

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. С. Климов, А. Ю. Ухалов

**Решение задач математического анализа  
с использованием систем  
компьютерной математики**

Учебное пособие

*Рекомендовано  
Научно-методическим советом университета  
для студентов, обучающихся по направлениям  
Прикладная математика и информатика,  
Математика и компьютерные науки,  
и специальности Компьютерная безопасность*

Ярославль  
ЯрГУ  
2014

УДК 517:519.67(075)

ББК В16я73-4

К49

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2014 года*

**Рецензенты:**

кафедра математического анализа, теории и методики преподавания ЯГПУ;  
Иванов А. О., доктор физико-математических наук, профессор кафедры  
дифференциальной геометрии и приложений механико-математического  
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

**Климов, Владимир Степанович.**

К49 Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики : учебное пособие / В. С. Климов, А. Ю. Ухалов ; Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2014. – 96 с.

ISBN 978-5-8397-1029-0

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 010400.62 Прикладная математика и информатика, 010200.62 Математика и компьютерные науки, специальности 090301.65 Компьютерная безопасность (дисциплины «Математический анализ», «Методы оптимизации», «Дополнительные главы математического анализа», циклы Б2, Б3, С2), очной формы обучения.

УДК 517:519.67(075)

ББК В16я73-4

ISBN 978-5-8397-1029-0

©ЯрГУ, 2014

# Оглавление

Предисловие	5
<b>1 Введение в систему Wolfram Mathematica</b>	<b>7</b>
1.1 Рабочий документ Wolfram Mathematica	7
1.2 Вызов функций	8
<b>2 Основы языка Wolfram Mathematica</b>	<b>12</b>
2.1 Списки	12
2.2 Векторы, матрицы и операции над ними	13
2.3 Создание и применение правил	13
2.4 Разложение функций в степенные ряды	14
2.5 Работа с полиномами	14
2.6 Определение собственных функций	15
2.7 Графика	15
2.8 Упрощение выражений	18
2.9 Вычисление пределов	18
2.10 Вычисление производных	21
2.11 Вычисление интегралов	21
2.12 Алгебраические уравнения и неравенства	23
2.13 Решение дифференциальных уравнений	23
2.14 Интерактивные вычисления	25
2.15 Графические комплексы	25
<b>3 Касательная, нормаль, площадь, объем</b>	<b>29</b>
3.1 Касательная к кривой	29
3.2 Нормаль к поверхности	30
3.3 Периметр и площадь многоугольника	32
3.4 Объем тела, ограниченного триангулированной поверхностью	33
<b>4 Решение задач оптимизации</b>	<b>41</b>
4.1 Функции Maximize и Minimize	41
4.2 Решение задач линейного программирования	42
4.3 Чебышевская точка системы неравенств	42

<b>5</b>	<b>Решение обыкновенных дифференциальных уравнений</b>	<b>48</b>
5.1	Отыскание решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда . . . . .	48
5.2	Построение периодического решения квазилинейной системы . . . . .	51
5.3	Метод Линдштедта–Пуанкаре . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Задачи для самостоятельного решения</b>	<b>59</b>
6.1	Кусочно-линейные функции . . . . .	59
6.2	Приближения в метрике Чебышёва . . . . .	61
6.3	Матричные игры . . . . .	63
6.4	Последовательности с ограниченным изменением . . . . .	66
6.5	Итерации и последовательности . . . . .	69
6.6	Цепные дроби . . . . .	72
6.7	Экстремальные задачи . . . . .	74
6.8	Комплексные функции с ограниченным изменением . . . . .	76
6.9	Признаки сходимости несобственных интегралов . . . . .	77
6.10	Формула Эйлера–Маклорена . . . . .	81
6.11	Полиномы Бернулли и ряды Фурье . . . . .	87
6.12	Метод Лапласа для оценки интегралов . . . . .	88
	<b>Литература</b>	<b>95</b>

# Предисловие

В последние десятилетия системы компьютерной математики получили значительное развитие и распространение.

Совершенствование компьютеров и программного обеспечения сделали доступными программы, позволяющие выполнять не только численные расчеты, но и символьные преобразования, проводить в автоматическом режиме целые исследования. Можно говорить, что на наших глазах происходит революция – в очередной раз удается автоматизировать выполнение работ, считавшихся прежде прерогативой человека.

Эти процессы не могут не повлиять на математическое образование. Студентам уже доступны на мобильных устройствах системы, позволяющие не только получить численное или символьное решение многих задач из классических задачников, но и “сгенерировать” сам процесс решения. Эти факторы необходимо учитывать преподавателям. Как всегда, плоды прогресса противоречивы. С одной стороны, было бы странно не использовать имеющиеся возможности, с другой – необходима коррекция методики преподавания и системы контроля знаний. Необходимо донести до студентов, что, как и прежде, машина сама по себе не думает; что организация процесса решения задачи требует не меньшего, чем ранее, знакомства с теорией и не меньшей, чем раньше, математической культуры.

Ситуация напоминает картину появления первых вычислительных машин. Первоначальные надежды, что многие задачи решатся сами собой, не оправдались. Быстро пришло понимание, что решение задач на машине – дело непростое и требует создания новых разделов математики.

Сейчас отчасти повторяется та же картина. В компьютерных классах университетов установлены мощные системы компьютерной математики – MATLAB, Maple, Wolfram Mathematica. Студенты знают, как с помощью этих систем выполнить некоторые простейшие операции: вычислить символьно или численно интеграл, производную, построить график и т. д. Вместе с тем остаются неиспользованными огромные возможности, реализованные в этих системах.

В настоящем учебном пособии авторы попытались показать примеры использования системы компьютерной математики Wolfram Mathematica для решения ряда задач математического анализа. Математический анализ здесь понимается нами в самом широком смысле.

Книга не является учебником по системе Wolfram Mathematica. Обычно знакомство с основами этой системы не вызывает затруднений. Трудности возникают, когда требуется реализовать алгоритм решения задачи, не предусмотренный системой.

По системе Wolfram Mathematica имеется большое количество учебников и материалов в сети Интернет. Для более детального знакомства с системой мы рекомендуем обратиться к учебнику [1]. Возможности системы по решению геометрических задач и по графическому представлению данных подробно рассмотрены в книге [2]. Не следует забывать и о встроенной справочной системе Wolfram Mathematica, содержащей полное описание системы и большое число примеров.

В первых двух главах мы приводим начальные сведения о языке Wolfram Mathematica. Эти главы предназначены для читателя, впервые приступающего к работе с системой. Эти сведения, конечно, не претендуют на полноту, но их достаточно для понимания следующих глав книги. В третьей главе приводятся программы на Wolfram Mathematica для решения некоторых классических задач анализа – построения касательных, нормалей, вычисления площадей. Приводится вывод одной полезной, но малоизвестной формулы для вычисления объема тела, ограниченного триангулированной поверхностью. В четвертой и пятой главах детально разбираются некоторые более сложные примеры применения системы Wolfram Mathematica для решения различных задач. В шестой главе приводится большое количество задач для самостоятельного решения.

Все примеры кода, приведенные в учебном пособии, тестировались на программе Wolfram Mathematica версии 9.0.

При подготовке учебного пособия были использованы материалы дипломных работ студентов математического факультета Д. А. Громова, А. В. Игнатьева и И. В. Островской, выполненных в разные годы на кафедре математического анализа ЯрГУ под руководством А. Ю. Ухалова. Хочется воспользоваться случаем и поблагодарить этих выпускников ЯрГУ за сотрудничество, в ходе которого мы вместе осваивали систему Wolfram Mathematica.

Климов В. С., доктор физико-математических наук,  
Ухалов А. Ю., кандидат физико-математических наук.

# Глава 1

## Введение в систему Wolfram Mathematica

В настоящей главе дается элементарное введение в систему Wolfram Mathematica для читателей, впервые приступающих к работе с системой.

Система Wolfram Mathematica может использоваться в разных режимах. Все вычисления выполняются ядром (Kernel) системы. Большинство пользователей использует для обращения к ядру графический пользовательский интерфейс (Front End). Однако следует помнить, что существуют и принципиально другие возможности. Программист может подключиться к ядру системы через специальный интерфейс из самостоятельно разработанной программы, разработчики веб-сайтов могут задействовать функции ядра на веб-странице и т. д. В данном пособии рассматривается лишь простейший вариант использования системы – работа с графическим интерфейсом пользователя.

Мы предполагаем, что пользователь знаком с основными принципами работы в операционной системе, имеет определенный опыт в использовании текстовых редакторов и владеет начальными навыками программирования.

### 1.1 Рабочий документ Wolfram Mathematica

Для ввода и вывода данных в системе Wolfram Mathematica используется документ специального формата – блокнот (notebook). Эти документы хранятся в виде файлов с расширением «\*.nb». Принципы создания, сохранения, открытия и закрытия файлов-блокнотов стандартны.

При вводе текста в блокнот автоматически создается ячейка – элементарная область ввода или вывода информации.

Для выполнения введенной в ячейку инструкции используется сочетание клавиш Shift+Enter.

Для хранения данных всех типов используются переменные. Принципы использования переменных в основном аналогичны соответствующим принципам, применяемым в языках программирования. Естественно, язык Wolfram Mathematica больше похож на «языки скриптов», нежели на строго типизированные языки типа C++.

Если ввести в ячейку текст

```
x=1
```

и нажать Shift+Enter, будет создана переменная  $x$  и ей будет присвоено значение 1. Результат выполнения операции (число 1) выводится ниже.

Значения переменной сохраняются в течение всего сеанса работы с системой, пока не выполнено переопределение или переменная не очищена от значения с помощью функции

```
Clear [v1 , v2 , . . . ]
```

Если инструкция заканчивается точкой с запятой, то результат не выводится.

Инструкции, введенные пользователем, и результаты их выполнения автоматически нумеруются (см. рис. 1.1). Символ % (процент) используется для получения результата последней выполненной операции (см. рис. 2.8). Для обращения к результату вычислений, помеченному системой как «Out[n]=», используется конструкция %n.

Нужно помнить, что значения переменных сохраняются в течение всего сеанса работы с системой, даже при переходе в другой рабочий документ. Повторное использование неочищенных переменных часто служит источником ошибок. Переходя к новой задаче, лучше заново перезапустить программу Wolfram Mathematica.

## 1.2 Вызов функций

В системе Wolfram Mathematica реализовано большое число функций для символьного и численного решения различных задач. Нужную функцию можно найти с помощью справочной системы. Кнопки для быстрого вызова наиболее популярных функций имеются в палитрах инструментов. Следует помнить, что палитры могут быть скрыты. Для их отображения нужно воспользоваться соответствующим пунктом меню – Palettes. Для того чтобы открыть палитру, содержащую кнопки для выбора базовых математических операций, нужно выполнить команду меню Palettes->Basic Math Assistant. Вид этой палитры показан на рис. 1.2.

Назначение кнопок в большинстве случаев интуитивно понятно. Например, вместо того, чтобы вводить команду

```
Integrate [1/(x^2+1),{x,0 , \[Infinity ]}]
```

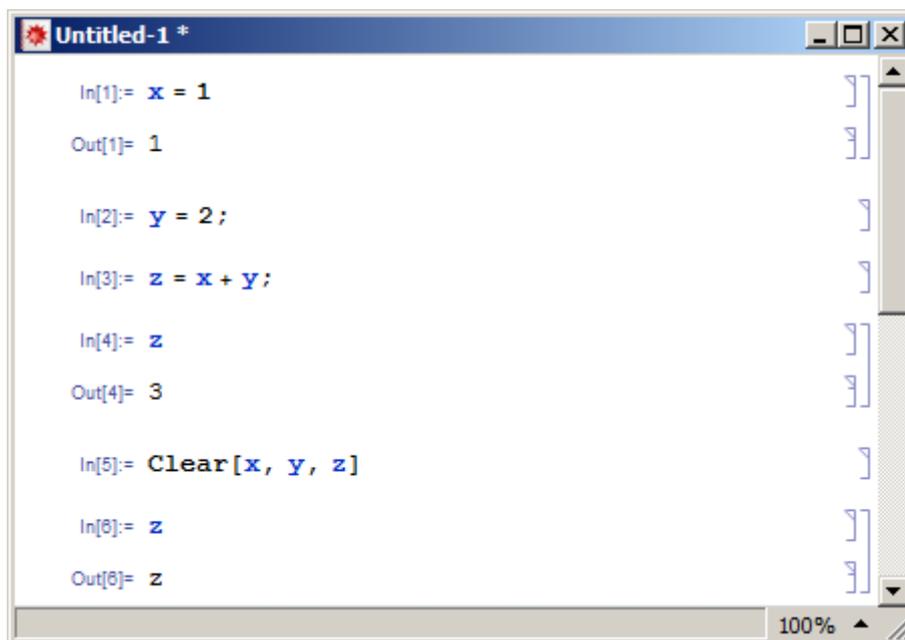
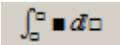


Рис. 1.1. Блокнот программы Wolfram Mathematica

можно нажать кнопку  и заполнить поля в графическом изображении

определенного интеграла  (см. рис. 1.3).

Когда это возможно, система старается найти точное решение задачи (в рассмотренном примере с интегралом это  $\pi/2$ ). Часто решение оказывается выраженным через специальные функции. Если системе не удастся выразить решение задачи даже через специальные функции, в качестве ответа возвращается исходное выражение. Например, так будет при попытке символьно (т. е. с помощью функции Integrate) найти значение интеграла

$$\int_0^1 e^{\sin x} dx.$$

Естественно, следует помнить, что система Wolfram Mathematica постоянно совершенствуется. Задачи, которые не могли быть решены на ранних версиях системы, могут оказаться решаемыми на новых версиях.

Для получения численного значения величины с заданной точностью можно воспользоваться функцией

`N[x, pres]`

где  $x$  – величина,  $pres$  – точность (см. рис. 1.3).

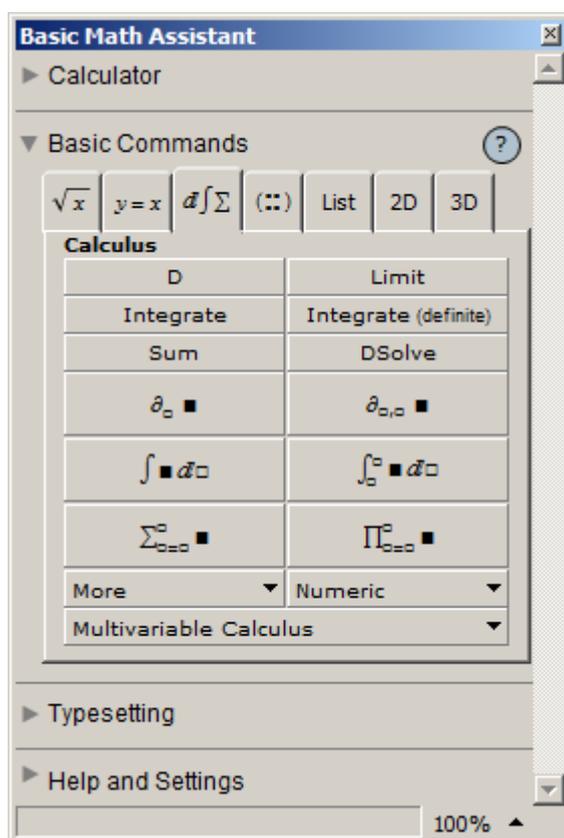


Рис. 1.2. Палитра Basic Math Assistant

Если сразу требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

численно, имеет смысл воспользоваться функцией

`NIntegrate[f, {x, a, b}]`

Например, вызов функции

`NIntegrate[Exp[Sin[x]], {x, 0, 1}]`

дает результат 1.63187.

Большинство функций системы Wolfram Mathematica имеет большое количество опций и вспомогательных параметров, позволяющих управлять выполнением соответствующих операций. К примеру, функция `NIntegrate` позволяет задать предпочтительный метод численного интегрирования, желаемую точность вычислений и т. д. В настоящем пособии мы почти не обсуждаем эти детали, т. к. эта информация носит справочный характер. Отметим лишь, что во многих случаях вполне удовлетворительные результаты могут

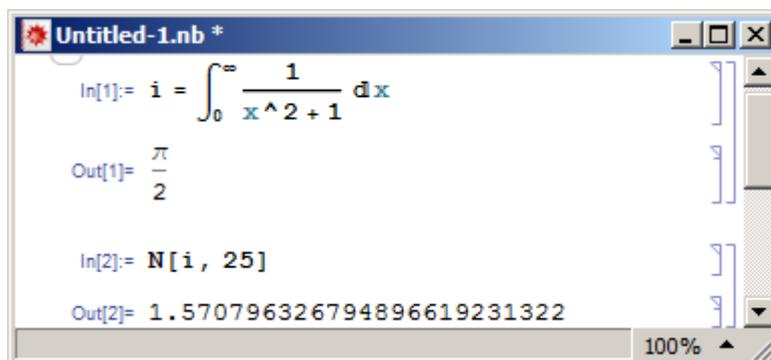


Рис. 1.3. Вычисление интеграла

быть получены без явного указания дополнительных параметров. В частности, по умолчанию, вычисление интеграла функцией `NIntegrate` производится с точностью, соответствующей точности вычислений процессора компьютера (параметр `WorkingPrecision` имеет значение `MachinePrecision`).

## Глава 2

# ОСНОВЫ ЯЗЫКА Wolfram Mathematica

В настоящей главе приводится описание всех конструкций и функций языка системы Wolfram Mathematica, используемых в данном учебном пособии. Необходимо помнить, что многие действия в системе можно выполнить различными средствами. Для более глубокого понимания системы необходимо обратиться к специальным учебным пособиям (например, к книгам [1], [2]), и встроенной справочной системе.

### 2.1 Списки

Списки в Wolfram Mathematica являются одним из основных способов хранения данных. В простейшем случае список может быть задан конструкцией

$$\text{list} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

где  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – элементы списка. Для работы со списками предусмотрено большое количество функций. Многие функции принимают данные в виде списков или возвращают значения в виде списков.

Элементы списка нумеруются начиная с единицы. Для обращения к  $i$ -му элементу списка можно использовать конструкцию

```
Part [ list , i ]
```

или

```
list [[ i ]]
```

Заметим, что в последнем выражении используются именно двойные квадратные скобки.

Функция

```
Append [ list , elem ]
```

служит для добавления элемента `elem` к концу списка `list`. Пример:

```
In[1]:= Append[{a, b, c}, d]
```

```
Out[1]= {a, b, c, d}
```

## 2.2 Векторы, матрицы и операции над ними

Для задания векторов и матриц используются списки. Присваивание  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$

задает трехмерный вектор  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , а присваивание

$A = \{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$

– матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Для операции умножения векторов и матриц используется оператор «.» (точка). Скалярный квадрат определенного выше вектора  $(x, x)$  записывается как  $x.x$ , а произведение матрицы на вектор  $Ax$  как  $A.x$ .

Функции для работы с векторами и матрицами применяются именно к данным в форме списков. Перечислим некоторые из функций для работы с матрицами: `Det` – вычисление определителя, `Tr` – вычисление следа, `Inverse` – вычисление обратной матрицы, `Transpose` – транспонирование матрицы.

## 2.3 Создание и применение правил

Правила позволяют произвести временную подстановку значения вместо переменной или выражения. В простейшем виде правило задается конструкцией вида

```
var -> val
```

Для применения правила к выражению используется конструкция «/». Значением выражения

```
a + b /. a -> 2
```

будет  $2 + b$ , а значением выражения

```
a + b /. {a -> 2, b -> 3}
```

будет 5.

## 2.4 Разложение функций в степенные ряды

Разложение функций в степенные ряды можно выполнить с помощью встроенной функции

```
Series [ f , { x , x0 , n } ]
```

Например, результатом выполнения инструкции

```
Series [ Sin [ x ] , { x , 0 , 10 } ]
```

будет

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{11})$$

Функция Series позволяет строить разложения и для функций многих переменных. Формат обращения к функции в этом случае имеет вид

```
Series [ f , { x , x0 , nx } , { y , y0 , ny } , ... ]
```

Для того чтобы убрать из разложения слагаемое вида  $O(x^n)$ , можно использовать функцию Normal. Результатом выполнения команды

```
Normal [ Series [ Sin [ x ] , { x , 0 , 10 } ] ]
```

будет выражение

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9.$$

## 2.5 Работа с полиномами

Функция CoefficientList позволяет сформировать список коэффициентов полинома. В простейшем случае формат вызова функции имеет вид

```
CoefficientList [ poly , var ]
```

где poly – многочлен, var – переменная, коэффициенты при степенях которой следует вычислить. Например, значением переменной list после выполнения команды

```
list = CoefficientList [ a - b * x + 3 * x ^ 2 + d * x ^ 4 , x ]
```

будет список  $\{a, -b, 3, 0, d\}$ . Следует помнить, что коэффициент при  $x^0$  будет иметь в списке номер 1, а не 0. В данном примере выражение list[[1]] имеет значение  $a$ .

Отдельный коэффициент полинома можно получить с помощью функции

```
Coefficient [ expr , form , n ]
```

где expr – выражение, form – переменная или выражение, коэффициент при котором вычисляется, n – степень переменной или выражения form. Например, результатом выполнения команды

```
Coefficient [ a - b * x + 3 * x ^ 2 + d * x ^ 4 , x , 2 ]
```

будет 3.

## 2.6 Определение собственных функций

Система Wolfram Mathematica обладает большими возможностями для определения собственных функций. Мы ограничимся описанием одной из возможностей, наиболее часто применяемых в настоящем пособии.

Проще всего проиллюстрировать определение функции на примере. Функция  $f(x, y) = x^2 + \sin y$  может быть определена с помощью команды

```
F[x_, y_] := x^2 + Sin[y];
```

Символы подчеркивания в именах переменных  $x_$  и  $y_$  в левой части правила существенны. Это служит указанием на то, что  $x$   $y$  – «формальные параметры». Обратите внимание на то, что в правой части правила знаки подчеркивания уже не нужны.

При определении функций часто удобно использовать локальные переменные. Для этого в Wolfram Mathematica можно использовать конструкцию

```
Block[{v1, v2, ...}, expr]
```

При входе в блок переменные  $v1, v2, \dots$  очищаются от значений, которые они могли иметь в текущей сессии работы с системой. При выходе из блока значения этих переменных восстанавливаются.

Приведем пример определения функции с помощью блока.

```
f[x_, y_] := Block[{t},
  t = x + y;
  Return[t^2];
]
```

В этом примере переменная  $t$  является локальной для данного блока.

## 2.7 Графика

Функции для вывода графики в системе Wolfram Mathematica имеют большое количество параметров, позволяющих управлять режимами вывода элементов изображения. В данном разделе упомянуты лишь некоторые из таких параметров.

Для построения графика функции, заданной уравнением вида  $y = y(x)$  используется функция

```
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]
```

позволяющая построить графики функций  $y = f_1(x), y = f_2(x), \dots$  на отрезке  $[x_{min}, x_{max}]$  в общей системе координат. Например, вызов функции

```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2 Pi}, PlotStyle -> {Thick, Dashed}]
```

позволяет построить графики функций  $y = \sin x, y = \cos x$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Задание необязательного параметра `PlotStyle` позволяет выбрать тип линий, используемый для вывода графика. Первая функция рисуется толстой линией (`Thick`), а вторая – пунктирной (`Dashed`). Результат вызова функции показан на рис. 2.1.

