отрезок, принадлежащий отрезку $[a, b]$ $(a < b)$.

Тогда

$$J(a, b) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{12}$$

▲ Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$,

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x),\ M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)\ (i = 1, \ldots, N).$$

В силу условия (11) $m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant J(x_{i-1}, x_i) \leqslant M_i(x_i - x_{i-1})$ $(i = 1, \ldots, N)$. Суммируя подобные неравенства и используя аддитивность функции J, получаем

$\underline{S}_T(f) \leqslant J(a,b) \leqslant \overline{S}_T(f)$, где $\underline{S}_T(f)$, $\overline{S}_T(f)$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению T. Число, расположенное между любой нижней и любой верхней суммами Дарбу функции f, единственно и совпадает с интегралом $I(f)$ функции f по отрезку $[a,b]$. Это и доказывает равенство (12). ▲

Аддитивные функции промежутков естественным образом возникают в задачах геометрии, физики и техники. Теорема 4 дает основание утверждать, что соответствующие функции выражаются через интегралы.

Глава 5. Векторные интегралы

§25. Топологические свойства евклидовых пространств

1. Конечномерное евклидово пространство

Пусть m — натуральное число. Через $\mathbb{R}^m$ далее обозначается прямое произведение m экземпляров действительной прямой $\mathbb{R}$. Его элементами являются последовательности из m действительных чисел $(x^1,\ldots,x^m)$. Набор $(x^1,\ldots,x^m)$ называют m - мерным вектором и обозначают символом x; числа $x^1,\ldots,x^m$ именуют компонентами вектора $x=(x^1,\ldots,x^m)$. Сумму и разность двух векторов

$$x=(x^1,\ldots,x^m),\ y=(y^1,\ldots,y^m) \tag{1}$$

определяют равенствами

$$x+y:=(x^1+y^1,\ldots,x^m+y^m);\ x-y:=(x^1-y^1,\ldots,x^m-y^m).$$

Произведение вектора $x=(x^1,\ldots,x^m)$ на действительное число λ определяют формулой $\lambda x:=(\lambda x^1,\ldots,\lambda x^m)$. Скалярное произведение (x,y) векторов (1) — это число $(x,y):=x^1y^1+\ldots+x^my^m$. В случае $y=x$ число (x,x) именуют скалярным квадратом вектора x; очевидно, $(x,x)\geqslant 0$ и $(x,x)=0$ лишь в случае, когда x есть нулевой вектор $0=(0,\ldots,0)$. Число $|x|:=\sqrt{(x,x)}$ называют длиной (или модулем) вектора x. В дальнейшем элементы $\mathbb{R}^m$ будут называться точками. За расстояние между двумя точками x и y принимается модуль разности x и y :

$$dist\ (x,y):=|x-y|.$$

Справедливы соотношения

$$|(x,y)|\leqslant |x||y|, \tag{2}$$

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|. \tag{3}$$

Соотношение (2) называют неравенством Коши. Оно вытекает из неравенства Гельдера (см. § 18). Из (2) следует равенство

$$|u|=\max_{|v|=1}(u,v). \tag{4}$$

Действительно, $(u,v)\leqslant |u||v|\leqslant |u|$ для любого вектора v единичной длины, поэтому правая часть (4) не превосходит левую. Если $u=0$, то (4) очевидно. Если же $u\neq 0$, то полагаем $v_0=\dfrac{u}{|u|}$; тогда $|v_0|=1$ и $(u,v_0)=|u|$, что и приводит к равенству (4).

Для доказательства (3) воспользуемся тем, что

$$((x+y),v)=(x,v)+(y,v)\leqslant |x|+|y|$$

для любого вектора v единичной длины. В частности, выбирая v так, что $((x+y),v)=|x+y|$, приходим к неравенству (3). Его называют неравенством треугольника. Из (3) вытекает неравенство

$$dist\ (a,c)\leqslant dist\ (a,b)+dist\ (b,c) \tag{5}$$

для любых трех точек a,b,c из $\mathbb{R}^m$. Оно получается, если в неравенстве (3) положить $x=a-b,\ y=b-c$.

Если $a \in \mathbb{R}^m,\ \rho > 0$, то множество $B(a,\rho) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^m \mid dist\ (x,a) \leqslant \rho\}$ именуют замкнутым шаром радиуса ρ с центром в точке a; при $m = 2$ $B(a,\rho)$ — это круг на плоскости. Множество $U(a,\rho) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^m,\ dist\ (x,a) < \rho\}$ называют открытым шаром радиуса ρ с центром в точке a (или ρ – окрестностью точки a). Множество $A \subset \mathbb{R}^m$ называют ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.

2. Открытые множества

Пусть E — подмножество $\mathbb{R}^m$. Точку x_0 называют внутренней точкой множества E, если $B(x_0,\rho) \subset E$ при некотором $\rho > 0$. Совокупность внутренних точек множества E обозначают символом $\overset{\circ}{E}$; используется и обозначение int E. Например, int $B(a,\rho) =$ int $U(a,\rho) = U(a,\rho)$. Рассмотрим множество

$$\Pi(v,c) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (x,v) \geqslant c\} -$$

замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^m$, определяемое вектором $v \neq 0$ и числом c. Его внутренность $\overset{\circ}{\Pi}\ (v,c) >$ непуста и $\overset{\circ}{\Pi}= \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x,v) > c\}$ — открытое полупространство в $\mathbb{R}^m$, определяемое вектором $v \neq 0$ и числом c.

Множество $U \subset \mathbb{R}^m$ называют открытым, если каждая его точка является внутренней, т.е. $\overset{\circ}{U}=U$. Например, $U(a,\rho),\ \overset{\circ}{\Pi}\ (v,c),\ \mathbb{R}^m$ — открытые множества, в то же время множества $B(a,\rho),\ \Pi(v,c)$ таковыми не являются.

Отметим следующие свойства класса открытых множеств

1°. Объединение любой совокупности открытых множеств есть открытое множество.

2°. Пересечение любой конечной совокупности открытых множеств есть открытое множество.

3°. $\mathbb{R}^m$ и $\emptyset$ суть открытые множества.

▲ 1°. Пусть $U_i\ (i \in I)$ — семейство открытых множеств, $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i,\ x_0 \in U$. Тогда $x_0 \in U_i$ для некоторого i. Поскольку U_i — открытое множество, то $B(x_0,\rho) \subset U_i$ при некотором $\rho > 0$. Следовательно, $B(x_0,\rho) \subset U_i \subset U$, что и доказывает 1°.

2°. Пусть $U_1,\ldots,U_k$ — открытые множества, $U = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$. Если $x_0 \in U$, то $x_0 \in U_i$ $(i = 1,\ldots,k)$. Так как каждое множество U_i открыто, то $B(x_0,\rho_i) \subset U_i$ при некотором $\rho_i > 0$ $(i = 1,\ldots,k)$. Положим $\rho := \min\{\rho_1,\ldots,\rho_k\}$. Тогда $\rho > 0$, $B(x_0,\rho) \subset U_i$ $(i = 1,\ldots,k)$, в частности, $B(x_0,\rho) \subset U$. Свойство 2° доказано.

3°. Открытость пространства $\mathbb{R}^m$ уже отмечалась. Поскольку int $\emptyset = \emptyset$, то пустое множество также открыто. ▲

Пересечение бесконечного числа открытых множеств может и не быть открытым. Действительно, пусть $U_i := U\left(a, 1 + \dfrac{1}{i}\right)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Тогда $\bigcap\limits_{i} U_i = B(a,1) \neq$ $\neq$ int $B(a,1)$.

Открытые множества имеют достаточно простую структуру. Локально открытое множество можно отождествить с шаром. При $m = 1$ каждое открытое множество есть объединение конечной или счетной совокупности попарно непересекающихся интервалов (теорема о структуре открытых подмножеств прямой [6]). Близкие результаты известны и в случае $m > 1$.

3. Предельная точка множества

Пусть каждому натуральному числу n сопоставлен вектор x_n из $\mathbb{R}^m$. Соответствие $n \to x_n$ назовем вектор - последовательностью.

Поскольку $x_n \in \mathbb{R}^m$, то $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$, где x_n^i — i- ая компонента вектора x_n. Таким образом, с каждой вектор-последовательностью x_n связано m скалярных последовательностей x_n^i $(i = 1, \ldots, m)$.

Для векторных последовательностей естественным образом вводятся понятия ограниченности, сходимости и фундаментальности. Именно, вектор-последовательность x_n называют: 1) ограниченной, если $|x_n| \leqslant M < \infty \ \forall\, n \in \mathbb{N};$ 2) сходящейся к элементу a из $\mathbb{R}^m$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N;$ 3) фундаментальной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ при $n > N$ и любом натуральном p.

Лемма 1. *Для того, чтобы вектор-последовательность $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ была ограниченной (сходящейся, фундаментальной), необходимо и достаточно, чтобы каждая координатная последовательность x_n^i была ограниченной (сходящейся, фундаментальной).*

▲ Если $v = (v^1, \ldots, v^m)$ — вектор из $\mathbb{R}^m$, то его длина $|v|$ допускает оценку

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |v^i| \leqslant |v| \leqslant |v^1| + \ldots + |v^m|. \tag{6}$$

В частности, для произвольной последовательности $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ справедливы неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_n^i - x_{n+p}^i| \leqslant |x_n - x_{n+p}| \leqslant \sum_{i=1}^m |x_n^i - x_{n+p}^i|.$$

Отсюда непосредственно следует, что фундаментальность вектор-последовательности x_n эквивалентна фундаментальности каждой координатной последовательности x_n^i $(i = 1, \ldots, m)$. Аналогичные рассуждения применимы к ограниченным последовательностям.

Пусть последовательность $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ сходится к элементу $a = (a^1, \ldots, a^m)$ из $\mathbb{R}^m$. Как и в случае $m = 1$, это записывают в виде

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a. \tag{7}$$

В силу (6) $|x_n^i - a^i| \leqslant |x_n - a|$, поэтому из (7) вытекают равенства

$$\lim_{n \to \infty} x_n^i = a^i \ (i = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Верно и обратное, из равенств (8) следует (7); это легко выводится из оценки

$$|x^n - a| \leqslant \sum_{i=1}^m |x_n^i - a^i|.$$

Таким образом, (7)$\Leftrightarrow$(8). ▲

Следствие. ***(Критерий Коши).*** *Для того, чтобы вектор-последовательность x_n была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Всякая сходящаяся последовательность ограничена; обратное неверно. Однако справедлива

Лемма 2. *Из всякой ограниченной последовательности $x_n \in \mathbb{R}^m$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность x_{i_n}.*

▲ При $m = 1$ лемма доказана в § 6. Предположим, что утверждение верно для $m = k \in \mathbb{N}$. Установим его справедливость при $m = k + 1$. Пусть $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k, x_n^{k+1})$ — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^{k+1}$. Тогда последовательности $x_n' := (x_n^1, \ldots, x_n^k)$ и x_n^{k+1} ограничены в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}$ соответственно. Производя прореживание и перенумерацию, можно добиться того, что последовательность x_n' из $\mathbb{R}^k$ сходилась к некоторому элементу $a' = (a^1, \ldots, a^k)$ из $\mathbb{R}^k$ (по индуктивному предположению утверждение верно при $m = k$). Из ограниченной последовательности x_n^{k+1} можно извлечь подпоследовательность x_{in}^{k+1}, сходящуюся к числу a^{k+1}. Очевидно, что $x_{in} = (x_{in}', x_{in}^{k+1}) \to (a', a^{k+1})$. Следовательно, доказываемое утверждение верно и для $m = k + 1$. В силу принципа математической индукции оно справедливо при любом m из $\mathbb{N}$. ▲

Пусть E — непустое подмножество $\mathbb{R}^m$. Элемент a из $\mathbb{R}^m$ называют предельной точкой множества E, если любая δ - окрестность $U(a, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \operatorname{dist}(x, a) < \delta\}$ точки a $(\delta > 0)$ содержит отличный от a элемент x из $E : U(a, \delta) \cap (E \backslash a) \neq \emptyset \; \forall \delta > 0$.

Лемма 3. *Элемент a из $\mathbb{R}^m$ есть предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}^m$ в том и только в том случае, когда существует последовательность x_n $(n \in \mathbb{N})$, обладающая свойствами*

$$x_n \in E, \; x_n \neq a, \; x_n \to a. \tag{9}$$

▲ Доказательство опускается ввиду полной аналогии с доказательством леммы 6.1. ▲

Лемма 4. ***(Принцип Больцано-Вейерштрасса).*** *Пусть E — ограниченное бесконечное подмножество $\mathbb{R}^m$. Тогда оно имеет хотя бы одну предельную точку.*

▲ Так как E — бесконечное подмножество $\mathbb{R}^m$, то существует последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ попарно различных элементов множества E. Поскольку $x_n \in E$, то x_n — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^m$. В силу леммы 2 некоторая подпоследовательность x_{i_n} последовательности x_n сходится к элементу a из $\mathbb{R}^m$. Очевидно, что a — предельная точка множества E. ▲

Обозначим через E' множество точек, предельных для множества E. Его называют производным множеством множества E. В условиях леммы 4 E' — непустое множество. Если E — конечное подмножество $\mathbb{R}^m$, то $E' = \emptyset$. Точку множества E, не являющуюся предельной точкой этого множества, называют изолированной точкой множества E.

4. Замкнутые множества

Множество E называют замкнутым, если $E' \subset E$. Например, шар $B(a,\rho)$, полупространство $U(v,c)$, все пространство $\mathbb{R}^m$ — замкнутые множества, а множества $U(a,\rho), \overset{\circ}{\Pi}(v,c)$ не являются замкнутыми.

Лемма 5. *Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто в том и только в том случае, если предел всякой сходящейся последовательности x_n из E принадлежит множеству E.*

▲ Лемма 5 аналогична лемме 6.3 , поэтому ее доказательство опускается. ▲

Таким образом, замкнутость множества E эквивалентна возможности переходить к пределу во включении $x_n \in E: \ x_n \in E \Rightarrow \lim x_n \in E$.

Теорема 1. *Множество $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто в том и только в том случае, если дополнение к нему $C\mathcal{F} := \mathbb{R}^m \backslash \mathcal{F}$ открыто.*

▲ Пусть $\mathcal{F}$ — замкнутое множество, докажем открытость множества $C\mathcal{F}$. Фиксируем x_0 из $C\mathcal{F}$. Покажем, что $B(x_0,\delta) \subset C\mathcal{F}$ при некотором $\delta > 0$. В предположении противного $B(x_0,\delta) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset \ \forall \delta > 0$. Но тогда $x_0 \in \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, а это противоречит условию $x_0 \in C\mathcal{F}$. Таким образом, $C\mathcal{F}$ — открытое множество.

Обратно, пусть $C\mathcal{F}$ — открытое множество, докажем замкнутость множества $\mathcal{F}$. Пусть $a \in \mathcal{F}'$, установим включение $a \in \mathcal{F}$. В предположении противного $a \in C\mathcal{F}$, но тогда $B(a,\delta) \subset C\mathcal{F}$ при некотором $\delta > 0$. Это противоречит условию $a \in \mathcal{F}'$. ▲

Следствие. 1°. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

2°. *Объединение конечной совокупности замкнутых множеств замкнуто.*

3°. *$\mathbb{R}^m$ и $\emptyset$ суть замкнутые множества.*

▲ Следствие вытекает из законов двойственности Моргана и результатов п. 2. ▲

Замечание 1. Объединение бесконечной совокупности замкнутых множеств может быть незамкнутым.

Замечание 2. $\mathbb{R}^m$ и $\emptyset$ — одновременно открытые и замкнутые множества.

5. Компактные множества

Определение 1. *Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называют компактным, если из всякой последовательности x_n его элементов можно извлечь подпоследовательность $x_{i(n)}$, сходящуюся к некоторому элементу x из E.*

Теорема 2. ***(Критерий компактности)****. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ компактно в том и только в том случае, если E — ограничено и замкнуто.*

▲ 1° Пусть E — компактное множество. Если бы E было неограниченным множеством, то для любого натурального n существовал бы такой элемент x_n из E, что $|x_n| > n$. Любая подпоследовательность этой последовательности неограничена, поэтому не может быть сходящейся.

Если E — незамкнутое множество, то существует последовательность x_n из E, сходящаяся к элементу a из CE. Любая подпоследовательность x_{i_n} этой последовательности также сходится к элементу a из CE, а это противоречит компактности множества E.

2° Пусть E — ограниченное и замкнутое подмножество $\mathbb{R}^m$, x_n — последовательность элементов из E. В силу леммы 2 из последовательности x_n можно извлечь подпоследовательность x_{in}, сходящуюся к элементу a из $\mathbb{R}^m$. Так как E — замкнутое множество, то $a \in E$. Это и доказывает компактность E. ▲

Примеры: замкнутый шар $B(a, \rho)$ и брус

$$\Delta := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m] =$$
$$= \{x = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}^m,\ a_i \leqslant x^i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

являются компактными множествами. Открытый шар $U(a, \rho)$ и полупространство $\Pi(v, c)$ — некомпактные множества.

6. Бикомпактные множества

Система открытых множеств $U_i \subset \mathbb{R}^m$ $(i \in I)$ образует открытое покрытие множества E, если

$$E \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Если I — конечное множество индексов i, то говорят о конечном покрытии множества E. Может случиться, что множество I бесконечно, однако существует его конечное подмножество I_0 такое, что конечная система U_i $(i \in I_0)$ образует покрытие E. В этом случае говорят, что из открытого покрытия множества E можно извлечь конечное подпокрытие.

Определение 2. *Множество E называют бикомпактным, если из любого его открытого покрытия можно извлечь конечное подпокрытие.*

Оказывается, классы компактных и бикомпактных множеств в $\mathbb{R}^m$ совпадают. Важную роль в доказательстве этого факта играет

Лемма 6. ***(Лемма Гейне-Бореля[5])****. Брус $\Delta := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ есть бикомпактное подмножество $\mathbb{R}^m$.*

▲ В целях наглядности доказательство проведем для $m = 2$. Пусть $\Delta = [a, b] \times \times [c, d]$ — брус в $\mathbb{R}^2$, т.е. замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Пусть система открытых множеств U_i $(i \in I)$ образует покрытие бруса Δ, т.е.

$$\Delta \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Предположим, что конечного подпокрытия бруса Δ не существует. Разобьем брус Δ на четыре равные части прямыми, проходящими через его центр и параллельными осям координат. По крайней мере одна из этих частей не допускает конечного подпокрытия множествами U_i. Соответствующий брус обозначим через Δ_1. Поступим с брусом Δ_1 так же, как и с исходным брусом Δ. Продолжая процесс далее, получим последовательность $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$ брусов, ни один из которых не допускает конечного подпокрытия; при этом $\Delta_k \subset \Delta_{k-1}$, брус $\Delta_n := [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ составляет четверть предшествующего бруса Δ_{n-1}. Отрезки $[a_n, b_n], [c_n, d_n]$ образуют последовательность вложенных отрезков. Пусть

$$x_* \overset{def}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], \; y_* \overset{def}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n].$$

Точка $M_* := (x_*, y_*)$ совпадает с пересечением последовательности брусов Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку $M_* \in \Delta$, то найдется открытое множество U из системы U_i $(i \in I)$ такое, что $M_* \in U$. Некоторый круг $B(M_*, \rho)$ $(\rho > 0)$ принадлежит U. По построению последовательность брусов Δ_n стягивается к точке M_*, поэтому $\Delta_n \subset B(M_*, \rho) \subset U$ при достаточно больших n. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. ▲

Лемма 7. *Замкнутое подмножество бикомпакта есть бикомпакт.*

▲ Пусть F — замкнутое подмножество бикомпакта E, U_i $(i \in I)$ — открытое покрытие F. Присоединим к системе U_i $(i \in I)$ открытое множество $U := CF = = \mathbb{R}^m \backslash F$. Система множеств U_i $(i \in I)$, U образует открытое покрытие множества E, поэтому из нее можно выделить конечное подпокрытие U_i $(i \in I_0)$, U. Система U_i $(i \in I_0)$ образует конечное покрытие множества F. ▲

---

[5] Э. Борель (1871-1956) — французский математик

Теорема 3. *Для того, чтобы множество $E \subset \mathbb{R}^m$ было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и ограниченным.*

▲ **Необходимость.** Если E неограниченное множество, то последовательность шаров $U_n := \{x \in \mathbb{R}^m, \ |x| < n\}$ образует открытое покрытие E, из которого нельзя извлечь конечное покрытие множества E. Это доказывает ограниченность бикомпакта.

Установим замкнутость бикомпакта E. Пусть $x_0 \in U := CE, \ \ x \in E$, $\delta_x := \dfrac{|x - x_0|}{3} > 0$. Очевидно, что $U(x, \delta_x) \cap U(x_0, \delta_x) = \emptyset$. Совокупность открытых шаров $U(x, \delta_x)$ $(x \in E)$ образует открытое покрытие множества E, из которого можно выделить конечное подпокрытие $U(x_i, \delta_{x_i})$, $(i = 1, \ldots, s)$. Шар $B(x_0, \delta)$ $(0 < \delta < \delta_{x_i}, \ i = 1, \ldots, s)$ не пересекается с множеством E и содержит точку x_0, поэтому x_0 — внутренняя точка множества U. Следовательно, $\overset{\circ}{U} = U$, т.е. U — открытое множество, E — замкнутое множество.

Достаточность. Пусть E — замкнутое и ограниченное в пространстве $\mathbb{R}^m$ множество. Тогда E есть замкнутое подмножество некоторого бруса, поэтому бикомпактность множества E следует из лемм 6, 7. ▲

Следствие. Классы компактов и бикомпактов в $\mathbb{R}^m$ совпадают.

Определение 3. *Система множеств называется центрированной, если любая конечная ее подсистема имеет непустое пересечение.*

Теорема 4. *Пусть E — компакт в $\mathbb{R}^m$. Тогда любая центрированная система замкнутых подмножеств множества E имеет непустое пересечение.*

▲ Пусть E — компакт в $\mathbb{R}^n$ и E_i $(i \in I)$ — центрированная система замкнутых подмножеств множества E с пустым пересечением. Положим $U_i := CE_i = \mathbb{R}^m \backslash E_i$ $(i \in I)$. Тогда U_i — открытые множества и $\bigcup U_i = C \bigcap E_i = \mathbb{R}^m$. Поэтому система U_i $(i \in I)$ образует покрытие множества E, и из этой системы можно выбрать конечную подсистему U_i $(i \in I_0)$, покрывающую множества E :

$$E \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i.$$

Следовательно,

$$\bigcap_{i \in I_0} E_i = C \bigcup_{i \in I_0} U_i \subset CE. \tag{10}$$

Но, с другой стороны, $E_i \subset E$, и поэтому

$$\bigcap_{i \in I_0} E_i \subset E. \tag{11}$$

Из (10), (11) следует, что $\bigcap\limits_{i \in I_0} E_i = \emptyset$, что противоречит центрированности системы множеств E_i. ▲

§26. Непрерывные вектор-функции

1. Предел вектор-функции

Пусть $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ — евклидовы пространства размерностей k и m соответственно, (u, v) и $|u|$ — скалярное произведение векторов u, v и длина вектора в пространствах $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$.

Пусть X — подмножество $\mathbb{R}^k$. Если каждому x из X сопоставлен вектор $y = f(x)$ из $\mathbb{R}^m$, то соответствие $f : X \to \mathbb{R}^m$ называется отображением из X в $\mathbb{R}^m$ (или вектор-функцией на множестве X со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$). Поскольку при любом x из X вектор $f(x) \in \mathbb{R}^m$, то $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$, где $f^1(x), \ldots, f^m(x)$ — компоненты вектора $f(x)$. Тем самым на множестве X определяются скалярные функции $f^i : X \to \mathbb{R}$, называемые компонентами вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$.

Пусть $a \in X'$, т.е. a — предельная точка множества $X \subset \mathbb{R}^k$.

Определение 1. *Элемент b из $\mathbb{R}^m$ называют пределом вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$ в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из соотношений*

$$0 < |x - a| < \delta,\ x \in X$$

следует неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$b = \lim_{x \to a} f(x) \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to a. \tag{1}$$

Определение 2. *Элемент b из $\mathbb{R}^m$ называют пределом вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$ в точке a, если для каждой последовательности x_n, обладающей свойствами*

$$x_n \in X,\ x_n \neq a,\ x_n \to a,$$

последовательность $f(x_n) \to b$.

Доказательство эквивалентности определений на языке $\varepsilon - \delta$ (по Коши) и на языке последовательностей (по Гейне) проводится по обычной схеме (см. § 6). Эквивалентность позволяет сводить изучение пределов вектор-функций к изучению пределов последовательностей. Если $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x)),\ b = (b^1, \ldots, b^m)$, то равенство (1) эквивалентно выполнению m равенств

$$\lim_{x \to a} f^i(x) = b^i \ (i = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Основные свойства пределов, установленные ранее для скалярных функций скалярного аргумента, оказываются верными и для векторных функций векторного переменного. Отметим здесь лишь некоторые из них.

1°. Предел вектор-функции единствен.

2°. Вектор-функция f, имеющая предел в точке a, финально ограничена в этой точке, т.е. найдутся такие положительные постоянные $\delta,\ M$, что $|f(x)| < M$, если $0 < |x-a| < \delta,\ x \in X$.

3°. Справедлив критерий Коши: предел вектор-функции f в точке a существует в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из соотношений

$$x' \in X,\ x'' \in X,\ 0 < |x'-a| < \delta,\ 0 < |x''-a| < \delta$$

следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

4°. Сохраняется теорема 6.4 о пределе суперпозиции.

Остановимся на свойстве 4° более подробно. Пусть $f(X)$ — область значений вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^k,\ Y \subset \mathbb{R}^m,\ f(X) \subset Y$ и на множестве Y определена другая вектор-функция $g : Y \to \mathbb{R}^l$. Тогда каждому x из X можно сопоставить вектор $g(f(x))$ из $\mathbb{R}^l$. Определенную таким образом вектор-функцию из X в $\mathbb{R}^l$ называют суперпозицией вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^m$ и $g : Y \to \mathbb{R}^l$ и обозначают символом $g \circ f$. Аналогом теоремы 6.4 является

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in X',\ y_0 \in Y'$ и справедливы равенства*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0,\ \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0.$$

Пусть выполнено одно из предположений:

1) $f(x) \neq y_0$ *при* $x \in X,\ 0 < |x - x_0| < \delta$ *при некотором* $\delta > 0$,

2) $y_0 \in Y$ *и* $z_0 = g(y_0)$.

Тогда имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y\to y_0} g(y) = z_0.$$

▲ Доказательство теоремы 1 опускается; оно аналогично доказательству теоремы 6.4 . ▲

2. Определение и свойства непрерывных вектор-функций

Пусть $f : X \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция на множестве $X \subset \mathbb{R}^k$ со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m,\ a \in X$. Вектор-функцию f называют непрерывной в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из соотношения $x \in U(a,\delta) \cap X$ следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Если $a \in X'$, то непрерывность f в точке a эквивалентна тому, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Непрерывность вектор-функции эквивалентна непрерывности ее компонент. Из теоремы 1 вытекает, что суперпозиции непрерывных вектор-функций есть непрерывная в соответствующей точке вектор-функция.

Если вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в каждой точке a из X, то f называют непрерывной на множестве X. Совокупность непрерывных на X вектор-функций $f : X \to \mathbb{R}^m$ обозначают символом $C(X, \mathbb{R}^m)$. Класс $C(X, \mathbb{R}^1)$ скалярных непрерывных на X функций обозначают через $C(X)$. Остановимся на вариантах теорем Вейерштрасса и Кантора.

Теорема 2. *Пусть X — компакт в $\mathbb{R}^k$ и $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$. Тогда $f(X)$ есть компакт в $\mathbb{R}^m$.*

▲ Пусть $y_n \in f(X)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т.е. $y_n = f(x_n)$ $(x_n \in X)$. Так как X — компакт, то существует подпоследовательность $x_{i(n)} \in X$, сходящаяся к некоторому элементу a из X. В силу непрерывности вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$ имеем $f(x_{i(n)}) \to f(a)$, т.е. $y_{i(n)} \to f(a) \in f(X)$. Таким образом, для произвольной последовательности y_n из $f(X)$ найдется подпоследовательность $y_{i(n)}$, сходящаяся к элементу из $f(X)$. Это влечет компактность множества $f(X)$. ▲

Теорема 3. ***(Теорема Вейерштрасса).*** *Непрерывная на компакте функция ограничена и достигает своих точных верхней и нижней границ.*

▲ Теорема 3 аналогична теореме 8.5. ▲

Вектор-функцию $f : X \to \mathbb{R}^m$ называют равномерно непрерывной на множестве X, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из соотношений

$$x' \in X,\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta$$

следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Очевидно, что равномерная непрерывность вектор-функции f на X влечет за собой непрерывность f на множестве X. Обратное, вообще говоря, неверно, однако имеет место следующий вариант теоремы Кантора.

Теорема 4. *Непрерывная на компакте X вектор-функции $f : X \to \mathbb{R}^m$ равномерно непрерывна.*

Более общий результат доказывается в п. 4.

3. Непрерывность и линейная связность

Определение 3. *Непрерывное отображение $x = \varphi(t)$ отрезка $[a, b] = I$ $(-\infty < a < b < \infty)$ в пространство $\mathbb{R}^k$ называют непрерывным путем в $\mathbb{R}^k$.*

Точки $A := \varphi(a),\ B := \varphi(b)$ *называют соответственно началом и концом пути, при этом говорят, что путь* $x = \varphi(t)$ *соединяет точки* A, B.

Определение 4. *Если* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^k$ *— непрерывный путь, то множество* $\varphi(I)$ *называют носителем пути.*

Существуют примеры путей, носители которых, например, содержат k - мерный куб (так называемые "кривые Пеано"). Однако, если функция $\varphi(t)$ достаточно регулярна (например, ее компоненты $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ непрерывно дифференцируемы), то, как можно проверить, ничего противоречащего нашей интуиции не произойдет.

Определение 5. *Множество* $X \subset \mathbb{R}^k$ *называют линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывным путем, носитель которого содержится в множестве* X.

Теорема 5. *Пусть* X *— линейно связное подмножество* $\mathbb{R}^k,\ f \in C(X, \mathbb{R}^m)$. *Тогда* $f(X)$ *есть линейно связное подмножество пространства* $\mathbb{R}^m$.

▲ Установим линейную связность множества $f(X)$. Пусть y_0, y_1 — элементы $f(X)$, т.е. $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1)$, где $x_0, x_1 \in X$. Поскольку множество X линейно связно, то существует непрерывный путь $x = \varphi(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, соединяющий в X точки x_0, x_1. Отображение $f \circ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ задает непрерывный путь, соединяющий точки y_0, y_1 в множестве $f(X)$. ▲

Следствие 1. *Множество значений непрерывной скалярной функции на линейно связном множестве есть промежуток.*

Следствие 2. *Множество значений непрерывной скалярной функции на линейно связном и компактном множестве есть отрезок.*

4. Теорема Кантора для разрывных вектор-функций

Пусть вектор-функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ финально ограничена в точке x_0 из X. В этом случае вектор-функция f ограничена на множестве $X \cap U(x_0, \delta_0)$ при некотором $\delta > 0$. Отсюда вытекает ограниченность вектор-функции f на каждом из множеств $X \cap U(x_0, t)$ $(0 < t < \delta_0)$. Положим

$$\Phi(t) := \sup\,\{|f(x') - f(x'')|,\ x', x'' \in U(x_0, t) \cap X\}.$$

Функция $\Phi(0,\delta_0)\to\mathbb{R}_+$ возрастает. Число
$$\Phi(+0)=\lim_{t\to+0}\Phi(t)$$
называют колебанием вектор-функции f в точке x_0 и обозначают символом $\omega(f;x_0)$. Очевидно, что $0\leqslant\omega(f;x_0)<\infty$.

Сформулируем аналоги результатов § 10.

Лемма 1. *Вектор-функция f непрерывна в точке $x_0\in X$ тогда и только тогда, когда $\omega(f;x_0)=0$.*

Лемма 2. *Если $\omega(f;x_0)<\varepsilon$ при некотором $\varepsilon>0$, то найдется такое $\delta>0$, что $\omega(f;x')<\varepsilon$ для всех x' из $X\cap U(x_0,\delta)$.*

Теорема 6. ***(Теорема Кантора для разрывных вектор-функций)****. Пусть X — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $f:X\to\mathbb{R}^m$ — ограниченная вектор-функция и $\omega(f;x)\leqslant\tau$ при некотором $\tau\geqslant 0$ и любом x из X. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что из соотношений*
$$x'\in X,\ x''\in X,\ |x'-x''|<\delta$$
вытекает неравенство $|f(x')-f(x'')|<\tau+\varepsilon$.

▲ Доказательства лемм 1, 2 и теоремы 6 вполне аналогичны доказательствам соответствующих утверждений, проведенным в § 10. ▲

Пусть X — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^k$, $f:X\to\mathbb{R}^m$ — вектор-функция, $\omega(f;x)$ — колебание f в точке x. Будем считать, что $\omega(f;x)<\infty\ \forall\ x\in X$. Как и в § 10, введем множества
$$\mathcal{B}_\tau:=\{x\in X\mid\omega(f;x)\geqslant\tau\},\ (\tau>0)$$
$$\mathcal{B}:=\{x\in X\mid\omega(f;x)>0\}.$$
В силу леммы 1 $\mathcal{B}$ совпадает с множеством точек разрыва вектор-функции $f:X\to\mathbb{R}^m$.

Теорема 7. *а) При любом $\tau>0$ множество $\mathcal{B}_\tau$ замкнуто,*

б) множество $\mathcal{B}$ представимо в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

▲ Формулировка и доказательство теоремы 7 идентичны приведенным в § 10 для скалярных функций скалярного переменного. ▲

§27. Производные и интегралы вектор-функции

1. Производные вектор-функции

Далее рассматриваются вектор-функции скалярного переменного. Пусть E — подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{E} \neq 0$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция переменного $t \in E$, $f^1, \dots, f^m$ — компоненты вектор-функции f. Пусть $t_0 \in \overset{\circ}{E}$, т.е. $U(t_0, \delta) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset E$ при некотором $\delta > 0$. Если $t \in U(t_0, \delta)$, $t \neq t_0$, то определено разностное отношение

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Вектор-функция f называют дифференцируемой в точке t_0, если существует предел разностного отношения (1) при $t \to t_0$; этот предел называют производной f в точке t_0 и обозначают одним из символов

$$f'(t_0),\ \frac{df}{dt}(t_0),\ (Df)(t_0).$$

Дифференцируемость вектор-функции $f = (f^1, \dots, f^m)$ в точке t_0 эквивалентна дифференцируемости в этой точке каждой из ее компонент. Верно равенство

$$\frac{df}{dt}(t_0) = \left(\frac{df^1}{dt}(t_0), \dots, \frac{df^m}{dt}(t_0) \right).$$

Очевидным образом вводятся производные второго и более высокого порядков вектор-функции f в точке t_0, обозначаемые символами

$$f^{(n)}(t_0),\ \frac{d^n f}{dt^n}(t_0),\ (D^n f)(t_0).$$

Справедливо равенство

$$\frac{d^n f}{dt^n}(t_0) = \left(\frac{d^n f^1}{dt}(t_0), \dots, \frac{d^n f^m}{dt}(t_0) \right),$$

так что дифференцирование вектор-функции сводится к дифференцированию ее компонент, а посему не представляет какой-либо новой задачи.

Отметим кинематическую интерпретацию первой и второй производных вектор-функции $f : E \to \mathbb{R}^3$. В этом случае соотношения $x^1 = f^1(t)$, $x^2 = f^2(t)$, $x^3 = f^3(t)$ определяют траекторию движения точки в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, x^1, x^2, x^3 — координаты точки в момент времени t.

Вектор $f'(t_0)$ направлен по касательной к траектории в точке $x_0 = f(t_0)$; его именуют мгновенной скоростью. Вторая производная $f''(t_0)$ интерпретируется как ускорение точки в момент времени t_0.

2. Формула Тейлора для вектор-функции

Если вектор-функция $f : E \to \mathbb{R}\ n$ раз дифференцируема в точке t_0, то справедлива локальная формула Тейлора

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(t_0)}}{k!}(t-t_0)^k + r_n(t), \tag{2}$$

причем

$$\lim_{t\to t_0} \frac{r_n(t)}{(t-t_0)^n} = 0. \tag{3}$$

Для доказательства достаточно написать локальную формулу Тейлора (см. § 16) для каждой из компонент вектор-функции $f = (f^1, \dots, f^m)$.

Вместе с тем формула конечных приращений для вектор-функций, вообще говоря, неверна. Например, пусть $f(t) = (\cos t, \sin t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Вектор-функция $f(t)$ всюду дифференцируема и $f'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq 0\ \forall\ t \in [0, 2\pi]$. В то же время $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)$.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ $(a \neq b)$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует такое число c из (a,b), что*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)||b-a|. \tag{4}$$

▲ Подберем вектор v из $\mathbb{R}^m$ так, что $|v| = 1$ и $(f(b) - f(a), v) = |f(b) - f(a)|$ (см. § 25). Введем в рассмотрение функцию $g(t) \stackrel{def}{=} (f(t), v)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Функция $g \in C([a,b]) \cap D^1(a,b)$; согласно формуле конечных приращений

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$$

для некоторого числа c из (a,b). Это число является искомым, поскольку

$$g(b) - g(a) = |f(b) - f(a)| = g'(c)(b-a) = (f'(c), v)(b-a) \leqslant |f'(c)||b-a|. \ ▲$$

По аналогичной схеме выводится аналог глобальной формулы Тейлора для вектор-функции. Например, верна

Теорема 2. *Пусть вектор-функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ вместе с производными до порядка n включительно, а на интервале (a,b) существует производная порядка $n+1$.*

Тогда найдется такое число c из интервала (t_0, t), что справедлива формула (2), причем

$$|r_n(t)| \leqslant \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}. \tag{5}$$

▲ Выберем вектор v из $\mathbb{R}^m$ так, что $|v| = 1$ и $(r_n(t), v) = |r_n(t)|$. Положим $g(t) \overset{def}{=} (f(t), v)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Функция $g \in C^n([a,b]) \cap D^{n+1}(a,b)$, поэтому найдется такое число c из (t, t_0), что

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + \frac{g^{(k+1)}(c)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} \qquad (6)$$

(см. § 16). Так как $g^{(k)}(t) = (f^{(k)}(t), v)$, то равенство (6) эквивалентно соотношению

$$(r_n(t), v) = \frac{(f^{(n+1)}(c), v)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$|r_n(t)| = (r_n(t), v) = \frac{(f^{(n+1)}(c), v)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1} \leqslant \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|t-t_0|^{n+1}.$$

Оценка (5) доказана. ▲

Неравенство (5) есть вариант формы Лагранжа представления остатка в формуле Тейлора. Аналогичным образом могут быть получены варианты других формул представления остатка.

3. Интеграл вектор-функции

Вектор-функцию $f(t) = (f^1(t), \ldots, f^m(t))$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ назовем интегрируемой по отрезку $[a,b]$, если каждая ее компонента $f^j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ интегрируема по отрезку $[a,b]$. Положим

$$\int_a^b f(t)\,dt := \Big(\int_a^b f^1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f^m(t)\,dt\Big). \qquad (7)$$

Из равенства (7) легко выводятся свойства линейности и аддитивности интеграла. Например, $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ $(a < c < b)$.

Для вектор-функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \qquad (8)$$

где F — первообразная функции f, т.е. вектор-функция, непрерывная на сегменте $[a,b]$, причем $F'(t) = f(t)\ \forall\ t \in (a,b)$. Действительно, для доказательства (8) достаточно написать формулу Ньютона-Лейбница для каждой из компонент вектор функции f. Отметим эквивалентное (7) равенство

$$\Big(\int_a^b f(t)dt, v\Big) = \int_a^b (f(t), v)dt, \qquad (9)$$

в котором v — произвольный элемент пространства $\mathbb{R}^m$.

Приведем критерий интегрируемости ограниченной вектор-функции $f:[a,b]\to\mathbb{R}^m$. Пусть $T=\{t_0,t_1,\ldots,t_N\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$. Сопоставим разбиению T и вектор-функции $f=(f^1,\ldots,f^m)$ числа

$$\omega_i(f):=\sup\{|f(t')-f(t'')|,\ t_{i-1}\leqslant t',t''\leqslant t_i\},$$

$$\omega_i(f^j):=\sup\{|f^j(t')-f^j(t'')|,\ t_{i-1}\leqslant t',t''\leqslant t_i\},$$

$(i=1,\ldots,N;\ j=1,\ldots,m)$, равные колебаниям вектор-функции f и ее компонент f^j $(j=1,\ldots,m)$ на отрезке $[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,\ldots,N)$. Из оценки (25.6) вытекает неравенство

$$\omega_i(f^j)\leqslant\omega_i(f)\leqslant\sum_{j=1}^{m}\omega_i(f^j). \tag{10}$$

Положим

$$\alpha_T(f):=\sum_{i=1}^{N}\omega_i(f)\Delta t_i,\ \alpha_T(f^j):=\sum_{i=1}^{N}\omega_i(f^j)\Delta t_i,$$

где $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ $(i=1,\ldots,N)$. Как нетрудно видеть,

$$\alpha_T(f^j)=\overline{S}_T(f^j)-\underline{S}_T(f^j)\qquad(j=1,\ldots,m), \tag{11}$$

здесь $\overline{S}_T(f^j)$, $\underline{S}_T(f^j)$ — верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f^j, соответствующие разбиению T. Неравенства (10) влекут за собой оценки

$$\alpha_T(f^j)\leqslant\alpha_T(f)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha_T(f^k)\qquad(j=1,\ldots,m). \tag{12}$$

Теорема 3. ***(Критерий Римана).*** *Ограниченная вектор-функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ интегрируема по отрезку $[a,b]$ в том и только в том случае, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое разбиение T отрезка $[a,b]$, что*

$$\alpha_T(f)<\varepsilon. \tag{13}$$

▲ **Необходимость.** Пусть каждая из компонент $f^1,\ldots,f^m$ вектор-функции f интегрируема по отрезку $[a,b]$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и подберем такое разбиение T_k $(k=1,\ldots,m)$ отрезка $[a,b]$, что $\overline{S}_{T_k}(F^k)-\underline{S}_{T_k}(f^k)<\dfrac{\varepsilon}{m}$. Введем разбиение $T=T_1\cup T_2\cup\ldots\cup T_m$ отрезка $[a,b]$. Тогда

$$\overline{S}_T(f^k)-\underline{S}_T(f^k)\leqslant\overline{S}_T(f^k)-\underline{S}_T(f^k)<\frac{\varepsilon}{m}\ (k=1,\ldots,m).$$

Из соотношений (11), (12) получаем последовательно

$$\alpha_T(f)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\alpha_t(f^k)=\sum_{k=1}^{m}(\overline{S}_T(f^k)-\underline{S}_T(f^k))<m\frac{\varepsilon}{m}=\varepsilon,$$

что и приводит к (13).