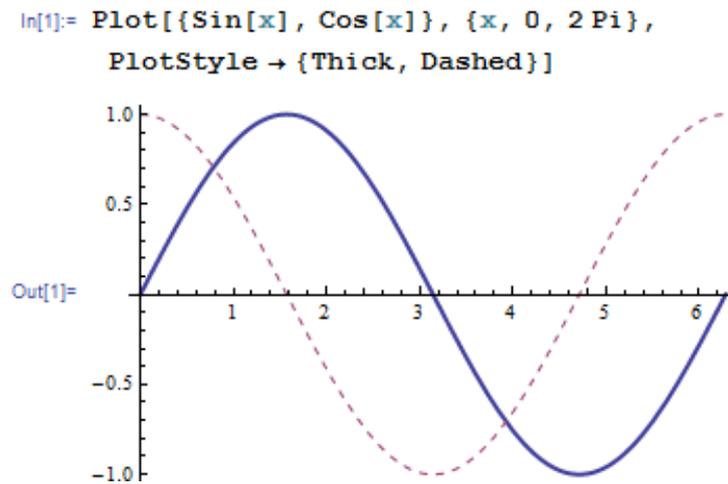


Рис. 2.1. Использование функции `Plot`

Для построения кривых, заданных параметрическими уравнениями вида  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , используется функция

```
ParametricPlot[{ {fx, fy}, {gx, gy}, ... }, {t, tmin, tmax}]
```

Функции `Plot` и `ParametricPlot` возвращают объект типа `Graphics`. Если требуется объединить два графических объекта, созданных разными графическими функциями, это можно сделать с помощью функции

```
Show[graphics, options]
```

где `graphics` – список графических объектов, `options` – список опций. Приведем пример вывода двух графиков, полученных с помощью разных функций в одной системе координат (см. рис. 2.3).

В этом примере вызовы функций

```
g1=Plot[x^2, {x, -1, 1}];
```

```
g2=ParametricPlot[{Sin[t], Cos[t]}, {t, 0, 2 Pi}];
```

не приводят к реальному выводу графики, а только создают графические объекты и сохраняют их в переменных `g1` и `g2`. Вызов функции

```
Show[g2, g1, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}}]
```

приводит к выводу графических объектов.

Задание параметра `PlotRange->{{-1.5,1.5},{-1.5,1.5}}` требуется для того, чтобы оба объекта попали в область вывода. Если этот параметр не задать, область

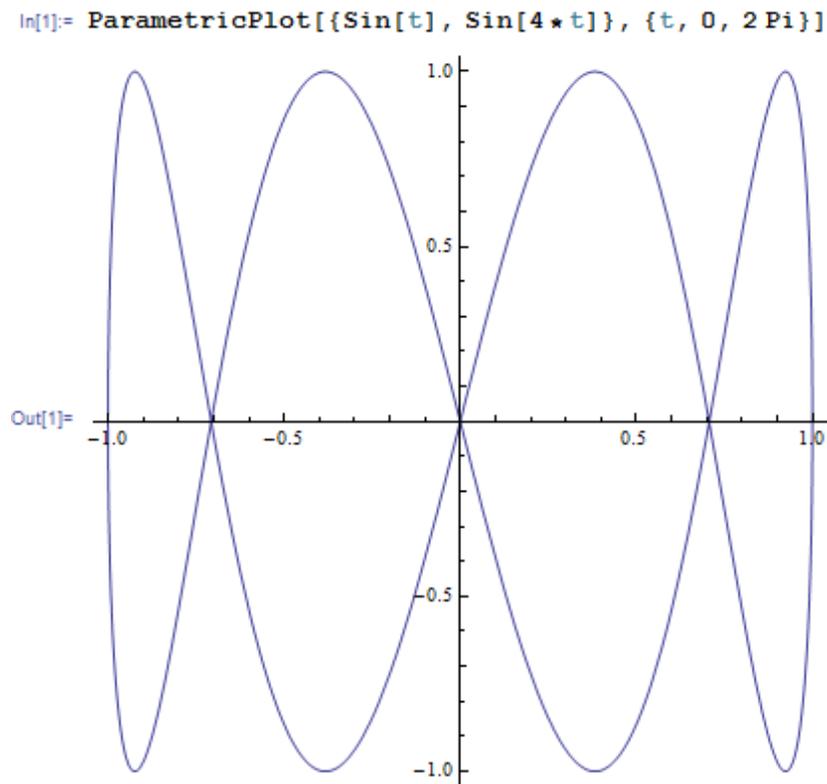


Рис. 2.2. Использование функции ParametricPlot

вывода определяется первым из выводимых объектов. Следующие объекты при этом могут оказаться обрезанными или вообще не отобразятся. Если заранее неизвестно, какая область потребуется для вывода всех объектов, можно задать параметр следующим образом

`PlotRange->All`.

Для вывода трехмерных графических объектов используется функция `ParametricPlot3D`. Существуют два режима работы этой функции. Вызов в форме

```
ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {u, umin, umax}]
```

позволяет построить пространственную кривую (см. рис. 2.4).

Вызов в форме

```
ParametricPlot3D[{fx, fy, fz}, {u, umin, umax}, {v, vmin, vmax}]
```

позволяет построить заданную параметрически поверхность (см. рис. 2.5).

```

In[1]:= g1 = Plot[x^2, {x, -1, 1}];
In[2]:= g2 = ParametricPlot[{Sin[t], Cos[t]}, {t, 0, 2 Pi}];
In[3]:= Show[g2, g1, PlotRange -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}}]

```

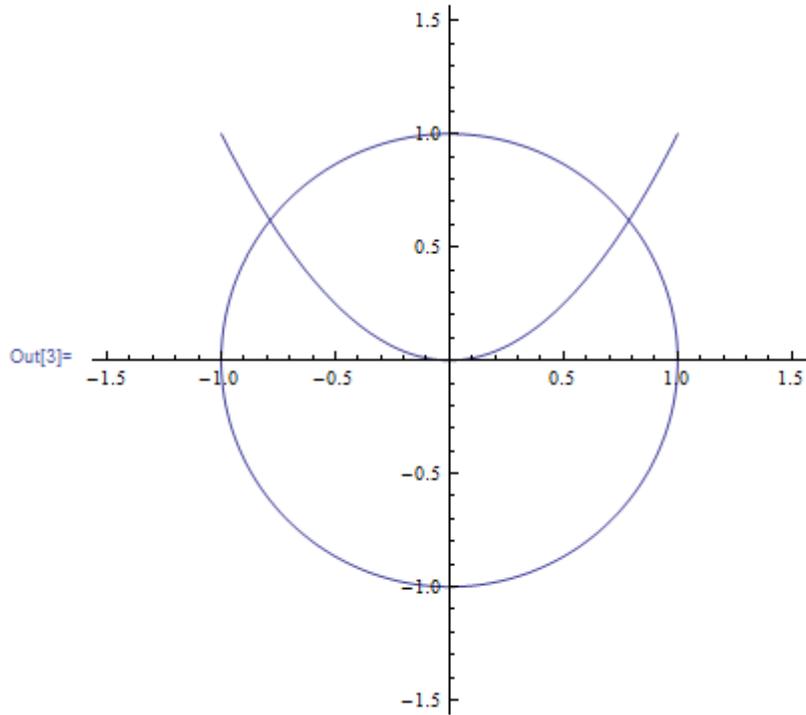


Рис. 2.3. Использование функции Show

## 2.8 Упрощение выражений

Приведем лишь некоторые функции, предусмотренные для упрощения выражений в системе Wolfram Mathematica.

`Simplify[expr]` – упрощает выражение `expr`.

`FullSimplify[expr]` – упрощает выражение `expr`, используя расширенный набор алгоритмов упрощения.

`TrigReduce[expr]` – упрощает выражение `expr`, используя формулы для тригонометрических и гиперболических функций.

Примеры работы этих функций приведены на рис. 2.6.

## 2.9 Вычисление пределов

Для вычисления пределов предназначена функция `Limit[f[x], x -> a]`. Примеры использования функции приведены на рис. 2.7.

```
ParametricPlot3D[{u Sin[u], u Cos[u], u}, {u, 0, 20}]
```

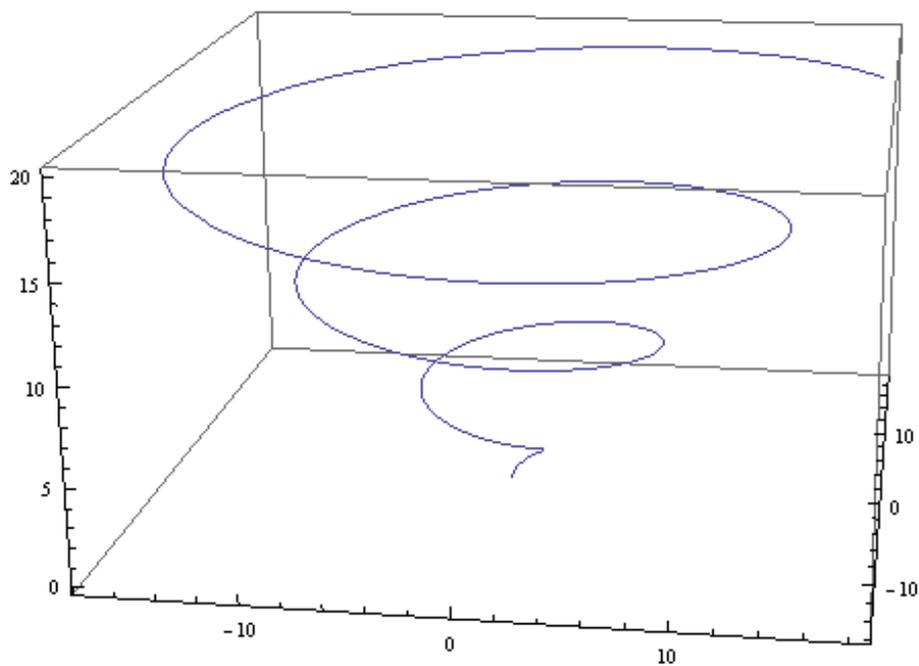


Рис. 2.4. Использование функции ParametricPlot3D. Построение кривой

```
ParametricPlot3D[{u Cos[v], u Sin[v], u}, {u, 0, 1}, {v, 0, 2 π}]
```

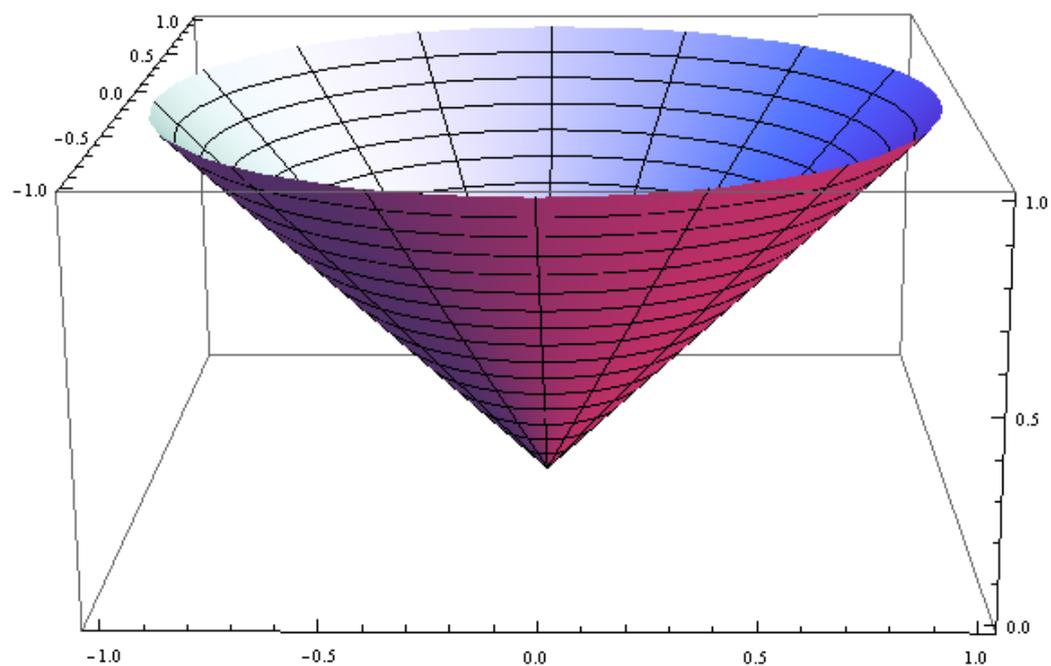


Рис. 2.5. Использование функции ParametricPlot3D. Построение поверхности

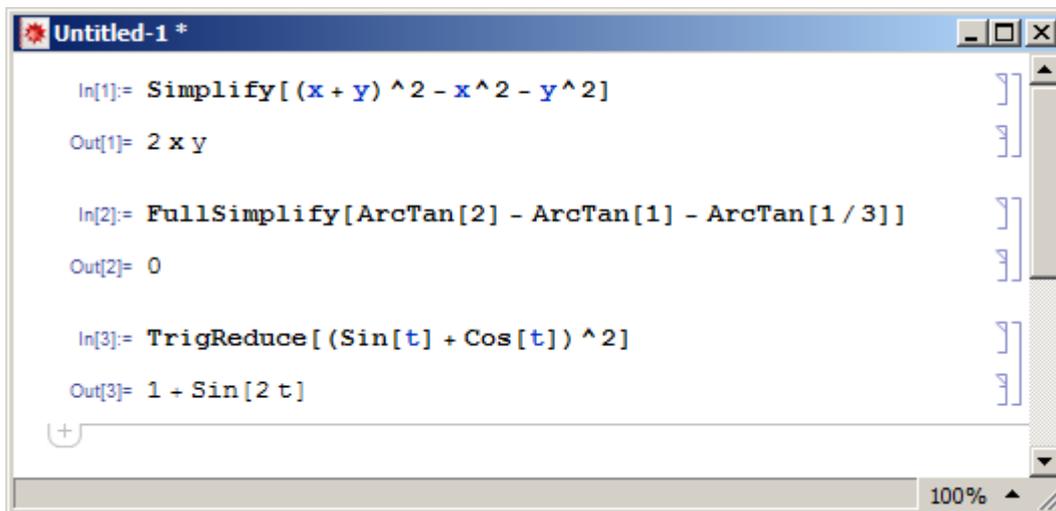


Рис. 2.6. Некоторые функции для упрощения выражений

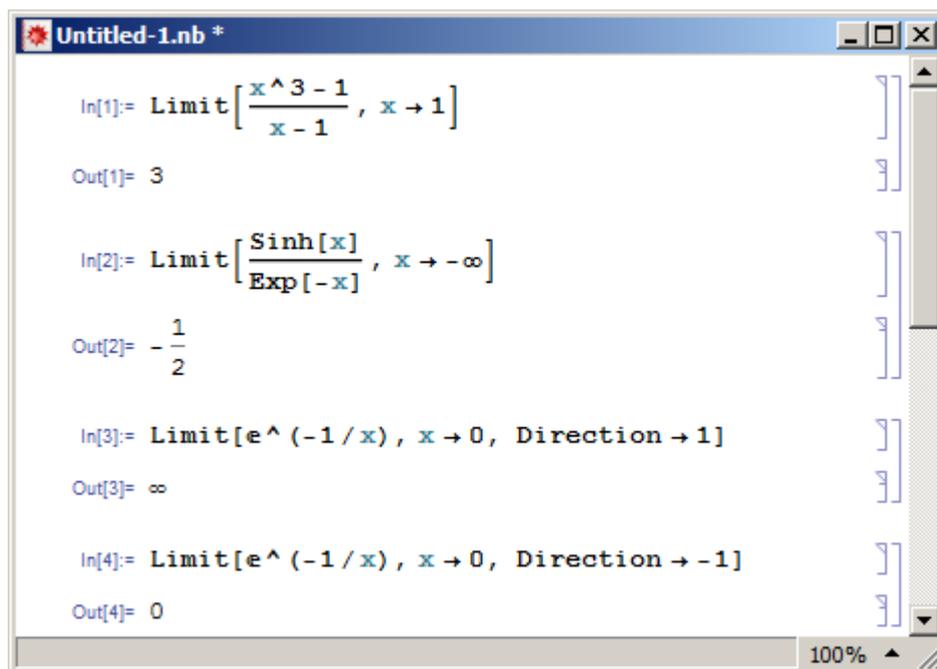


Рис. 2.7. Вычисление пределов

Задание дополнительного параметра `Direction` позволяет вычислять односторонние пределы. Значения параметра `Direction->1` и `Direction->-1` указывают системе, что требуется вычислить соответственно пределы слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

## 2.10 Вычисление производных

В простейшем случае для вычисления производной достаточно воспользоваться традиционным обозначением – «штрих». Например, если определить функцию как  $f[x] = \text{Exp}[2^*x]$ , то значением выражения  $f'[x]$  будет  $2e^{2x}$ . Аналогично можно вычислить и производные высших порядков: выражение  $f'''[x]$  будет иметь значение  $8e^{2x}$ .

Для более сложных случаев имеется функция  $D[f, v1, v2, \dots, vn]$ , позволяющая вычислить частные производные функции  $f$  по переменным  $v1, v1, \dots, vn$ . Например, для вычисления частной производной

$$\frac{\partial^3 \cos(x + y^2)}{\partial^2 x \partial y}$$

можно использовать инструкцию

$D[\text{Cos}[x+y^2], x, x, y]$

Значением этого выражения будет  $2y \sin(x + y^2)$ .

## 2.11 Вычисление интегралов

Для вычисления неопределенного интеграла предусмотрена функция

$\text{Integrate}[f, x]$

где  $f$  – функция,  $x$  – переменная интегрирования. Естественно, система может найти решение этой задачи в явном виде только в некотором классе случаев. В некоторых случаях системе удастся выразить интеграл через специальные функции. Если система не может выразить интеграл через элементарные или специальные функции, результатом будет исходное выражение (неопределенный интеграл). Различные случаи вычисления интегралов показаны на рис. 2.8. Интеграл

$$\int \frac{1}{1+x^4} dx$$

выражен через элементарные функции, интеграл

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

выражен через специальную функцию интегральный синус

$$\text{Si } z = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt,$$

а интеграл

$$\int \sin(\sin x) dx$$

системе вообще не удалось выразить через известные ей функции. Тем не менее, как показано в нашем примере, результат и в таком виде может использоваться в дальнейших вычислениях.

```

Untitled-1.nb

In[1]:= Integrate[1/(1 + x^4), x]
Out[1]= 1/(4*sqrt(2)) (-2 ArcTan[1 - sqrt(2) x] + 2 ArcTan[1 + sqrt(2) x] -
Log[1 - sqrt(2) x + x^2] + Log[1 + sqrt(2) x + x^2])

In[2]:= Integrate[Sin[x]/x, x]
Out[2]= SinIntegral[x]

In[3]:= Integrate[Sin[Sin[x]], x]
Out[3]= Integrate[Sin[Sin[x]], x]

In[4]:= D[%, x]
Out[4]= Sin[Sin[x]]
  
```

Рис. 2.8. Вычисление неопределенных интегралов

Для вычисления определенного интеграла в системе имеются функции  $\text{Integrate}[f, \{x, a, b\}]$  и  $\text{NIntegrate}[f, \{x, a, b\}]$ . Примеры их применения приведены в разделе 1.2.

С помощью функции  $\text{Integrate}$  можно вычислять и кратные интегралы, однако сводить кратные интегралы к повторным пока приходится самому пользователю. В качестве примера вычислим тройной интеграл

$$\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz,$$

где область  $V$  ограничена поверхностями  $z = xy$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ ,  $z = 0$  (задача 4076 из задачника [4]). Имеем

$$\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2 z^3 dz.$$

Выполнение кода

```
Integrate [
  Integrate [
    Integrate [x*y^2*z^3,
      {z, 0, x*y} ] ,
    {y, 0, x} ] ,
  {x, 0, 1} ]
```

приводит к результату  $1/364$ .

## 2.12 Алгебраические уравнения и неравенства

В системе Wolfram Mathematica реализовано множество алгоритмов для решения уравнений различных типов. Большинство функций для решения уравнений имеют разновидности для решения в символьном или численном виде.