Достаточность. Из (11)-(13) следует неравенство $\overline{S}_T(f^j)-\underline{S}_T(f^j)<\varepsilon$, поэтому каждая из компонент вектор-функции f интегрируема. ▲

Теорема 4. *Если вектор-функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по отрезку $[a, b]$, то ее модуль $|f|$ также интегрируем по отрезку $[a, b]$ и*

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| \leqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt. \tag{14}$$

▲ Вначале установим интегрируемость скалярной функции $t \to |f(t)|$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем такое разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a, b]$, что $\alpha_T(f) < \varepsilon$. Поскольку $||f(t')| - |f(t'')|| \leqslant |f(t')| - |f(t'')|$, то колебание $\omega_i(|f|)$ функции $|f|$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ не превосходит колебания $\omega_i(f)$ вектор-функции f на том же отрезке. В силу этого $\alpha_T(|f|) \leqslant \alpha_T(f) < \varepsilon$. Теперь интегрируемость функции $|f|$ вытекает из критерия Римана интегрируемости скалярной функции.

Для доказательства (14) выберем вектор v из $\mathbb{R}^m$ так, что

$$\Big(\int\limits_a^b f(t)dt, v\Big) = \Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big|, \ |v| = 1.$$

При таком выборе вектора v последнее равенство и (9) влекут за собой соотношения

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| = \Big(\int\limits_a^b f(t)dt, v\Big) = \int\limits_a^b (f(t)dt, v) \leqslant \int\limits_a^b |f(t)||v|dt = \int\limits_a^b |f(t)|dt,$$

что и требовалось установить. ▲

В условиях теоремы 4 справедливо неравенство

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| \geqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt - 2\omega(f)(b-a), \tag{15}$$

где $\omega(f) = \sup\{|f(t') - f(t'')|, t', t'' \in [a, b]\}$ — колебание вектор-функции f на отрезке $[a, b]$. Действительно,

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(b)dt + \int\limits_a^b (f(t) - f(b))dt,$$

поэтому

$$\Big|\int\limits_a^b f(t)dt\Big| \geqslant \Big|\int\limits_a^b f(b)dt\Big| - \Big|\int\limits_a^b (f(t) - f(b))dt\Big| \geqslant |f(b)|(b-a) - \omega(f)(b-a) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt + \int\limits_a^b (|f(b)| - |f(t)|)dt - \omega(f)(b-a) \geqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt - 2\omega(f)(b-a).$$

В доказательстве используются неравенство треугольника и монотонность интеграла, в частности, оценки $||f(t)| - |f(b)|| \leqslant |f(t) - f(b)| \leqslant \omega(f)$, следующие из неравенства треугольника.

§28. Критерий Лебега

1. Множества длины 0 и меры 0

Определение 1. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *имеет длину* 0, *если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такая конечная система интервалов* $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$, *что*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} (\alpha_k, \beta_k), \ \sum_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon. \tag{1}$$

В этом случае будем писать $l(A) = 0$.

Например, любое конечное множество имеет длину 0, счетное множество $A := \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ также имеет длину 0, в то же время множество всех рациональных чисел между 0 и 1 не является множеством нулевой длины (доказательство предлагается читателю в качестве упражнения). Очевидны два свойства множеств нулевой длины: 1° если $l(A) = 0$, то и любое подмножество A также имеет длину 0; 2° объединение конечной совокупности множеств нулевой длины есть множество нулевой длины.

Определение 2. *Множество* $A \subset \mathbb{R}$ *имеет меру* 0, *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует конечная или счетная система интервалов* (α_i, β_i) $(i \in I)$, *обладающая свойствами*

$$A \subset \bigcup_{i \in I} (\alpha_i, \beta_i), \ \sum_{i \in I} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon. \tag{2}$$

Если A *имеет меру* 0, *то будем писать* $|A| = 0$.

Левое из соотношений (2) означает, что система интервалов (α_i, β_i) $(i \in I)$ образует покрытие множества A; правое соотношение показывает, что это покрытие является экономным. Аналогичное замечание можно отнести и к соотношениям (1).

Лемма 1. *Если* $|A| = 0$, *то и любое подмножество* A *также имеет меру* 0.

Лемма 2. *Объединение конечной или счетной совокупности множеств меры* 0 *есть множество нулевой меры.*

▲ Пусть $A_i \subset \mathbb{R}$ и $|A_i| = 0$ $(i \in I)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $|A_i| = 0$, то существует система интервалов $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ $(j = 1, 2, \ldots)$, для которой

$$E_i \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (\alpha_{ij}, \beta_{ij}),\ \sum_{j\in\mathbb{N}} (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i} \qquad (i \in I).$$

Семейство интервалов $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ $(i \in I, j \in \mathbb{N})$ счетно, при этом

$$\bigcup_{i\in I} E_i \subset \bigcup_{i\in I,\, j\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}, \beta_{ij} \text{ и } \sum_{i\in I,\, j\in\mathbb{N}} (\beta_{ij} - \alpha_{ij}) < \sum_{i\in I} \frac{\varepsilon}{2^i} \leqslant \varepsilon \ ▲$$

Следствие. *Любое счетное подмножество прямой имеет нулевую меру.*

В частности, множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел имеет меру 0, однако оно не является множеством нулевой длины. Ясно, что множество длины 0 имеет и меру 0.

Лемма 3. *Компактное множество $A \subset \mathbb{R}$ меры 0 имеет также длину 0.*

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $|A| = 0$, то найдется такое покрытие множества A счетной системой интервалов (α_i, β_i) $(i \in \mathbb{N})$, что

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon.$$

Так как A — компактное множество, то уже некоторая конечная совокупность интервалов (α_i, β_i) $(i \in I_0)$ покрывает A и, разумеется,

$$\sum_{i\in I_0} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon.$$

Отсюда и следует равенство $l(A) = 0$. ▲

2. Критерий Дюбуа-Реймона[6]

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ — ограниченная вектор-функция, $\omega(f, t)$ — колебание f в точке t. Положим $\mathcal{B}_\tau := \{t \in [a, b] \mid \omega(f, t) \geqslant \tau\}$ $(\tau > 0)$, $\mathcal{B} := \{t \in [a, b] \mid \omega(f, t) > 0\}$. В силу теоремы 26.7 множество $\mathcal{B}_\tau$ компактно при любом $\tau > 0$, $\mathcal{B}$ есть множество точек разрыва вектор функции f. Если $\mathcal{B} = \emptyset$, то f — интегрируемая вектор-функция. Ниже считаем, что $\mathcal{B} \neq \emptyset$. В этом случае $\mathcal{B}_\tau \neq \emptyset$ при достаточно малых $\tau > 0$.

Теорема 1. ***(Критерий Дюбуа-Реймона)****. Ограниченная вектор-функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ интегрируема тогда и только тогда, когда соответствующее ей множество $\mathcal{B}_\tau$ имеет нулевую длину при любом $\tau > 0$.*

---

[6] П. Дюбуа-Реймон (1831-1889) — немецкий математик

▲ **Необходимость.** Пусть f — интегрируемая вектор-функция, докажем равенство $l(\mathcal{B}_\tau) = 0$ при любом $\tau > 0$. Фиксируем положительные числа τ, ε. В силу критерия Римана (теорема 27.3) найдется такое разбиение $T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ отрезка $[a, b]$, что

$$\alpha_T(f) := \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta t_i < \frac{\tau\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

здесь $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \omega_i(f)$ — колебание f на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \dots, N)$.

Обозначим через I_0 совокупность таких индексов i $(1 \leqslant i \leqslant N)$, для которых $\omega_i(f) \geqslant \dfrac{\tau}{2}$: $I_0 \overset{def}{:=} \{i \mid \omega_i(f) \geqslant \dfrac{\tau}{2}\}$. Введем в рассмотрение множество $E := \bigcup\limits_{i \in I_0} [t_{i-1}, t_i]$. Оно состоит из отрезков, на которых колебание функции f достаточно велико: $\omega_i(f) \geqslant \dfrac{\tau}{2}$. Из неравенства (3) и определения множества I_0 вытекают соотношения

$$\frac{\tau\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta t_i \geqslant \sum_{i \in I_0} \omega_i(f)\Delta t_i \geqslant \frac{\tau}{2} \sum_{i \in I_0} \Delta t_i.$$

Сокращая на $\dfrac{\tau}{2}$, приходим к оценке

$$\sum_{i \in I_0} \Delta t_i < \varepsilon, \tag{4}$$

показывающей, что сумма длин отрезков, составляющих множество E, меньше ε.

Установим включение $\mathcal{B}_\tau \subset E$. Точка t из $\mathcal{B}_\tau$ может 1) принадлежать лишь одному из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \dots, N)$, 2) совпадать с одной из точек $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$. В первом случае $\omega_i(f) \geqslant \tau$, поэтому $t \in [t_{i-1}, t_i] \subset E$. Во втором случае ($t = t_i$, $(1 \leqslant i \leqslant N_1)$) колебание f на одном из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$, $[t_i, t_{i+1}]$ не меньше $\dfrac{\tau}{2}$. Действительно, если $\omega_i(f) < \dfrac{\tau}{2}$, $\omega_{i+1}(f) < \dfrac{\tau}{2}$, то $\omega(f, t) < \tau$, что противоречит предположению $t \in \mathcal{B}_\tau$. Итак, $\mathcal{B}_\tau \subset E$, т.е. $\mathcal{B}_\tau$ содержится в объединении отрезков, суммарная длина которых согласно оценке (4) меньше ε. Ввиду произвольности чисел $\tau > 0, \varepsilon > 0$ отсюда вытекает равенство $l(\mathcal{B}_\tau) = 0 \;\forall\, \tau > 0$.

Достаточность. Пусть теперь $l(\mathcal{B}_\tau) = 0 \;\forall\, \tau > 0$. Фиксируем положительные числа τ, λ. Вектор-функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ ограничена, поэтому существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|f(t)| \leqslant M \;\forall\, t \in [a, b]. \tag{5}$$

Так как $l(\mathcal{B}_\tau) = 0$, то существует конечная система интервалов (α_i, β_i) $(i \in I)$, обладающая свойствами

$$\mathcal{B}_\tau \subset \bigcup_{i \in I} (\alpha_i, \beta_i), \; \sum_{i \in I} (\beta_i - \alpha_i) < \lambda. \tag{6}$$

Множество

$$\mathcal{K} := [a, b] \setminus \bigcup_{i \in I} (\alpha_i, \beta_i)$$

есть объединение конечного числа отрезков

$$\mathcal{K} = \bigcup_{j \in J} [c_i, d_i].$$

В каждой точке t из $\mathcal{K}$ колебания f не превосходят τ. В силу теоремы Кантора (теорема 26.6) существует такое $\delta > 0$, что из условий $t' \in \mathcal{K},\ t'' \in \mathcal{K},\ |t' - t''| < \delta$ следует неравенство $|f(t') - f(t'')| < \tau + \lambda$.

Построим разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a, b]$, обладающее свойствами

1° точки c_j, d_j $(j \in J)$ входят в состав разбиения T,

2° $t_i - t_{i-1} < \delta,\ i = 1, \ldots, N$.

Отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$ разобьем на две группы. В первую из них $(i \in I')$ отнесем отрезки, принадлежащие $\mathcal{K}$; во вторую группу — все остальные $(i \in I'')$.

Пусть $\omega_i(f)$ — колебание вектор-функции f на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, N)$. Тогда

$$\omega_i(f) \leqslant \tau + \lambda \ (i \in I'),\ \omega_i(f) \leqslant 2M \ (i \in I''), \tag{7}$$

$$\sum_{i \in I''} \Delta t_i < \lambda. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) вытекают из способа определения множеств I', I'' и неравенства (6). Имеем далее

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta t_i = \sum_{i \in I'} \omega_i(f)\Delta t_i + \sum_{i \in I''} \omega_i(f)\Delta t_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i \in I'} (\tau + \lambda)\Delta t_i + \sum_{i \in I''} 2M\Delta t_i < (\tau + \lambda)(b - a) + 2M\lambda. \tag{9}$$

Числа τ, λ можно взять сколь угодно малыми. Например, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа τ, λ, что $(\tau + \lambda)(b - a) + 2M\lambda < \varepsilon$. При таком выборе чисел τ, λ из (9) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta t_i < \varepsilon.$$

Теперь интегрируемость f вытекает из критерия Римана. ▲

3. Критерий Лебега

Теорема 2. ***(Критерий Лебега)***. *Для того, чтобы ограниченная на отрезке вектор-функция была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело меру нуль.*

▲ **Необходимость.** Пусть f — интегрируемая вектор-функция, $\mathcal{B}$ — множество ее точки разрыва, $\mathcal{B}_\tau = \{t \in [a, b] \mid \omega(f, t) \geqslant \tau\}$. Согласно теореме 1 $l(\mathcal{B}_\tau) = 0$ $\forall\ \tau > 0$. В частности, при любом натуральном n множество $\mathcal{B}_{1/n}$ имеет нулевую меру. Поскольку

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{1/n},$$

то в силу леммы 2 и множество $\mathcal{B}$ также имеет нулевую меру.

Достаточность. Пусть $|\mathcal{B}| = 0$. Поскольку $\mathcal{B}_\tau \subset \mathcal{B}\ \forall\ \tau > 0$, то согласно лемме 1 $|\mathcal{B}_\tau| = 0\ \forall\ \tau > 0$. Теперь утверждение следует из теоремы 1. ▲

Следствие 1. *Всякая ограниченная на отрезке вектор-функция, имеющая конечное или счетное множество точек разрыва, является интегрируемой.*

Следствие 2. *Пусть $f_1, \dots, f_m$ — функции класса $\mathcal{R}([a,b])$, K — множество значений вектор-функции $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))$.Пусть $\Phi : K \to \mathbb{R}$ — непрерывная на множестве K функция. Тогда функция $\Phi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема в том и только в том случае, если она ограничена.*

Следствие 3. *Частное двух скалярных интегрируемых функций интегрируемо в том и только в том случае, если оно ограничено.*

Следствие 4. *Если $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — интегрируемая вектор-функция и*

$$\int\limits_a^b |f(t)| dt = 0, \tag{10}$$

то $f(t) = 0$ всюду за исключением множества нулевой меры.

▲ Из (10) следует, что функция

$$\mathcal{F}(t) := \int\limits_a^t |f(s)| ds$$

тождественно равна 0. В каждой точке t_0 непрерывности подынтегральной функции $|f(t_0)| = 0$. Поскольку множества точек разрыва функций $f(t)$, $|f(t)|$ имеют нулевую меру, равенство $f(t) = 0$ справедливо всюду за исключением множества нулевой меры. ▲

4. Интегрируемость индикатора множества

Применим критерий Лебега к скалярной функции, совпадающей с индикатором множества $E \subset [a,b]$. Напомним (см. § 10), что индикатор (характеристическая функция) множества E определяется равенством

$$1_E(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in E \\ 0, & \text{если} \quad t \overline{\in} E. \end{cases}$$

В силу критерия Лебега интегрируемость функции $1_E : [a,b] \to \mathbb{R}$ эквивалентна тому, что множество ее точек разрыва имеет меру 0. Соответствующее множество совпадает с границей ∂E множества E (см. § 10). Поэтому интегрируемость функции 1_E эквивалентна равенству $|\partial E| = 0$. Множество E, для которого $|\partial E| = 0$, называют измеримым по Жордану. Вместе с функцией $1_E : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемой является и функция $1-1_E$, совпадающая с индикатором множества $CE = [a,b]\backslash E$. Поэтому измеримость по Жордану множества $E \subset [a,b]$ эквивалентна измеримости его дополнения $[a,b]\backslash E$.

Лемма 4. *Если E_1, E_2 — измеримые по Жордану подмножества отрезка $[a,b]$, то их объединение $E_1 \cup E_2$, пересечение $E_1 \cap E_2$ и разность $E_1 \backslash E_2$ также интегрируемы по Жордану.*

▲ Действительно, $1_{E_1 \cap E_2} = 1_{E_1} 1_{E_2}$, поэтому измеримость пересечения вытекает из интегрируемости произведения интегрируемых функций. Равенство $1_{E_1 \cup E_2} = 1_{E_1} + 1_{E_2} - 1_{E_1 E_2}$ влечет за собой измеримость объединения измеримых множеств. Поскольку $1_{E_1 \backslash E_2} = \max\{1_{E_1} - 1_{E_2}, 0\}$, то измерима и разность измеримых множеств. ▲

Число

$$\mu(E) := \int\limits_a^b 1_E(t)dt$$

называют мерой Жордана измеримого множества $E \subset [a,b]$. Из свойства аддитивности интеграла нетрудно вывести, что $\mu(E)$ не зависит от выбора отрезка, содержащего множество E. Очевидно, что $\mu(E) \geqslant 0$; если E_1, E_2 — измеримы и $E_1 \subset E_2$, то $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$.

Отметим равенство

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) - \mu(E_1 \cap E_2), \tag{11}$$

в котором E_1, E_2 — произвольные измеримые множества. Оно вытекает из равенства

$$1_{E_1 \cup E_2} = 1_{E_1} + 1_{E_2} - 1_{E_1 \cap E_2}$$

и свойства линейности интеграла. Мера Жордана инвариантна относительно сдвига: $\mu(E+c) = \mu(E)$ для любого измеримого множества E и любого действительного числа c. Из определения меры Жордана вытекает равенство $\mu([0,1]) = 1$ (свойство нормировки). Мера Жордана является естественным обобщением понятия длины отрезка.

Упражнение 1. *Доказать эквивалентность равенств*

$$l(E) = 0 \text{ и } \mu(E) = 0.$$

Упражнение 2. *Выяснить геометрический смысл верхнего и нижнего интегралов от индикатора множества $E \subset \mathbb{R}$.*

§29. Вектор-функции с ограниченным изменением

1. Вариация вектор-функции

Пусть $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — вектор-функция, определенная на отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < \infty$). Сопоставим вектор-функции g и разбиению $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a,b]$ число

$$\sigma_T(g) = \sum_{i=1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})|.$$

Число $\sigma_T(g)$можно интерпретировать как длину ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, соединяющих точки $g(t_{i-1})$ и $g(t_i)$ ($i = 1, \ldots, N$). Разным разбиениям отрезка T соответствуют разные значения $\sigma_T(g)$.

Лемма 1. *Если T' — продолжение разбиения T, то $\sigma_T(g) \leqslant \sigma_{T'}(g)$.*

▲ Достаточно доказать лемму в том частном случае, когда разбиение T' получается из разбиения T добавлением одной точки c, лежащей на некотором интервале (t_{i-1}, t_i). Тогда

$$\sigma_{T'}(g) - \sigma_T(g) = |g(t_{i-1}) - g(c)| + |g(c) - g(t_i)| - |g(t_{i-1}) - g(t_i)|,$$

и требуемый результат вытекает из неравенства треугольника

$$|g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant |g(t_{i-1}) - g(c)| + |g(c) - g(t_i)|. \ ▲$$

Точная верхняя грань множества всех чисел $\sigma_T(g)$, когда T пробегает множество всех разбиений отрезка $[a,b]$, есть либо неотрицательное число, либо $+\infty$; оно называется полным изменением (вариацией) вектор-функции g на отрезке $[a,b]$ и обозначается символом $V_a^b\, g$. Если $V_a^b\, g$ конечно, то функцию $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ называют функцией с ограниченным изменением. Таким образом,

$$V_a^b\, g := \sup_T \sigma_T(g) = \sup_T \sum_{i=1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})|.$$

Вариация вектор-функции — это точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в ее область значений.

Приведем два достаточно типичных примера функций с ограниченным изменением.

Теорема 1. *Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ — интегрируемая на отрезке $[a,b]$ вектор-функция, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и*

$$g(t) = x_0 + \int_a^t f(u)\, du \ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{1}$$

Тогда вектор-функция g имеет на отрезке $[a,b]$ ограниченное изменение и

$$V_a^b\, g = \int_a^b |f(u)|\, du. \tag{2}$$

▲ 1) Вначале установим оценку сверху величины $V_a^b\, g$. Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Из равенства (1) следует, что

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(u)du \ (i = 1, \ldots, N).$$

В силу неравенства (27.14) имеем

$$|g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |f(u)|du \ (i = 1, \ldots, N).$$

Суммируя эти неравенства, приходим к оценке

$$\sigma_T(g) = \sum_{i=1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |f(u)|du \leqslant \int\limits_a^b |f(u)|du.$$

Ввиду произвольности разбиения T последняя оценка влечет неравенство

$$V_a^b\, g \leqslant \int\limits_a^b |f(u)|du. \tag{3}$$

2) Докажем противоположное к (3) неравенство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем такое разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a, b]$, что

$$\alpha_T(f) := \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Здесь $\omega_i(f)$ — колебание вектор-функции f на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Очевидно, что

$$V_a^b\, g \geqslant \sigma_T(g) = \sum_{i=1}^{N} \Big| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \Big|. \tag{5}$$

Комбинируя (4), (5) с неравенством (27.15), получаем соотношения

$$V_a^b\, g \geqslant \sum_{i=1}^{N} \Big| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt \Big| \geqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt - 2\alpha_T(f) \geqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt - \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$V_a^b\, g \geqslant \int\limits_a^b |f(t)|dt. \tag{6}$$

Объединяя (3) и (6), приходим к равенству (2). ▲

Теорема 1 применима, например, к непрерывно дифференцируемым на отрезке $[a, b]$ вектор-функциям $g(t)$. В этом случае можно положить $x_0 = g(a)$, $f(t) = g'(t)$, равенство (2) может быть записано в виде

$$V_a^b\, g = \int_a^b |g'(t)|dt. \tag{7}$$

Равенство (7) сохраняется для дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции g, производная которой интегрируема по отрезку $[a,b]$.

Теорема 2. *Если $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонная на отрезке $[a,b]$ скалярная функция, то*

$$V_a^b\, g = |g(b) - g(a)|. \tag{8}$$

▲ Действительно, пусть для определенности $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Тогда для любого разбиения $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a,b]$ справедливо равенство

$$\sigma_T(g) = \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{N} (g(t_i) - g(t_{i-1})) = g(b) - g(a) = |g(b) - g(a)|,$$

что и приводит к формуле (8). ▲

Совокупность вектор-функций $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, имеющих ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$, обозначается символом $BV([a,b],\mathbb{R}^m)$. Полагают $BV([a,b]) := BV([a,b],\mathbb{R}^1)$.

2. Свойства вариации

Наиболее простыми представляются свойства.

1°. Равенство $V_a^b\, g = 0$ эквивалентно тому, что g — постоянная вектор-функция (положительность вариации),

2°. $V_a^b\,(\lambda g) = |\lambda| V_a^b\, g \;\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ (однородность вариации),

3°. $V_a^b\,(g+h) \leqslant V_a^b\, g + V_a^b\, h$ (неравенство треугольника).

▲ Свойства $1°, 2°$ очевидны. Если $f(t) = g(t) + h(t)$ и $g, h \in BV([a,b],\mathbb{R}^m)$, то

$$|f(t') - f(t'')| \leqslant |g(t') - g(t'')| + |h(t') - h(t'')| \qquad (a \leqslant t',\ t'' \leqslant b),$$

поэтому для любого разбиения $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a,b]$

$$\sum_{i=1}^{N} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})| + \sum_{i=1}^{N} |h(t_i) - h(t_{i-1})| \leqslant V_a^b\, g + V_a^b\, h.$$

Следовательно, $\sigma_T(f) \leqslant V_a^b\, g + V_a^b\, h$ для любого разбиения T, что и доказывает свойство 3°. ▲

Существенно сложнее устанавливается свойство аддитивности вариации вектор-функции g класса $BV([a,b],\mathbb{R}^m)$.

4°. $V_a^b\, g = V_a^c\, g + V_c^b\, g$ $(a < c < b)$.

▲ Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, T' — разбиение, полученное из T добавлением точки c. В силу леммы 1 $\sigma_T(g) \leqslant \sigma_{T'}(g)$, поэтому, не уменьшая общности, можно ограничиться разбиением T, содержащим c в качестве точки деления $c = t_k$ $(0 < k < N)$. Таким образом,

$$\sigma_T(g) = \sum_{i=1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i-1}^{k} |g(t_i) - g(t_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^{N} |g(t_i) - g(t_{i-1})| \leqslant V_a^c\, g + V_c^b\, g.$$

Ввиду произвольности разбиения T отсюда получаем

$$V_a^b\, g \leqslant V_a^c\, g + V_c^b\, g. \tag{9}$$

Для доказательства противоположного соотношения фиксируем $\varepsilon > 0$ и такие разбиения T_1, T_2 отрезков $[a, c], [c, b]$, что

$$\sigma_{T_1}(g) > V_a^c\, g - \varepsilon,\ \sigma_{T_2}(g) > V_c^b\, g - \varepsilon.$$

Если $T = T_1 \cup T_2$, то

$$\sigma_T(g) = \sigma_{T_1}(g) + \sigma_{T_2}(g) > V_a^c\, g + V_c^b\, g - 2\varepsilon. \tag{10}$$

Объединяя (9), (10), приходим к требуемому утверждению. ▲

Отметим, наконец, свойство

5°. Для того, чтобы вектор-функция $g(t) = (g^1(t), \ldots, g^m(t))$ имела ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы каждая ее компонента g^k принадлежала классу $BV([a, b])$; при этом справедливы соотношения

$$V_a^b\, g^k \leqslant V_a^b\, g \leqslant \sum_{i=1}^{m} V_a^b\, g^i. \tag{11}$$

▲ Левое из неравенств (11) следует из неравенства $|g^k(t') - g^k(t'')| \leqslant$ $\leqslant |g(t') - g(t'')|$. Для доказательства правого неравенства (11) можно заметить, что $g(t) = g^1(t)e_1 + \ldots + g^m(t)e_m$, где $e_1, \ldots, e_m$ — стандартный репер в пространстве $\mathbb{R}^m$ $(e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, 0, \ldots, 1))$. Поскольку $V_a^b\,(g^i e_i) = V_a^b\, g_i$, то в силу неравенства треугольника

$$V_a^b\, g \leqslant \sum_{i=1}^{m} V_a^b\,(g^i e_i) = \sum_{i=1}^{m} V_a^b\, g^i. ▲$$

Свойство 5° позволяет достаточно полно описать класс $BV([a, b], \mathbb{R}^m)$. Для этого полезно иметь характеристику функций класса $BV([a, b])$.

3. Скалярные функции с ограниченным изменением

Теорема 3. *Любая скалярная функция с ограниченным изменением представима в виде разности двух возрастающих функций.*

▲ Пусть $g \in BV([a, b])$. Положим

$$g_1(t) := V_a^t\, g,\ g_2(t) := g_1(t) - g(t)\ (a \leqslant t \leqslant b).$$

Очевидно, что $g_1(t) - g_2(t) = g(t)$. Если $t_1 < t_2$, то

$$g_1(t_2) - g_1(t_1) = V_{t_1}^{t_2}\, g \geqslant 0,$$

т.е. функция $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ возрастает. Поскольку $g(t_2) - g(t_1) \leqslant |g(t_2) - g(t_1)| \leqslant \leqslant V_{t_1}^{t^2} g$, то

$$g_2(t_2) - g_2(t_1) = V_{t_1}^{t_2} g - (g(t_2) - g(t_1)) \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ также возрастает.

Функция g представлена в виде разности двух возрастающих функций, что и доказывает теорему. ▲

Очевидно, что разность двух возрастающих на отрезке $[a,b]$ функций принадлежит классу $BV([a,b])$. Поэтому теорема 3 содержит исчерпывающую характеристику скалярных функций с ограниченным изменением.

Следствие 1. *Всякая точка разрыва функции класса $BV([a,b])$ есть точка разрыва первого рода.*

Следствие 2. *Множество точек разрыва функции класса $BV([a,b])$ не более чем счетно.*

Упражнение 1. *Доказать, что непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция*

$$f(x) := \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x}, & \text{если} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \end{cases}$$

не принадлежит классу $BV([a,b])$.

Теорема 4. *Пусть $T = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ — разбиение отрезка $[a,b]$ и сужение функции $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ на каждый из отрезков $[c_{i-1}, c_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ монотонно. Тогда $g \in BV([a,b])$ и*

$$V_a^b g = \sum_{i=1}^{n} |g(c_i) - g(c_{i-1})|. \tag{12}$$

▲ В силу теоремы 2 сужение функции g на отрезок $[c_{i-1}, c_i]$ принадлежит $BV([c_{i-1}, c_i])$ и

$$V_{c_{i-1}}^{c_i} g = |g(c_i) - g(c_{i-1})| \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Теперь равенство (12) следует из свойства аддитивности вариации. ▲

Теорема 4 приводит к достаточно простому способу вычисления вариации для широкого класса скалярных функций.

4. Длина непрерывного пути

Напомним (см. § 26), что непрерывным путем в пространстве $\mathbb{R}^k$ называют непрерывное отображение $x = \varphi(t)$ отрезка $[a,b] = I$ $(-\infty < a < b < \infty)$ в пространство $\mathbb{R}^k$, множество $\varphi(I)$ именуют носителем пути $x = \varphi(t)$ $(t \in I)$. Если отображение $\varphi : I \to \mathbb{R}^k$ есть инъекция, то путь φ называют дугой. Следует подчеркнуть, что непрерывный путь — это отображение, а не множество точек. С каждым путем $x = \varphi(t)$ связана вектор-функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$.

Непрерывный путь $x = \varphi(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ называют спрямляемым, если вектор-функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ имеет ограниченное изменение. Длиной спрямляемого пути $x = \varphi(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ называют число

$$l := V_a^b \varphi.$$

Таким образом, длина пути – это точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в носитель этого пути. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 5. *Пусть вектор-функция $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ всюду на отрезке $[a,b]$ дифференцируема, а ее производная $\varphi' : [a,b] \to \mathbb{R}^k$ интегрируема по отрезку $[a,b]$. Тогда путь $x = \varphi(t)$ спрямляем, а его длина*

$$l = \int_a^b |\varphi'(t)| dt. \tag{13}$$

В качестве примера рассмотрим плоский непрерывный путь, определяемый соотношениями $x^1 = \varphi_1(t)$, $x^2 = \varphi_2(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Этот путь спрямляем, если функции φ_1, φ_2 принадлежат классу $BV([a,b])$. В частности, если функции φ_1, φ_2 дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, а их производные φ_1', φ_2' интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то длина пути $x^1 = \varphi_1(t)$, $x^2 = \varphi_2(t)$ находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{|\varphi_1'(t)|^2 + |\varphi_2'(t)|^2}\, dt. \tag{14}$$

Отметим два частных случая формулы (14).

1°. С графиком функции $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ естественно связать путь $x = t$, $y = f(t)$. Если $f \in D^1([a,b])$, $f' \in \mathcal{R}[a,b]$, то длина l соответствующего пути вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx. \tag{15}$$

2°. С кривой, задаваемой в полярных координатах (ρ, θ) равенством $\rho = h(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$, можно связать непрерывный путь

$$x = h(t)\cos t,\ y = h(t)\sin t\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

В этом случае (если $h \in D^1([\alpha,\beta])$, $h' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$)

$$\frac{dx}{dt} = h'(t)\cos t - h(t)\sin t,\ \frac{dy}{dt} = h'(t)\sin t + h(t)\cos t;$$

формула (14) приводит к равенству

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h^2(\theta) + |h'(\theta)|^2}\, d\theta. \tag{16}$$

Примеры.

1°. Цепная линия: $y = \operatorname{ch} x$ $(0 \leqslant x \leqslant b)$. В этом случае $f(x) = \operatorname{ch} x$, $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $\sqrt{1 + |f'(x)|^2} = \operatorname{ch} x$,

$$l = \int\limits_0^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx = \int\limits_0^b \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} b.$$

2°. Парабола: $y = \dfrac{x^2}{2p}$ $(0 \leqslant x \leqslant b)$. Тогда $f(x) = \dfrac{x^2}{2p}$, $f'(x) = \dfrac{x}{p}$, $\sqrt{1 + |f'(x)|^2} = \dfrac{1}{p}\sqrt{x^2 + p^2}$. В силу формулы (15)

$$l = \frac{1}{p} \int\limits_0^b \sqrt{x^2 + p^2}\, dx = \frac{1}{p} \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + p^2}) \right] \Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{b}{2p} \sqrt{b^2 + p^2} + \frac{b}{2} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + p^2}}{p}.$$

3°. Циклоида: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Здесь $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$ $(a > 0, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$,

$$\sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

В силу формулы (14)

$$l = 2a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \bigg|_0^2 \pi = 8a.$$

4°. Кардиоида: $\rho = a(1 + \cos \theta)$ $(a > 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$. Воспользуемся формулой (16), в силу которой кардиоида спрямляема и ее длина

$$l = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta}\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2a \int\limits_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|\, d\theta = 8a.$$

5°. Синусоида: $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$. Синусоида спрямляема, ее длина

$$l = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

В данном случае интеграл не может быть выражен через элементарные функции.

Глава 6. Ряды

§30. Признаки сходимости числовых рядов

1. Сведения о комплексных числах

Напомним некоторые сведения о комплексных числах. Предполагается, что читатель знаком с полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (см., например, [12]). Элементами $\mathbb{C}$ являются пары (x, y) действительных чисел, записываемые в виде $z = x+iy$. Числа x, y называют действительной и мнимой частью комплексного числа $z = x+iy$; обозначения $x = Re\ z,\ \ y = Im\ z$. Сумма и произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ определяются равенствами

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),\ z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Относительно определенных таким образом бинарных операций $\mathbb{C}$ есть поле; в частности, определена разность $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1, z_2; если $z_2 \neq 0$, то определено частное $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Комплексному числу $z = x+iy$ можно сопоставить точку $M = (x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, называемую аффиксом точки z. Наоборот, каждой точке $M = (x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ можно сопоставить число $z = x + iy$. Таким образом, соответствие между $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ взаимно однозначно. Иногда $\mathbb{C}$ идентифицируют с плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Точку $M = (x, y)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ можно задать полярными координатами $\rho,\ \varphi$, связанными с x, y равенствами $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Комплексное число

$$z = x + iy \tag{1}$$

можно представить в виде

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2}$$

Записи (1), (2) называют алгебраической и тригонометрической формами комплексного числа.

В записи (2) число $\rho \geqslant 0$ называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$, φ именуют аргументом числа z. Если $z \neq 0$, то $|z| > 0$, аргумент определяется с точностью до кратного 2π.

Соответствие между $\mathbb{C}$ и плоскостью $\mathbb{R}^2$ позволяет распространить на поле $\mathbb{C}$ результаты, установленные ранее для плоскости $\mathbb{R}^2$. Последовательность $z_n = x_n + iy_n$ комплексных чисел назовем ограниченной (сходящейся, фундаментальной), если соответствующая последовательность точек (x_n, y_n) из $\mathbb{R}^2$ является ограниченной (сходящейся, фундаментальной). Например, последовательность z_n сходится к числу c, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $|z_n - c| < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Используется запись

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \text{ или } z_n \to c. \tag{3}$$

Соотношение (3) эквивалентно двум равенствам

$$Re\ z_n \to Re\ c,\ Im\ z_n \to Im\ c. \tag{4}$$

Используя эквивалентность (3), (4) и известные свойства сходящихся последовательностей действительных чисел, нетрудно установить следующие утверждения.

1°. Всякая сходящаяся последовательность комплексных чисел ограничена.

2°. Сходимость и фундаментальность последовательности эквивалентны.

3°. Сохраняются теоремы о пределе суммы (разности, произведения, частного) сходящихся последовательностей.

2. Ряды с комплексными элементами

Сопоставим последовательности z_n ($n \in \mathbb{N}$) комплексных чисел символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n := z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots, \tag{5}$$

называемый рядом. Числа z_n называют элементами этого ряда, а числа $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ — частичными суммами ряда (5). Если последовательность S_n частичных сумм ряда (5) сходится к числу S, то ряд (5) называют сходящимся, а число S — суммой ряда (5). Если же последовательность S_n расходится, то и ряд (5) называют расходящимся.

Лемма 1. ***(Критерий Коши сходимости ряда)****. Ряд (5) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\Big| < \varepsilon \tag{6}$$

при $n \geqslant N$ и произвольном натуральном p.

▲ Если S_n — последовательность частичных сумм ряда (5), то $S_{n+p} - S_n = z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}$. Неравенство (6) эквивалентно неравенству $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, поэтому лемма 1 следует из критерия Коши для последовательностей. ▲

Следствие 1. *Если ряд (5) сходится, то $z_n \to 0$ (необходимый признак сходимости).*

Следствие 2. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \tag{7}$$

сходится, то и ряд (5) также сходится.

Ряд (5) называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд (7). Следствию 2 можно придать такую форму: абсолютно сходящийся ряд является сходящимся. Сходящийся ряд (5) именуют условно сходящимся, если ряд (7) расходится. Примеры условно сходящихся рядов приводились в § 5. Там же устанавливалась

Лемма 2. ***(Критерий сходимости ряда с положительными элементами)***. *Если $z_k \geqslant 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N}$, то для сходимости ряда (5) необходимо и достаточно, чтобы последовательность S_n его частичных сумм была ограниченной.*

3. Признаки сравнения

Теорема 1. *а) Если $|z_k| \leqslant u_k \;\forall\; k \geqslant m$ и ряд $\sum u_k$ сходится, то и ряд (5) абсолютно сходится; б) если $z_k \geqslant v_k \geqslant 0 \;\forall\; k \geqslant m$ и ряд $\sum v_k$ расходится, то и ряд (5) расходится.*

▲ Теорема 1 вытекает из теоремы 5.3 . ▲

Теорема 2. *а) Пусть при $k \geqslant m$ выполняются неравенства*

$$|z_k| > 0,\; u_k > 0,\; \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leqslant \frac{u_{k+1}}{u_k}. \tag{8}$$

Если ряд $\sum u_k$ сходится, то и ряд (5) абсолютно сходится.

б) Пусть при $k \geqslant m$ справедливы неравенства

$$z_k > 0,\; v_k > 0.\; \frac{z_{k+1}}{z_k} \geqslant \frac{v_{k+1}}{v_k}. \tag{9}$$

Если ряд $\sum v_k$ расходится, то и ряд (5) также расходится.

▲ а) Из (8) вытекают неравенства

$$\left|\frac{z_{m+1}}{z_m}\right| \leqslant \frac{u_{m+1}}{u_m}, \ldots, \left|\frac{z_k}{z_{k-1}}\right| \leqslant \frac{u_k}{u_{k-1}} \qquad (k \geqslant m).$$

Перемножая эти неравенства, приходим к оценке

$$|z_k| \leqslant \frac{|z_m|}{u_m}\, u_k \qquad (k \geqslant m).$$

Ряд $\sum \dfrac{|z_m|}{u_m}\, u_k$ пропорционален ряду $\sum u_k$, поэтому сходится. Теперь утверждение а) следует из теоремы 1.

б) Достаточно заметить, что из (9) следуют оценки

$$z_k \geqslant \frac{|z_m|}{v_m}\, v_k \qquad (k \geqslant m)$$

и воспользоваться теоремой 1. ▲

Частными случаями теоремы 1 являются признаки Коши и Даламбера. Приведем формулировки этих признаков в предельной форме.

Теорема 3. ***(Признак Коши).*** *Пусть*

$$\mathcal{K} := \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}.$$

Если $\mathcal{K} < 1$, то ряд (5) абсолютно сходится; если же $\mathcal{K} > 1$, то он расходится.

Теорема 4. ***(Признак Даламбера).*** *Пусть существует предел*

$$\mathcal{D} := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|.$$

Если $\mathcal{D} < 1$, то ряд (5) абсолютно сходится; если же $\mathcal{D} > 1$, то он расходится.

▲ Теоремы 3, 4 следуют из теорем 5.6 и 5.7 соответственно. ▲

В теоремах 3, 4 ряд (5) сравнивается с геометрической прогрессией. Сравнение с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{10}$$

приводит к некоторому усилению признака Даламбера. Из результатов § 5 следует, что ряд (10) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Теорема 5. ***(Признак Раабе[7]).*** *а) Если*

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leqslant 1 - \frac{\lambda}{n} \tag{11}$$

при некотором $\lambda > 1$ и достаточно больших n ($n \geqslant n_0$), то ряд (5) абсолютно сходится.

б) Если при $n \geqslant n_0 \gg 1$

$$z_n > 0 \text{ и } \frac{z_{n+1}}{z_n} \geqslant 1 - \frac{1}{n}, \tag{12}$$

то ряд (5) расходится.

▲ а) Пусть выполнено неравенство (11). Фиксируем число p из $(1, \lambda)$ и положим

$$u_k := \frac{1}{k^p} \ (k \in \mathbb{N}).$$

Ряд $\sum u_k$ сходится (см. § 5). При этом

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^p = 1 - \frac{p}{k+1} + o\left(\frac{1}{k+1}\right). \tag{13}$$

---

[7] Й. Раабе (1801-1859) — швейцарский математик

(Используется равенство $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$ при $x \to 0$, вытекающее из дифференцируемости функции $(1+x)^p$ в точке 0). Поскольку $p < \lambda$, то из (11), (13) следуют оценки
$$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \leqslant 1 - \frac{\lambda}{k} \leqslant \frac{u_{k+1}}{u_k}$$
при достаточно больших k. Теперь абсолютная сходимость ряда (5) вытекает из теоремы 2.

б) Положим $v_1 := 0$,
$$v_k := \frac{1}{k-1} \ (k = 2, 3, \ldots).$$
Ряд $\sum v_k$ расходится и $\dfrac{v_{k+1}}{v_k} = 1 - \dfrac{1}{k}$ $(k \geqslant 2)$. В силу (12)
$$\frac{z_{k+1}}{z_k} \geqslant 1 - \frac{1}{k} = \frac{v_{k+1}}{v_k}$$
при достаточно больших k. Согласно теореме 2 ряд (5) расходится. ▲

Следствие. (Признак Раабе в предельной форме). *Пусть существует предел*
$$\mathcal{R} := \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right).$$
Если $\mathcal{R} > 1$, то ряд (5) абсолютно сходится; если же $\mathcal{R} < 1$ и $z_n > 0$ при достаточно больших n, то ряд (5) расходится.

▲ Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. ▲

Пример 1. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\frac{1}{2n+1},$$
для которого
$$z_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\frac{1}{2n+1} > 0, \mathcal{D} = \lim_{n\to\infty}\frac{z_{n+1}}{z_n} = 1,$$
$$\mathcal{R} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{z_{n+1}}{z_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$
В данном примере признак Даламбера неприменим ($\mathcal{D} = 1$), в то время как, согласно признаку Раабе, ряд сходится ($\mathcal{R} = \dfrac{3}{2} > 1$).