Функция

```
Solve [{expr1, expr2, ...}, var1, var2, ...]
```

позволяет решать уравнения и неравенства в символьном виде. Выражения  $expr1, expr2, \dots$  задают уравнения, а  $var1, var2, \dots$  определяют переменные, относительно которых требуется разрешить уравнение. Решение возвращается в виде списка (см. стр. 12), т. е. в виде

$$\{\{expr1 \rightarrow val11, expr2 \rightarrow val12, \dots\}, \{expr1 \rightarrow val21, expr2 \rightarrow val22, \dots\}, \dots\}$$

Пример. Результат выполнения кода

```
Solve [{x^2+y == a, x-y == b}, {x, y}]
```

выглядит так

$$\{\{x \rightarrow 1/2(-1 - \sqrt{1 + 4a + 4b}), y \rightarrow 1/2(-1 - 2b - \sqrt{1 + 4a + 4b})\}, \\ \{x \rightarrow 1/2(-1 + \sqrt{1 + 4a + 4b}), y \rightarrow 1/2(-1 - 2b + \sqrt{1 + 4a + 4b})\}\}$$

Вариант функции для численного решения уравнений NSolve используется аналогичным образом. Естественно, для численного решения требуется, чтобы все константы, входящие в уравнения, были определены. Пример.

```
in [1] := NSolve [{x^2+y==1, x-y==2}, {x, y}]
```

```
Out [1] = {{x -> -2.30278, y -> -4.30278}, {x -> 1.30278, y -> -0.697224}}
```

## 2.13 Решение дифференциальных уравнений

Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде в системе Wolfram Mathematica используется функция

```

In[1]:= s = NDSolve[{x'[t] = 0.2*x[t] + y[t], y'[t] = -x[t] + 0.2*y[t],
  x[0] = 1, y[0] = 0}, {x, y}, {t, 15}]

Out[1]:= {{x -> InterpolatingFunction[{{0., 15.}}, <>],
  y -> InterpolatingFunction[{{0., 15.}}, <>]}}

In[2]:= ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, 15}]

```

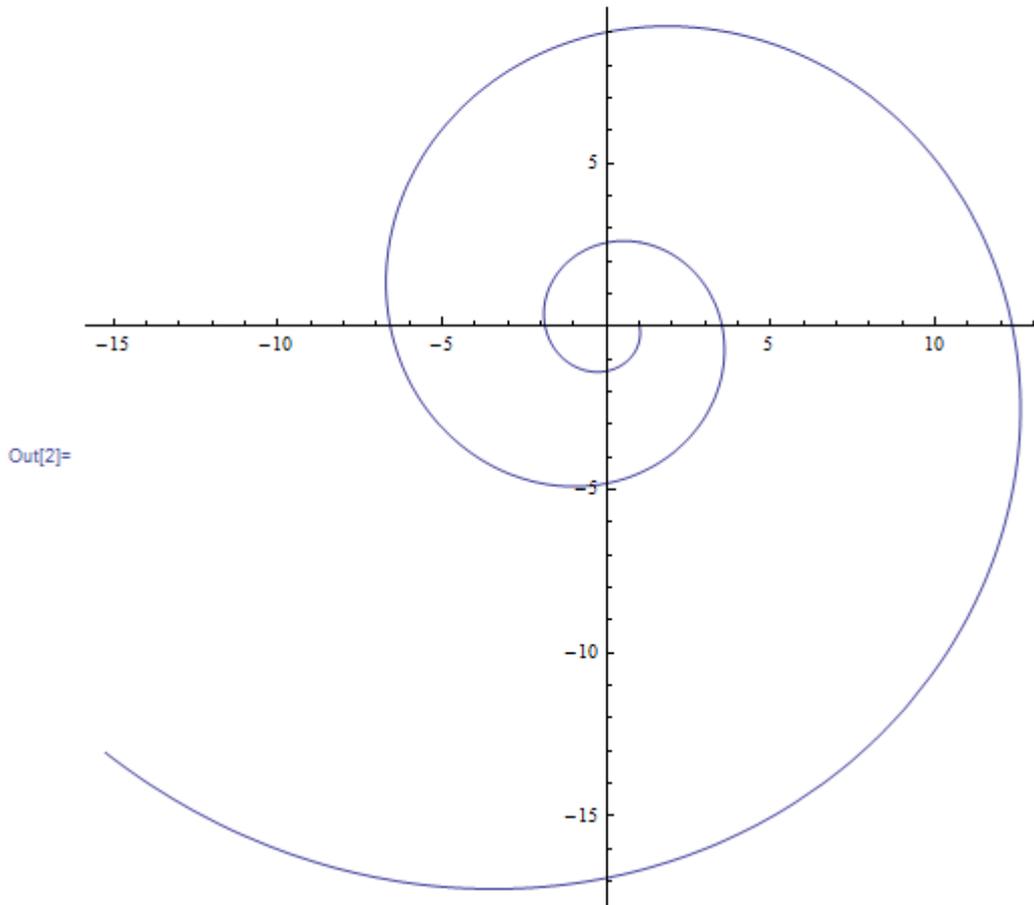


Рис. 2.9. Использование функции NDSolve

`Dsolve[{eqn1, eqn2, ...}, {y1, y2, ...}, x]`

Здесь `eqn1, eqn2, ...` – обыкновенные дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций  $y_1(x), y_2(x), \dots$ ,  $x$  – независимая переменная. Например, вызов функции

`DSolve[{x'[t]==y[t], y'[t]==-x[t]}, {x[t], y[t]}, t]`

даст результат

`{{x[t]->C[1] Cos[t]+C[2] Sin[t], y[t]->C[2] Cos[t]-C[1] Sin[t]}}`

Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений имеется функция

```
NDSolve [ eqns , { u1 , u2 , ... } , { t , tmin , tmax } ]
```

Пример использования функции NDSolve с последующим выводом решения в графическом виде приведен на рис. 2.9. В данном примере решается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 0.2x + y, \quad \dot{y} = -x + 0.2y$$

с начальными условиями  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ . Решение ищется на отрезке  $t \in [0, 15]$ . Вызов функции имеет вид

```
NDSolve [ { x' [ t ] == 0.2 * x [ t ] + y [ t ] , y' [ t ] == -x [ t ] + 0.2 * y [ t ] ,
x [ 0 ] == 1 , y [ 0 ] == 0 } , { x , y } , { t , 15 } ]
```

Функции DSolve и NDSolve позволяют решать также дифференциальные уравнения в частных производных. Отличие состоит только в формате обращения к функциям. Мы не приводим соответствующих примеров, т. к. в данном пособии дифференциальные уравнения в частных производных не рассматриваются.

## 2.14 Интерактивные вычисления

Функция Manipulate позволяет пользователю изменять значения параметров, входящих в выражение, и следить за изменением значения этого выражения. В простейшем случае вызов функции имеет вид

```
Manipulate [ expr , { u , umax , umin , step } ]
```

где expr – выражение, u – изменяемый параметр, umax, umin – границы изменения параметра, step – шаг изменения параметра.

Пример использования функции Manipulate приведен на рис. 2.10 и 2.11. В этом примере в качестве выражения expr используется функция

```
Plot [ Sin [ x+b ] , { x , 0 , 6 } ]
```

которая строит график функции  $y = \sin(x + b)$  на отрезке  $[0, 6]$ . Функция Manipulate позволяет изменять значения параметра  $b$  с помощью управляющего элемента «ползунок» (slider) в диапазоне  $[0, 2\pi]$ .

Кроме ползунков, существует большой набор других управляющих элементов для управления значениями параметров.

## 2.15 Графические комплексы

Графические комплексы позволяют описывать двух- и трехмерные объекты, состоящие из графических примитивов – многоугольников (полигонов), линий и т. п.

```
In[1]:= Manipulate[Plot[Sin[x + b], {x, 0, 6}], {b, 0, 2 * π, 0.1}]
```

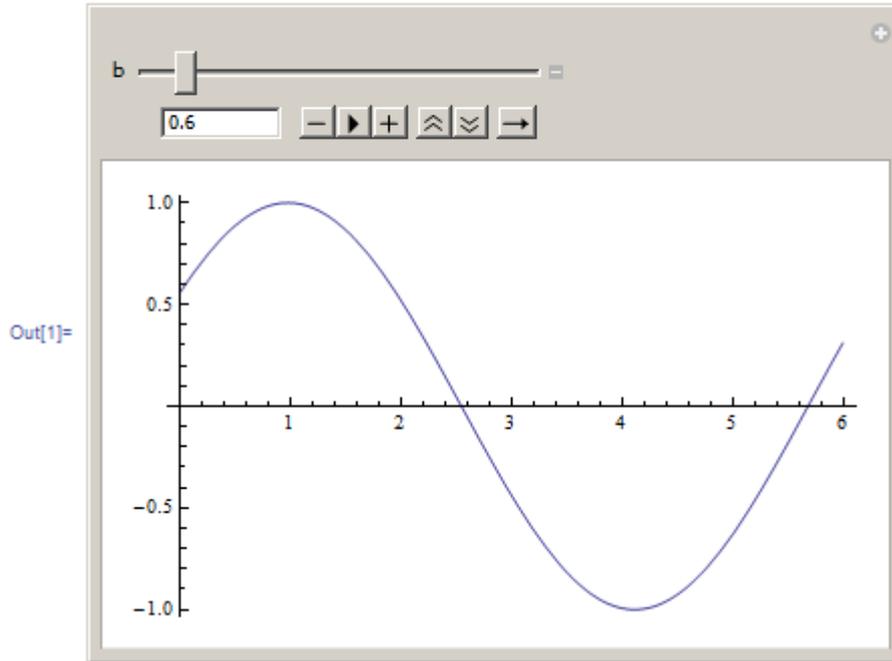


Рис. 2.10. График функции  $y = \sin(x + b)$ ,  $b = 0.6$

```
In[1]:= Manipulate[Plot[Sin[x + b], {x, 0, 6}], {b, 0, 2 * π, 0.1}]
```

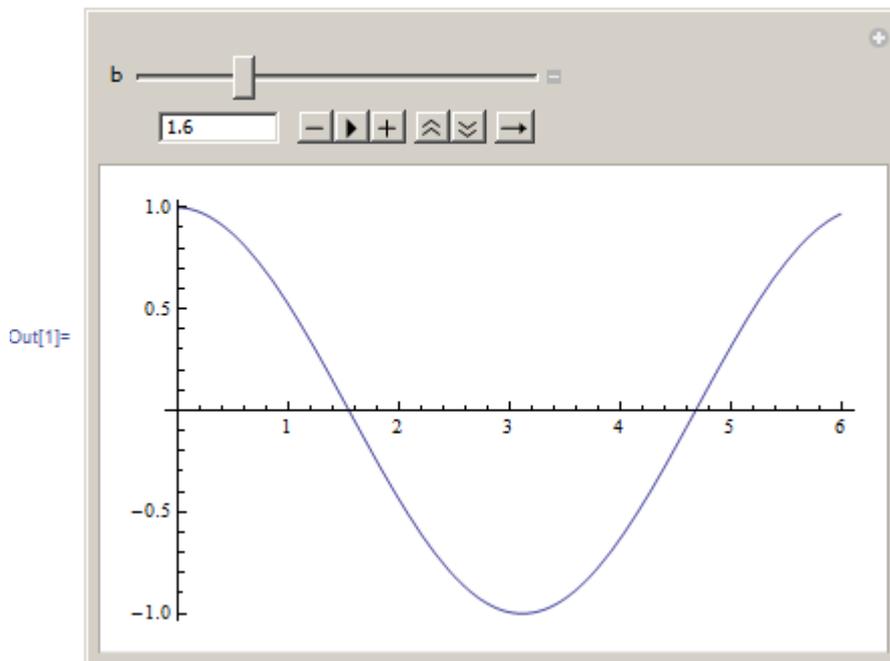


Рис. 2.11. График функции  $y = \sin(x + b)$ ,  $b = 1.6$

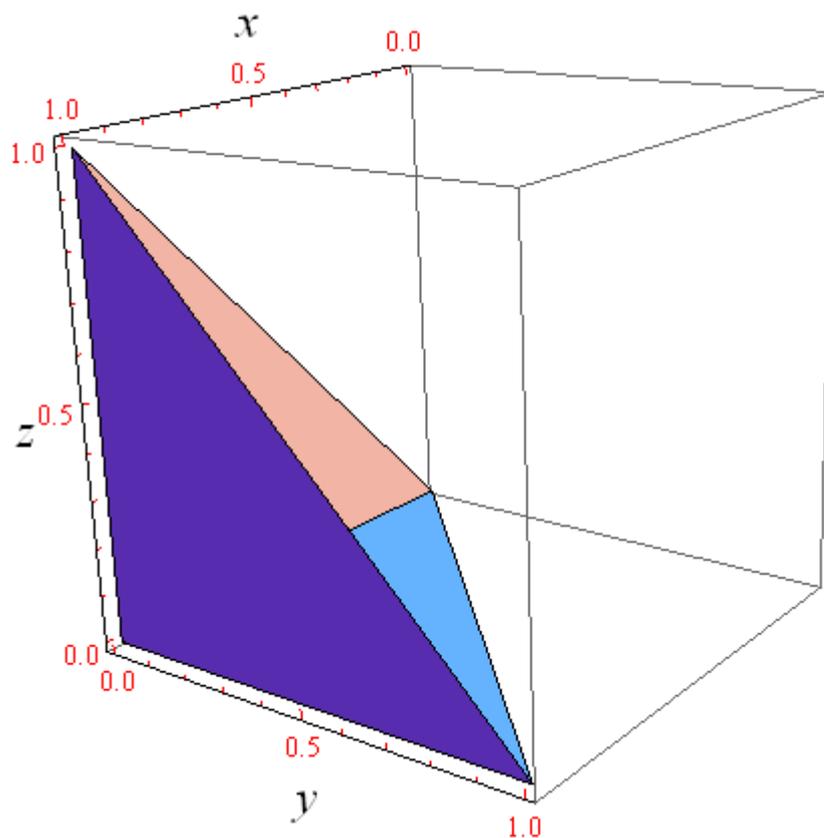


Рис. 2.12. Поверхность, составленная из трех треугольников

В общем случае формат вызова функции `GraphicsComplex` имеет вид

```
GraphicsComplex[{pt1, pt2, ...}, data]
```

где  $\{pt1, pt2, \dots\}$  – список графических примитивов, а параметр `data` описывает способ интерпретации (объединения) этих примитивов.

Мы приведем пример описания триангулированной поверхности. Другие графические комплексы в настоящем пособии не используются.

```
ver = {{0, 0, 0}, {1, 0, 0}, {1, 1, 0}, {1, 0, 1}};
lst = {{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {2, 3, 4}};
```

```
Graphics3D[{LightBlue, GraphicsComplex[ver, Polygon[lst]]},
Axes->True, AxesLabel->{x, y, z}, LabelStyle->Directive[Large],
TicksStyle->Directive[Red, 14]]
```

Результат выполнения кода показан на рис. 2.12.

Переменная `ver` содержит список вершин описываемого объекта – трехмерных точек. Список `lst` содержит список треугольников. Первый треугольник

имеет вершины 1, 2 и 3 в списке `ver`, т. е. его вершины есть точки  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$  и так далее.

Конструкция `GraphicsComplex[ver, Polygon[lst]]` создает поверхность, состоящую из треугольников. То, что получатся именно треугольники-поверхности, определяется обращением к функции `Polygon`, которая создает графический примитив типа многоугольник.

Если бы мы захотели создать графический комплекс, состоящий из линий, соединяющих перечисленные вершины, то вместо функции `Polygon` следовало бы воспользоваться функцией `Line`.

Например, выполнение кода

```
Graphics3D[{Thickness[0.01], GraphicsComplex[ver, Line[lst]]},
  Axes->True, AxesLabel->{x, y, z}, LabelStyle->Directive[Large],
  TicksStyle->Directive[Red, 14]]
```

(здесь значения переменных `ver` и `lst` остаются такими же, как в предыдущем примере) приведет к созданию объекта, показанного на рис. 2.13.

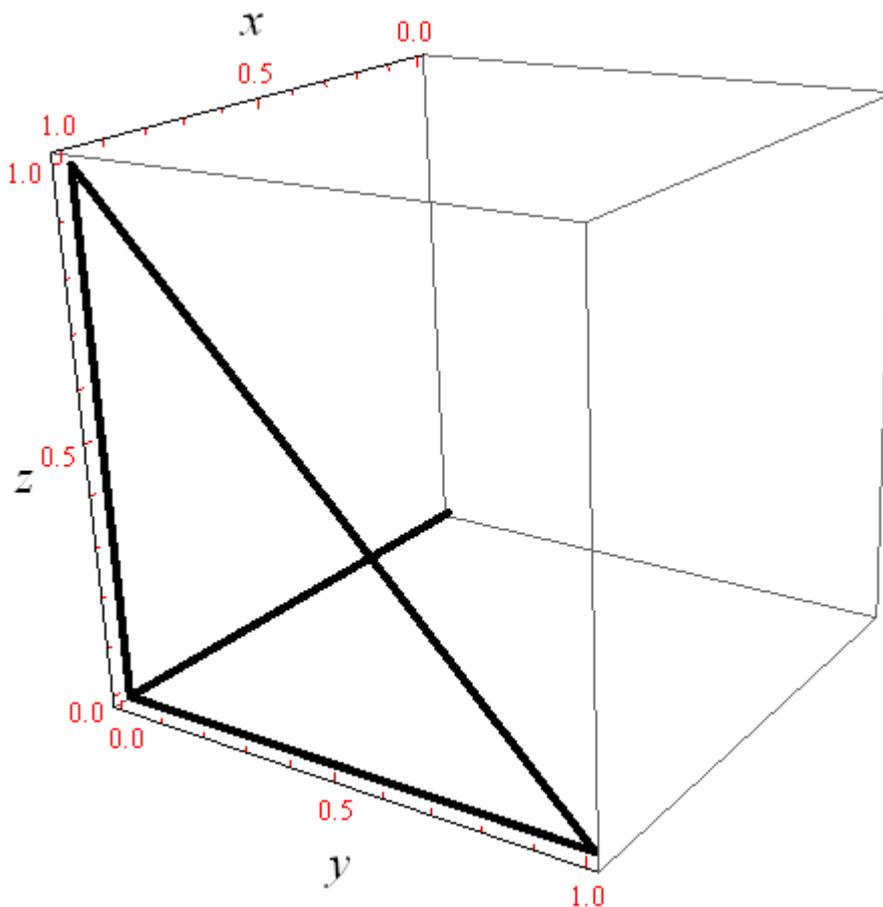


Рис. 2.13. Комплекс, составленный из отрезков

## Глава 3

# Касательная, нормаль, площадь, объем

В данной главе рассматривается несколько простых примеров применения системы Wolfram Mathematica для решения классических задач математического анализа. Рассматриваются задачи, связанные с построением касательной и нормали, а также с вычислением площади и объема.

### 3.1 Касательная к кривой

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.1)$$

Будем предполагать, что кривая, заданная уравнениями (3.1), есть простая гладкая кривая, т. е. функции  $x(t)$ ,  $y(t)$  непрерывно дифференцируемы и  $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 > 0 \forall t \in [t_0, t_1]$  (точкой обозначается производная по  $t$ ). Как известно, вектор  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$  является направляющим вектором для прямой, касательной к кривой (3.1) в точке, соответствующей значению параметра  $t$ . Нам будет удобно направляющий вектор нормировать.

Параметрические уравнения касательной прямой в точке, соответствующей значению параметра  $t$ , имеют вид

$$x = x(t) + \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}v, \quad y = y(t) + \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}v,$$

где  $v$  – параметр прямой.

На рис. 3.1 представлен код на Wolfram Mathematica, позволяющий строить касательную прямую. Благодаря использованию функции Manipulate можно изменять точку касания и наблюдать за соответствующими изменениями касательной прямой. Для того чтобы перейти к другой кривой, достаточно изменить первые четыре строки приведенного кода.

## 3.2 Нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (3.2)$$

$$u \in [u_0, u_1], \quad v \in [v_0, v_1]. \quad (3.3)$$

Будем предполагать, что это простая гладкая поверхность, т. е. функции  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  имеют непрерывные частные производные первого порядка по переменным  $u$  и  $v$  и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix}$$

равен 2 при всех допустимых значениях параметров.

При этих предположениях в любой точке поверхности определены ненулевые векторы

$$N = \pm \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u(u, v) & y_u(u, v) & z_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) & z_v(u, v) \end{pmatrix},$$

которые называются векторами нормали к поверхности (3.2) в точке

$$A(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Ниже приводится код на языке Wolfram Mathematica, позволяющий построить нормаль к поверхности и следить за изменениями вектора нормали, произвольно изменяя точку  $A(u, v)$ .

```

1  x[u_, v_] := 2 * Cos[u] * Cos[v];
2  y[u_, v_] := 1.5 * Sin[u] * Cos[v];
3  z[u_, v_] := Sin[v];
4  u0 = 0;
5  u1 = 2 * Pi;
6  v0 = -Pi / 2;
7  v1 = Pi / 2;

8  sur = ParametricPlot3D[{x[u, v], y[u, v], z[u, v]},
9      {u, u0, u1}, {v, v0, v1}, Mesh -> None];

10 xu[u_, v_] = D[x[u, v], u];
11 yu[u_, v_] = D[y[u, v], u];
12 zu[u_, v_] = D[z[u, v], u];

13 xv[u_, v_] = D[x[u, v], v];
14 yv[u_, v_] = D[y[u, v], v];

```

```

15  zv[u_,v_]=D[z[u,v],v];

16  norvec[u_,v_]:={x[u,v],y[u,v],z[u,v]}+
17    1.2*Normalize[
18    Cross[{xu[u,v],yu[u,v],zu[u,v]},{xv[u,v],yv[u,v],zv[u,v]}]
19    ];

20  Manipulate[
21  nor=Graphics3D[{Red,Arrowheads[0.04],
22    Arrow[Tube[{x[u,vv],y[u,vv],z[u,vv]},
23    norvec[uu,vv]},0.04]}];
24  LineU=ParametricPlot3D[{x[u,vv],y[u,vv],z[u,vv]},{u,u0,u1}];
25  LineV=ParametricPlot3D[{x[uu,v],y[uu,v],z[uu,v]},{v,v0,v1}];
26  Show[sur,nor,LineU,LineV,
27    PlotRange->{{-3,3},{-3,3},{-3,3}},
28    PreserveImageOptions->True],
29  {uu,u0,u1},{vv,v0,v1}
30 ]

```

*Комментарии к коду.*

Строки 1–7. Задание уравнений поверхности (3.2) и диапазонов изменения параметров (3.3). В данном примере заданы параметрические уравнения эллипсоида. При переходе к другим уравнениям следует иметь в виду, что предлагаемая программа строит только одну из двух нормалей. Какая из нормалей будет построена, зависит от ориентации поверхности, которая в нашем случае определяется ролями переменных  $u$  и  $v$ . Если ориентация выбрана неудачно, нормаль может оказаться направленной внутрь и быть невидимой.

Строки 8–9. Построение графика поверхности (3.2). Эта поверхность далее меняться не будет, и ее достаточно построить один раз.

Строки 10–15. Определение функций для вычисления частных производных функций (3.2).

Строки 16–19. Определение функции для построения нормали. Для вычисления векторного произведения векторов используется функция `Cross`, а для нормировки полученного вектора – функция `Normalize`. Коэффициент 1.2, на который умножается нормализованный вектор, выбран нами исключительно из соображения лучшей видимости вектора на экране.

Строки 20–30. Вызов функции `Manipulate` с изменяемыми параметрами  $uu$ ,  $vv$ , определяющими положение точки, в которой строится нормаль к поверхности.

Строки 21–23. Рисование нормального вектора. Толщина линии для рисования вектора и размер его стрелки подобраны экспериментально.

Строки 24–25. Рисование координатных линий, проходящих через данную точку. Отображение этих линий добавлено для наглядности: можно наблюдать, что вектор нормали ортогонален каждой из этих линий.

Строки 26–28. Вывод всех созданных графических объектов. Диапазон выводимых значений (значение параметра PlotRange) выбран специально для данного примера. Для другого случая его, возможно, потребуется изменить. Можно и автоматизировать выбор этого параметра, оценив значения, принимаемые функциями (3.2).

Результат выполнения этого примера показан на рис. 3.2.

На рис. 3.3 показано построение нормали к тору. Использовалась та же программа, с заменой строк 1–7 следующим кодом:

```
x[u_, v_] := (3 + Cos[v]) * Cos[u];
y[u_, v_] := (3 + Cos[v]) * Sin[u];
z[u_, v_] := Sin[v];
u0 = 0;
u1 = 2 * Pi;
v0 = 0;
v1 = 2 * Pi;
```

### 3.3 Периметр и площадь многоугольника

В этом разделе приводится программа на языке Wolfram Mathematica для вычисления периметра и площади многоугольника. Предполагается, что многоугольник задан множеством вершин  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ .

Очевидно, периметр многоугольника равен сумме длин его сторон

$$P = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad (3.4)$$

где  $x_{n+1} = x_1$ ,  $y_{n+1} = y_1$ .

Формула для вычисления площади менее известна и обычно не входит в стандартные курсы анализа. Приведем и докажем соответствующее утверждение.

**Теорема.** Пусть область на плоскости ограничена ломаной линией без самопересечений с вершинами в точках  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Тогда ориентированная площадь области может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

где  $x_{n+1} = x_1$ ,  $y_{n+1} = y_1$ .

Под ориентированной площадью области понимается площадь области, взятая со знаком плюс, если вершины ломаной перечислены в порядке, соответствующем обходу области в положительном направлении (т. е. контур пробегается в направлении против часовой стрелки) и со знаком минус в противном случае.

Отметим, что ориентированную область можно вычислить для определения ориентации контура, т. е. когда требуется по набору вершин ломаной выяснить направление ее обхода.