4. Интегральный признак сходимости

Данный признак основан на сравнении ряда с интегралом. Его основу составляет

Лемма 3. *Пусть* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *— положительная убывающая на* $[1, \infty)$ *функция. Пусть последовательности* S_n, t_n *определены равенствами*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(k),\ t_n := \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx.\ (n \in \mathbb{N})$$

Тогда последовательность $S_n - t_n$ *сходится и*

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} (S_n - t_n) \leqslant f(1).$$

▲ Функция f убывает на $[1, \infty)$, поэтому

$$f(k+1) \leqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k).\ (k \in \mathbb{N}) \tag{14}$$

Последовательность $S_n - t_n$ допускает представление

$$S_n - t_n = \sum_{k=1}^{n} \left(f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \right). \qquad (n \in \mathbb{N})$$

В силу (14) справедливы оценки

$$0 \leqslant f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k) - f(k+1).$$

Поэтому последовательность $S_n - t_n$ возрастает и

$$S_n - t_n \leqslant f(1) - f(n+1) \leqslant f(1).$$

Поскольку монотонная и ограниченная последовательность сходится, то все доказано. ▲

Теорема 6. ***(Интегральный признак сходимости).*** *Пусть* $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ *— положительная убывающая на* $[1, \infty)$ *функция. Тогда числовой ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \tag{15}$$

сходится в том и только в том случае, когда существует конечный предел последовательности

$$t_n = \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx.$$

▲ Теорема 6 есть непосредственное следствие леммы 3. ▲

Замечание. Лемма 3 позволяет выяснить асимптотику частичных сумм ряда (15) и в случае его расходимости. Например, из нее вытекает сходимость последовательностей

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \frac{n^{1-p}}{1-p} \qquad (0 < p < 1);$$

для доказательства достаточно применить лемму 3 в случае $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ $(0 < p \leqslant 1)$.

Пример 2. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}$$

сходятся при $p > 1$ и расходятся при $p \leqslant 1$. Действительно, достаточно воспользоваться теоремой 6; для первого ряда достаточно положить $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$; для второго ряда — $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^p(x+1)}$. Отметим, что для второго ряда признак Раабе не действует $(\mathcal{R} = 1)$.

5. Неравенства Абеля

Пусть $c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_p$ — комплексные числа. Положим

$$D_1 = d_1, \ D_2 = d_1 + d_2, \ldots, D_p = d_1 + d_2 + \ldots + d_p, \ D_0 = 0.$$

Из определения чисел D_k вытекают равенства

$$d_k = D_k - D_{k-1}. \ (k = 1, \ldots, p) \tag{16}$$

Рассмотрим сумму $S := c_1 d_1 + c_2 d_2 + \ldots + c_p d_p$. В силу (16)

$$S = c_1 D_1 + c_2(D_2 - D_1) + \ldots + c_p(D_p - D_{p-1}) = c_p D_p - \sum_{k=1}^{p-1} D_k(c_{k+1} - c_k). \tag{17}$$

Равенство (17) называют преобразованием Абеля. Оно представляет дискретный аналог интегрирования по частям.

Лемма 4. *Пусть*

$$L = \max\{|D_k|, \ k = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{p} c_k d_k\right| \leqslant L \left(|c_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |c_{k+1} - c_k|\right). \tag{18}$$

▲ Оценка (18) вытекает из равенства (17) и определения числа L. ▲

Лемма 5. *Пусть* $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_p \geqslant 0,\ d_k \in \mathbb{R}$ *и*

$$A \leqslant D_k \leqslant B. \ (k = 1, \ldots, p)$$

Тогда

$$Ac_1 \leqslant \sum_{k=1}^{p} c_k d_k \leqslant Bc_1. \tag{19}$$

▲ Действительно,

$$\sum_{k=1}^{p} c_k d_k = c_p D_p + \sum_{k=1}^{p-1} D_k(c_k - c_{k+1}) \geqslant c_p A + \sum_{k=1}^{p-1} A(c_k - c_{k+1}) = Ac_1,$$

что и доказывает левое из неравенств (19). Правое неравенство устанавливается аналогично. ▲

Оценки (18), (19) именуем далее неравенствами Абеля.

6. Признаки Абеля и Дирихле

Скажем, что последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ имеет ограниченное изменение, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_{k+1} - z_k|.$$

Лемма 6. *Последовательность с ограниченным изменением сходится.*

▲ Действительно,

$$|z_{n+p} - z_n| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |z_{k+1} - z_k|, \tag{20}$$

а поскольку последовательность z_n имеет ограниченное изменение, то оценка (20) влечет за собой фундаментальность этой последовательности. ▲

Упражнение 1. *Доказать утверждения:*

а) всякая монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел имеет ограниченное изменение;

б) всякая действительная последовательность с ограниченным изменением представима в виде разности убывающих ограниченных последовательностей;

в) последовательность $z_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ имеет ограниченное изменение в том и только в том случае, если обе последовательности $Re\ z_n$ и $Im\ z_n$ имеют ограниченное изменение.

Признаки Абеля и Дирихле относятся к рядам вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \tag{21}$$

где $a_k,\ b_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N})$. Вместе с рядом (21) удобно рассматривать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{22}$$

Обозначим через B_n $(n \in \mathbb{N})$ частичные суммы ряда (22). Применяя неравенство Абеля (18) к последовательностям $c_k = a_{n+k},\ d_k = b_{n+k}$ $(k = 1, \ldots, p)$, приходим к оценке

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m b_m\Big| \leqslant L_{np}\left(|a_{n+p}| + \sum_{m=n+1}^{n+p-1} |a_{m+1} - a_m|\right), \tag{23}$$

где

$$L_{np} := \max\{|B_{n+k} - B_n|,\ k = 1, \ldots, p\}. \tag{24}$$

Теорема 7. ***(Признак Абеля).*** *Пусть последовательность a_n имеет ограниченное изменение, а ряд (22) сходится. Тогда ряд (21) сходится.*

▲ Достаточно установить фундаментальность последовательности частичных сумм ряда (21). С этой целью воспользуемся неравенством (23). Так как последовательность a_n имеет ограниченное изменение, то найдется такая положительная постоянная M, что

$$|a_{n+p}| + \sum_{m=n+1}^{n+p-1} |a_{m+1} - a_m| < M$$

для любых натуральных чисел n, p. Последовательность B_n частичных сумм ряда (22) фундаментальна. Для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что $L_{np} < \dfrac{\varepsilon}{M}$ при $n \geqslant N$ и любом натуральном p.

Используя (23), (24), приходим к оценке

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m b_m\Big| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

в которой $n \geqslant N,\ p \in \mathbb{N}$. Фундаментальность последовательности частичных сумм ряда (21) (а вместе с ней и теорема 7) доказана. ▲

Теорема 8. ***(Признак Дирихле).*** *Пусть последовательность a_n имеет ограниченное изменение и стремится к нулю. Пусть последовательность B_n частичных сумм ряда (22) ограничена. Тогда ряд (21) сходится.*

▲ Так как последовательность B_n ограничена, то $|B_n| < B\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $L_{np} \leqslant 2B$ $(n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N})$. Применяя (23), (24), получаем неравенство

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m b_m\Big| \leqslant 2B\left(|a_{n+p}| + \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_{m+1} - a_m|\right).$$

В условиях теоремы последовательность a_n имеет ограниченное изменение и стремится к 0. Для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, что при $n \geqslant N$ и любом натуральном p справедлива оценка

$$|a_{n+p}| + \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_{m+1} - a_m| < \frac{\varepsilon}{2B}.$$

Объединяя установленные оценки, получаем, что

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m b_m\Big| < 2B\frac{\varepsilon}{B} = \varepsilon.\ (n \geqslant N,\ p \in \mathbb{N})$$

Это и приводит к требуемому результату. ▲

Следствие. ***(Признак Лейбница).*** *Пусть последовательность a_n из $\mathbb{R}$ убывает и стремится к* 0*. Тогда знакочередующийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

сходится.

▲ Достаточно положить $b_n = (-1)^{n-1}$ и применить признак Дирихле. ▲

Пример 2. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha, \tag{25}$$

где a_n убывает и стремится к 0, $\alpha \in \mathbb{R}$. При $\alpha = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ все члены ряда (25) равны 0, поэтому ряд сходится.

Пусть $\alpha \neq k\pi$, положим $b_n = \sin n\alpha,\ B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Используя формулу $\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, найдем, что

$$B_n \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right].$$

Отсюда

$$B_n \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|},$$

поэтому частичные суммы ряда (22) с $b_k = \sin k\alpha$ ($k \in \mathbb{N}$) равномерно ограничены. В силу признака Дирихле ряд (25) сходится.

Упражнение 2. *Установить, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^p}$$

условно сходится, если $0 < p \leqslant 1,\ 0 < \alpha < \pi.$

§31. Действия с числовыми рядами

1. Перестановки членов ряда

Пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция множества натуральных чисел. Тогда ряд $\sum a_{\varphi(k)}$ называют перестановкой ряда $\sum a_k$. Может случиться, что исходный ряд сходится, а ряд, полученный из него перестановкой, расходится. Для абсолютно сходящихся рядов комплексных чисел подобное невозможно.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum a_k$ *абсолютно сходится, то и ряд, полученный из него перестановкой, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

▲ Пусть вначале все элементы ряда $\sum a_k$ неотрицательны: $a_k \geqslant 0\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Обозначим через A его сумму. Если $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — биекция, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leqslant A.$$

Следовательно, ряд $\sum a_{\varphi(k)}$ сходится и его сумма A' не превосходит $A : A' \leqslant A$. С другой стороны, исходный ряд может быть получен перестановкой $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ряда $\sum a_{\varphi(k)}$, поэтому $A \leqslant A'$. В случае положительных рядов все доказано.

Пусть теперь элементы ряда $\sum a_k$ действительны: $a_k \in \mathbb{R}\ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|a_k| \geqslant a_k^+ := \frac{|a_k| + a_k}{2} \geqslant 0,\ |a_k| \geqslant a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2} \geqslant 0$$

и $a_k = a_k^+ - a_k^-$ ($k \in \mathbb{N}$). Следовательно,

$$\sum a_{\varphi(k)} = \sum (a_{\varphi(k)}^+ - a_{\varphi(k)}^-) = \sum a_k^+ - \sum a_k^- = \sum a_k,$$

т.е. утверждение верно для рядов с действительными членами.

Случай $a_k \in \mathbb{C}$ ($k \in \mathbb{N}$) сводится уже к рассмотренному. Достаточно заметить, что абсолютная сходимость ряда $\sum a_k$ эквивалентна абсолютной сходимости рядов $\sum Re\ a_k$, $\sum Im\ a_k$. ▲

Аналогичный факт для условно сходящихся рядов уже неверен. Например, справедлива

Теорема. ***(Римана).*** *Пусть ряд* $\sum a_k$ *условно сходится и* $a_k \in \mathbb{R}\ \forall\, k \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* A *из расширенной числовой прямой* $\overline{\mathbb{R}}$ *существует такая биекция* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что*

$$\sum a_{\varphi(k)} = A.$$

Этот результат далее не используется, поэтому доказательство теоремы Римана не приводится. Его можно найти, например, в [7], [20], где обсуждаются также обобщения теоремы Римана на случай комплексных и векторных рядов.

Теорема 1 позволяет приписать значения сумме вида

$$\sum_{t \in \mathbb{N}_0} a(t), \tag{1}$$

где $\mathbb{N}_0$ — счетное множество произвольной природы, $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ — функция на множестве $\mathbb{N}_0$. Именно, пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ — биекция множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ на множество $\mathbb{N}_0$. Тогда определена суперпозиция $a \circ \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Естественно положить

$$\sum_{t \in \mathbb{N}_0} a(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a(\varphi(n)), \tag{2}$$

если ряд в правой части (2) сходится. В общем случае правая часть (2) может зависеть от выбора биекции $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$. Однако если ряд в правой части (2) абсолютно сходится, то для любых двух биекций $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(\varphi_1(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a(\varphi_2(n)),$$

вытекающее из теоремы 1; в этом случае даваемое равенством (2) определение суммы (1) корректно.

В частности, счетным является множество $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Это позволяет определить сумму двойного ряда

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}_0} a_{kl}.$$

Если множество $\mathbb{N}_0$ совпадает со сдвигом множества $\mathbb{N}$, т.е. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} + m$ $(m \in \mathbb{Z})$, то, не оговаривая каждый раз особо, полагаем в определении (2) $\varphi(n) = n + m$. Например, под суммой ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \tag{3}$$

понимается предел последовательности его частичных сумм $S_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Естественным образом вводятся понятия абсолютной и условной сходимости ряда (3).

2. Сложение и умножение рядов

Пусть заданы два ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \tag{4}$$

где $a_k,\ b_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Суммой этих рядов называют ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \tag{5}$$

составленный из сумм элементов рядов (4).

Теорема 2. *Сумма сходящихся рядов есть сходящийся ряд; справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \tag{6}$$

▲ Пусть $A_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n,\ B_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ — частичные суммы рядов (4). Тогда $A_n + B_n$ — частичная сумма ряда (5). Если $A_n \to A,\ B_n \to B$, то $A_n + B_n \to A + B$, что и доказывает равенство (6). ▲

Более сложно определяется произведение двух рядов. Положим $c_n = a_0 b_n + {} + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \tag{7}$$

будем называть произведением рядов (4). Его частичная сумма $C_n := c_0 + c_1 + {} + \ldots + c_n$ не равна произведению частичных сумм $A_n,\ B_n$ рядов (4). В общем случае произведение двух сходящихся рядов может оказаться расходящимся рядом (см. упражнение 1). Ниже используется

Лемма 1. *Пусть* $u_k, v_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| < \infty, \qquad v_n \to 0.$$

Тогда последовательность $w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0$ *сходится к* 0.

▲ Так как $v_n \to 0$, то последовательность v_n ограничена: $|v_n| < M\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберем номер n_0 так, что

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

При $n > n_0$ справедлива оценка

$$|w_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} |u_k||v_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k||v_{n-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} |u_k||v_{n-k}| + M \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n_0} |u_k||v_{n-k}| + M \sum_{k=n_0+0+1}^{\infty} |u_k| < \sum_{k=0}^{n_0} |u_k||v_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Так как $v_n \to 0$, то первое слагаемое в правой части (8) может быть сделано меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant n_1 > n_0$. Следовательно, $|w_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_1$, что и доказывает лемму. ▲

Теорема 3. *Пусть хотя бы один из рядов (4) абсолютно сходится. Тогда ряд (7) сходится и его сумма равна произведению сумм рядов (4).*

▲ Пусть, для определенности, абсолютно сходится ряд $\sum a_k$. Обозначим, как и ранее, через A_n, B_n, C_n частичные суммы рядов (4), (7). Тогда

$$C_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0.$$

Положим $\beta_n := B_n - B$ $(n = 0, 1, \ldots)$; тогда $\beta_n \to 0$. Заменяя B_n на $B + \beta_n$, получаем

$$\begin{aligned} C_n &= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) = \\ &= A_n B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0. \end{aligned}$$

Справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} A_n B = AB, \ \lim_{n\to\infty} (a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0) = 0.$$

Левое равенство очевидно, а правое — вытекает из леммы 1: достаточно положить $u_n = a_n, \ v_n = \beta_n$. Таким образом, $C_n \to AB$. ▲

Замечание. Если оба ряда (4) абсолютно сходятся, то их произведение также абсолютно сходящийся ряд.

Упражнение 1. *Если* $a_k = b_k = \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *то ряды (4) сходятся, но их произведение расходится. Доказать.*

Упражнение 2. *Пусть* $a_0 = 2, \ b_0 = -1, \ a_n = 2^{n-1}, \ b_n = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда оба ряда (4) расходятся, но их произведение абсолютно сходится: проверьте равенства* $c_0 = -2, \ c_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. Бесконечные произведения

Пусть z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность комплексных чисел. Выражение вида

$$z_1 z_2 \cdots z_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} z_k \tag{9}$$

называют бесконечным произведением членов z_n данной последовательности. Произведение $P_n := z_1 z_2 \cdots z_n$ первых n членов называют частичным произведением выражения (9). Если последовательность P_n сходится к конечному, отличному от нуля пределу P, то произведение (9) называют сходящимся, а число P — значением произведения. Это записывают таким образом :

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Поскольку $z_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}}$, то в случае сходящегося произведения последовательность z_n стремится к 1. Полагая $z_n := 1 + \alpha_n$, перепишем бесконечное произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n). \tag{10}$$

В соответствии с только что сказанным, для сходимости произведения (10) необходимо, чтобы $\alpha_n \to 0$.

Теорема 4. ***(Достаточное условие сходимости произведения).*** *Пусть $\alpha_n \neq -1\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum \alpha_n$ абсолютно сходится. Тогда бесконечное произведение (10) сходится.*

▲ Представим комплексное число $z_n = 1 + \alpha_n$ в тригонометрической форме

$$z_n = |z_n|(\cos\varphi_n + i\sin\varphi);$$

здесь $|z_n|$ — модуль числа z_n, φ_n — его аргумент, причем

$$-\pi < \varphi_n \leqslant \pi.\ (n = 1, 2, \ldots)$$

Если $t_n = \ln|z_n|$, то

$$z_n = e^{t_n}(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n).\ (n = 1, 2, \ldots)$$

Так как $\alpha_n = z_n - 1 \to 0$, то $\varphi_n \to 0$; при этом

$$\varphi_n \sim \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{Im\ z_n}{Re\ z_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|t_n|}{|\alpha_n|} = \frac{|\ln|z_n||}{|\alpha_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|\ln|1+\alpha_n||}{|\alpha_n|} = 1,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|\varphi_n|}{|\alpha_n|} \leqslant 1.$$

Поэтому абсолютно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n.$$

Обозначим через t, φ суммы этих рядов. В силу формулы Муавра (см., например, [12])

$$P_n = z_1 z_2 \cdots z_n = e^{t_1+t_2+\ldots+t_n}[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)].$$

Поэтому последовательность P_n сходится к числу $P := e^t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, что и доказывает теорему. ▲

Упражнение 3. *Доказать сходимость произведения*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) \qquad (x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z});$$

значительно сложнее доказывается, что это произведение совпадает с функцией $\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$ $(x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z})$ [3], [18].

§32. Функциональные последовательности

1. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности

Пусть E — некоторое множество. Предположим, что при любом натуральном n задана функция $f_n : E \to \mathbb{C}$; в этом случае говорят, что на E определена функциональная последовательность f_n. Фиксируем x_0 из E и образуем числовую последовательность $f_n(x_0)$. Если последовательность $f_n(x_0)$ сходится, то функциональная последовательность f_n называется сходящейся в точке x_0.

Определение 1. *Последовательность* $f_n : E \to \mathbb{C}$ *поточечно сходится на множестве* $E_1 \subset E$ *к функции* $f : E_1 \to \mathbb{C}$, *если* $f_n(x_0) \to f(x_0)\ \forall\, x \in E_1$.

Приведенное определение эквивалентно следующему: f_n поточечно сходится к f на множестве E_1, если для каждого x_0 из E_1 и каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon, x_0)$, что $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Число $n_0(\varepsilon, x_0)$ зависит и от ε, и от x_0.

Пример. $f(x) = x^n$, $x \in E = \mathbb{R}$. Множество E_1 совпадает с промежутком $(-1, 1]$, предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad \quad x = 1. \end{cases}$$

Заметим, что $f_n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \to e^{-1}$, $f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

В общем случае E_1 может составлять часть множества E. Представляет интерес задача о полном описании множества E_1, на котором сходится функциональная последовательность $f_n : E \to \mathbb{C}$. Вопрос сводится к исследованию сходимости числовой последовательности $f_n(x_0)$, зависящей от параметра x_0. Поточечная сходимость функциональной последовательности $f_n : E \to \mathbb{C}$ на множестве $E_1 \subset E$ к функции $f : E_1 \to \mathbb{C}$ будет обозначаться символом $f_n \xrightarrow{E_1} f$.

Определение 2. *Последовательность $f_n : E \to \mathbb{C}$ равномерно сходится на множестве $E_1 \subset E$ к функции $f : E_1 \to \mathbb{C}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $(n \geqslant n_0,\ x \in E_1)$.*

Очевидно, что из равномерной сходимости функциональной последовательности вытекает поточечная сходимость, обратное, вообще говоря, неверно. Например, функциональная последовательность $f(x) = x^n$ на отрезке $[0,1]$ сходится поточечно, но не сходится равномерно. Равномерную сходимость последовательности $f_n : E \to \mathbb{C}$ на множестве $E_1 \subset E$ к функции $f : E_1 \to \mathbb{C}$ будем обозначать символом $f_n \overset{E_1}{\rightrightarrows} f$.

2. Критерий Коши равномерной сходимости

Как и в п. 1, E — произвольное множество, $f_n : E \to \mathbb{C},\ (n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность комплекснозначных функций на множестве E.

Теорема 1. ***(Критерий Коши).*** *Для того, чтобы функциональная последовательность $f_n : E \to \mathbb{C}$ равномерно сходилась на множестве $E_1 \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in E_1,\ p \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

▲ **Необходимость.** Пусть $f_n \overset{E_1}{\rightrightarrows} f$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\ \forall\ n \geqslant n_0$ и x из E_1. Поскольку $n + p > n \geqslant n_0$, то и $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\ \forall\, n \geqslant n_0$, $x \in E_1$, $p \in \mathbb{N}$. Но тогда

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0,\ x \in E_1,\ p \in \mathbb{N}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (1). При любом x из E_1 последовательность $f_n(x)$ фундаментальна, поэтому она сходится. Положим

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x). \qquad \forall\, x \in E_1$$

Функция f определена на множестве E_1 и $f_n \xrightarrow{E_1} f$. Перейдем в неравенстве (1) к пределу при $p \to \infty$. В пределе получим неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \forall\, x \in E_1,\ n \geqslant n_0.$$

Это означает, что $f_n \overset{E_1}{\rightrightarrows} f$. ▲

В качестве примера рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx. \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

Здесь $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$. Если ряд $\sum |a_k|$ сходится, то функциональная последовательность (2) равномерно сходится на всей действительной прямой. В самом деле, так как $|\cos kx| \leqslant 1 \; \forall\, x \in \mathbb{R},\; k \in \mathbb{N}$, то

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cos kx\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|. \tag{3}$$

Так как ряд $\sum |a_k|$ сходится, то правая часть (3) стремится к 0 при $n \to \infty$. Теперь равномерная сходимость функциональной последовательности (2) вытекает из критерия Коши.

3. Равномерная сходимость и непрерывность

Пусть E — подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Это позволяет говорить о непрерывности функции $f : E \to \mathbb{C}$. Функцию $f : E \to \mathbb{C}$ называют непрерывной в точке $x_0 \in E$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из соотношений $|x - x_0| < \delta,\; x \in E$ вытекает неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Функция, непрерывная в каждой точке множества E, называется непрерывной на множестве E.

Теорема 2. *Если функциональная последовательность $f_n : E \to \mathbb{C}$ равномерно на множестве E сходится к функции $f : E \to \mathbb{C}$ и все функции f_n непрерывны в точке x_0 из E, то и предельная функция f также непрерывна в точке x_0.*

▲ Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем номер n_0 так, что $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при $n \geqslant n_0$ и любом x из E. Фиксируем номер $m \geqslant n_0$ так, что $|f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \; \forall\, x \in E$. Функция $f_m : E \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке x_0, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что из соотношений $|x - x_0| < \delta,\; x \in E$ вытекает неравенство

$$|f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Для подобных x верны оценки

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f(x_0)| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, если $|x - x_0| < \delta,\; x \in E$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. функция f непрерывна в точке x_0. ▲

В теореме 2 равномерную сходимость $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$ нельзя заменить поточечной. Действительно, пусть $E = [0, 1],\; f_n(x) = x^n$. В этом случае последовательность непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций поточечно сходится к разрывной в точке $x = 1$ функции.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если все функции $f_n : E \to \mathbb{C}$ непрерывны на множестве E и $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$, то функция $f : E \to \mathbb{C}$ непрерывна на E.*

4. Интегрирование функциональных последовательностей

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется интегрируемой по отрезку $[a, b]$, если функции $u := Re\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $v := Im\ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы по отрезку $[a, b]$. Полагаем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [u(x) + iv(x)]dx := \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx.$$

Функция $f = u + iv$ интегрируема по Риману ($f \in \mathcal{R}[a, b]$) в том и только в том случае, если вектор-функция $(u(x), v(x))$ интегрируема по отрезку $[a, b]$. Свойства интеграла от комплексной функции f выводятся из аналогичных свойств интегралов от вектор-функций. В частности, сохраняются свойства линейности и аддитивности интеграла; справедливы критерии Римана, Дюбуа-Реймона, Лебега интегрируемости функции; верно неравенство

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx. \ (a < b) \tag{4}$$

Теорема 4. *Если все функции $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ интегрируемы по отрезку $[a, b]$ и $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$, то функция f интегрируема по отрезку $[a, b]$ и*

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx. \tag{5}$$

▲ 1) Пусть $a < b$, f_n — действительные интегрируемые функции и $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем номер n_0 так, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ и произвольном x из отрезка $[a, b]$. Следовательно,

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon. \tag{6}$$

Из оценки (6) вытекает ограниченность функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Поскольку верхний и нижний интегралы обладают свойством монотонности, а функция f_n интегрируема по отрезку $[a, b]$, то оценка (6) влечет за собой неравенства

$$\int_a^b f_n(x)dx - \varepsilon(b - a) < I_*(f) \leqslant I^*(f) \leqslant \int_a^b f_n(x)dx + \varepsilon(b - a). \tag{7}$$

Следовательно, $|I^*(f) - I_*(f)| < 2\varepsilon(b - a)$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $I_*(f) = I^*(f)$, т.е. $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Из (7) вытекает неравенство

$$\Big|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\Big| < \varepsilon(b - a) \qquad \forall\ n \geqslant n_0,$$

что и доказывает (5) в рассматриваемом случае.

2) Если f_n — комплекснозначные интегрируемые функции и $f_n \overset{E}{\rightrightarrows} f$, то $Re\ f_n \overset{E}{\rightrightarrows} Re\ f$, $Im\ f_n \overset{E}{\rightrightarrows} Im\ f$ теорема 4 вытекает из своего действительного варианта. ▲

В условиях теоремы 4 $|f_n - f| \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0$, поэтому

$$\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \to 0.$$

Поскольку для любого x_0 из $[a, b]$ $(a < b)$

$$\Big|\int\limits_{x_0}^x f_n(t)dt - \int\limits_{x_0}^x f(t)dt\Big| \leqslant \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|xd,$$

то в условиях теоремы 4

$$\int\limits_{x_0}^x f_n(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^x f(t)dt. \tag{8}$$

Замечание. В теореме 4 равномерную сходимость $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ нельзя заменить поточечной $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$. Действительно, пусть функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ определена равенством

$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Функциональная последовательность $f_n(x) := ng(nx)$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi,\ n \in \mathbb{N})$ поточечно сходится к функции $f(x) \equiv 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, $f_n \xrightarrow{[0,\pi]} 0$. В то же самое время

$$\int\limits_0^\pi f_n(x)dx = \int\limits_0^\pi ng(nx)dx = \int\limits_0^\pi g(x)dx = 2 \neq \int\limits_0^\pi f(x)dx = 0.$$

5. Дифференцирование функциональных последовательностей

Функция $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее действительная часть $u = Re\ f$ и мнимая часть $v = Im\ f$ дифференцируемы в точке x_0. Полагаем $f'(x_0) := u'(x_0) + iv'(x_0)$. Функция $f = u + iv$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда вектор-функция $(u(x), v(x))$ дифференцируема в точке x_0. Функцию $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ назовем непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если ее производная $f'(x)$ есть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

Теорема 5. *Пусть $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ — последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций и 1) $f'_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi$; 2) последовательность $f_n(x_0)$ сходится при некотором x_0 из отрезка $[a, b]$. Тогда*

1) последовательность f_n равномерно на отрезке $[a,b]$ сходится к непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции f;

2) $f'(x) = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$.

▲ В силу формулы Ньютона-Лейбница

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt. \tag{9}$$

Положим $A = \lim f_n(x_0)$. Согласно соотношению (8)

$$\int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt;$$

поэтому правая часть (9) равномерно сходится к функции

$$f(x) = A + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt. \tag{10}$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Дифференцируя (10) по x, приходим к равенству $f'(x) = \varphi(x)$, что доказывает второе утверждение теоремы. ▲

В условиях теоремы 5

$$f'(x) = [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \tag{11}$$

т.е. операции дифференцирования и предельного перехода перестановочны. Равномерную сходимость $f'_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi$ нельзя заменить поточечной. Действительно, пусть $f_n(x) = x/(1+n^2x^2)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N})$. Так как $-\frac{1}{2n} \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{2n}$ $(x \in [-1,1])$, то последовательность f_n равномерно на отрезке $[-1,1]$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$. Очевидно, что $f'(x) \equiv 0$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = 0 \\ 0, & \text{если} \quad 0 < |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Таким образом, равенство (11) при $x = 0$ несправедливо.

§33. Функциональные ряды

1. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда

Функциональным рядом называют ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \tag{1}$$

элементами которого являются функции $u_k : E \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Ряду (1) можно сопоставить функциональную последовательность $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ его частичных сумм. Функциональный ряд поточечно (равномерно) сходится на множестве $E_1 \subset E$, если последовательность его частичных сумм поточечно (равномерно) сходится на множестве E_1. Предельную функцию $S(x)$ последовательности $S_n(x)$ называют суммой ряда (1):

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x). \qquad (x \in E_1)$$

Лемма 1. ***(Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).*** *Для того, чтобы функциональный ряд (1) сходился равномерно на множестве $E_1 \subset E$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon. \qquad \forall\, x \in E_1,\ p \in \mathbb{N}.$$

▲ Лемма 1 есть переформулировка теоремы 32.1. ▲

Как нетрудно видеть, если ряд (1) сходится равномерно на множестве E и $\varphi : E \to \mathbb{C}$ — ограниченная функция, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x) u_k(x)$$

также равномерно сходится. Ряд (1) называют абсолютно сходящимся на множестве E, если на этом множестве сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|.$$

Понятия абсолютной и равномерной сходимости, вообще говоря, не связаны между собой. Однако имеет место достаточный признак, гарантирующий одновременно абсолютную и равномерную сходимость функциональных рядов.

Теорема 1. ***(Признак Вейерштрасса).*** *Пусть $|u_k(x)| \leqslant c_k\ \forall\, x \in E$ и последовательность c_k такова, что ряд $\sum c_k$ сходится. Тогда функциональный ряд (1) равномерно и абсолютно сходится на множестве E.*

▲ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку ряд $\sum c_k$ сходится, то найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| < \varepsilon$$

при всех x из E, $n \geqslant n_0$, $p \in \mathbb{N}$. Теперь теорема 1 вытекает из леммы 1. ▲

Существуют равномерно сходящиеся функциональные ряды, к которым признак Вейерштрасса неприменим. Пусть, например, все элементы ряда (1) суть постоянные на множестве E функции: $u_k(x) \equiv a_k$ $(x \in E)$. Если числовой ряд $\sum a_k$ сходится условно, то ряд (1) сходится равномерно, однако признак Вейерштрасса к нему неприменим.

2. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Рассмотрим функциональный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x), \tag{2}$$

где $a_k,\ b_k : E \to \mathbb{C}$ — ограниченные на множестве E функции. Наряду с рядом (2) рассмотрим функциональные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1}(x) - a_k(x)|, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x) \tag{4}$$

и последовательности $A_n(x),\ B_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ их частичных сумм. Из неравенств (30.23), (30.24) вытекает оценка

$$\Big|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m(x) b_m(x)\Big| \leqslant L_{np}(x)\left(|a_{n+p}(x)| + \sum_{m=n+1}^{n+p-1} |a_{m+1}(x) - a_m(x)|\right), \tag{5}$$

где

$$L_{np}(x) := \max\{|B_{n+k}(x) - B_n(x)|,\ k = 1, \ldots, p\}. \tag{6}$$

Теорема 2. ***(Признак Абеля).*** *Пусть функциональная последовательность $A_n(x)$ равномерно ограничена на множестве E, т.е.*

$$A_n(x) \leqslant M_1 \qquad \forall\, x \in E,\ n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Пусть ряд (4) равномерно сходится на множестве E. Тогда ряд (2) равномерно сходится на множестве E.

▲ Из оценки (7) вытекает существование такой положительной постоянной M, что

$$|a_{n+p}(x)| + \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_{m+1}(x) - a_m(x)| < M. \qquad \forall\, x \in E,\ n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Последовательность $B_n(x)$ частичных сумм ряда (4) равномерно сходится, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n_0, что

$$|B_m(x) - B_n(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad \forall\, x \in E \text{ и } m \geqslant n \geqslant n_0. \tag{9}$$

Объединяя (6), (8), (9), приходим к оценке

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\Big| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

в которой $n \geqslant n_0$, p — любое натуральное число, $x \in E$. Теперь доказываемое утверждение следует из леммы 1. ▲

Следствие. *Пусть a_n — неотрицательные ограниченные на множестве E функции и последовательность $a_n(x)$ монотонно убывает при любом x из E. Если ряд (4) равномерно сходится на множестве E, то и ряд (2) равномерно сходится на множестве E.*

Теорема 3. ***(Признак Дирихле).*** *Пусть $a_n \overset{E}{\rightrightarrows} 0$ и ряд (3) равномерно сходится на множестве E, а последовательность $B_n(x)$ частичных сумм ряда (4) равномерно ограничена. Тогда ряд (2) равномерно сходится на множестве E.*

▲ Доказательство проходит по схеме, использованной при доказательстве признака Дирихле для числовых рядов. Необходимо лишь проследить за равномерностью полученных оценок. ▲

Следствие. *Пусть* a_n *— неотрицательные ограниченные на множестве* E *функции, последовательность* a_n *монотонно убывает и* $a_n \overset{E}{\rightrightarrows} 0$. *Пусть последовательность* $B_n(x)$ *частичных сумм ряда (4) равномерно ограничена. Тогда ряд (2) равномерно сходится на множестве* E.

Примеры на применение теорем 1-3 и следствий из них обсуждаются далее. Иногда теоремы 30.7, 30.8 и близкие к ним признаки равномерной сходимости функциональных рядов связывают с именами Дюбуа-Реймона, Дедекинда и Харди[8] (см., например, [4]).

3. Сумма равномерно сходящегося функционального ряда

Как доказывалось ранее, сумма конечного числа непрерывных (интегрируемых, дифференцируемых) функций есть снова непрерывные (интегрируемые, дифференцируемые) функции. При этом интеграл (производная) суммы функций равен сумме интегралов (производных) от соответствующих функций. Ниже аналогичные свойства устанавливаются для сумм функциональных рядов.

Теорема 4. *Пусть* E *— подмножество евклидового пространства* $\mathbb{R}^m$, $u_k : E \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *— функции на множестве* E *и ряд (1) равномерно сходится на множестве* E. *Тогда 1) если все функции* $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *непрерывны в точке* x_0, *то и сумма ряда (1) также непрерывна в точке* x_0; *2) если все функции* $u_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *непрерывны на множестве* E, *то и сумма ряда (1) непрерывна на множестве* E.

▲ Достаточно применить теоремы $32.2, 32.3$ к последовательности $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ частичных сумм ряда (1). ▲

Говорят, что функциональный ряд (1), составленный из интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций $u_k : [a, b] \to \mathbb{C}$, можно почленно интегрировать, если его сумма $S : [a, b] \to \mathbb{C}$ интегрируема по $[a, b]$ и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \Big[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\Big]dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_k(x)dx. \tag{10}$$

[8] Г.Харди (1877-1947) — английский математик

Теорема 5. *Если функции $u_k(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и ряд (1) сходится равномерно на этом отрезке, то ряд (1) допускает почленное интегрирование.*

▲ В условиях теоремы все частичные суммы $S_n(x)$ ряда (1) интегрируемы по отрезку $[a,b]$. В силу теоремы 32.4 сумма $S(x)$ этого ряда интегрируема по отрезку $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \Big[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\Big]dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)xd\Big] = \sum_{k=1}^{i} nfty \int\limits_a^b u_k(x)dx,$$

что и приводит к равенству (10). ▲

Если сумма ряда (1) и все его члены дифференцируемые на $[a,b]$ функции и выполняется равенство

$$S'(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x), \tag{11}$$

то говорят, что ряд (1) допускает почленное дифференцирование.

Теорема 6. *Пусть все функции $u_k : [a,b] \to \mathbb{C}$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ и ряд (1) сходится при некотором x_0 из $[a,b]$. Пусть ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда ряд (1) допускает почленное дифференцирование.

▲ Достаточно применить теорему 32.5 к последовательности $S_n(x)$ частичных сумм ряда (1). ▲

Теоремы 5, 6 можно рассматривать как обобщения свойства линейности операций интегрирования и дифференцирования на бесконечное число слагаемых.

§34. Степенные ряды

1. Радиус сходимости степенного ряда

Степенным рядом называют функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1}$$

Здесь $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ — комплексные числа, называемые коэффициентами разложения. Если положить $u_0(z) = c_0,\ u_n(z) = c_n z^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то ряд (1) совпадает с функциональным рядом $u_0(z) + u_1(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots$, поэтому можно говорить о поточечной, абсолютной и равномерной сходимости ряда (1).

Существенную роль далее играет неотрицательная последовательность $l_n = \sqrt[n]{|c_n|}$ и ее верхний предел

$$l = \varlimsup_{n\to\infty} l_n. \tag{2}$$

Если последовательность l_n не ограничена сверху, то считаем $l = \infty$. В этом случае ряд (1) сходится лишь при $z = 0$. Действительно, если $z \neq 0$, то последовательность $\sqrt[n]{|c_n z^n|} = l_n|z|$ не ограничена сверху; расходимость ряда (1) вытекает из признака Коши.

Теорема 1. *Пусть $l < \infty$. Тогда ряд (1) абсолютно сходится, если $l|z| < 1$, и расходится, если $l|z| > 1$.*

▲ Применим к числовому ряду $\sum u_n(z)$ (z — фиксированное комплексное число, $u_n(z) = c_n z^n$) признак Коши. В данном случае

$$\mathcal{K} := \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}|z| = l|z|.$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно. ▲

Следствие 1. *Если $l = 0$, то ряд (1) абсолютно сходится при любом z из $\mathbb{C}$.*

Следствие 2. *Если $0 < l < \infty$,*

$$R := \frac{1}{l}, \tag{3}$$

то ряд (1) абсолютно сходится в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ и расходится во внешности круга $B(0, R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$.

Равенство (3) называют формулой Коши-Адамара, число R — радиусом сходимости, $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ — кругом сходимости степенного ряда (1). Формулой (3) можно пользоваться и при $l = 0$, и при $l = \infty$, если считать $\dfrac{1}{0} = +\infty,\ \dfrac{1}{\infty} = 0$.

Пример 1. Радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{r}\right)^n \qquad (0<r<\infty)$$

равен r; в качестве r можно взять любое положительное число.

Пример 2. Рассмотрим степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n.$$

Первый из них сходится лишь при $z=0$. Второй ряд сходится при всех z; в этом случае радиус сходимости $R=\infty$.

Таким образом, радиус сходимости R ряда (1) может быть любым числом из промежутка $[0,\infty]$. Если $0<R<\infty$, то для исследования сходимости ряда (1) на окружности $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=R\}$ можно использовать признаки Раабе, Абеля и Дирихле.

2. Равномерная сходимость степенного ряда

Теорема 2. *Пусть радиус сходимости ряда (1) положителен: $R>0$. Если $0<\rho<R$, то ряд (1) равномерно сходится в круге $B(0,\rho)$.*

▲ Пусть $\rho<r<R$. Ряд (1) сходится при $z=r$, поэтому последовательность $c_n r^n$ является бесконечно малой, а следовательно, и ограниченной, т.е. $|c_n r^n|\leqslant M\ \forall\, n$. Если $|z|\leqslant\rho$, то

$$|c_n z^n| = \left|\frac{\rho}{r}\right|^n |c_n r^n| \leqslant M\left(\frac{\rho}{r}\right)^n.$$

Числовой ряд $M\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$ сходится, поэтому равномерная сходимость ряда (1) в круге $B(0,\rho)$ вытекает из признака Вейерштрасса (см. § 33). ▲

В круге $\{z\in\mathbb{C},\ |z|<R\}$ равномерной сходимости может и не быть. Это легко усмотреть на примере степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1. Частичные суммы этого ряда

$$S_n(z)=z+z^2+\ldots+z^n = z\frac{1-z^n}{1-z} \qquad (n=1,2,\ldots,\ |z|<1).$$

Сумма ряда $S(z)=\dfrac{z}{1-z}$ $(|z|<1)$. Разность $S_n(z)-S(z)$ не ограничена на круге $|z|<1$, поэтому рассматриваемый ряд не сходится равномерно в этом круге.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. *Сумма степенного ряда (1) является непрерывной функцией в круге сходимости.*

Для исследования равномерной сходимости ряда (1) можно использовать признаки Абеля и Дирихле.

Теорема 3. *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \tag{4}$$

сходится, то степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n \tag{5}$$

равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

▲ Теорема вытекает из признака Абеля равномерной сходимости (см. § 33), примененного к функциям $a_n(t)=t^n,\ b_n(t)\equiv d_n\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. ▲

Следствие. *Если степенной ряд (1) сходится в некоторой точке* z_1, *то он сходится равномерно на отрезке* $[0,z_1]:=\{z\in\mathbb{C}\mid z=tz_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$, *а его сумма* $S(z)$ *непрерывна на этом отрезке.*

▲ Достаточно применить теорему 3 в случае $d_n=c_nz_1^n,\ n=0,1,\ldots$. ▲

Теорема 4. *Пусть последовательность* c_n *имеет ограниченное изменение и стремится к нулю. Тогда ряд (1) равномерно сходится на множестве* $E=\{z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1,\ |z-1|\geqslant\delta\}$ *при любом* $\delta>0$.

▲ Теорема следует из признака Дирихле равномерной сходимости, примененного к функциям $a_n(z)\equiv c_n,\ b_n(z)=z^n\ (z\in E)$. ▲

3. Экспонента, косинус и синус комплексного аргумента

Степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{6}$$

при действительном z сходятся к функциям e^z, $\cos z$, $\sin z$ соответственно (см. § 17). Поэтому радиусы сходимости этих рядов равны $+\infty$, и ряды сходятся при всех z; в этом нетрудно убедиться и непосредственно, используя, например, признак Даламбера.