**Доказательство.** Воспользуемся формулой для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла второго типа (см. например [3])

$$S = \frac{1}{2} \int_C xdy - ydx, \quad (3.6)$$

где  $C$  — данная ломаная. Пусть  $C_i$  — сегмент ломаной, соединяющий точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  ( $i = 1, \dots, n$ ). В силу аддитивности интеграла, интеграл в правой части (3.6) равен сумме интегралов по сегментам  $C_i$

$$\int_C = \sum_{i=1}^n \int_{C_i}$$

Интеграл по  $i$ -му сегменту легко вычислить, воспользовавшись параметризацией

$$x(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i), \quad y(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \quad t \in [0, 1].$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{C_i} xdy - ydx &= \int_0^1 [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt = \\ &= \int_0^1 \begin{vmatrix} x_i + t(x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i) \\ y_i + t(y_{i+1} - y_i) & (y_{i+1} - y_i) \end{vmatrix} dt = \int_0^1 \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} dt = \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Суммируя по  $i$ , находим интеграл  $\int_C$  и, подставляя полученное значение в (3.6), приходим к формуле (3.5). Теорема доказана.  $\square$

Формула (3.5) остается справедливой и для случая неодносвязной области — области, ограниченной одним внешним контуром и несколькими непересекающимися внутренними контурами. Требуется только, чтобы внутренние контуры, описывающие области, которые нужно «вынуть», пробегались в направлении, противоположном направлению обхода внешнего контура. Внутренние контуры также не должны иметь самопересечений.

Программа для вычисления периметра и площади многоугольника по формулам (3.4) и (3.5) приведена на рис. 3.4.

### 3.4 Объем тела, ограниченного триангулированной поверхностью

Справедливы аналоги формулы (3.5) для пространств с большим числом измерений. Мы ограничимся рассмотрением трехмерного случая.

**Теорема.** Пусть тело в трехмерном пространстве ограничено поверхностью  $S$ , представляющей собой набор треугольников  $S_i$  с вершинами в точках  $(x_0^i, y_0^i, z_0^i)$ ,  $(x_1^i, y_1^i, z_1^i)$ ,  $(x_2^i, y_2^i, z_2^i)$   $i = 1, \dots, n$ , причем порядок перечисления точек треугольника задает ориентацию треугольника в пространстве по отношению к телу: если при обходе точек в порядке  $0 - 1 - 2 - 0$  треугольник остается слева, то мы «ходим» по внешней стороне границы тела. Предполагается также, что поверхность  $S$  не имеет самопересечений. Тогда объем тела может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Вывод формулы (3.7) аналогичен выводу формулы (3.5). Объем тела можно найти с помощью поверхностного интеграла второго типа по внешней стороне поверхности  $S$ , ограничивающей тело (см. например [3])

$$V = \frac{1}{3} \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy. \quad (3.8)$$

Так как  $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ , интеграл можно представить в виде суммы интегралов по всем треугольникам

$$\iint_S = \sum_{i=1}^n \iint_{S_i}.$$

Для вычисления интеграла по  $i$ -му треугольнику воспользуемся параметризацией

$$\begin{aligned} x(u, v) &= x_0^i + u(x_1^i - x_0^i) + v(x_2^i - x_0^i), \\ y(u, v) &= y_0^i + u(y_1^i - y_0^i) + v(y_2^i - y_0^i), \\ z(u, v) &= z_0^i + u(z_1^i - z_0^i) + v(z_2^i - z_0^i), \end{aligned}$$

$(u, v) \in \Delta$ , где  $\Delta$  — треугольник на плоскости  $(u, v)$  с вершинами в точках  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Сводя поверхностный интеграл к двойному, получим

$$\begin{aligned} J_i &= \iint_{S_i} xdydz + ydzdx + zdx dy = \\ &= \iint_{\Delta} \left[ x(u, v) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + y(u, v) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + z(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] dudv = \\ &= \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} x_0^i + u(x_1^i - x_0^i) + v(x_2^i - x_0^i) & (x_1^i - x_0^i) & (x_2^i - x_0^i) \\ y_0^i + u(y_1^i - y_0^i) + v(y_2^i - y_0^i) & (y_1^i - y_0^i) & (y_2^i - y_0^i) \\ z_0^i + u(z_1^i - z_0^i) + v(z_2^i - z_0^i) & (z_1^i - z_0^i) & (z_2^i - z_0^i) \end{vmatrix} dudv = \\ &= \iint_{\Delta} \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix} dudv = \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix} \iint_{\Delta} dudv. \end{aligned}$$

Интеграл по треугольнику  $\Delta$  от единицы равен площади этого треугольника, т. е.  $\frac{1}{2}$ . Окончательно получаем

$$J_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix}.$$

Суммируя по  $i$  и подставляя полученное выражение для  $\iint_S$  в формулу (3.8), приходим к формуле (3.7). Теорема доказана.  $\square$

Формула (3.7) справедлива и для случая тела с пустотами, если треугольники, описывающие внутренние пустоты тела, ориентированы соответствующим образом.

На этом же пути могут быть получены формулы для вычисления объемов тел, ограниченных более сложными поверхностями.

В качестве примера применения формулы (3.7) вычислим объем тела, ограниченного триангуляцией тора. Напомним, что тором называется поверхность, задаваемая параметрическими уравнениями

$$x = (R + r \cos v) \cos u, \quad y = (R + r \cos v) \sin u, \quad z = r \sin v,$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Для получения триангуляции этой поверхности можно выполнить, например, следующий код.

```

R=3.0;
r=1.0;

x[u_,v_] := (R+r*Cos[v])*Cos[u];
y[u_,v_] := (R+r*Cos[v])*Sin[u];
z[u_,v_] := r*Sin[v];
u0=0.0;
u1=2.0*Pi;
v0=0.0;
v1=2.0*Pi;

n=20;
m=15;
hu=(u1-u0)/(n-1);
hv=(v1-v0)/(m-1);

verts={};
For[i=1,i<=n,i++,
  ut=u0+(i-1)*hu;
  For[j=1,j<=m,j++,

```

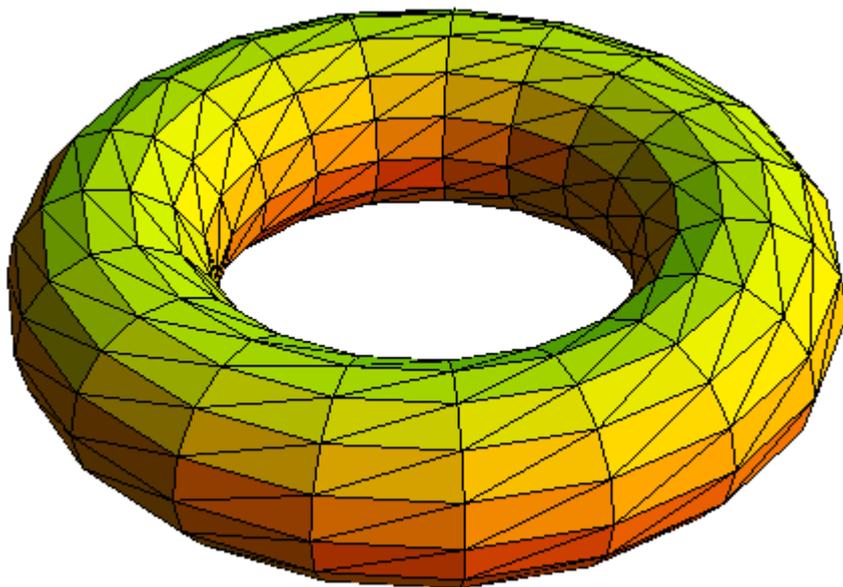
```

vt=v0+(j-1)*hv;
xt=x[ut,vt];
yt=y[ut,vt];
zt=z[ut,vt];
verts=Append[verts,{xt,yt,zt}];
];
];

indx={};
For[i=1,i<n,i++,
  For[j=1,j<m,j++,
    v1=(i-1)*m+j;
    v2=(i-1)*m+j+1;
    v3=i*m+j+1;
    v4=i*m+j;
    indx=Append[indx,{v1,v3,v2}];
    indx=Append[indx,{v1,v4,v3}];
  ];
];
Graphics3D[{RGBColor[1,1,0],
  GraphicsComplex[verts,Polygon[indx]]},
  Boxed->False]

```

После выполнения кода переменная `verts` содержит список вершин тела, а переменная `indx` – список треугольников. Сгенерированная поверхность имеет вид:



Следующий фрагмент кода позволяет найти объем тела, ограниченного поверхностью по формуле (3.7).

```
TorTriangVol=0.0;
For [ i=1,i<=Length [ indx ] , i++,
  curtr=indx [[ i ] ];
  TorTriangVol=TorTriangVol+
  Det[{ verts [[ curtr [[ 1 ] ] ] ] , verts [[ curtr [[ 2 ] ] ] ] ,
    verts [[ curtr [[ 3 ] ] ] ] }];
];
TorTriangVol=TorTriangVol/6.0
```

Результат в нашем случае ( $n = 20$ ,  $m = 15$ ) будет равен 56.2118. Объем тела, ограниченного поверхностью тора, можно найти по известной формуле

$$V = 2\pi^2 Rr^2.$$

В нашем случае эта величина приблизительно равна 59.2176. При более мелком разбиении результат аппроксимации поверхности будет, естественно, лучше и значение объема будет ближе к точному.

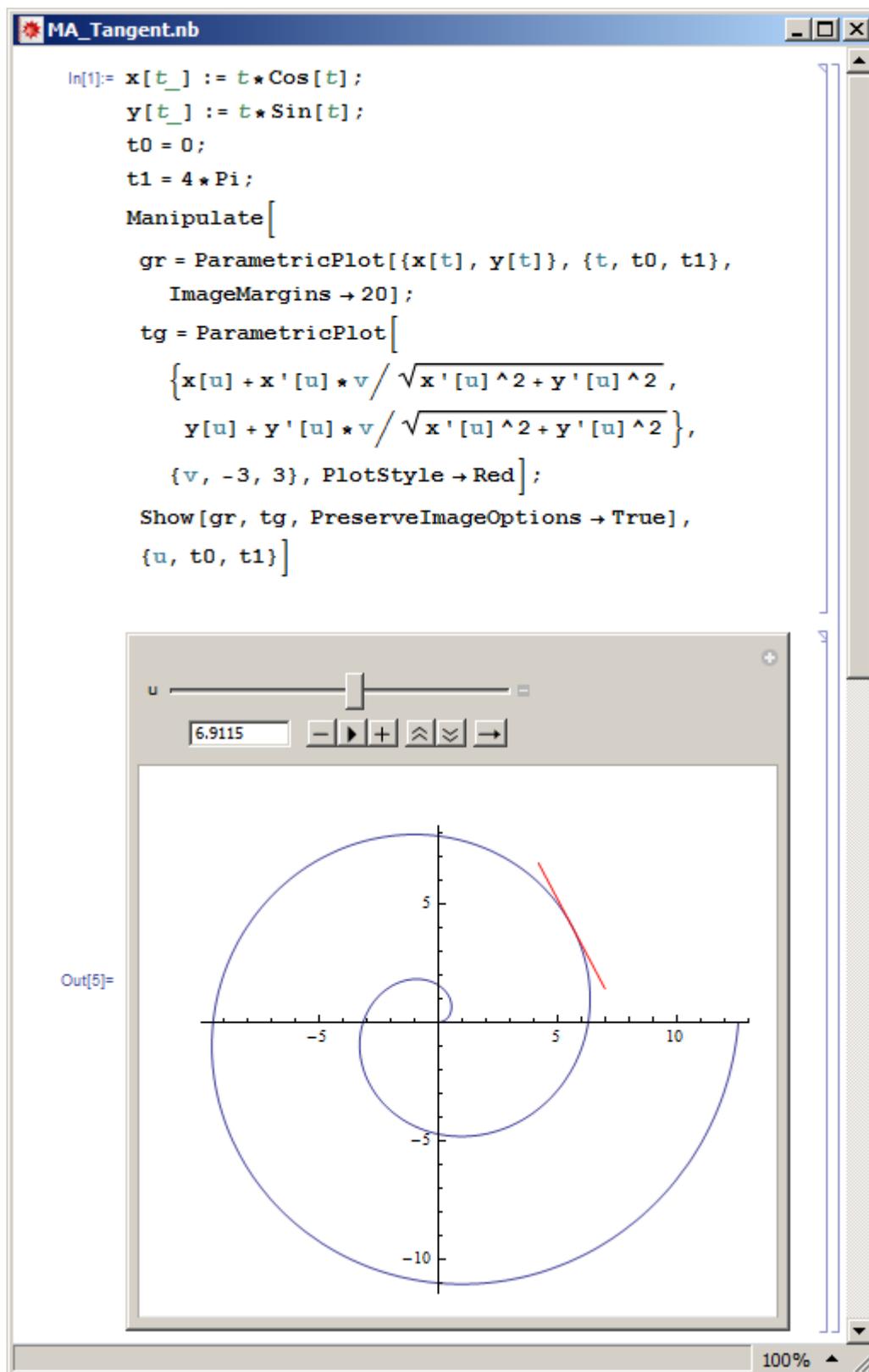


Рис. 3.1. Построение касательной к кривой

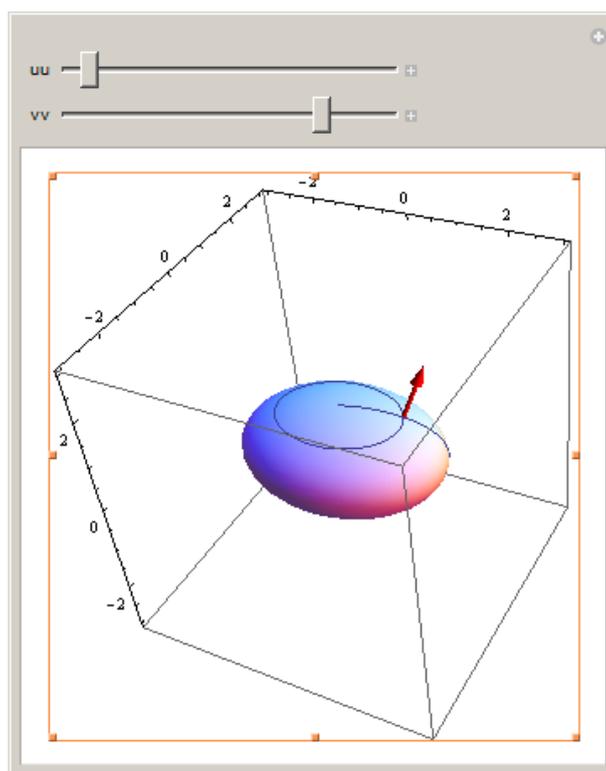


Рис. 3.2. Построение нормали к эллипсоиду

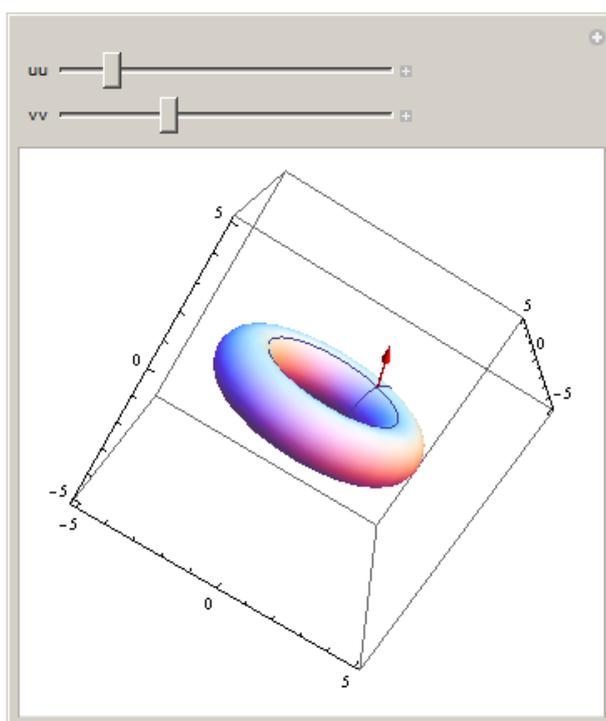


Рис. 3.3. Построение нормали к тору

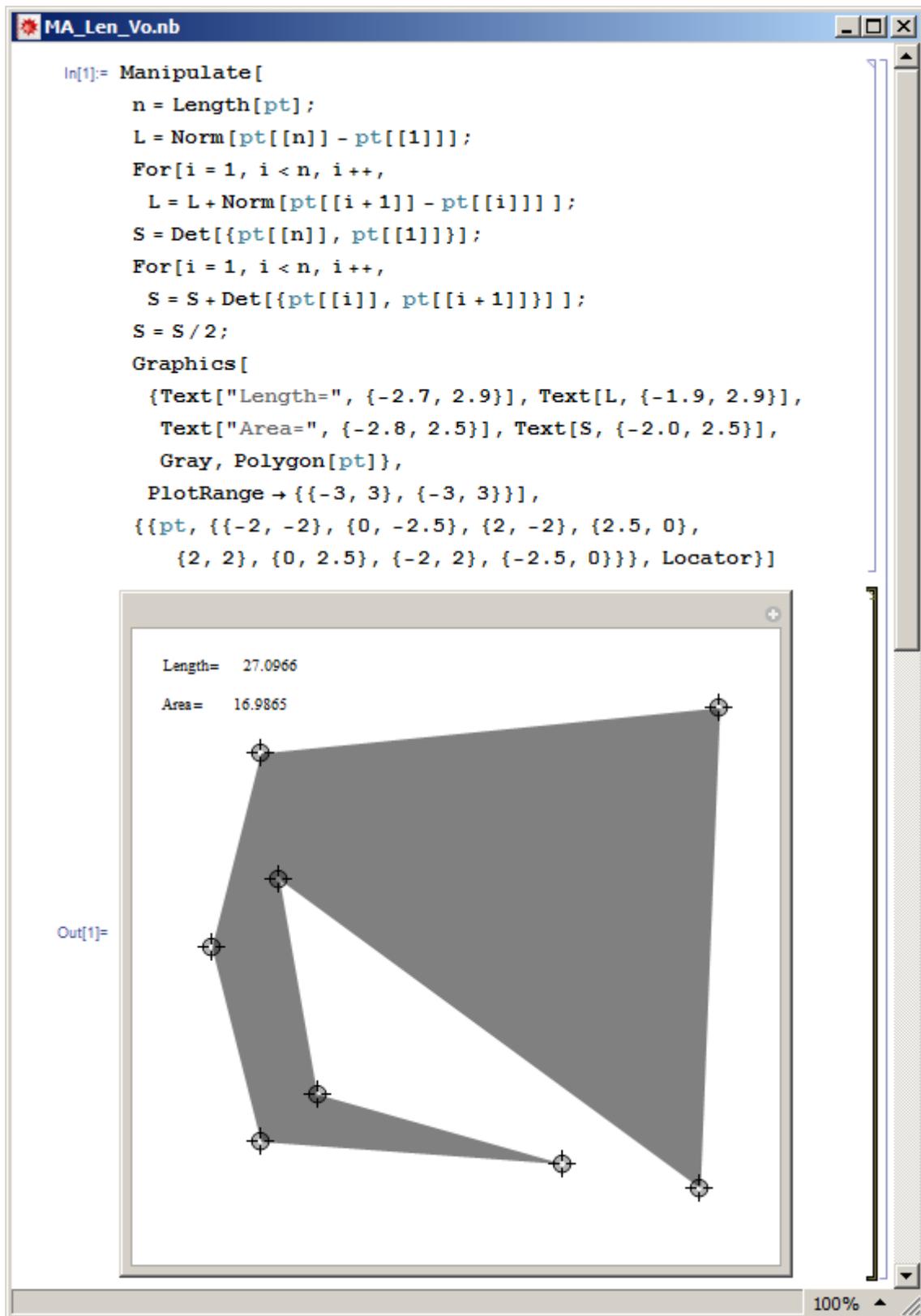


Рис. 3.4. Вычисление периметра и площади многоугольника

# Глава 4

## Решение задач оптимизации

### 4.1 Функции Maximize и Minimize

Для отыскания максимумов и минимумов функций в системе Wolfram Mathematica предусмотрены функции Maximize и Minimize. Имеются также их численные аналоги NMaximize и NMinimize. Если числовые значения при обращении к функциям Maximize и Minimize даны в точном виде (например,  $\pi^2/6$ ), система пытается найти точное (символьное) решение задачи. Если хотя бы один параметр дан в приближенном виде (например, не  $\pi^2/6$ , а 1.64493), то функция автоматически вызывает свой численный аналог и решение ищется численно. Синтаксис функций интуитивно понятен и проще всего продемонстрировать их использование на примерах. Приведем примеры использования функции Minimize. Остальные функции используются аналогично. Приведем некоторые примеры.

**Пример 1.** Отыскание минимума функции одной переменной  $f(x) = x^2 + x + 1$ :

```
Minimize[x^2 + x + 1, x]
```

```
{3/4, {x -> -1/2}}
```

**Пример 2.** Отыскание минимума функции двух переменных  $f(x, y) = x^2 + y^2$  при дополнительном условии  $x + y = 1$ :

```
Minimize[{x^2 + y^2, x + y == 1.0}, {x, y}]
```

```
{0.5, {x -> 0.5, y -> 0.5}}
```

В последнем примере результат получен в приближенном виде, т. к. во входных данных присутствует число в приближенном виде 1.0.

**Пример 3.** Численная минимизация функции трех переменных  $f(x, y, z) = x^2/2 + y^2 + z^2$  при условиях  $x + y + z = 0$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ :

```

NMinimize[{x^2/2 + y^2 + z^2,
  x + y + z = 0 && x^2 + y^2 + z^2 = 1}, {x, y, z}]
{0.666667, {x -> 0.816497, y -> -0.408248, z -> -0.408248}}

```

## 4.2 Решение задач линейного программирования

Для решения задач линейного программирования имеется функция `LinearProgramming`. Эта функция имеет несколько разновидностей, которые отличаются только форматом входных данных. Мы рассмотрим только один вариант использования функции `LinearProgramming`, применяемый в следующем разделе этой главы.

Ниже предполагается, что  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $M$  – вещественная матрица из  $m$  строк и  $n$  столбцов,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $l \in \mathbb{R}^n$ .

Функция

`LinearProgramming[a, M, b, l]`

ищет вектор  $x$ , минимизирующий функцию  $(a, x)$  при условии ограничений  $Mx \geq b$ ,  $x \geq l$ .

В качестве примера найдем решение задачи

$$f(x, y) = -x - y \rightarrow \min, \quad \text{при условиях } x \leq 1, \quad y \leq 1.$$

Решение задачи приведено на рис. 4.1.

## 4.3 Чебышевская точка системы неравенств

Чебышевские точки систем линейных неравенств широко применяются для решения различных задач оптимизации (см., например, [5]).

Мы рассмотрим только одну задачу, сводящуюся к отысканию чебышевской точки, – задачу о построении окружности наибольшего радиуса, вписанной в выпуклый многоугольник на плоскости. Необходимые определения и утверждения мы изложим, следуя [5].