Определим экспоненту, косинус и синус комплексного аргумента z равенствами

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Это определение согласуется с принятыми в действительном анализе. Поскольку ряды (6) сходятся равномерно в каждом круге B_ρ $(0 < \rho < \infty)$, то функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ непрерывны на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Сохраняются основные свойства этих функций. Отметим некоторые из них

1°. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. (7)

▲ Используя определение e^z и умножение рядов, получаем последовательно

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1^n}{n!} + \frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\, \frac{z_2}{1!} + \ldots + \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} + \ldots + \frac{z_2^n}{n!} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}. \ ▲$$

2°. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ $\forall\, z \in \mathbb{C}$. (8)

Действительно,

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}(-1)^k + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k = \cos z + i \sin z. \ ▲$$

Заменяя в свойстве 2° iz на $-iz$, приходим к равенству

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{9}$$

Из (8), (9) вытекают соотношения

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{10}$$

Равенства (8)-(10) называют формулами Эйлера. Из (10) легко выводится основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Непосредственным следствием свойств 1°, 2° является свойство

3°. $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. (11)

▲ В самом деле, $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. ▲

Равенство (11) позволяет свести исследование экспоненты для комплексных аргументов к изучению экспоненты, косинуса и синуса для действительных значений аргумента. Отметим равенства

$$e^{i\pi} = -1, \ \cos iz = \operatorname{ch} z.$$

В частности, косинус есть неограниченная функция комплексного аргумента.

4°. $e^{z+2\pi i} = e^z$.

▲ $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$. ▲

Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ периодичны с периодами $2\pi i$ и 2π соответственно.

4. Биномиальный ряд

Применим предшествующие результаты к исследованию сходимости биномиального ряда

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} n \\ \\ \alpha \end{pmatrix} z^n. \tag{12}$$

Здесь $z\in\mathbb{C},\ \alpha\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix} n \\ \\ \alpha \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ \ (n=1,2,\ldots)$. В § 17 доказывалось, что если $z\in\mathbb{R}$, то при $|z|<1$ ряд (12) сходится и его сумма равна $(1+z)^\alpha$.

Области сходимости и абсолютной сходимости ряда (12), вообще говоря, различны. Они зависят от показателя α. Если $\alpha\in\mathbb{Z}_+$, т.е. α — неотрицательное целое число, то $\begin{pmatrix} n \\ \\ \alpha \end{pmatrix}=0$ при $n>\alpha$. В этом случае ряд (12) сводится к сумме конечного числа слагаемых, поэтому вопрос о его сходимости не возникает. Если же $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_+$, то ряд (12) бесконечен. Сведем результаты о его сходимости в таблицу.

α	Абсолютная сходимость	Сходимость
$\alpha>0,\ \alpha\overline{\in}\mathbb{N}$	$\|z\|\leqslant 1$	$\|z\|\leqslant 1$
$-1<\alpha<0$	$\|z\|<1$	$\|z\|\leqslant 1,\ z\neq -1$
$\alpha\leqslant -1$	$\|z\|<1$	$\|z\|<1$

Пусть $z\neq 0$. Положим

$$z_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\, z^n.$$

Тогда

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{n-\alpha}{n+1}\,|z| \text{ при } n>\alpha,$$

$$\mathcal{D}:=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=|z|.$$

В силу признака Даламбера ряд (12) абсолютно сходится, если $|z|<1$, и расходится, если $|z|>1$.

Рассмотрим вопрос о сходимости ряда (12) на окружности $|z|=1$. Применим признак Раабе в предельной форме. В рассматриваемом случае

$$\mathcal{R}=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n-\alpha}{n+1}\right)=\alpha+1,$$

поэтому ряд (12) абсолютно сходится при $\alpha>0$. Если же $\alpha<0$, то ряд (12) не сходится абсолютно на окружности $|z|=1$.

Осталось доказать условную сходимость ряда (12) в предположениях $-1<\alpha<0$, $|z|=1$, $z\neq -1$ и отсутствие его сходимости, если $\alpha\leqslant -1,\ |z|=1$.

Для доказательства первого утверждения достаточно положить

$$a_n(z) \equiv \left(\begin{array}{c} n \\ \\ \alpha \end{array} \right) (-1)^n, \qquad b_n(z) = (-1)^n z^n$$

и воспользоваться признаком Дирихле (теоремой 33.3); проверка условий этой теоремы предоставляется читателю.

Если же $\alpha \leqslant -1,\ |z| = 1$, то

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{n-\alpha}{n+1} \geqslant 1.$$

Поэтому общий элемент ряда (12) не стремится к 0, а ряд (12) расходится на окружности $|z| = 1$.

Замечание 1. Установленное в § 17 равенство

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ \\ \alpha \end{array} \right) x^n \tag{13}$$

$(-1 < x < 1)$ может быть распространено и на точки $-1,\ 1$. Пусть, например, $\alpha > 0$. Тогда ряд в правой части (13) сходится в точках $x = \pm 1$. В силу теоремы 3 степенной ряд (13) сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$, а его сумма непрерывна на этом отрезке. Левая часть (13) также непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому, устремляя x к ± 1, приходим к равенству (13) и для точек ± 1.

5. Почленное интегрирование степенного ряда

В этом и следующем пунктах предполагается, что радиус сходимости R ряда (1) положителен; $0 < R \leqslant \infty$.

Теорема 5. *Пусть степенной ряд (1) сходится на отрезке* $[a, b]$, $(a < b)$ *действительной оси* $\mathbb{R}$. *Тогда ряд (1) сходится равномерно на* $[a, b]$ *и допускает почленное интегрирование.*

▲ Согласно следствию теоремы 3 ряд (1) сходится равномерно на отрезках $[0, a]$, $[0, b]$, откуда вытекает его равномерная сходимость на отрезке $[a, b]$. Второе утверждение теоремы следует из теоремы 33.5. ▲

Теорему 5 можно использовать для разложения в степенные ряды некоторых функций. Приведем несколько примеров. Рассмотрим равенство

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + \ldots + (-1)^k t^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k. \tag{14}$$

Ряд в правой части (14) сходится при $|t| < 1$. Равенство (14) можно установить непосредственно, используя формулу для суммы геометрической прогрессии.

Пример 1. Интегрируя равенство (14) по отрезку $[0, x]$ ($|x| < 1$), приходим к уже известному разложению

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}. \tag{15}$$

Пример 2. Заменяя в (14) t на t^2, получаем равенство

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}. \qquad (|t| < 1)$$

Интегрируя далее равенство по отрезку $[0, x]$ ($|x| < 1$), имеем

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{16}$$

Ряды в правых частях (15), (16) сходятся при $x = 1$ (при $x = \pm 1$), поэтому разложения (15), (16) имеют место при $x \in (-1, 1]$ (при $x \in [-1, 1]$ соответственно).

Пример 3. По аналогичной схеме выводится разложение в степенной ряд функции $\arcsin x$. Используется вытекающее из биномиальной формулы Ньютона равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!}\, t^{2n}. \qquad (|t| < 1)$$

Его интегрирование по отрезку $[0, x]$, ($|x| < 1$) влечет равенство

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{17}$$

Ряд в правой части (17) сходится при $x = \pm 1$ (см. п. 30.3), поэтому по непрерывности разложение (17) распространяется на отрезок $[-1, 1]$.

Пример 4. Разложения в степенные ряды можно использовать для вычисления интегралов, не берущихся в элементарных функциях. Например, используя ряды (7) для функций e^z, $\sin z$, имеем

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}, \qquad \frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}; \tag{18}$$

при $t = 0$ полагаем $\dfrac{\sin t}{t} = 0$; тогда равенства (18) справедливы при всех t. Интегрирование (18) по отрезку $[0, x]$ приводит к равенствам

$$\int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \tag{19}$$

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}. \tag{20}$$

Формулы (19), (20) справедливы для любого действительного x.

6. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

Пусть $f : E \to \mathbb{C}$ — функция комплексного переменного, определенная на множестве $E \subset \mathbb{C}$, a — внутренняя точка множества E ($a \in \overset{\circ}{E}$), т.е. $B(a, \delta) \subset E$ при некотором $\delta > 0$. Если существует предел

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

то его называют производной функции f в точке a и обозначают символом $f'(a)$; в этом случае функцию f называют дифференцируемой в точке a. Например, функция $f(z) = z^n$ дифференцируема в каждой точке a и $f'(a) = na^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$). Для функций комплексного переменного сохраняются обычные правила дифференцирования. Например, производная от суммы функций равна сумме производных, производная от произведения находится по правилу Лейбница, справедливо правило дифференцирования суперпозиции функций. По индукции вводятся производные второго и более высоких порядков, обозначаемые символами $f''(z), \ldots, f^{(n)}(z)$ и т.д.

Обозначим через $f(z)$ сумму степенного ряда (1). Функция f определена и непрерывна на круге сходимости $|z| < R$; напомним, что R — радиус сходимости ряда (1). Он может быть вычислен по формуле Коши-Адамара (3). В наших предположениях $0 < R \leqslant \infty$. Если $0 < r < R$, то из формулы Коши-Адамара вытекает ограниченность последовательности $|c_n|r^n$ ($n = 0, 1, \ldots$). Таким образом,

$$|c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}, \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{21}$$

постоянная $M(r)$ зависит от r, но не зависит от n.

Сопоставим ряду (1) ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}, \tag{22}$$

полученный формальным дифференцированием ряда (1).

Теорема 6. *1) Радиусы сходимости рядов (1), (22) совпадают, 2) сумма $g(z)$ ряда (22) непрерывна в круге сходимости $|z| < R$; 3) сумма $f(z)$ ряда (1) дифференцируема в каждой точке круга сходимости $|z| < R$, причем $f'(z) = g(z)$, так что*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}. \tag{23}$$

▲ 1) Область сходимости ряда (22) совпадает с областью сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n.$$

Но
$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|},$$
поэтому совпадение радиусов сходимости рядов (1), (22) вытекает из формулы Коши-Адамара.

2) Непрерывность суммы $g(z)$ ряда (22) следует из результатов п.2.

3) Пусть $a\in\mathbb{C}$, $|a|<R$. Фиксируем числа ρ, r так, что $|a|<\rho<r<R$. Положим
$$u_k(z):=c_n(z^{n-1}+z^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})\qquad (n\in\mathbb{N},\ |z|\leqslant\rho).$$
Из (21) вытекает оценка
$$|u_n(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|c_n||z|^k|a|^{n-1-k}\leqslant\frac{M(r)}{r^n}n\rho^{n-1}\qquad (n\in\mathbb{N},\ |z|\leqslant\rho).\tag{24}$$
Поскольку $\rho<r$, то числовой ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M(r)}{r^n}n\rho^{n-1}$$
сходится (достаточно применить признак Даламбера). Поэтому оценка (24) влечет за собой равномерную сходимость функционального ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$$
в круге $|z|\leqslant\rho$. Сумма данного ряда непрерывна в этом круге. В частности,
$$\lim_{z\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_na^{n-1}=g(a).$$
Требуемый результат вытекает теперь из равенства
$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z).\qquad (|z|\leqslant\rho,\ z\neq a)\ \blacktriangle$$

К функции $g(z)$ можно применить теорему 6 поэтому
$$f''(z)=g'(z)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nz^{n-2},\tag{25}$$
радиус сходимости ряда (25) снова равен R. Такого рода рассуждения можно провести применительно к последующим производным. Таким образом, справедлива

Теорема 7. *1) Сумма $f(z)$ степенного ряда (1) имеет производные любого порядка в каждой точке круга сходимости. 2) Производная порядка k может быть получена путем k - кратного дифференцирования ряда (1), так, что*
$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}c_nn(n-1)\cdots(n-k+1)z^{n-k}.$$

Вычисляя значения функции $f(z)$ и ее производных $f^{(k)}(z)$ в точке $z = 0$, получаем

$$f(0) = c_0, \qquad f^{(k)}(0) = c_k k!.$$

Следовательно,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, z^k.$$

Правая часть (26) есть ряд Маклорена для функции f. Таким образом, разложение функции в степенной ряд есть обязательно разложение в ряд Маклорена.

Глава 7. Несобственные интегралы

§35. Несобственные интегралы по неограниченному промежутку

1. Определение несобственного интеграла по лучу $[\mathbf{a}, \infty)$

Пусть $f : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ — функция, интегрируемая по Риману на каждом отрезке $[a, x],\ a < x < \infty$. Введем функцию $\mathcal{F} : [a, \infty) \to \mathbb{C}$, полагая

$$\mathcal{F}(x) := \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty} \mathcal{F}(x)$, то он называется несобственным интегралом функции f по лучу $[a, \infty)$ и обозначается символом

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx; \tag{1}$$

в этом случае интеграл (1) именуют сходящимся; в противном случае говорят, что интеграл (1) расходится.

Сходимость интеграла (1) эквивалентна существованию конечного предела у функции $\mathcal{F}$ при $x \to \infty$. Поэтому любое условие существования конечного предела функции на ∞ влечет за собой некоторое условие сходимости интеграла (1). Например, сходимость интеграла (1) равносильна существованию конечного предела у последовательности $\mathcal{F}(x_n)$, соответствующей произвольной последовательности x_n $(x_n \geqslant a,\ x_n \to \infty)$, а значит, сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^\infty \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt,$$

частичными суммами которого являются члены последовательности $\mathcal{F}(x_{n+1}) - \mathcal{F}(x_n)$.

Теорема 1. ***(Критерий Коши сходимости интеграла)***. *Для сходимости интеграла (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $x_0 = x_0(\varepsilon)$, что*

$$\Big|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\Big| < \varepsilon \quad \forall\, x', x'' \in (x_0, \infty). \tag{2}$$

▲ Следует из критерия Коши существования предела функции на ∞ (теорема 7.4). ▲

Теорема 2. *Если $f(x) \geqslant 0$, то сходимость интеграла (1) эквивалентна ограниченности функции $\mathcal{F} : [a, \infty) \to \mathbb{R}$.*

▲ Вытекает из критерия существования предела у монотонной функции (теорема 7.5). ▲

Интеграл (1) называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_a^\infty |f(x)|dx. \tag{3}$$

Для исследования сходимости интеграла (3) можно использовать теорему 2. Сходящийся интеграл (1) называют условно сходящимся, если интеграл (3) расходится. Из критерия Коши вытекает, что абсолютно сходящийся интеграл сходится.

Пример 1. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} \qquad (p \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

В рассматриваемом случае $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$,

$$\mathcal{F}(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^p} = \begin{cases} \frac{x^{1-p}-1}{1-p}, & p \neq 1 \\ \ln x, & p = 1. \end{cases}$$

Поэтому интеграл (4) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \tag{5}$$

В данном случае

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Интегрирование по частям влечет за собой равенство

$$\int_c^d \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_c^d - \int_c^d \frac{\cos x}{x^2} dx, \ (0 < c < d),$$

в силу которого

$$\Big|\int_c^d \frac{\sin x}{x} dx\Big| \leqslant \frac{2}{c} + \int_c^d \frac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \frac{2}{c} + \int_c^d \frac{dx}{x^2} \leqslant \frac{2}{c} + \frac{1}{c} = \frac{3}{c}.$$

Теперь сходимость интеграла (5) вытекает из критерия Коши.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что сходимость интеграла (1) равносильна сходимости интеграла

$$\int_A^\infty f(x)dx \tag{6}$$

при любом $A \geqslant a$. Интеграл (6) иногда называют остатком интеграла (1).

2. Признаки сравнения

Вначале приведем общий признак сравнения. Ниже $f, g, h : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ — функции, интегрируемые по Риману на каждом отрезке $[a, x]$ $(a < x < \infty)$.

Теорема 3. *а) Если* $|f(x)| \leqslant g(x)\ \forall\, x \geqslant A$ $(A \in (a, \infty))$ *и интеграл*

$$\int\limits_a^\infty g(x)dx \tag{7}$$

сходится, то интеграл (1) абсолютно сходится.

б) Если $f(x) \geqslant h(x) \geqslant 0\ \forall\, x \geqslant A$ $(A \in (a, \infty))$ *и интеграл*

$$\int\limits_a^\infty h(x)dx \tag{8}$$

расходится, то и интеграл (1) также расходится.

▲ а) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как интеграл (7) сходится, то найдется такое число $x_0 = x_0(\varepsilon)$, что при $x'' > x' > x_0$

$$\Big|\int\limits_{x'}^{x''} g(t)dt\Big| = \int\limits_{x'}^{x''} g(t)dt < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\int\limits_{x'}^{x''} |f(t)|dt \leqslant \int\limits_{x'}^{x''} g(t)dt < \varepsilon,$$

что и влечет за собой абсолютную сходимость интеграла (1).

б) Вторая часть теоремы 3 вытекает из первой части. Действительно, если бы интеграл (1) сходился, то в силу соотношений $f(x) \geqslant h(x) \geqslant 0\ \forall\, x \geqslant A$ интеграл (8) также был бы сходящимся. ▲

В качестве функции сравнения часто рассматривается функция $\dfrac{L}{x^p}$ $(L \geqslant 0,$ $p \in \mathbb{R})$. Это приводит к частному признаку сравнения.

Теорема 4. *а) Если* $|f(x)| \leqslant \dfrac{L}{x^p}$ $(x \geqslant A > \max(0, a),\ L < \infty,\ p > 1)$, *то интеграл (1) абсолютно сходится.*

б) Если $f(x) \geqslant \dfrac{L}{x^p}$ $(x \geqslant A > \max(0, a),\ L > 0,\ p \leqslant 1)$, *то интеграл (1) расходится.*

▲ Теорема 4 следует из теоремы 3. ▲

Пример 3. Интегралы

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx, \qquad \int\limits_1^\infty \frac{\cos x}{x^p}dx \tag{9}$$

абсолютно сходятся при $p > 1$. Ниже будет установлена условная сходимость интегралов (9) при p из $(0, 1]$.

3. Неравенства Абеля для интегралов и вторая теорема о среднем

Лемма 1. *Пусть $g, h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — интегрируемые на отрезке $[\alpha, \beta]$ функции $(\alpha < \beta)$. Пусть $x_k = \alpha + \dfrac{k}{n}(\beta - \alpha)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.*

Тогда

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)h(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt.$$

▲ Положим

$$M_0 = \sup_{[\alpha,\,\beta]} |h(t)|,\ \omega_k = \sup\{|g(x') - g(x'')|, x_{k-1} \leqslant x', x'' \leqslant x_k\}\ (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$\Big| \int\limits_\alpha^\beta g(t)h(t)dt - \sum_{k=1}^n g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt\Big| = \Big| \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (g(t) - g(x_k))h(t)dt\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |g(t) - g(x_k)||h(t)|dt \leqslant M_0 \sum_{k=1}^n \omega_k\, \frac{\beta - \alpha}{n}. \tag{10}$$

В силу интегрируемости функции g по отрезку $[\alpha, \beta]$ правая часть (10) при $n \to \infty$ сходится к 0, что и доказывает лемму 1. ▲

Положим

$$c_k := g(x_k),\ d_k := \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt\ (k = 1, \ldots, n),$$

$$D_1 := d_1,\ D_2 := d_1 + d_2, \ldots, D_n := d_1 + d_2 + \ldots + d_n,$$

$$L_0 := \max\{|D_k|,\ k = 1, \ldots, n\} := \max\left\{ \Big|\int\limits_\alpha^{x_k} h(t)dt\Big|,\ k = 1, \ldots, n \right\}.$$

Из неравенства Абеля для сумм (см. неравенство (30.18)) вытекает оценка

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt\Big| \leqslant L_0\left(|g(x_n)| + \sum_{k=1}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|\right). \tag{11}$$

Скажем, что функция $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[\alpha, \beta]$, если найдется такая постоянная $M \geqslant 0$, что для любого разбиения $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[\alpha, \beta]$

$$\sum_{k=1}^{N} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \leqslant M.$$

Наименьшую из подобных постоянных назовем вариацией функции g и обозначим символом $V_\alpha^\beta\, g$. В силу результатов § 29

$$V_\alpha^\beta\, g = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |g'(t)|dt, \tag{12}$$

если функция g дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, а производная g' интегрируема по отрезку $[\alpha, \beta]$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и $V_\alpha^\beta\, g < \infty$. Тогда*

$$\Big|\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt\Big| \leqslant L(|g(\beta)|) + V_\alpha^\beta\, g), \tag{13}$$

где

$$L := \max\left\{\Big|\int\limits_{\alpha}^{x} h(t)dt\Big|,\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta\right\}.$$

▲ Из леммы 1 вытекает равенство

$$\Big|\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt\Big|.$$

В силу (11) верно неравенство

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt\Big| \leqslant L(|g(\beta)| + V_\alpha^\beta g).$$

Объединяя два последних соотношения, приходим к оценке (13). ▲

Приведем простой способ доказательства оценки (13) в случае, когда h — непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция, а g — непрерывно дифференцируемая на этом же отрезке функция. Пусть $H(t)$ — первообразная функции h, $H(\alpha)=0$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)dH(t) = g(t)H(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int\limits_{\alpha}^{\beta} H(t)g'(t)dt =$$

$$= g(\beta)H(\beta) - \int\limits_{\alpha}^{\beta} H(t)g'(t)dt.$$

Следовательно,

$$\Big|\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt\Big| \leqslant |g(\beta)||H(\beta)| + \int\limits_{\alpha}^{\beta} |H(t)||g'(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant L\Big(|g(\beta)| + \int\limits_{\alpha}^{\beta} |g'(t)|dt\Big) = L(|g(\beta)| + V_{\alpha}^{\beta} g),$$

что и приводит к (13) в рассматриваемом случае.