Рассмотрим систему линейных неравенств

$$h_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

задающую ограниченное множество в  $\mathbb{E}^n$ , и пусть

$$L = \min_x \max_{1 \leq i \leq m} h_i(x) = \max_{1 \leq i \leq m} h_i(x^*). \quad (4.2)$$

Система (4.1) разрешима тогда и только тогда, когда  $L \leq 0$ . Если  $L > 0$ , то система (4.1) не имеет решений.

```

Untitled-1.nb *
In[1]:= M = {{-1, 0}, {0, -1}}
Out[1]= {{-1, 0}, {0, -1}}

In[2]:= b = {-1, -1}
Out[2]= {-1, -1}

In[3]:= l = {-Infinity, -Infinity}
Out[3]= {-∞, -∞}

In[4]:= a = {-1, -1}
Out[4]= {-1, -1}

In[5]:= LinearProgramming[a, M, b, l]
Out[5]= {1, 1}

```

Рис. 4.1. Иллюстрация работы функции LinearProgramming

Точка  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  называется чебышевской точкой системы (4.1), если

$$\min_x \max_{1 \leq i \leq m} h_i(x) = \max_{1 \leq i \leq m} h_i(x^*) = L \leq 0.$$

Если  $L > 0$ , то точка  $x^*$  называется чебышевским приближением системы неравенств (4.1). Введем новую переменную  $x_{n+1}$  и перейдем в расширенное пространство  $\mathbb{E}^{n+1}$ . Рассмотрим задачу линейного программирования: найти

$$\min x_{n+1} \quad (4.3)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq x_{n+1}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Задача (4.3), (4.4) эквивалентна задаче (4.1), (4.2).

Справедливо следующее утверждение. Пусть строки  $a^i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  матрицы  $A$  в (4.3) нормированы и пара  $\{x^*, x_{n+1}^*\}$  разрешает задачу (4.3), (4.4). Тогда  $x^*$  есть центр шара максимального радиуса  $r^* = |x_{n+1}^*|$ , вписанного в выпуклый многогранник  $R = \{x : Ax \leq b\}$ . При этом шар понимается в смысле нормы, относительно которой нормированы строки матрицы  $A$ . В частности, если

$$\|a^i\| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

то  $r^*$  – радиус куба максимального объема, принадлежащего  $R$ , если

$$\|a^i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2},$$

то  $r^*$  – радиус шара максимального объема, принадлежащего  $R$  и т. д.

Этот факт может быть использован для решения поставленной выше задачи о построении окружности максимального радиуса, вписанного в выпуклый многоугольник.

Приведем программу для системы Wolfram Mathematica, решающую данную задачу.

```

0  ChebyshevPoint [ points_ ]:= Block [
1  {n, dim, i, vt, v, A, B, bt, c},
2  dim=Dimensions [ points ];
3  n=dim [[ 1 ]];
4  A={};
5  For [ i=1, i<n, i++,
6  vt=points [[ i+1]] - points [[ i ]];
7  v={vt [[ 2]], - vt [[ 1 ]]};
8  A=Append [ A, v ]
9  ];
10 vt=points [[ 1]] - points [[ n ]];
11 v={vt [[ 2]], - vt [[ 1 ]]};
12 A=Append [ A, v ];
13 B={};
14 For [ i=1, i<=n, i++,
15 bt=A [[ i ]]. points [[ i ]];
16 B=Append [ B, bt ];
17 ];
18 For [ i=1, i<=n, i++,
19 norm=Sqrt [ A [[ i ]][[ 1]]^ 2 + A [[ i ]][[ 2]]^ 2 ];
20 A [[ i ]]=A [[ i ]]/ norm;
21 B [[ i ]]=B [[ i ]]/ norm;
22 ];
23 c={0, 0, 1};
24 l={-Infinity, -Infinity, -Infinity };
25 For [ i=1, i<=n, i++,
26 A [[ i ]]=Append [ A [[ i ]], -1 ]
27 ];
28 sol=LinearProgramming [ c, -A, -B, l ];
29 Return [ { { sol [[ 1]], sol [[ 2]] }, Abs [ sol [[ 3]] ] } ];
30 ]

```

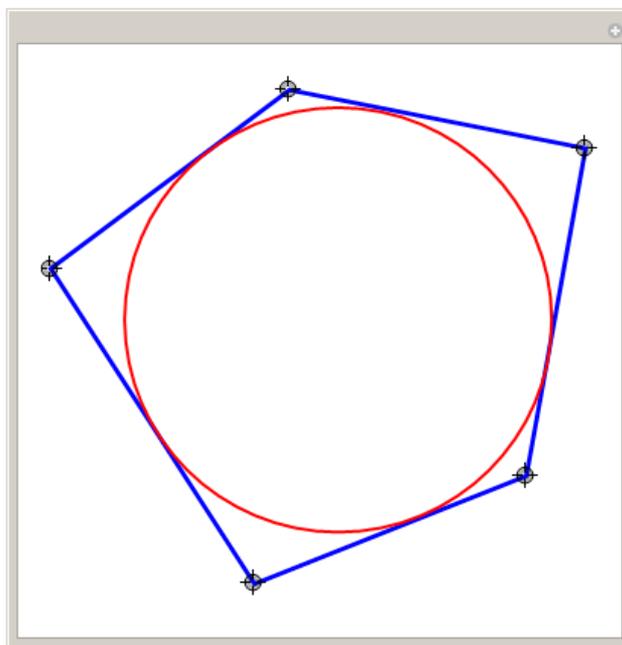


Рис. 4.2. Иллюстрация работы функции ChebyshevPoint

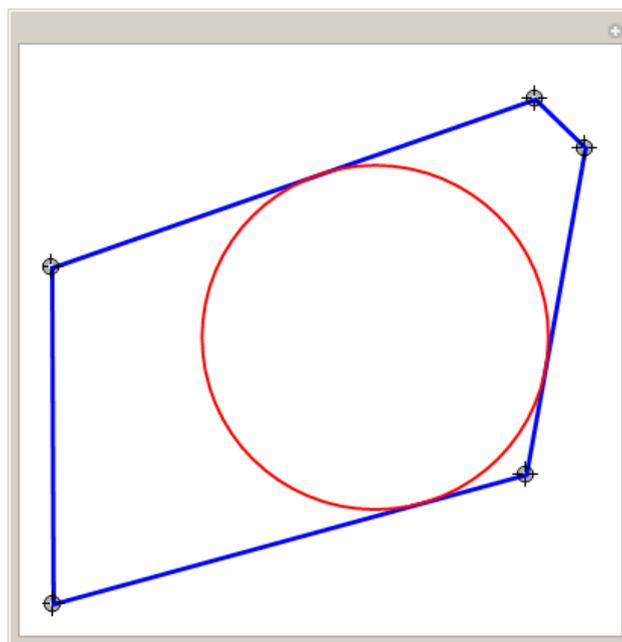


Рис. 4.3. Иллюстрация работы функции ChebyshevPoint

*Комментарии к коду.*

В нашем случае размерность пространства равна 2. Предполагается, что на вход функции поступает список точек `points` в виде  $\{\{x1, y1\}, \{x2, y2\}, \dots\}$

Строки 0–1. Определение функции и блока с локальными переменными.

Строки 2–3. Вычисление числа точек в списке `points`.

Строки 4–12. Формирование матрицы  $A$  системы (4.1).

Строки 13–17. Формирование вектора  $B$  системы (4.1).

Строки 18–22. Нормировка строк системы (4.1).

Строка 23. Формирование вектора  $c$ . Функция решения задачи линейного программирования `LinearProgramming` решает задачу минимизации выражения  $(c, x)$ .

Строка 24. Функция решения задачи линейного программирования `LinearProgramming` решает задачу при дополнительных ограничениях  $x \geq l$ . В нашем случае таких ограничений нет, и мы полагаем  $l = (-\infty, -\infty, -\infty)$ .

Строки 25–27. Вводим в матрицу  $A$  дополнительный третий столбец, состоящий из  $-1$ .

Строка 28. Решаем задачу линейного программирования. Вызов функции `LinearProgramming` с параметрами  $c, -A, -B, l$  решает задачу

$$(c, x) \rightarrow \min,$$

при условиях

$$-Ax \geq -B, \quad x > -\infty.$$

Смена знаков у  $A$  и  $B$  требуется для того, чтобы привести нашу задачу к форме, требуемой форматом функции `LinearProgramming` (неравенство системы ограничений должно иметь вид  $Mx \geq q$ ).

Строка 29. Возвращаем решение задачи в виде списка. Первый элемент – центр окружности, второй элемент – ее радиус.

Следует обратить внимание на то, что функция будет работать корректно, только если входной список точек задает выпуклый многоугольник.

Вызов функции

```
plist = {{0,0},{1,0},{1,1},{0,1}};
ChebyshevPoint[plist]
```

дает результат

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \frac{1}{2} \right\}$$

Приведем код с использованием функции `Manipulate`, позволяющий тестировать функцию, перетаскивая вершины многоугольника с помощью мыши.

```
Manipulate [
  cheb=ChebyshevPoint [ pts ];
  cent=cheb [ [ 1 ] ];
  rad=cheb [ [ 2 ] ];
```

```
cir=Graphics[{Red,Thick,Circle[cent,rad]}];
pts1=Append[pts,pts[[1]]];
lin=ListLinePlot[pts1,PlotStyle->{Blue,Thickness[0.008]}];
Show[{lin,cir},AspectRatio->1,PlotRange->{{0,3},{0,3}},
Axes->False],
{{pts,{{0,0},{1,0},{2,0.5},{2,1},{1,1}}},Locator}]
```

Результаты работы этого кода показаны на рис. 4.2 и рис. 4.3. Естественно, решение задачи может быть не единственным, хотя наша функция находит только одно решение.

# Глава 5

## Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

### 5.1 Отыскание решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда

Напомним, что функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  называется аналитической (или голоморфной) в окрестности

$$|x_i - x_i^0| < r \quad (i = 1, \dots, n)$$

точки  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , если в этой окрестности она разлагается в степенной ряд по

$$(x_1 - x_1^0), \dots, (x_n - x_n^0).$$

Согласно известной теореме Коши (см. например, [6]), если функция  $f(x, y)$  является аналитической в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , то существует и притом только одно решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{5.1}$$

аналитическое в окрестности точки  $x_0$  и удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.2}$$

Если выполнены условия теоремы Коши, решение уравнения (5.1) с начальным условием (5.2) можно искать в виде степенного ряда

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n. \tag{5.3}$$

Для отыскания коэффициентов  $b_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) можно подставить ряд (5.3) в уравнение (5.1), разложить правую часть уравнения в степенной ряд и приравнять слагаемые при одинаковых степенях  $(x - x_0)$ . Получится линейная относительно  $b_n$  система уравнений, из которой эти коэффициенты определяются однозначно.

Легко убедиться, что, приравнявая коэффициенты при  $(x - x_0)^1$ , мы найдем  $b_1$ ; приравнявая коэффициенты при  $(x - x_0)^2$ , мы найдем  $b_2$  и т. д.

Автоматизировать этот процесс можно с помощью функции `ODESerSolve`, код которой приводится ниже.

(\*Построение решения обыкновенного  
дифференциального уравнения  
 $y'(x) = F(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$   
в виде степенного ряда\*)

```

0  ODESerSolve[F_, x0_, y0_, N_] :=
1      Block[{F1, x1, rpar, i, sol, eq, coeff, b},
2      F1 = F/.x -> (x1 + x0);
3      rpar = Normal[Series[F1, x1, 0, N, y, y0, N]];
4      sol = y0;
5      For[i = 1, i <= N, i ++, sol = sol + b[i] * x1^i];
6      eq = D[sol, x1] - rpar/.y -> sol;
7      coeff = CoefficientList[eq, x1];
8      For[i = 1, i <= N, i ++,
9          b[i] = b[i]/.Solve[coeff[[i]] == 0, b[i]][[1]];
10     ];
11     sol = sol/.x1 -> (x - x0);
12     Return[sol];
13     ]

```

*Комментарии к коду.*

Строка 0 определяет функцию `ODESerSolve` с параметрами  $F$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $N$ .  $F$  – правая часть уравнения (это должно быть выражение, зависящее от переменных  $x$  и  $y$ ),  $x_0$ ,  $y_0$  – начальное условие. Функция возвращает разложение решения уравнения в виде

$$y_0 + \sum_{i=1}^N b_i (x - x_0)^i,$$

в котором найдены слагаемые до  $(x - x_0)^N$  включительно.

В строке 2 производится замена переменной  $x = x_1 + x_0$ , т. к. удобней работать с разложениями в окрестности точки  $x = 0$ .

В строке 3 правая часть уравнения разлагается в ряд по степеням  $x_1$  и  $(y - y_0)$ . Разложение сохраняется в переменной `grag`.

Строки 4–5. Сумма  $y_0 + \sum_{i=1}^N b_i x_1^i$  формируется и сохраняется в переменной `sol`.

Строка 6. Сумма, сформированная на предыдущем шаге, подставляется в выражение  $y'(x_1) - f(x_0 + x_1, y)$ , где функция  $f$  уже разложена в степенной ряд. Таким образом, формируется многочлен `eq`. Из уравнения  $eq = 0$  будут определяться неизвестные коэффициенты  $b_i$ .

Строка 7. С помощью функции `CoefficientList` формируется список коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $x_1$ .

Строки 8–9. В цикле последовательно вычисляются коэффициенты  $b_i$ . Сложная конструкция в строке 9 нужна для того, чтобы в переменной `b[i]` в действительности оказалось соответствующее значение. Функция `Solve` возвращает список правил. В нашем случае возвращаемое значение может иметь, например, вид  $\{\{b[1] \rightarrow 1\}\}$ . В таком случае обращение к первому (и единственному) элементу этого списка `Solve[coeff[[1]] == 0, b[1]][[1]]` даст значение  $\{b[1] \rightarrow 1\}$ . Выполнение подстановки `b[i] /. Solve[coeff[[1]] == 0, b[1]][[1]]` (фактически, в данном случае это будет `b[1] /. {b[1] -> 1}`) даст значение 1, которое и будет затем сохранено в переменной `b[1]`.

В строке 11 производится возвращение к исходной переменной по формуле  $x_1 = x - x_0$ .

В строке 12 возвращается вычисленное функцией значение.

Решим с помощью этой функции задачу № 1095 из задачника [7]: найти в виде степенного ряда решение задачи

$$y' = x^2 + y^3, \quad y(1) = 1.$$

Вызов функции

```
ODESerSolve[x^2+y^3,1,1,4]
```

дает результат

$$1 + 2(-1 + x) + 4(-1 + x)^2 + \frac{25}{3}(-1 + x)^3 + \frac{81}{4}(-1 + x)^4.$$

Приведем еще пример возможного использования разработанной функции. Следующий код позволяет наглядно продемонстрировать влияние количества слагаемых в разложении на точность представления решения.

```
Manipulate[
  solution=ODESerSolve[x^2+y^3,1,1,n];
  s=NDSolve[{y'[x]==x^2+y[x]^3,y[1]==1},y,{x,0,1.2}];
  Plot[{Evaluate[y[x]/.s],solution},{x,0,1.2},
  PlotStyle->{Black,Dashed},PlotRange->{{0.5,1.2},{0.0,1.5}}],
  {n,1,6,1,Appearance->"Open"}]
```

Результат работы приведенного кода при  $n = 1$  и  $n = 2$  показан на рис. 5.1.

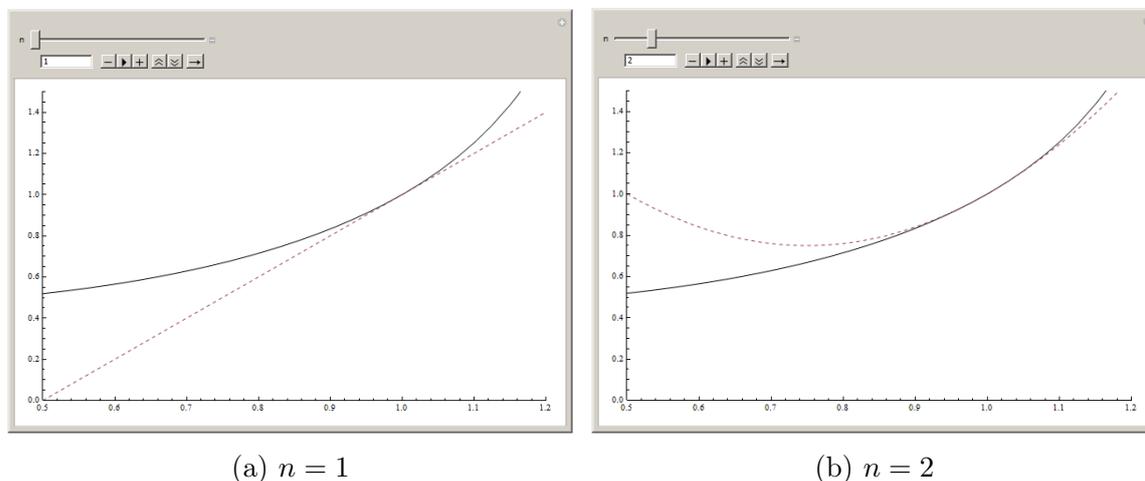


Рис. 5.1. Сравнение решения в виде ряда (пунктирная линия) с точным решением (сплошная линия)

## 5.2 Построение периодического решения квазилинейной системы

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}(t) + n^2 x(t) = f(t) + \mu F(x, \dot{x}), \quad (5.4)$$

где  $f(t)$  – периодическая с периодом  $T$  функция, разлагающаяся в ряд Фурье,  $F(x, y)$  – аналитическая функция своих аргументов,  $n$  – константа,  $\mu$  – малый параметр. Известно (см., например, [8]) что в нерезонансном случае (т. е. когда отношение чисел  $\frac{2\pi}{n}$  и  $T$  иррационально) уравнение (5.4) имеет единственное периодическое решение с периодом  $T$ . Это решение может быть найдено в виде ряда по степеням  $\mu$ :

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x_n(t), \quad (5.5)$$

где  $x_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) –  $T$ -периодические функции. Функции  $x_n(t)$  можно найти, подставив ряд (5.5) в уравнение (5.4) и приравняв слагаемые при одинаковых

степенях  $\mu$ . Для определения неизвестных функций  $x_n(t)$  получится система уравнений

$$\mu^0 : \quad \ddot{x}_0(t) + n^2 x_0(t) = f(t), \quad (5.6)$$

$$\mu^1 : \quad \ddot{x}_1(t) + n^2 x_1(t) = \varphi_1(t), \quad (5.7)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mu^n : \quad \ddot{x}_n(t) + n^2 x_n(t) = \varphi_n(t), \quad (5.8)$$

$\dots\dots\dots$

Уравнение (5.6) называется порождающим уравнением. В силу сделанных предположений каждое из уравнений системы имеет единственное  $T$ -периодическое решение. Эти решения могут быть найдены последовательно. Для всех  $n > 0$  функции  $\varphi_n(t)$  выражаются через функцию  $F$  и  $x_i(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ), т. е. к моменту решения  $n$ -го уравнения его правая часть является уже известной  $T$ -периодической функцией.

Приведем программу, реализующую описанный алгоритм.

(\* Построение периодического решения уравнения  $x'' + n^2 x = f[t] + \mu F[x, x']$ , где  $f[t]$  – периодическая функция с периодом  $T$ ,  $F[x, y]$  – аналитическая функция своих аргументов,  $n$  – не целое число,  $\mu$  – малый параметр. \*)

```

0  ODEPeriodnonres [n_, f_, F_, T_, m_] :=
1  Block [ { H, dif, x, v, v0, vT, r0, rT, x0, coeff, r },
2  H = Normal [ Series [ F, { x, 0, m }, { y, 0, m } ] ];
3  dif = DSolve [ x0'' [ t ] + n^2 * x0 [ t ] == f, x0 [ t ], t ];
4  x0 [ t ] = Part [ x0 [ t ] /. dif, 1 ];
5  x0 [ t ] = x0 [ t ] /. C[1] -> 0;
6  x0 [ t ] = x0 [ t ] /. C[2] -> 0;
7  x0 [ t ] = TrigReduce [ x0 [ t ] ];
8  x0 [ t ] = Simplify [ x0 [ t ] ];
9  For [ x = x0 [ t ]; i = 1, i <= m, i ++, x = x + v [ t, i ] * \[Mu]^i ];
10 F1 = H /. y -> D [ x, t ];
11 For [ i = 1, i <= m, i ++,
12   coeff [ i ] = Coefficient [ \[Mu] * F1, \[Mu]^i ];
13   difur = DSolve [ g'' [ t ] + n^2 * g [ t ] == coeff [ i ], g [ t ], t ];

```

```

14  v[t, i]=Part[g[t]/.difur, 1];
15  v0=Limit[v[t, i], t->0];
16  vT=Limit[v[t, i], t->T];
17  r[t]=D[v[t, i], t];
18  r0=Limit[r[t], t->0];
19  rT=Limit[r[t], t->T];
20  drr=Solve[{v0==vT, r0==rT}, {C[1], C[2]}];
21  M1=Part[C[1]/.drr, 1];
22  M2=Part[C[2]/.drr, 1];
23  v[t, i]=v[t, i]/.C[1]->M1;
24  v[t, i]=v[t, i]/.C[2]->M2;
25  v[t, i]=TrigReduce[v[t, i]];
26  v[t, i]=Simplify[v[t, i]];
27  ];
28  Return[x];
29  ]

```

*Комментарии к коду.*

Строка 2. Построение разложения функции  $F$  по формуле Тейлора.

Строки 3–8. Отыскание  $T$ -периодического решения порождающего уравнения (5.6). Значения произвольных постоянных  $C[1]$  и  $C[2]$  следует положить равными нулю, т. к. только в этом случае решение будет иметь период  $T$ .

Строка 9. Формирование суммы

$$x(t) = \sum_{i=0}^m \mu^i x_i(t), \quad (5.9)$$

Строка 10. Подстановка производной суммы (5.9) в функцию  $F(x, \dot{x})$ .

Строки 11–27. Последовательное отыскание периодических решений уравнений (5.8) ( $n = 1, 2, \dots, m$ ). В строке 12 вычисляется правая часть соответствующего уравнения. Уравнение решается в строке 13. Решение определяется с произвольными постоянными  $C[1]$  и  $C[2]$  и имеет вид

$$x_i(t) = C[1] \cos nt + C[2] \sin nt + \psi_i(t), \quad (5.10)$$

где  $\psi_i(t)$  – решение неоднородного уравнения. В этом случае недостаточно просто положить  $C[1]$  и  $C[2]$  равными нулю. Проблема состоит в том, что решение неоднородного уравнения  $\psi_i(t)$ , найденное с помощью функции `DSolve`, может содержать функции  $\cos nt$  и  $\sin nt$ . Так бывает, например, когда решение неоднородного уравнения ищется с помощью метода вариации произвольной постоянной. Нам необходимо выделить из всего множества решений (5.10) единственное решение, имеющее период  $T$ . Это можно сделать, решив относительно  $C[1]$  и  $C[2]$  систему уравнений

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i(T), \\ \dot{x}_i(0) &= \dot{x}_i(T). \end{aligned}$$

Эта система формируется и решается в строках 15–24 программы.

В строках 15, 16, 18, 19 вместо вычисления значений  $x_i(0)$ ,  $x_i(T)$ ,  $\dot{x}_i(0)$ ,  $\dot{x}_i(T)$  путем подстановки соответствующих значений в функции, выполняется предельный переход, т. е. вычисляются пределы

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_i(t), \quad \lim_{t \rightarrow T} x_i(t), \quad \lim_{t \rightarrow 0} \dot{x}_i(t), \quad \lim_{t \rightarrow T} \dot{x}_i(t).$$

Это сделано для того, чтобы «заставить» систему вычислить значения соответствующих выражений, доведя их, где это возможно, до численных значений. Опыт показывает, что в этом случае найденные выражения коэффициентов при C[1] и C[2] имеют более простой вид.