Лемма 3. *Пусть в условиях леммы 1 g и h — действительные функции, причем функция $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ убывает, $g(t)\geqslant 0$ и*

$$A \leqslant \int\limits_{a}^{t} h(s)ds \leqslant B,$$

причем A и B — постоянные, не зависящие от t. Тогда

$$Ag(\alpha+0) \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt \leqslant Bg(\alpha+0). \tag{14}$$

▲ Из неравенства (30.19) следует оценка

$$Ag(x_1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(t)dt \leqslant Bg(x_1),$$

где $x_k = \alpha + \dfrac{k}{n}(\beta-\alpha)$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получаем оценку (14). ▲

Теорема 5. *Пусть g и h — действительные на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции, причем функция $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ убывает, $g(t)\geqslant 0$ и $h\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$. Тогда найдется такое* *число θ из отрезка $[\alpha, \beta]$, что*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt = g(\alpha+0)\int\limits_{\alpha}^{\theta} h(t)dt. \tag{15}$$

▲ Для доказательства достаточно воспользоваться оценкой (14) в случае

$$A := \min_{[a,b]}\int\limits_{a}^{t} h(s)ds, \qquad B := \max_{[a,b]}\int\limits_{a}^{t} h(s)ds.$$

Если $g(\alpha+0)=0$, то $g(t)\equiv 0$ и все очевидно. Если же $g(\alpha+0)>0$, то в силу (14)

$$A \leqslant \frac{1}{g(\alpha+0)}\int\limits_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t)dt \leqslant B.$$

Теперь (15) вытекает из непрерывности функции $H(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} h(t)dt$. ▲

Равенство (15) иногда называют второй теоремой о среднем, а оценки (13), (14) — неравенствами Абеля для интегралов.

4. Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов

В этом пункте рассматриваются интегралы вида

$$\int\limits_{a}^{\infty} g(t)h(t)dt. \tag{16}$$

Предполагается, что функция $h : [a,\infty) \to \mathbb{C}$ интегрируема по каждому промежутку $[a,x]$, а функция $g : [a,\infty) \to \mathbb{C}$ на каждом из отрезков $[a,x]$ имеет конечное изменение. В частности, функция

$$G(x) := V_a^x\, g$$

определена и возрастает на $[a,\infty)$. Ограниченность $G(x)$ на луче $[a,\infty)$ эквивалентна существованию конечного предела функции G на ∞. Положим

$$V_a^\infty\, g := \lim_{x\to\infty} G(x);$$

число $V_a^\infty\, g$ назовем вариацией функции g на луче $[a,\infty)$. Если $a<\alpha<\beta<\infty$, то $V_\alpha^\beta\, g = G(\beta)-G(\alpha)$ (следствие аддитивности вариации). Конечность вариации $V_a^\infty\, g$ функции g на луче $[a,\infty)$ и критерий Коши существования конечного предела приводят к тому, что для каждого $\varepsilon>0$ существует число $n_0>a$, обладающее свойством: $G(\beta)-G(\alpha)<\varepsilon$ при $\beta>\alpha\geqslant n_0$. Поскольку $|g(\beta)-g(\alpha)| \leqslant V_\alpha^\beta\, g = G(\beta)-G(\alpha)<\varepsilon$, то функция g с конечной вариацией $V_a^\infty g$ имеет конечный предел на ∞.

Приведем достаточные условия конечности вариации $V_a^\infty\, g$:

1) функция $g : [a,\infty)\to\mathbb{R}$ монотонно убывает и имеет конечный предел $g(+\infty)$ на ∞; в этом случае

$$V_a^\infty\, g = |g(a)-g(+\infty)|;$$

2) функция $g : [a,\infty) \to \mathbb{C}$ дифференцируема на луче $[a,\infty)$, ее производная $g'(t)$ интегрируема на каждом из отрезков $[a,x]$ и сходится интеграл

$$\int\limits_a^\infty |g'(t)|dt; \tag{17}$$

в этом случае $V_a^\infty g$ совпадает с интегралом (17). Сформулированные утверждения вытекают из результатов § 29.

Как и в предшествующем пункте, положим

$$H(x) := \int\limits_a^x h(t)dt. \tag{18}$$

Конечность предела функции H на ∞ равносильна сходимости интеграла

$$\int\limits_a^\infty h(t)dt. \tag{19}$$

Очевидно, что это требование влечет за собой ограниченность на луче $[a,\infty)$ функции H. Обратное неверно, достаточно положить $h(t) = \sin t$.

Теорема 6. ***(Признак Дирихле)****. Пусть $V_a^\infty g < \infty$ и $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Пусть функция $H : [a,\infty) \to \mathbb{C}$ ограничена на $[a,\infty)$. Тогда интеграл (16) сходится.*

▲ Пусть $|H(x)| \leqslant M \ \forall\, x \in [a,\infty)$. Тогда

$$\Big|\int\limits_\alpha^x h(t)dt\Big| = |H(x) - H(\alpha)| \leqslant 2M$$

для любых $x \geqslant \alpha \geqslant a$. Из леммы 2 и последней оценки вытекает неравенство

$$\Big|\int\limits_\alpha^\beta g(t)h(t)dt\Big| \leqslant 2M(|g(\beta)| + V_\alpha^\beta g). \tag{20}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем такое число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при $\beta > \alpha \geqslant n_0$ выполнено неравенство

$$2M(|g(\beta)| + V_\alpha^\beta g) < \varepsilon. \tag{21}$$

Существование такого числа n_0 вытекает из предположений

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0, \qquad V_a^\infty g < \infty.$$

Объединяя неравенства (20), (21), приходим к оценке

$$\Big|\int\limits_\alpha^\beta g(t)h(t)\ dt\Big| < \varepsilon,$$

где $\beta > \alpha \geqslant n_0$. Последняя оценка влечет за собой сходимость интеграла (16). ▲

Теорема 7. ***(Признак Абеля)***. *Пусть $V_a^\infty g < \infty$ и интеграл (19) сходится. Тогда интеграл (16) сходится.*

▲ Верно равенство

$$\int_a^\infty g(t)h(t)\,dt = \int_a^\infty (g(t) - g(+\infty))h(t)\,dt + \int_a^\infty g(+\infty)h(t)\,dt. \tag{22}$$

Первый интеграл в правой части (22) сходится в силу признака Дирихле, второй — в силу сходимости интеграла (19). Поэтому сходится и интеграл, находящийся в левой части равенства (22). ▲

Проведенные рассуждения показывают, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле. Аналогичное замечание можно отнести и к признакам сходимости числовых рядов.

Следствие 1. *Пусть функция $H : [a, \infty) \to \mathbb{C}$ ограничена, функция $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ убывает и $g(+\infty) = 0$. Тогда интеграл (16) сходится.*

Следствие 2. *Пусть интеграл (19) сходится, а функция $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ монотонна и ограничена. Тогда интеграл (16) сходится.*

Следствия 1, 2 представляют наиболее известные и чаще всего применяемые версии признаков Дирихле и Абеля соответственно. Применим их для исследования сходимости интегралов (9). Пусть $0 < p \leqslant 1$. Положим $h(t) = \sin t$, $g(t) = \dfrac{1}{t^p}$. В силу признака Дирихле интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx \tag{23}$$

сходится. Аналогично, полагая $h(t)\cos t$, $g(t) = \dfrac{1}{t^p}$, получаем, что и второй из интегралов (9) также сходится.

Покажем, что интеграл (23) сходится условно, т.е. что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p}\,dx \tag{24}$$

расходится. Действительно, если бы этот интеграл сходился, то в силу теоремы 3 сходился бы и интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^p}\,dx,$$

поскольку $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$. Так как $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, а интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^p}\,dx$$

сходится, то должен сходиться и интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p},$$

а это равносильно условию $p > 1$. Это и доказывает расходимость интеграла (24) для p из $(0,1]$.

Более общий, чем (9), интеграл

$$\int\limits_1^\infty x^\beta \sin x^\alpha\,dx \tag{25}$$

$(\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R})$ легко сводится к уже рассмотренным. Действительно, замена переменной $x^\alpha = t$ приводит к равенству

$$\int\limits_1^b x^\beta \sin x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha}\int\limits_1^{b^\alpha} t^{\beta/\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1}\sin t\,dt = \frac{1}{\alpha}\int\limits_1^{b^\alpha}\frac{\sin t}{t^p}\,dt,$$

в котором $p = \dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha}$. Ясно, что b и b^α стремятся к ∞ одновременно. Поэтому сходимость интеграла (25) равносильна сходимости интеграла (23) с указанным значением p. При $\beta < -1$ интеграл (25) сходится абсолютно, если же $\beta \geqslant -1$, $\alpha > \beta + 1$, то интеграл (25) сходится условно. При $\beta > 0$ функция $x^\beta \sin x^\alpha$ не ограничена на лучах (N,∞), вместе с тем при $\alpha > \beta+1$ эта функция интегрируема по лучу $[1,\infty)$. Таким образом, сходимость интеграла (1) не означает, что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

В качестве еще одного примера рассмотрим интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx \qquad (p > 0). \tag{26}$$

Применим признак Дирихле, полагая $h(t) = \sin t$, $g(t) = \dfrac{1}{t^p + \sin t}$. Очевидно, что $g(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Производная

$$g'(t) = -\frac{pt^{p-1} + \cos t}{(t^p + \sin t)^2}$$

при $p \geqslant 1$ всюду отрицательна, интеграл (26) сходится (при $p > 1$ интеграл сходится абсолютно). Если же $p < 1$, то производная $g'(t)$ при $t \to \infty$ бесконечно много раз меняет знак и, следовательно, функция $g(t)$ не является монотонно убывающей. Вместе с тем справедлива оценка

$$|g'(t)| \leqslant \frac{L}{t^{2p}} \qquad (t \geqslant 2) \tag{27}$$

с некоторой постоянной $L < \infty$. В силу (27) интеграл

$$\int\limits_2^\infty |g'(t)|\,dt$$

сходится, если $2p > 1$. Более кропотливые рассуждения (см. [4], [18]) показывают, что при $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ интеграл (26) расходится.

5. Интегралы по бесконечному промежутку

Предшествующие результаты могут быть распространены на случай, когда функция f определена на промежутке $(-\infty, a]$ и интегрируема по Риману на каждом промежутке $[x, a],\ -\infty < x < a$. Введем функцию $\mathcal{F}(-\infty, a] \to \mathbb{R}$, полагая

$$\mathcal{F}(x) := \int\limits_x^a f(t)dt.$$

Назовем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx \tag{28}$$

сходящимся, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to-\infty} \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(-\infty),$$

и расходящимся в противном случае. Число $\mathcal{F}(-\infty)$ и принимают в качестве значения интеграла (28). Ясно, что все ранее сказанное об интегралах по промежутку $[a, \infty)$ может быть повторено для рассматриваемого случая.

Интеграл вида

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx \tag{29}$$

от функции $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{C}$ определяют как сумму интегралов

$$\int\limits_{-\infty}^0 f(x)dx,\ \int\limits_0^\infty f(x)dx, \tag{30}$$

если оба интеграла существуют. Например,

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = 2\,\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^\infty = \pi.$$

Если один из интегралов (30) расходится, то интеграл (29) расходится.

§36. Несобственные интегралы от неограниченных функций

1. Определение несобственного интеграла от неограченной функции

Пусть $f : (a,b] \to \mathbb{C}$ — функция, определенная на промежутке $(a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ и интегрируемая на каждом отрезке $[x,b]$ $(a < x < b)$. Введем в рассмотрение функцию

$$\mathcal{F}(x) := \int\limits_a^b f(t)dt \qquad (a < x \leqslant b). \tag{1}$$

Если функция f ограничена на промежутке $(a,b]$, то функция $\mathcal{F} : (a,b] \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|, \qquad (a < x_1 < x_2 \leqslant b), \tag{2}$$

где $L = \sup\{|f(t)|, a < t \leqslant b\}$. Действительно,

$$|\mathcal{F}(x_2) - \mathcal{F}(x_1)| = \Big|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\Big| \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leqslant L|x_1 - x_2|,$$

что и приводит к неравенству (2). Из (2) следует равенство

$$\lim_{x\to a+0} \mathcal{F}(x) = \int\limits_a^b f(t)dt, \tag{3}$$

верное при любом доопределении функции f в точке a.

Для доказательства (3) заметим вначале, что существование предела в левой части вытекает из (2) и критерия Коши. Далее, при любом доопределении функции f в точке a она ограничена на отрезке $[a,b] : |f(t)| \leqslant M \ \forall\ t \in [a,b]$. Интегрируемость функции $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ следует из критерия Лебега. Так как

$$\Big|\mathcal{F}(x) - \int\limits_a^b f(t)dt\Big| = \Big|\int\limits_a^x f(t)dt\Big| \leqslant \int\limits_a^x |f(t)|dt \leqslant M|x-a|,\ (a < x < b)$$

то равенство (3) доказано.

Вместе с тем предел в левой части (3) может существовать и для неограниченных на промежутке $(a,b]$ функций. Пусть, например,

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)^\lambda} \qquad (a < t \leqslant b). \tag{4}$$

Тогда

$$\mathcal{F}(x) = \int\limits_x^b \frac{dt}{(t-a)^\lambda} = \frac{(t-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_x^b = \frac{(b-a)^{1-\lambda} - (x-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \qquad (a < x \leqslant b, \lambda \neq 1).$$

Если $\lambda < 1$, то
$$\lim_{x\to a}\mathcal{F}(x) = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}.$$
В случае неограниченной на промежутке $(a, b]$ функции f естественно принять (3) в качестве определения интеграла от функции $f : (a, b] \to \mathbb{C}$. Итак,
$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt, \tag{5}$$
если предел в правой части (5) существует и конечен. В этом случае интеграл в левой части (5) называют сходящимся; в остальных случаях соответствующий интеграл именуют расходящимся.

2. Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций

Каждый признак существования конечного предела функции в точке a влечет за собой условие сходимости интеграла (5). В частности, справедлива

Теорема 1. ***(Критерий Коши)***. *Для сходимости интеграла (5) необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* $\delta = \delta(\varepsilon)$, *что*
$$\Big|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\Big| < \varepsilon, \qquad \forall\, x', x'' \in (a, a+\delta). \tag{6}$$

▲ Для доказательства достаточно применить критерий Коши существования предела к функции $\mathcal{F}$, определяемой равенством (1). ▲

Из критерия Коши следует, что сходимость интеграла
$$\int_a^b |f(t)|dt$$
(абсолютная сходимость интеграла (5)) влечет за собой сходимость. Имеют место аналоги общих и частных признаков сравнения. Пусть, например, $f, g, h : (a, b] \to \mathbb{C}$ — функции, интегрируемые на каждом отрезке $[x, b]$ $(a < x \leqslant b)$.

Теорема 2. *а) Если* $|f(x)| \leqslant g(x)\ \forall\, x \in (a, A]$ $(a < A \leqslant b)$ *и интеграл*
$$\int_a^b g(x)dx$$
сходится, то интеграл (5) абсолютно сходится.

б) Если $f(x) \geqslant h(x) \geqslant 0 \; \forall \, x \in (a, A]$ $(a < A \leqslant b)$ и интеграл

$$\int_a^{\infty} h(x)dx$$

расходится, то и интеграл (5) также расходится.

Чаще всего в качестве функции сравнения используют функцию $(t-a)^{-\lambda}$ $(a < t \leqslant b)$. Это приводит к следующему частному признаку сравнения.

Теорема 3. *а) Если $|f(x)| \leqslant L(x-a)^{-\lambda}$ $(a < x \leqslant A \leqslant b, \; L < \infty, \; \lambda < 1)$, то интеграл (5) абсолютно сходится.*

б) Если $f(x) \geqslant L(x-a)^{-\lambda}$ $(a < x \leqslant b, \; L > 0, \; \lambda \geqslant 1)$, то интеграл (5) расходится.

▲ Доказательства теорем 2, 3 предлагаются читателю в качестве упражнения. ▲

По аналогичной схеме на интегралы вида (5) переносятся признаки сходимости Абеля и Дирихле. Формулировки к доказательству соответствующих результатов также предоставляются читателю.

3. Сведение к интегралам по лучам

Произведем в интеграле (1) замену переменной $t = a + \dfrac{1}{s}$. При условиях допустимости подобной замены переменной (см. § 23) интеграл (1) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}(x) = \int_{\frac{1}{x-a}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a + \frac{1}{s}\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{x-a}} f\left(a + \frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2}\, ds.$$

Если $x \to a+0$, то $\dfrac{1}{x-a} \to +\infty$, поэтому

$$\lim_{x \to a+0} \mathcal{F}(x) = \lim_{z \to \infty} \int_{\frac{1}{b-a}}^{z} f\left(a + \frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2}\, ds;$$

оба интеграла существуют и конечны одновременно. Следовательно,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a + \frac{1}{s}\right)\frac{1}{s^2}\, ds. \tag{7}$$

Сходимость одного из интегралов (7) влечет за собой сходимость другого интеграла; то же верно и для абсолютной сходимости этих интегралов.

4. Модификации несобственного интеграла

Пусть $f : [a,b) \to \mathbb{C}$ — функция, определенная на промежутке $[a,b)$ $(-\infty < a < b < \infty)$ и интегрируемая на отрезках $[a,x]$ $(a < x < b)$. В этом случае рассматривается функция

$$\mathcal{F}(x) := \int\limits_a^x f(t)dt \qquad (a \leqslant x < b). \tag{8}$$

Если функция f ограничена на промежутке $[a,b)$, то при любом доопределении функции f в точке b продолженная функция $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ интегрируема по отрезку $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b-0} \mathcal{F}(x). \tag{9}$$

В случае неограниченной на промежутке $[a,b)$ функции f равенство (9) принимается в качестве определения интеграла от функции $f : [a,b) \to \mathbb{C}$. Интеграл в левой части (9) называется сходящимся, если предел в правой части (9) существует и конечен; в остальных случаях соответствующий интеграл именуют расходящимся. Например, интеграл (9) сходится, если

$$|f(x)| \leqslant L(b-x)^{-\lambda} \qquad (a < A < x < b,\ L > 0,\ \lambda \geqslant 1), \tag{10}$$

и расходится, если

$$f(x) \geqslant L(b-x)^{-\lambda} \qquad (a < A < x < b,\ L > 0,\ \lambda \geqslant 1). \tag{11}$$

Справедливы естественные аналоги результатов пункта 2: критерий Коши, частный и общий признаки сравнения. Как и ранее, абсолютная сходимость интеграла (9), т.е. сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b |f(t)|dt,$$

влечет за собой сходимость интеграла (9).

Если функция $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ задана на интервале (a,b), то полагают по определению

$$\int\limits_a^b f(t)dt := \int\limits_a^c f(t)dt + \int\limits_c^b f(t)dt; \tag{12}$$

здесь $a < c < b$, функция f такова, что интегралы в правой части существуют (хотя бы как несобственные). Из свойства аддитивности интеграла вытекает, что правая часть (12) не зависит от способа выбора c из интервала (a,b). Определение (12) сохраняется и в случае, когда промежуток (a,b) имеет бесконечную длину (например, $b = \infty$ или $a = -\infty$).

Распространим, наконец, понятие интеграла на случай функции $f : E \to \mathbb{R}$, заданной на объединении промежутков $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$:

$$E = \bigcup_{i=1}^{p} \Delta_i, \tag{13}$$

где

$$\mathring{\Delta}_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, \ldots, p), \qquad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \qquad (i \neq j).$$

Положим по определению

$$\int\limits_E f(t)dt := \int\limits_{\Delta_1} f(t)dt + \ldots + \int\limits_{\Delta_p} (t)dt, \tag{14}$$

если интегралы в правой части (14) существуют. Приведенное определение не зависит от способа представления множества E в виде объединения промежутков Δ_i $(i = 1, \ldots, p)$.

Возможна модификация этого понятия, связанная с заменой конечного числа промежутков бесконечной последовательностью Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ промежутков. Аналогами (13), (14) в этом случае являются соотношения

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i, \qquad \int\limits_E f(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_i} f(t)dt. \tag{15}$$

Данное определение корректно, если интегралы в правой части (15) существуют, а соответствующий ряд сходится.

В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \tag{16}$$

Его можно представить в виде суммы интегралов

$$\int\limits_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx, \qquad \int\limits_1^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Поскольку $e^{-x} x^{p-1} \leqslant x^{p-1}$ $(0 < x \leqslant 1)$, то первый интеграл сходится для всех $p > 0$ и расходится, если $p \leqslant 0$.

Так как

$$0 < x^{p-1} e^{-x} \leqslant \frac{M(p)}{x^2} \qquad (x \geqslant 1)$$

с некоторой постоянной $M(p)$, то второй интеграл сходится при всех p. Следовательно, интеграл (16) сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leqslant 0$. Его значение зависит от $p > 0$; соответствующий интеграл называют эйлеровым. Он играет важную роль в математике и ее применениях.

Литература

I. Основные учебники по математическому анализу

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. I. Изд. 4-е, перераб. и доп. 1982; Ч. II. Изд. 2-е, стереотип. 1980. М.: Наука.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. I-III. М.: Высшая школа, 1981.

5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. I, II. М.: Наука, 1990.

II. Дополнительная литература

6. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.: Гостехиздат, 1948.

7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

8. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Фазис, 1997; Ч. II. М.: Наука, 1990.

9. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.

10. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Ч. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993, 1995.

11. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.

13. Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

14. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

15. Соболев В.И., Покорный В.В., Аносов В.И. Краткий курс математического анализа. Ч. I. Воронеж, 1983; Ч. II. Воронеж, 1984.

16. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

17. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

18. Фихтенгольц Г.М. Курс математического анализа. Т. I-III., М.: Физматгиз, 1962.

19. Шварц Л. Анализ. Т. I, II. М.: Мир, 1972.

20. Шилов Г.Е. Математический анализ, функции одного переменного. М.: Наука, 1969; Он же. Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.

Учебное издание

Климов Владимир Степанович

Одномерный математический анализ

Часть II

Учебное пособие

Редактор, корректор А. А. Аладьева
Компьютерный набор, верстка Ю. С. Осокина

Подписано в печать 30.09.06. Формат 60×84/8. Бумага Data Copy.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 150 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета,
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано ООО „Ремдер“ ЛР ИД № 06151 от 26.10.01.
г. Ярославль, пр.Октября, 94, оф. 37,
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48.