Найдем с помощью программы три первые слагаемые разложения в ряд периодического решения уравнения

$$\ddot{x}(t) + 5x(t) = \cos 2t + \mu x^2. \quad (5.11)$$

Вызов функции

```
sol=ODEPeriodnonres[5^(1/2), Cos[2*t], x^2, Pi, 3]
```

дает результат

$$\begin{aligned} & \cos[2t] + \mu \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{22} \cos[4t] \right) + \mu^2 \frac{527 \cos[2t] + 5 \cos[6t]}{3410} + \\ & \mu^3 \frac{7328803 - 2955900 \cos[4t] - 9375 \cos[8t]}{221309000}. \end{aligned}$$

График решения можно построить с помощью команды

```
Plot[oursol /. {Mu} -> 0.2, {t, 0, 4*Pi}, PlotStyle -> {Black},  
PlotRange -> {{0.0, 4*Pi}, {-1.5, 1.5}}]
```

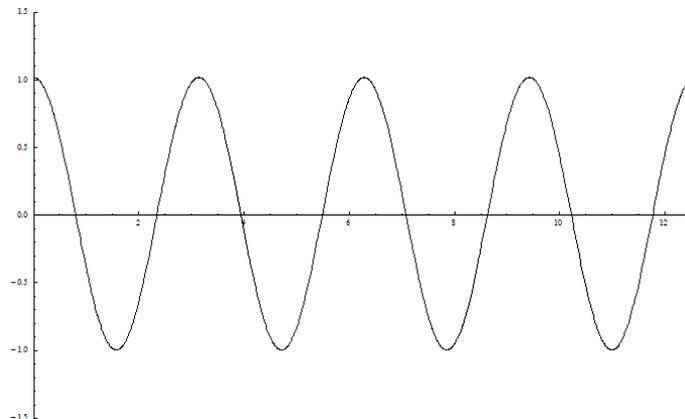


Рис. 5.2. Периодическое решение уравнения (5.11) при  $\mu = 0.2$

### 5.3 Метод Линдштедта–Пуанкаре

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \mu f(x) \quad (5.12)$$

с начальными условиями

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (5.13)$$

Предполагается, что  $f(x)$  – аналитическая функция, разложение которой в ряд по степеням  $x$  начинается со слагаемых не ниже второго, т. е.  $f(x)$  может быть представлена в виде

$$f(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Уравнение (5.12) является частным случаем так называемых систем Ляпунова. Теория систем Ляпунова подробно изложена, например, в книгах [8], [9]. Мы приведем только важные для нас следствия этой теории. Известно, что при достаточно малых  $\mu$  задача Коши (5.12), (5.13) имеет единственное периодическое решение с периодом  $T(\mu)$ , таким что  $T(0) = 2\pi$ . Период решения  $T(\mu)$  является аналитической функцией параметра  $\mu$  и может быть представлен в виде ряда

$$T(\mu) = 2\pi(1 + d_1\mu + d_2\mu^2 + \dots).$$

Периодическое решение задачи (5.12), (5.13) также является аналитическим и может быть представлено в виде

$$x = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \dots, \quad (5.14)$$

где

$$\tau = \frac{t}{1 + c_1\mu + c_2\mu^2 + \dots}, \quad (5.15)$$

а функции  $x_i(\tau)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) –  $2\pi$ -периодические функции относительно переменной  $\tau$ .

Таким образом, для построения асимптотического разложения периодического решения задачи (5.12), (5.13) можно применить следующий алгоритм. В уравнении (5.12) нужно перейти к новой независимой переменной  $\tau$  по формуле (5.15). Уравнение примет вид

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = (-x + \mu f(x))(1 + c_1\mu + c_2\mu^2 + \dots)^2. \quad (5.16)$$

При соответствующем выборе констант  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) уравнение (5.20) имеет  $2\pi$ -периодическое решение  $x(\tau)$ . Это решение ищется в виде ряда (5.14). Ряд (5.14) нужно подставить в уравнение (5.20), разложить правую часть в

ряд по степеням  $\mu$  и приравнять слагаемые при одинаковых степенях  $\mu$ . В результате получится система

$$\mu^0 : \quad \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0, \quad x_0(0) = 1, \quad \frac{dx_0(0)}{d\tau} = 0, \quad (5.17)$$

$$\mu^1 : \quad \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = f(x_0(\tau)) - 2c_1 x_0(\tau), \quad x_1(0) = 0, \quad \frac{dx_1(0)}{d\tau} = 0, \quad (5.18)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mu^n : \quad \frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + x_n = \psi_n(\tau), \quad x_n(0) = 0, \quad \frac{dx_n(0)}{d\tau} = 0, \quad (5.19)$$

$$\dots\dots\dots$$

Из общей теории следует, что при достаточно малых  $\mu$  эта система однозначно определяет набор  $2\pi$ -периодических функций  $x_i(\tau)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ).

Задача (5.17) имеет решение  $x_0(\tau) = \cos \tau$ .

Решение задачи (5.18) будет  $2\pi$ -периодическим в том и только том случае, когда правая часть уравнения не содержит слагаемых вида  $a \cos x$ ,  $b \sin x$ . Слагаемые такого вида в правой части можно уничтожить путем соответствующего выбора константы  $c_1$ . Возможность такого выбора  $c_1$  следует из общей теории. Более того, в общей теории показано, что для любого  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) константа  $c_n$  однозначно определяется из уравнения

$$\int_0^{2\pi} \psi_n(\tau) \cos \tau \, d\tau = 0. \quad (5.20)$$

Изложенный алгоритм может быть автоматизирован с помощью следующей программы для Wolfram Mathematica.

(\* Построение периодического решения задачи

$x'' + x = f(x)$

$x[0] = 1, x'[0] = 0$ ,

где  $f(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$

Параметры функции:

rp — правая часть уравнения ( $f(x)$ ),

n — количество слагаемых в разложении. \*)

```

0  ODULindsht [rp_, n_] :=
1  Block [ { s1, m, c, coeff, z, x1, x, sol, t, \[Tau] },
2  s1 = \[Mu] * rp - x;
3  For [m=0; i = 0, i <= n, i++, m += c [ i ] * \[Mu]^ i ];
4  s1 = s1 * m^2;
5  For [x1=0; i=0, i <= n, i++, x1 = x1 + z [ i ] * \[Mu]^ i ];
6  x = x1;
7  clst = CoefficientList [s1, \[Mu]];
8  For [ i=1, i <= n, i++, coeff [ i ] = clst [ [ i + 1 ] ] ];

```

```

9  z[0]=Cos[\[Tau]]; c[0]=1;
10 For[i=1,i<=n,i++,
11   h1:=Integrate[coeff[i]*Cos[\[Tau]],{\[Tau],0,2*Pi}];
12   sol=Solve[h1==0,c[i]];
13   c[i]=Part[c[i]/.sol,1];
14   z[i]:=j[\[Tau]];
15   sol=DSolve[
16     {j''[\[Tau]]==coeff[i],j[0]==0,j'[0]==0},j[\[Tau]],\[Tau]
17     ];
18   z[i]=TrigReduce[Part[j[\[Tau]]/.sol,1]];
19   ];
20 \[Tau]=t/m;
21 Return[x];
22 ]

```

Построим с помощью этой функции асимптотику периодического решения задачи

$$\ddot{x} + x = \mu x^2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (5.21)$$

Вызов функции

```
ODULindsht[x^2,2]
```

дает результат

$$\cos\left(\frac{t}{1+\frac{5\mu^2}{12}}\right) + \frac{1}{6}\mu \left[ 3 - 2\cos\left(\frac{t}{1+\frac{5\mu^2}{12}}\right) - \cos\left(\frac{2t}{1+\frac{5\mu^2}{12}}\right) \right] +$$

$$\frac{1}{144}\mu^2 \left[ -48 + 29\cos\left(\frac{t}{1+\frac{5\mu^2}{12}}\right) + 16\cos\left(\frac{2t}{1+\frac{5\mu^2}{12}}\right) + 3\cos\left(\frac{3t}{1+\frac{5\mu^2}{12}}\right) \right]$$

Для сравнения точного и приближенного решений задачи построим графики с помощью следующей инструкции.

```

Manipulate[
oursol = ODULindsht[x^2, n];
sol=NDSolve[{xx'[t]+xx[t]==\[Mu]*xx[t]^2,xx[0]==1,
xx'[0]==0},xx,{t,0,12*Pi}];
Plot[{Evaluate[xx[t]/.sol],oursol},{t,0,12*Pi},
PlotStyle->{{Black,Thickness[0.003]},
{Black,Dashed,Thickness[0.003]}},
PlotRange->{{0,12*Pi},{-1.3,1.3}},
{n,0,3,1,Appearance->"Open"},
{\[Mu],0,1,0.05,Appearance->"Open"}
]

```

Результаты сравнения приведены на рис. 5.3 и 5.4. Значение параметра  $\mu$  было выбрано равным 0.9. Видно, что при  $n = 0$ , т. е. когда в качестве асимптотики было значение  $x(t) = \cos t$  решения значительно различаются, но уже при  $n = 1$  графики решений визуально практически неразличимы.

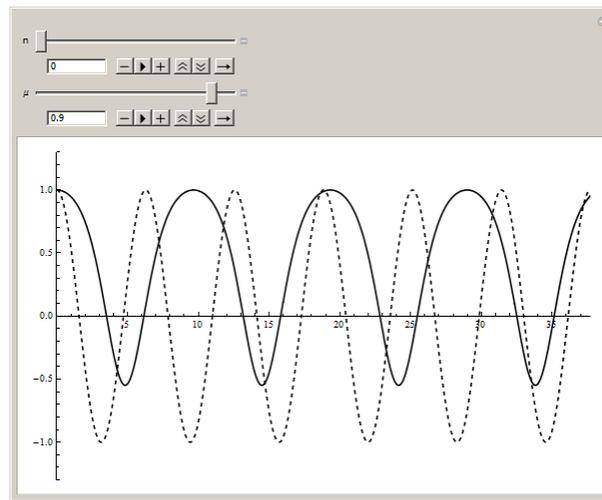


Рис. 5.3. Сравнение точного (сплошная линия) и приближенного (прерывистая линия) решений задачи (5.21) при  $\mu = 0.9$ ,  $n = 0$

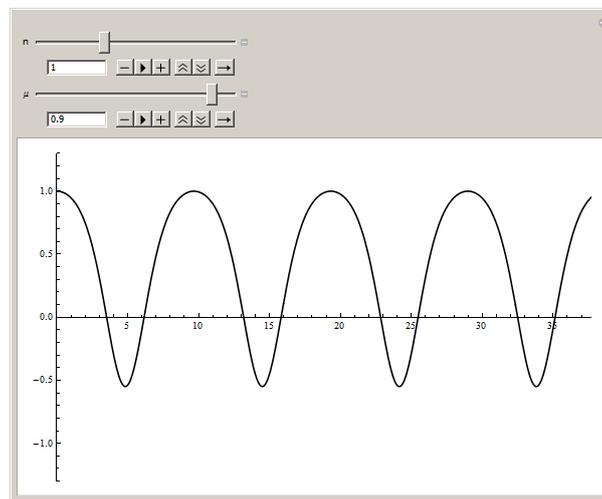


Рис. 5.4. Сравнение точного (сплошная линия) и приближенного (прерывистая линия) решений задачи (5.21) при  $\mu = 0.9$ ,  $n = 1$

# Глава 6

## Задачи для самостоятельного решения

В этой главе приведены задачи, предлагаемые для самостоятельного решения. Многие из них не требуют использования системы Wolfram Mathematica, однако эту систему можно использовать для экспериментов, проверки гипотез и получения графических иллюстраций.

### 6.1 Кусочно-линейные функции

Функцию  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  назовём кусочно-линейной, если существуют такие точки  $x_0, x_1, \dots, x_N$ , что  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$  и сужение  $h$  на каждый отрезок  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) есть линейная функция. График кусочно-линейной функции  $h$  представляет ломаную с вершинами  $(x_i, y_i)$ , ( $y_i = h(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ), числа  $x_i$  именуют узлами функции  $h$ .

1. Кусочно-линейная функция непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ; всюду (кроме точек  $x_i$ ) она имеет производные любого порядка, в точках  $x_i$  существуют односторонние производные.

2. Любая кусочно-линейная функция  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  допускает представление

$$h(x) = \sum_{i=0}^N c_i |x - x_i|, \quad (1)$$

в котором  $x_i$  – узлы функции  $h$ ,  $c_i$  – действительные числа, способ нахождения которых и требуется указать в данной задаче.

3. Возрастание кусочно-линейной (к.л.) функции  $h$  с узлами  $x_i$  эквивалентно возрастанию последовательности  $h(x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ); аналогичным образом формулируется критерий убывания к.л. функции.

4. Максимальное (минимальное) значение к.л. функции достигается в одном из её узлов:

$$\max_{x \in [a, b]} h(x) = \max\{h(x_i), i = 0, 1, \dots, N\}, \quad (2)$$

$$\min_{x \in [a, b]} h(x) = \min\{h(x_i), i = 0, 1, \dots, N\}. \quad (3)$$

5. Выпуклость к.л. функции  $h$  эквивалентна возрастанию последовательности

$$k_i = \frac{h(x_i) - h(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Числа  $k_i$  – это угловые коэффициенты звеньев ломаной – графика функции  $h$ .

6. К.л. функция  $h$  выпукла в том и только том случае, если она допускает представление вида (1) с неотрицательными коэффициентами  $c_i$ .

7. К.л. функция  $h$  выпукла в том и только том случае, если она допускает представление вида

$$h(x) = \max_{i=1, \dots, N} (k_i x + l_i). \quad (4)$$

Равенство (4) означает, что выпуклая к.л. функция может быть задана как поточечный максимум конечного числа линейных функций.

8. Сформулировать и доказать критерии вогнутости к.л. функции, аналогичные приведённым в задачах 5–7 критериям выпуклости.

9. Пусть  $(x_i, y_i) (i = 0, 1, \dots, N)$  – конечная последовательность точек на плоскости, причём  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ . Среди выпуклых на отрезке  $[a, b]$  функций  $f$ , удовлетворяющих неравенствам

$$f(x_i) \leq y_i \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

существует наибольшая. Указать способ построения (по возможности не слишком трудоёмкий) подобной максимальной функции.

10. Пусть  $(x_i, y_i) (i = 0, 1, \dots, N)$  – конечная последовательность точек на плоскости, причём  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$ . Среди вогнутых на отрезке  $[a, b]$  функций  $g$ , удовлетворяющих неравенствам

$$g(x_i) \geq y_i \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

существует наименьшая. Указать способ построения (по возможности не слишком трудоёмкий) подобной минимальной функции.

11. Применить результаты упражнений 9, 10 к задаче построения выпуклой оболочки произвольного конечного подмножества плоскости.

12. Функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  в том и только том случае, когда для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такая к.л. функция  $h(x)$ , что  $|f(x) - h(x)| < \varepsilon \forall x \in [a, b]$ .

13. Любая к.л. функция есть сумма выпуклой и вогнутой кусочно-линейных функций.

14. Найти минимум на всей действительной прямой  $\mathbb{R}$  функции

$$h(x) = |x + 4| + |2x + 4| + 3|x| + |x + 3|. \quad (5)$$

15. Представить функцию  $h(x)$ , определённую равенством (5), как поточечный максимум конечного числа линейных функций.

## 6.2 Приближения в метрике Чебышёва

Вначале рассмотрим конечномерный вариант задачи. Пусть  $\mathbf{R}^m$  –  $m$ -мерное арифметическое пространство вектор-столбцов  $z = (z_1, \dots, z_m)^T$  с обычным образом определяемыми линейными операциями и нормой

$$\|z\| \stackrel{def}{=} \max\{|z_i|, i = 1, \dots, m\}.$$

Если  $A_1, \dots, A_n, b$  – векторы из пространства  $\mathbf{R}^m$ , то при любых действительных  $x_1, \dots, x_n$  вектор  $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n - b$  принадлежит пространству  $\mathbf{R}^m$ .

1. Определяемая равенством

$$\Phi(x) \stackrel{def}{=} \|x_1 A_1 + \dots + x_n A_n - b\|$$

функция выпукла и непрерывна на пространстве  $\mathbf{R}^n$ .

Задача о минимизации функции  $\Phi$  на пространстве  $\mathbf{R}^n$  будет записываться следующим образом

$$\Phi(x) = \left\| \sum_{j=1}^n x_j A_j - b \right\| \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (1)$$

Задача (1) сводится к некоторой задаче линейного программирования. С этой целью представим векторы  $A_1, \dots, A_n, b$  в координатной форме

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Введем дополнительную переменную  $x_{n+1}$ .

2. Задача (1) эквивалентна следующей задаче линейной оптимизации

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} &\geq b_i & (i = 1, \dots, m), \\ -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+1} &\geq -b_i & (i = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_{n+1} \rightarrow \min .$$

В рассматриваемом случае эквивалентность означает следующее.

3. Если вектор  $\tilde{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \hat{x}_{n+1})^T$  – решение задачи (2), то его проекция  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)^T$  на пространство  $\mathbf{R}^n$  есть решение задачи (1), а число  $\hat{x}_{n+1}$  есть значение задачи (1). Любое решение задачи (1) может быть получено таким образом.

В задаче (2) все ограничения однотипны. Её решение легко находится с помощью специальных программ. В частности, хорошо подходят для этой цели программы *Excel* и *Mathematica*.

Теперь рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении непрерывной функции обобщенными полиномами. Эта задача записывается следующим образом:

$$\max_{t \in \mathcal{K}} \left| \sum_{j=1}^n x_j u_j(t) - f(t) \right| \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $u_1, \dots, u_n, f$  – непрерывные на компакте  $\mathcal{K}$  функции. Существование и некоторые общие свойства решений задачи (3) устанавливались многими авторами, первым среди которых следует назвать русского математика П. Л. Чебышёва. Если множество  $\mathcal{K}$  конечно, то задача (3) очевидным образом сводится к рассмотренной выше задаче (1).

В случае бесконечного множества  $\mathcal{K}$  полезна дискретизация задачи (3). Пусть, например,  $\mathcal{K}_0$  – конечное подмножество множества  $\mathcal{K}$ . Сопоставим задаче (3) её дискретный вариант

$$\max_{t \in \mathcal{K}_0} \left| \sum_{j=1}^n x_j u_j(t) - f(t) \right| \rightarrow \min, \quad (4)$$

4\*. Существует подмножество  $\mathcal{K}_0$  компакта  $\mathcal{K}$ , состоящее не более чем из  $n + 1$  точек и такое, что решение задачи (4) является одновременно решением задачи (3).

Результаты подобного рода называют *теоремами об очистке*. (Происхождение этого термина заслуживает отдельного обсуждения). Совсем непросто усмотреть способ конструирования множества  $\mathcal{K}_0$ . Впервые это удалось сделать (в 1854 г.) П. Л. Чебышёву для задачи о равномерном приближении непрерывной функций алгебраическими полиномами. Однако для нахождения приближенного решения задачи (3) можно (не слишком мудря) в качестве  $\mathcal{K}_0$  взять

конечную  $\varepsilon$  – сеть множества  $\mathcal{X}$ . Есть основания надеяться, что при малых  $\varepsilon > 0$  решение задачи (4) будет близким к решению задачи (3). Степень близости зависит от свойств функций  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), f(t)$ . Проведение численных экспериментов было бы весьма полезным и может составить содержание квалификационной работы (курсовой, дипломной и т. д.)

Пусть  $\mathcal{X} = \{t_1, \dots, t_m\}$ . Положим

$$a_{ij} = u_j(t_i), \quad b_i = f(t_i) \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Задача (4) сводится к задаче (2), рассмотренной выше.

5. В качестве иллюстрирующего примера рассмотреть случай, когда

$$m = 11, \quad n = 5, \quad t_i = \frac{i-1}{10} \quad (i = 1, \dots, 10),$$

$$u_j(t) = t^{j-1} \quad (j = 1, \dots, 5), \quad f(t) = \ln(1+t), \quad t \in [0, 1].$$

## 6.3 Матричные игры

Пусть множества  $X \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^n$  суть симплексы, определяемые соотношениями

$$X \stackrel{def}{=} \left\{ x = (x_i) \in \mathbb{R}^m, x_1 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\},$$

$$Y \stackrel{def}{=} \left\{ y = (y_j) \in \mathbb{R}^n, y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}.$$

Матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

сопоставим билинейную функцию

$$f(x, y) = (x, Ay) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (x \in X, y \in Y).$$

В теории матричных игр  $A$  называют *матрицей выигрышей первого игрока*, переменные  $x_1, \dots, x_m$  интерпретируют как вероятности (частоты), с которыми первый игрок выбирает строки матрицы  $A$ ,  $y_1, \dots, y_n$  – вероятности, с которыми второй игрок выбирает столбцы матрицы  $A$ . Наборы  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  именуруют *смешанными стратегиями* первого и второго игроков. Это

позволяет интерпретировать число  $f(x, y)$  как математическое ожидание выигрыша первого игрока при выборе игроками смешанных стратегий  $x, y$  соответственно. Число

$$c_0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

именуют *ценой* матричной игры  $\Gamma(A)$ .

1. Пусть матрица  $A(t)$  получается из матрицы  $A$  путём прибавления к каждому её элементу фиксированного числа  $t$ , а  $f_t(x, y) = (x, A(t)y)$  – функция, соответствующая матрице  $A(t)$ . Тогда  $f_t(x, y) = f(x, y) + t$ .

Функция  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна по совокупности переменных, она линейна по каждому из переменных  $x, y$ .

2. Проверить равенства

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_j \sum_i^m a_{ij} x_i,$$

$$d(y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_i \sum_j^n a_{ij} y_j.$$

3. Доказать, что  $c(x)$  – кусочно-линейная вогнутая функция на множестве  $X$ ,  $d(y)$  – кусочно-линейная выпуклая функция на множестве  $Y$ .

4. Установить неравенства

$$c(x) \leq f(x, y) \leq d(y) \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Наиболее простыми представляются случаи, когда хотя бы одно из чисел  $m, n$  равно 2. Пусть, например,  $m = 2$ . В этом случае

$$c(x_1, x_2) = \min_j (a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2), \quad X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}.$$

Очевидно равенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} c(x) = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} c(x_1, 1 - x_1).$$

Функция  $x_1 \rightarrow c(x_1, 1 - x_1)$  вогнута и кусочно-линейна на отрезке  $[0, 1]$ . Это позволяет найти её максимум на  $[0, 1]$  с помощью простых геометрических соображений. Тем самым будет найдено значение матричной игры и первая компонента седловой точки функции  $f$ .

В случае произвольных натуральных чисел  $m, n$  будем считать, что  $c(x) > 0 \forall x \in X$ ; этого можно добиться переходом от матрицы  $A$  к матрице  $A(t)$  при достаточно большом  $t$ . Для определённости будем считать все элементы матрицы  $A$  положительными числами.

5. Проверить соотношения

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq c(x) \quad \forall j, \quad x_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

Разделив почленно каждое из этих соотношений на  $c(x)$  и положив

$$\frac{x_i}{c(x)} = u_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

получим

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i \geq 1 \quad \forall j, \quad u_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^m u_i = \frac{1}{c(x)}. \quad (1)$$

Задача максимизации функции  $c(x)$  на множестве  $X$  заключается в нахождении такого элемента  $\bar{x} \in X$ , который максимизирует  $c(x)$ , следовательно, минимизирует выражение

$$\frac{1}{c(x)} = \sum_{i=1}^m u_i = w(u)$$

при выполнении неравенств, фигурирующих в (1).

Таким образом, отыскание  $\bar{x}$  привело к следующей задаче линейной оптимизации:

$$w(u) = \sum_{i=1}^m u_i \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}u_i \geq 1 \quad \forall j, \quad u_i \geq 0 \quad \forall i. \quad (3)$$

Система ограничений (3) данной задачи очевидным образом совместна, а минимизируемый функционал  $w$  ограничен снизу. Следовательно, задача (2), (3) имеет решение  $\bar{u}$ . Попутно установлено, что элемент  $\bar{x} = \frac{\bar{u}}{w(\bar{u})}$  есть точка максимума функции  $c(x)$  на множестве  $X$ . Верны равенства

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} c(x) = c(\bar{x}) = \frac{1}{w(\bar{u})}. \quad (4).$$

Задача минимизации функции  $d(y)$  на множестве  $Y$  рассматривается аналогично.

6. Проверить соотношения

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \leq d(y) \quad \forall i, \quad y_j \geq 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (5)$$

Разделив почленно каждое из соотношений (5) на  $d(y)$  и положив

$$\frac{y_j}{d(y)} = v_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \leq 1 \quad \forall i, \quad v_j \geq 0 \quad \forall j, \quad \sum_{j=1}^n v_j = \frac{1}{d(y)}. \quad (6)$$

Задача минимизации функции  $d(y)$  на множестве  $y$  заключается в нахождении такого элемента  $\bar{y} \in Y$ , который минимизирует  $d(y)$ , следовательно, максимизирует выражение

$$\frac{1}{d(y)} = \sum_{j=1}^n v_j = z(v)$$

при выполнении неравенств, фигурирующих в (6).

Таким образом, отыскание  $\bar{y}$  привело к следующей задаче линейной оптимизации:

$$z(v) = \sum_{j=1}^n v_j \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \leq 1 \quad \forall j, \quad v_j \geq 0 \quad \forall i. \quad (8)$$

Задача (7), (8) является двойственной к задаче (9), (10), поэтому имеет решение  $\bar{v}$ . Попутно установлено, что элемент  $\bar{y} = \frac{\bar{v}}{z(\bar{v})}$  есть точка минимума функции  $d(y)$  на множестве  $Y$ . Верны равенства

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} d(y) = d(\bar{y}) = \frac{1}{z(\bar{v})}. \quad (16).$$

Так как значения двойственных задач одинаковы, то  $w(\bar{u}) = z(\bar{v})$ . Пара  $(\bar{x}, \bar{y})$  есть седловая точка функции  $f$ . Тем самым указан способ поиска седловой точки, основанный на сведении к паре двойственных задач линейной оптимизации. Если  $m = 2$  или  $n = 2$ , то для решения задачи (9), (10) (соответственно (13), (14)) можно применить геометрические соображения.

## 6.4 Последовательности с ограниченным изменением

Пусть  $\mathbb{C}$  – поле комплексных чисел,  $z_k \in \mathbb{C}$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ),  $p$  и  $q$  – натуральные числа, причём  $p < q$ . Число

$$\mathring{V}_p^q z_k := \sum_{k=p+1}^q |z_k - z_{k-1}|$$

будем называть изменением последовательности  $\{z_k\}$  на промежутке  $[p, q]$ . Оно совпадает с длиной ломаной в вершинах  $z_p, z_{p+1}, \dots, z_q$ .

Непосредственно из определения вытекает возрастание последовательности  $t_n = \mathring{V}_1^n z_k$ , ( $n = 2, 3, \dots$ ). Если последовательность  $t_n$  сходится, то её предел называется полным изменением (вариацией) последовательности  $\{z_k\}$  и обозначается символом  $\mathring{V}_1^\infty z_k$ . Совокупность последовательностей  $\{z_k\}$  с конечным полным

изменением обозначим символом  $BV$ . Класс  $BV$  заведомо не пуст. Представляется очевидным следующее утверждение: для того чтобы числовой ряд

$$\sum_1^{\infty} w_k$$

абсолютно сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $s_n = w_1 + \dots + w_n$  его частичных сумм принадлежала классу  $BV$ .

Представленные ниже задачи существенно различаются по степени трудности. Большинство задач относительно просто, однако имеются задачи повышенной трудности: они отмечены звёздочкой.

1. Для того чтобы монотонная последовательность  $z_k \in \mathbb{R}$  входила в класс  $BV$ , необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной, при этом

$$\overset{q}{V}_p z_k = |z_p - z_q|, \quad \overset{\infty}{V}_p z_k = |z_{\infty} - z_1|, \text{ где } z_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k.$$

2. Сумма (разность, произведение) двух последовательностей класса  $BV$  есть последовательность того же класса.

3. Если  $\{z_k\}, \{w_k\}$  – последовательности класса  $BV$  и  $|w_k| > m > 0 \forall k$ , то их частное  $z_k/w_k$  также принадлежит этому классу.

4. Последовательность  $\{z_k\}$  имеет ограниченное изменение в том и только том случае, когда её действительная и мнимая части имеют ограниченное изменение.

5. Для того чтобы действительная последовательность  $\{x_k\}$  принадлежала классу  $BV$  необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух возрастающих и ограниченных последовательностей.

6. Комплексная последовательность  $\{z_k\}$  принадлежит классу  $BV$  в том и только том случае, если найдутся четыре возрастающие и ограниченные последовательности  $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}, \{d_k\}$  такие, что

$$z_k = a_k - b_k + i(c_k - d_k) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

7. Всякая последовательность класса  $BV$  сходится; привести пример действительной сходящейся последовательности, имеющей неограниченное изменение.

8\*. Если последовательность  $z_n$  ограничена, то из неё можно извлечь такую подпоследовательность  $w_n = z_{k_n} = u_n + iv_n$ , что действительные последовательности  $u_n, v_n$  монотонны.

9. Пусть  $c_1, \dots, c_p, d_1, \dots, d_p$  – комплексные числа. Положим

$$D_0 = 0, D_1 = d_1, D_2 = d_1 + d_2, \dots, D_p = d_1 + d_2 + \dots + d_p,$$

$$S = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \dots + c_p d_p, \quad L = \max\{|D_k|, k = 1, 2, \dots, p\}.$$

а) Доказать соотношения

$$S = c_p D_p - \sum_{k=1}^{p-1} D_k (c_{k+1} - c_k), \quad (1)$$

$$|S| \leq L \left( |c_p| + \sum_{k=1}^{p-1} |c_{k+1} - c_k| \right); \quad (2)$$

б) если  $c_k, d_k$  – действительные числа и выполняются неравенства

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_p \geq 0, \quad A \leq D_k \leq B, \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

то справедливы двусторонние оценки

$$Ac_1 \leq S \leq Bc_1. \quad (3)$$

Равенство (1) называют преобразованием Абеля. Оно представляет дискретный аналог интегрирования по частям. Оценки (2), (3) играют важную роль при изучении рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k, \quad (4)$$

где  $a_k, b_k \in \mathbb{C}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Вместе с рядом (4) удобно рассматривать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k. \quad (5)$$

10. Если ряд (5) сходится, а последовательность  $\{a_k\}$  имеет ограниченное изменение, то и ряд (4) сходится.

11\*. Если для всякого сходящегося ряда (5) получаемый из него ряд (4) также сходится, то последовательность  $\{a_k\}$  имеет ограниченное изменение.

12. Пусть последовательность  $\{a_k\}$  имеет ограниченное изменение и стремится к нулю. Пусть последовательность частичных сумм ряда (5) ограничена. Тогда ряд (4) сходится.

*Комментарий.* Несложно показать, что признак сходимости 12 влечёт за собой признак 10. Частным случаем 12 является следующий признак сходимости, называемый признаком Дирихле.

13. Если действительная последовательность  $\{a_k\}$  монотонна и стремится к 0, а последовательность частичных сумм ряда (5) ограничена, то ряд (4) сходится.

Полагая  $b_k = (-1)^{k-1}$ , получаем весьма удобный признак Лейбница.

14. Пусть последовательность положительных чисел  $a_k$  убывает и стремится к 0. Тогда знакочередующийся ряд  $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{k-1} a_k + \dots$  сходится.

15\*. Для теории тригонометрических рядов полезно следующее утверждение. Если последовательность  $\{a_k\}$  убывает и стремится к 0, то для любого действительного числа  $\alpha$  числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\alpha$$

сходится.

16\*. Пусть  $-1 < m < 0$ . Тогда биномиальный ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n} z^n$$

сходится, если и только если  $|z| \leq 1, z \neq -1$ .

17. Логарифмический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

сходится, если и только если  $|z| \leq 1, z \neq -1$ .

## 6.5 Итерации и последовательности

1. Последовательности  $x_n, y_n$  заданы первыми элементами  $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$  и условиями

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Доказать равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{ab}.$$

2. Последовательности  $x_n, y_n$  заданы первыми элементами  $x_1 = a > 0, y_1 = b > 0$  и условиями

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

Доказать равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = G[a, b],$$

число  $G[a, b]$  именуют средним арифметико-геометрическим чисел  $a, b$ .

3. Последовательность  $x_n$  удовлетворяет соотношению  $x_n = qx_{n-1} + d$ , в котором  $n > 1; q, d$  – произвольные действительные числа. Доказать равенство

$$x_n = \begin{cases} x_1 + d(n-1), & \text{если } q = 1, \\ x_1 q^{n-1} + d \frac{1-q^{n-1}}{1-q}, & \text{если } q \neq 1. \end{cases}$$

4. Последовательность  $x_n$  задана первыми двумя элементами  $x_1 = 2, x_2 = 3$  и условием

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Найдите  $x_{2014}$ .

5. Пусть последовательности  $x_n, a_n$  удовлетворяют соотношениям

$$x_n = 0.5x_{n-1} + a_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Доказать, что последовательность  $x_n$  сходится к 0.

6. Пусть  $a > 0, x_1 = 0$  и  $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ . Доказать сходимость последовательности  $x_n$  и найти её предел.

7. Пусть  $a > 0, x_1 = 0$  и  $x_n = \sqrt[3]{a + x_{n-1}}$ . Доказать сходимость последовательности  $x_n$  и найти её предел.

8. Последовательность  $x_n$  определена соотношениями

$$x_1 = 1, \quad x_n = \sqrt{\sqrt{ax_{n-1}}} \quad (a > 0).$$

Докажите равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{a}.$$

Это равенство можно использовать для вычисления на калькуляторе кубического корня из положительного числа.

9. Последовательность  $x_n$  задаётся так

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Найти число, которое меньше всех элементов последовательности с чётными номерами и одновременно больше всех элементов с нечётными номерами.

10. Найдите 2014 цифру после запятой в десятичной записи числа  $\frac{1}{31}$ .

11. Последовательность  $x_n$  определяется соотношениями:  $x_1 = 7, x_{n+1}$  – сумма цифр числа  $x_n^2$ . Найти  $x_{1000}$ .

12. В последовательности треугольников длины каждого последующего треугольника  $\Delta_n$  равны длинам медиан предыдущего треугольника  $\Delta_{n-1}$ . Найти длины сторон  $\Delta_{1000}$ , если  $a, b, c$  – длины сторон треугольника  $\Delta_0$ .

13. В круг радиуса 1 вписан квадрат, в него – круг, в него – правильный 8-угольник, в него – круг, в него – правильный 16-угольник, в него – круг и т. д.; в  $n$ -й круг вписан правильный  $2^{n+1}$ -угольник. Докажите, что радиусы всех кругов больше  $\frac{2}{\pi}$ .

14. Последовательность  $x_n$  задана первым членом  $x_1 = 1$  и условием

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}.$$

Докажите, что

а) последовательность  $x_n$  не ограничена;

б)  $x_{9000} > 30$ .

15. Последовательность  $x_n$  задана первым членом  $x_1 = 1$  и условием

$$x_{n+1} = 0.75x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Доказать, что последовательность  $x_n$  ограничена и

$$|x_{1000} - 2| < \left(\frac{3}{4}\right)^{1000}.$$

16. Найдите предел последовательности  $x_n$ , которая задаётся условиями

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{8}.$$

17. Последовательность полиномов  $p_n(t)$  задаётся условиями

$$p_1(t) = 0, \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)).$$

Докажите, что если  $|t| \leq 1$ , то справедливы оценки

$$0 \leq p_n(t) \leq p_{n+1}(t) \leq 1, \quad |p_n(t) - |t|| < \delta_n,$$

где  $\delta_n$  – бесконечно малая числовая последовательность.

18. Последовательность  $x_n$  задаётся своими первыми двумя элементами  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$  и условием  $x_{n+1} = kx_n - x_{n-1}$ . Имеет ли период эта последовательность, если

$$a) k = \sqrt{2}; \quad b) k = \sqrt{3}; \quad c) k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}; \quad d) k = \frac{3}{2}.$$

19. Найти с точностью до 0.1 сотый элемент последовательности  $x_n$ , заданной условиями

$$a) x_1 \in [0, 1], \quad x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \quad (n > 1);$$

$$b) x_1 \in [0.1, 0.9], \quad x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n), \quad (n > 1).$$

20. Исследовать возможность применения трёх итерационных процессов

$$x_{k+1} = -e^{-x_k},$$

$$x_{k+1} = -\ln x_k,$$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$$

для численного решения уравнения  $x + \ln x = 0$ , имеющего корень  $\bar{x} \approx 0.6$ .

## 6.6 Цепные дроби

Ниже  $[s]$  – целая часть действительного числа  $s$ , характеризующая соотношениями:  $[s]$  – целое число и  $[s] \leq s < [s] + 1$ . Сопоставим действительному числу  $x$  три последовательности

$$[a_0, a_1, a_2, \dots], \quad [t_0, t_1, t_2, \dots], \quad [x_0, x_1, x_2, \dots],$$

определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} a_0 &= [x], \quad t_0 = x - a_0, \quad x_0 = a_0, \\ a_1 &= \left[ \frac{1}{t_0} \right], \quad t_1 = \frac{1}{t_0} - a_1, \quad x_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}, \\ a_2 &= \left[ \frac{1}{t_1} \right], \quad t_2 = \frac{1}{t_1} - a_2, \quad x_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \dots \\ a_n &= \left[ \frac{1}{t_{n-1}} \right], \quad t_n = \frac{1}{t_{n-1}} - a_n, \quad x_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $a_0$  – целое число;  $a_1, a_2, \dots$ , – натуральные числа. Число  $a_n$  имеют неполным частным порядка  $n$  (иногда элементом цепной дроби), оно определено лишь для тех индексов  $n$ , для которых  $t_{n-1} > 0$ . Если  $t_N = 0$  и  $t_{N-1} > 0$  для некоторого натурального числа  $N$ , то процесс прекращается; в этом случае  $x = x_N$  – рациональное число. Для иррационального числа  $x$  последовательности  $a_n, t_n, x_n$  определены для всех натуральных чисел  $n$ .

Числа  $x_n$  – рациональны, их называют подходящими дробями порядка  $n$ .

Они допускают представление в виде несократимой дроби  $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ . Цепные дроби часто используются во многих разделах математики, но почти не представлены в задачниках по математическому анализу. Ниже предлагается несколько задач по цепным дробям.

1. Последовательности  $p_n, q_n$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n > 1). \quad (1)$$

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1. \quad (2)$$

2. Последовательность  $x_0, x_2, \dots$  подходящих дробей чётного порядка возрастает, а последовательность  $x_1, x_3, \dots$  подходящих дробей нечётного порядка убывает.

3. Для любого  $n$  справедливо равенство

$$x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{q_{n-1}q_n}.$$

4. Если  $x \neq x_n$  при некотором  $n$ , то

$$(x - x_{n-1})(x - x_n) < 0.$$

5. Последовательность  $q_n$  возрастает и удовлетворяет оценке  $q_n \geq F_{n+1}$ , где  $\{F_n\}$  – последовательность Фибоначчи.

6. Если  $x$  – иррациональное число, то последовательность  $x_n$  сходится к  $x$ ; верны оценки

$$|x - x_n| < |x - x_{n-1}|, \quad |x - x_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

7. Число Фидия  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  иррационально, поэтому может быть представлено в виде бесконечной цепной дроби  $\{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ . Докажите, что

1) в рассматриваемом случае все числа  $a_n$  равны 1;

2)  $n$  – подходящая дробь для числа Фидия равна  $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$ ;

3) в каком-то смысле можно сказать, что число Фидия хуже всех приближается рациональными числами.

8. Разложите в цепную дробь числа  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ .

9. Число  $\pi$  иррационально; соответствующая ему последовательность неполных частных бесконечна. Приведём её начало:  $\{3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1\}$ . Найдите первые пять подходящих дробей для числа  $\pi$ .

10. Разложите в цепную дробь число 365, 2422, приближённо равное количеству суток в тропическом году. Подходящие дроби для этого числа возникали при создании разных календарей (древнеегипетского, юлианского, григорианского; одним из наиболее точных являлся календарь Омара Хайама, он был введён в 1079 г. и действовал в Иране до середины XIX века).

Бесконечная цепная дробь называется периодической, если последовательность её неполных частных начиная с некоторого момента периодически повторяется.

11\*. Всякая бесконечная периодическая дробь является квадратической иррациональностью<sup>1</sup>.

12\*. Всякая квадратичная иррациональность разлагается в периодическую цепную дробь.

<sup>1</sup>Иррациональное число  $\alpha$  называется квадратичной иррациональностью, если найдутся такие целые числа  $a \neq 0, b, c$ , что  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ .

## 6.7 Экстремальные задачи

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функций

$$\boxed{1} y = \frac{2x + 1}{x^2 - x + 1}; \boxed{2} y = \frac{-x^2 + 2x + 1}{6x^2 - 7x + 3}; \boxed{3} y = \frac{x}{x^2 + |x - 1|}.$$

2. Найдите значения параметра  $\alpha$ , удовлетворяющие условию  $-1 < \alpha < 1$ , для каждого из которых выражение

$$1 + 2\sqrt{x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 6y + 10}$$

принимает наименьшее значение только для одной пары  $x, y$ .

3. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения  $x + 2y$ , если  $x, y$  отрицательны и удовлетворяют неравенству  $x^2 - 4xy + y^2 + 3 \leq 0$ .

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения, которые может принимать  $x + 2y$ , если  $3x^2 - 2xy + 4y^2 \leq 5$ .

5. Найдите наименьшее и наибольшее значения, которые может принимать выражение  $2x^2 + 3xy + 4y^2$ , если  $x^2 - xy + 2y^2 = 3$ .

6. При каких  $a$  неравенство  $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \geq 0$  выполняется при всех  $x$ ?

7. При каких  $a$  неравенство  $x^2 + x + |x - a| + \frac{2}{9} \leq 0$  имеет хотя бы одно решение?

8. При каких  $a$  неравенство  $\frac{x - 3}{ax^2 - 4x + a - 3} < 1$  выполняется при всех  $x$ ?

9. Найдите все значения параметра  $a$ , для которых наименьшее значение функции  $y = x^2 + |x - a| + |x - 1|$  больше 2.

10. Найдите кратчайшее расстояние от точек параболы  $y = x^2 - 8x - 16$  до прямой  $y = -2x + 1$ .

11. Высота усеченной пирамиды равна  $h$ , площадь среднего сечения равна  $S$ . В каких пределах может меняться объем пирамиды?

12. Найдите наибольшее значение объема тетраэдра, вписанного в цилиндр, радиус основания которого  $R$ , высота  $h$ .

13. Какое наименьшее значение может принимать отношение объема конуса к объему цилиндра, описанного около одного и того же шара?

14. Две вершины тетраэдра расположены на поверхности сферы радиусом  $\sqrt{10}$ , две другие вершины – на поверхности сферы радиуса 2, концентрической с первой. Какой наибольший объем таких тетраэдров?

15. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны  $a, b, c$ . Чему равно наибольшее значение площади прямоугольной проекции этого параллелепипеда на плоскость?

16. Радиус основания прямого кругового конуса  $K$  равен  $R$ , его высота равна  $h$ . Чему равно наибольшее значение площади прямоугольной проекции конуса  $K$  на плоскость?

17. Радиус основания прямого кругового цилиндра  $Z$  равен  $R$ , его высота равна  $h$ . Чему равно наибольшее значение площади прямоугольной проекции цилиндра  $Z$  на плоскость?

18. Найти проекцию точки  $\{x_0, y_0\}$  на множество

$$X = \{(x, y) | ax + by = 1, \quad x \geq 0, y \geq 0\},$$

где  $a > 0, b > 0$ .

19. Найти точку абсолютного минимума в задаче

$$f(x, y) = -\ln x + y \rightarrow \min, \quad x - y \leq 2, \quad x + y^2 \leq 4, \quad x > 0.$$

20. Найти глобальные решения задачи

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 \rightarrow \max \quad (\min), \quad |x - 3| + |y - a| \leq 1,$$

где  $a \geq 0$ .

21. Найти точки локальных и глобальных экстремумов функции

$$f(x, y) = (x + y)(x - a)(y - b) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

22. Найти глобальные решения задачи

$$f(x, y) = x^2 + y + \frac{1}{x + y} \rightarrow \min, \quad x + y > 0.$$

23. Найти точки относительного экстремума

$$f(x, y, z) = x + y + z^2 + 2(xy + yz + zx), \quad x^2 + y^2 + z = 1.$$

24. Найти глобальные решения задачи

$$\sum_{j=1}^n \frac{c_j}{x_j^\alpha} \rightarrow \min, \quad \sum_j a_j x_j = b, \quad x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $c_j > 0, \alpha > 0, a_j > 0, b > 0$ .

25. Среди всех треугольников, содержащих данный круг, найти тот, площадь которого наименьшая.

26. Среди всех шаровых сегментов с заданной площадью сферической поверхности найти тот, объём которого наименьший.

27. Найти наименьшее значение суммы  $a^2 + b^2$ , где  $a, b$  – числа, при которых уравнение

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

имеет хотя бы один действительный корень

28. Две деревни  $A$  и  $B$  расположены по разные стороны от реки, берега которой – параллельные прямые линии. Определите, где следует строить мост (мост перпендикулярен берегам реки), чтобы путь из  $A$  в  $B$  был кратчайшим.

29. Пусть  $h_1, h_2, h_3$  – три высоты треугольника  $\Delta$ ,  $r$  – радиус окружности, вписанной в  $\Delta$ . Докажите неравенство  $h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r$ .

30. Доказать, что для треугольника со сторонами  $a, b, c$  и площадью  $S$  имеет место соотношение  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ .

## 6.8 Комплексные функции с ограниченным изменением

Пусть  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  – комплекснозначная функция, определённая на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ). Сопоставим функции  $z$  и разбиению  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  отрезка  $[a, b]$  число

$$\sigma_T(z) = \sum_{k=1}^N |z[t_k] - z[t_{k-1}]|.$$

Число  $\sigma_T z$  можно интерпретировать как длину ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, соединяющих точки  $z(t_{k-1})$  и  $z(t_k)$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Разным разбиениям  $T$  отрезка  $[a, b]$  соответствуют разные значения  $\sigma_T z$ .

1. Если  $T_1$  – продолжение разбиения  $T$ , то  $\sigma_T(z) \leq \sigma_{T_1}(z)$ .

Точная верхняя грань множества всех чисел  $\sigma_T(z)$ , когда  $T$  пробегает множество всех разбиений отрезка  $[a, b]$ , есть либо неотрицательное число, либо  $+\infty$ ; оно называется полным изменением (вариацией) функции  $z$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается символом  $V_a^b z$ . Если  $V_a^b z$  конечно, то функцию  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  называют функцией с ограниченным изменением. Совокупность функций, имеющих конечное изменение на отрезке  $[a, b]$ , обозначают символом  $BV[a, b]$ . Класс  $BV[a, b]$  не пуст.

2. Если  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – действительная и монотонная на отрезке  $[a, b]$  функция, то

$$V_a^b z = |z(b) - z(a)|.$$

3. Пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  – интегрируемая на отрезке  $[a, b]$  функция,  $z_0 \in \mathbb{C}$  и

$$z(t) = z_0 + \int_a^t f(\tau) d\tau \quad (a \leq t \leq b).$$

Тогда  $z \in BV_a^b$  и

$$V_a^b z = \int_a^b |f(\tau)| d\tau. \quad (1)$$

В качестве самостоятельного упражнения предлагается доказать некоторые свойства класса  $BV[a, b]$  и вариации.

4. Сумма (разность, произведение) двух функций класса  $BV[a, b]$  есть также функция класса  $BV[a, b]$ .

5. Если  $z, w$  – функции класса  $BV[a, b]$  и  $|w(t)| > m > 0 \forall t \in [a, b]$ , то частное  $\frac{z(t)}{w(t)}$  также принадлежит этому классу.

6. Равенство  $V_a^b z = 0$  эквивалентно тому, что  $z$  – постоянная функция (положительность вариации).

7.  $V_a^B(\lambda z) = |\lambda|V_a^b z \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$  (однородность вариации).

8.  $V_a^b(z + w) \leq V_a^b z + V_a^b w$  (неравенство треугольника).

9.  $V_a^b z = V_a^c z + V_c^b z$  ( $a < c < b$ ) (аддитивность вариации).

10. Для того чтобы функция  $z(t)$  имела ограниченное изменение на отрезке  $[a, b]$  необходимо и достаточно, чтобы существовали такие возрастающие на отрезке  $[a, b]$  действительные функции  $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ , что

$$z(t) = x_1(t) - x_2(t) + I(y_1(t) - y_2(t)) \quad (t \in [a, b]).$$

11. Пусть  $c_0 = a < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < c_n = b$  и сужение функции  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  на каждый из отрезков  $[c_{k-1}, c_k]$  монотонно. Тогда  $z \in BV[a, b]$  и

$$V_a^b z = \sum_{k=1}^n |z(c_k) - z(c_{k-1})|. \quad (2)$$

Формулы (1), (2) позволяют в большинстве случаев достаточно просто вычислить вариацию функции.

12. Привести пример непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции, не принадлежащей классу  $BV[a, b]$

Если же всё таки функция  $z: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  и непрерывна и принадлежит классу  $BV[a, b]$ , то её вариация совпадает с длиной непрерывной плоской кривой  $z = z(t)$  ( $a \leq t \leq b$ ).

## 6.9 Признаки сходимости несобственных интегралов

Остановимся на приложениях вариации к вопросу сходимости несобственных интегралов.

1. Пусть  $g, h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  – интегрируемые на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции. Пусть  $x_k = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} h(t) dt.$$

2. Пусть  $g, h: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  – интегрируемые на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функции и  $V_{\alpha}^{\beta} g < \infty$ . Тогда

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)h(t) dt \right| \leq L(|g(\beta)| + V_{\alpha}^{\beta} g),$$

где

$$L := \max \left\{ \left| \int_{\alpha}^x h(t) dt \right|, \alpha \leq x \leq \beta \right\}.$$

Далее рассматриваются несобственные интегралы вида

$$\int_a^{\infty} g(t)h(t) dt, \quad (1)$$

$$\int_a^{\infty} h(t) dt. \quad (2)$$

Предполагается, что функция  $h: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  интегрируема по каждому промежутку  $[a, x]$ , а функция  $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  на каждом из отрезков  $[a, x]$  имеет конечное изменение. В частности, на луче  $[a, \infty)$  определены функции

$$H(x) := \int_a^{\infty} h(t) dt, \quad G(x) := V_a^x g.$$

Конечность предела функции  $H$  на  $\infty$  равносильна сходимости интеграла (4). Ограниченность функции  $G$  на луче  $[a, \infty)$  эквивалентна существованию конечного предела этой функции на  $\infty$ . Положим

$$V_a^{\infty} g := \lim_{x \rightarrow \infty} G(x);$$

число  $V_a^{\infty} g$  назовём вариацией функции  $g$  на луче  $[a, \infty)$ .

3. Функция  $g$  с конечной вариацией  $V_a^{\infty} g$  имеет конечный предел на  $\infty$ .

4. Два достаточных условия конечности вариации  $V_a^{\infty} g$ ;

а) функция  $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна и имеет конечный предел  $g(\infty)$  на  $\infty$ ;  
в этом случае

$$V_a^{\infty} g = |g(a) - g(\infty)|,$$

б) функция  $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема на луче  $[a, \infty)$ , её производная интегрируема на каждом из отрезков  $[a, x]$  и сходится интеграл

$$\int_a^{\infty} |g'(t)| dt; \quad (3)$$

в этом случае  $V_a^{\infty} g$  совпадает с интегралом (3).

5. Признак Дирихле. Пусть  $V_a^{\infty} g < \infty$  и  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Пусть функция  $H: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  ограничена на  $[a, \infty)$ . Тогда интеграл (1) сходится.

6. Признак Абеля. Пусть  $V_a^\infty g < \infty$  и интеграл (2) сходится. Тогда интеграл (1) сходится.

Чаще всего применяются следующие версии этих признаков сходимости.

7. Пусть функция  $H: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  ограничена, функция  $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  убывает и  $g(+\infty) = 0$ . Тогда интеграл (1) сходится.

8. Пусть интеграл (2) сходится, а функция  $g: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  монотонна и ограничена. Тогда интеграл (1) сходится.

9. Установить сходимость интегралов

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^p} dx,$$

если  $p > 0$ .

10. Установить расходимость интегралов

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^p} dx, \quad \int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^p} dx,$$

если  $p \leq 1$ .

В задаче 11 предполагается, что функция  $h$  периодична с периодом  $T > 0$ , т. е.  $h(x + T) = h(x) \quad \forall x \in [a, \infty)$ . Вводится константа

$$K := \int_a^{a+T} h(t) dt.$$

11. Пусть  $V_a^\infty g < \infty$  и  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Если  $K = 0$ , то интеграл (1) сходится. Если же  $K \neq 0$ , то интеграл (1) сходится или расходится вместе с интегралом

$$\int_a^\infty g(t) dt. \tag{4}$$

12. Пусть  $V_0^\infty g < \infty$  и  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Тогда интеграл

$$\int_0^\infty \sin^2(x)g(x) dx$$

сходится или расходится вместе с интегралом (4).

13. Доказать, что интеграл, зависящий от положительного параметра  $p$ ,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$$

сходится, если  $p > \frac{1}{2}$  и расходится при  $p \leq \frac{1}{2}$ .

14. Пусть функция  $g(x)$  имеет непрерывную производную на отрезке  $[a, b]$ . Пусть

$$A(x) = \sum_{a < m \leq x} \alpha_m.$$

Тогда для любого  $x$  из отрезка  $[a, b]$  справедливо равенство

$$\sum_{a < n \leq x} \alpha_n g(n) - A(x)f(x) = - \int_a^x A(t)f'(t) dt,$$

называемое иногда формулой суммирования Абеля.

15. Привести пример непрерывной неотрицательной и не ограниченной на любом промежутке  $[a, \infty)$ ,  $a > 0$  функции  $f(x)$ , для которой интеграл

$$\int_0^\infty f(x) dx \tag{5}$$

сходится.

16. Пусть  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  – дифференцируемая комплекснозначная функция и  $|f'(x)| < K < \infty \quad \forall x \in [1, \infty)$ . Доказать, что если интеграл (5) сходится, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

17. Пусть  $P(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$  – многочлен степени  $n > 1$ ,  $f(x) = \sin P(x)$ . Доказать сходимость интеграла (5).

18. Доказать, что при  $x \rightarrow \infty$  верны асимптотические равенства

$$\int_x^\infty \frac{dt}{te^t} \sim \frac{1}{xe^x}, \quad \int_x^\infty \cos t^2 dt \sim -\frac{\sin x^2}{x},$$

$$\int_x^\infty \sin t^2 dt = \frac{\cos x^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

## 6.10 Формула Эйлера–Маклорена

Важную роль в математике играет формула Эйлера–Маклорена. В этом разделе приводятся несколько задач, связанных с данной формулой и её применениями. Ниже будет использоваться следующий вариант правила интегрирования по частям.

Теорема. Пусть функции  $u(x), v(x)$   $m$  раз непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[c, d]$  ( $-\infty < c < d < \infty$ ). Тогда имеет место формула

$$\int_c^d u(x)v^{(m)}(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (u^{(k)}(x)v^{(m-1-k)}(x)) \Big|_c^d + (-1)^m \int_c^d u^{(m)}(x)v(x) dx.$$

Чаще всего в учебниках по математическому анализу эта формула доказывается при  $m = 1$ . Общий случай ( $m \geq 1$ ) легко выводится путем многократного применения простейшего варианта формулы.

Пусть  $f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ , если  $t \neq 0$  и  $f(0) = 1$ . Функция  $f$  может быть разложена в степенной ряд, сходящийся к ней в некоторой окрестности 0. Следовательно, справедливо равенство

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n. \quad (1)$$

Определяемые таким образом числа  $B_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) именуют числами Бернулли. Как нетрудно видеть,  $B_n = f^{(n)}(0)$ , однако такое представление редко используется.

1. Проверить равенство

$$f(t) = -\frac{t}{2} + t \frac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}}. \quad (2)$$

Используя (2), установить соотношения

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3)$$

2. Из определения функции  $f(t)$  вытекает равенство  $(e^t - 1)f(t) = t$ , следовательно,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{(j+1)!} * \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k = 1.$$

Получить в качестве следствия этого равенства рекуррентное соотношение

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i+1)!} B_i = 0, \quad (4)$$

Апелляция к теории рядов необязательна. Формула (4) может быть получена из правила Лейбница дифференцирования произведения двух функций.

3. Многочлены Бернулли  $\mathcal{B}_n(x)$  определяются из соотношения

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} t^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!} t^k. \quad (5)$$

Вывести из (5) равенства

$$\mathcal{B}_n(0) = B_n, \quad \mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n! B_k}{k!(n-k)!} x^{n-k}, \quad \mathcal{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Нарисуйте графики многочленов Бернулли  $\mathcal{B}_n(x)$ ,  $(n = 1, 2, \dots, 8)$  на отрезке  $[0, 1]$

4. Заменяя в (5)  $x$  на  $1-x$ , получаем, что

$$\frac{te^{t(1-x)}}{e^t - 1} = \frac{-te^{-tx}}{e^{-t} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\mathcal{B}_k(x)}{k!} t^k.$$

Отсюда вытекают важные для дальнейшего соотношения

$$\mathcal{B}_n(x) = (-1)^n \mathcal{B}_n(1-x), \quad (7)$$

$$\mathcal{B}_n(1) = \mathcal{B}_n(0) = B_n. \quad (n \geq 2) \quad (8)$$

Проверьте самостоятельно равенства (7), (8).

5. Дифференцируя (5) по  $x$ , приходим к соотношениям

$$\frac{t^2 e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n'(x)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \mathcal{B}_{n-1}(x)}{n!} t^n,$$

непосредственным следствием которых является ещё одно свойство многочленов Бернулли:

$$\mathcal{B}_n'(x) = n \mathcal{B}_{n-1}(x). \quad (9)$$

6. Применяя формулы интегрирования по частям и опираясь на свойства (8), (9) многочленов Бернулли, доказать равенства

$$f(0) = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}(f(1) - f(0)) + \int_0^1 \mathcal{B}_1(x) f'(x) dx, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (-1)^m \int_0^1 \frac{\mathcal{B}_{m-1}(x)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x) dx &= (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{\mathcal{B}_m(x)}{m!} f^m(x) dx + \\ &+ \frac{B_m}{m!} (f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)). \end{aligned} \quad (11)$$

В равенствах (10), (11) соответствующие производные функции  $f$  определены и непрерывны на отрезке  $[0, 1]$ .

7. Используя принцип математической индукции и (10), (11), доказать формулу

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^1 f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)) \\ &+ (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{\mathcal{B}_m(x)}{m!} f^{(m)}(x) dx. \end{aligned} \quad (12).$$

Формулу (12) можно установить, применив общее правило интегрирования по частям, сформулированное в начале этого раздела, полагая

$$u(x) = \frac{\mathcal{B}_m(x)}{m!}, \quad v(x) = f(x), \quad c = 0, \quad d = 1.$$

8. Пусть  $a, b$  – целые числа  $a < b$ ,  $m$  – натуральное число,  $\{x\} = x - [x]$  – дробная часть числа  $x$ , функция  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  определена и  $m$  раз непрерывно дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Доказать равенство

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^m \frac{B_k}{k!} (f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)) + \mathcal{R}_m, \quad (13)$$

где

$$\mathcal{R}_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{\mathcal{B}_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx. \quad (14)$$

Соотношения типа (13) – (14) принято называть формулами Эйлера – Маклорена; история вопроса хорошо освещена в математической литературе.

9. Положим  $f(x) = x^{m-1}$ , ( $m \in \mathbb{N}$ ), тогда  $f^{(m)}(x) = 0$  и  $\mathcal{R}_m = 0$ . Получить формулу Бернулли

$$\sum_{k=a}^{b-1} k^{m-1} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} B_k (b^{m-k} - a^{m-k}) = \frac{1}{m} (\mathcal{B}_m(b) - \mathcal{B}_m(a)). \quad (15).$$

Здесь  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – биномиальный коэффициент. Именно при выводе формулы (15) и возникли числа Бернулли. Конкретизируйте эту формулу для  $m = 2, 3, \dots, 11$ .

10. В порядке обсуждения формулы (15) заметим, что многочлен Бернулли  $\mathcal{B}_n(x)$  может быть определен, исходя из равенства

$$\int_x^{x+1} \mathcal{B}_n(t) dt = x^n \quad \forall x.$$

Докажите эквивалентность нового определения ранее принятому и примените к выводу равенства (15).

11. Если функция  $f$  не является многочленом, то возникает задача об оценке величины остатка  $\mathcal{R}_m$ . Для решения этой задачи полезно иметь дополнительную информацию о полиномах Бернулли и производных функции  $f$ .

В следующем разделе будет установлена формула

$$\mathcal{B}_{2m}(\{x\}) = 2(2m)!(2\pi)^{-2m} (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m}}. \quad (16)$$

12. Получить в качестве следствия формулы (16) соотношения

$$\zeta(2m) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = |B_{2m}| \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}, \quad (17)$$

$$|\mathcal{B}_{2m}(\{x\})| \leq |B_{2m}| = 2(2m)!(2\pi)^{-2m} \zeta(2m). \quad (18)$$

Формула (17) позволяет находить значения функции  $\zeta$  для чётных натуральных аргументов. Она же влечёт за собой точную оценку роста чисел Бернулли  $B_{2m}$ .

13. Соотношения (14), (18) приводят к достаточно приемлемой оценке остатка в формуле Эйлера–Маклорена. Например, верно неравенство

$$|\mathcal{R}_{2m}(x)| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_a^b |f^{(2m)}(x)| dx, \quad (19)$$

как и в (14),  $a, b$  – целые числа и  $a < b$ .

14. Комбинация (17) и (19) влечёт за собой оценку

$$|\mathcal{R}_{2m}(x)| \leq \frac{2\zeta(2m)}{(2\pi)^{2m}} \int_a^b |f^{(2m)}(x)| dx. \quad (20)$$

Достоинством (20) является отсутствие в правой части (20) чисел Бернулли; недостаток, связанный с появлением функции  $\zeta$ , легко устраним, поскольку достаточно лишь иметь оценку сверху последовательности  $\zeta(2m)$ . Попробуйте получить подобную оценку.

15. Пусть  $f(x) = x^{-2}$ . Рассмотрим сходящийся ряд  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$ , его частичные суммы  $s_n$  и остаток  $r_n$ :

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k), \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k).$$

Поскольку  $f$  – положительная убывающая на луче  $(0, \infty)$  функция, то

$$\frac{1}{n} > r_n > \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n+1},$$

так что рассматриваемый ряд обратных квадратов сходится весьма медленно. Сколько слагаемых данного ряда надо взять, чтобы сумма  $s_n$  отличалась от суммы  $s$  исходного ряда меньше чем на  $\varepsilon$ ? Искомое  $n$  должно удовлетворять неравенству  $(n+1)\varepsilon > 1$ . Эйлер вычислил число  $s$  с точностью до  $10^{-20}$ . Чтобы получить такую точность требуется сложить не менее  $m$  членов ряда, где  $m+1 > 10^{20}$ . Если бы Эйлер вычислял каждое слагаемое с абсолютной точностью за одну секунду, то ему потребовалось бы не менее триллиона лет!!! Эйлер в 1735 году затратил неизмеримо меньше времени. Подсчёты убедили его в том, что  $s = \frac{\pi^2}{6}$ , что и было доказано им в том же году. Как действовал Эйлер?

16. Формулу Эйлера–Маклорена часто записывают в виде

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + C + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{k=2}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + \mathcal{R}_{2m}(n), \quad (21)$$

где число  $C$  не зависит от  $n$ ;

$$C = \frac{1}{2}f(1) - \sum_{k=2}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(1),$$

остаток  $\mathcal{R}_{2m}(n)$  удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{R}_{2m}(n) = - \int_1^n f^{(2m)}(x) \frac{\mathcal{B}_{2m}(\{x\})}{(2m)!} dx. \quad (22)$$

17. Докажите неравенство

$$|\mathcal{R}_{2m}| \leq \frac{|B_{2m}|}{(2m)!} \int_1^n |f^{(2m)}(x)| dx. \quad (23)$$

18. Пусть функция  $f$  имеет  $2m$  непрерывных производных на луче  $[1, \infty)$  и

$$\int_1^\infty |f^{(2m)}(x)| dx < \infty.$$

Получить асимптотическую формулу

$$\sum_1^n f(k) = \int_1^n f(x) dx + S + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + O\left(\int_n^\infty |f^{(2m)}(x)| dx\right) \quad (n \rightarrow \infty), \quad (24)$$

где

$$S = C - \int_1^\infty f^{(2m)}(x) \frac{B_{2m}(\{x\})}{(2m)!} dx.$$

19. Функция  $f(x) = \ln x$  бесконечное число раз дифференцируема на луче. Примените к ней формулу (24) и постарайтесь на этом пути получить формулу Стирлинга для нахождения асимптотики последовательности  $n!$ .

20. Примените формулу (24) к функции  $f(x) = x^{-p}$  ( $p > 0$ ). В итоге будет найдена асимптотика для последовательности

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}.$$

Специально остановимся на варианте формулы Эйлера–Маклорена, соответствующем случаю  $m = 1$ .

21. Получить в качестве следствия (13) формулу

$$\sum_{k=a}^b f(k) = f(a) + \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \{x\} f'(x) dx. \quad (25)$$

Отметим два преимущества этой формулы. 1) Для её вывода не требуются полиномы и числа Бернулли. 2) В ряде ситуаций формулы (25) уже достаточно для получения асимптотики последовательностей.

22. Доказать соотношение

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + r_n, \quad (26)$$

в котором

$$\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2}, \quad r_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Константу  $\gamma$  именуют постоянной Эйлера–Маскерони. Из (26) вытекает равенство

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Постоянная  $\gamma$  встречается во многих разделах анализа. Она может быть выражена через интеграл:

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx \approx 0,577215664901532 \dots,$$

однако арифметическая природа  $\gamma$  пока не ясна.

## 6.11 Полиномы Бернулли и ряды Фурье

Пусть  $\mathcal{B}_n(x)$  ( $x \in [0, 1], n = 0, 1, 2, \dots$ ) – последовательность полиномов Бернулли. Напомним некоторые свойства последовательности  $\mathcal{B}_n(x)$ . Справедливы соотношения  $\mathcal{B}_0(x) = 1$ ,

$$\mathcal{B}'_n(x) = n\mathcal{B}_{n-1}(x), \quad \int_0^2 \mathcal{B}_n(x) \, dx = 0. \quad (n > 0) \quad (1)$$

Из (1) вытекает равенство

$$\mathcal{B}_n(1) = \mathcal{B}_n(0) \quad (n > 1). \quad (2)$$

Условие периодичности (2) и гладкость полиномов  $\mathcal{B}_n(x)$  гарантируют возможность их представления в виде равномерно сходящегося ряда Фурье. В частности, справедливо равенство

$$\mathcal{B}_{2n}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{2k\pi i x}, \quad (3)$$

в котором

$$c_k = \int_0^1 \mathcal{B}_{2n}(x) e^{-2k\pi i x} \, dx. \quad (4)$$

Соотношение (1) влечёт за собой равенство  $c_0 = 0$ . Если  $k \neq 0$ , то, интегрируя по частям, получаем

$$c_k = \int_0^1 \mathcal{B}_{2n}(x) e^{-2k\pi i x} dx = -\frac{2}{2\pi i k} e^{-2\pi i x} \mathcal{B}_{2n}(x) \Big|_0^1 + \frac{2n}{2\pi i k} \int_0^1 \mathcal{B}_{2n}(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Внеинтегральные члены обращаются в нуль. Продолжая этот процесс, приходим к равенству

$$c_k = \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n} k^{2n}} (-1)^{n-1}.$$

Поэтому

$$\mathcal{B}_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi k x}{k^{2n}}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

## 6.12 Метод Лапласа для оценки интегралов

Две функции  $\Phi(t)$ ,  $\Psi(t)$ , определённые при  $t \geq t_0$ , называются *эквивалентными* на  $\infty$ , если найдётся такая функция  $\rho(t)$ , что

$$\Phi(t) = \rho(t) \Psi(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = 1.$$

В этом случае пишут  $\Phi(t) \sim \Psi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

1. Пусть  $\delta, k$  – положительные числа, функция  $\Phi(t)$  определена равенством

$$\Phi(t) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-ktx^2} dx.$$

Тогда  $\Phi(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{kt}}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Метод Лапласа <sup>1</sup> позволяет найти асимптотику на  $\infty$  интегралов вида

$$I(t) = \int_a^b g(x) e^{-th(x)} dx. \quad (1)$$

2. Пусть  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – дважды дифференцируемая на отрезке  $[a, b]$  функция, причём 1) функция  $h$  достигает абсолютного минимума на отрезке  $[a, b]$  в единственной точке  $c \in (a, b)$ , 2)  $h''(c) > 0$ ,  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция и  $g(c) \neq 0$ .

<sup>1</sup>Лаплас Пьер Симон (*Laplace Pierre Simon*) (1749 – 1827) – французский астроном, математик и физик.

Тогда

$$I(t) \sim g(c)e^{-th(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{th''(c)}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (2)$$

3. Установить, что при  $n \rightarrow \infty$  имеет место эквивалентность

$$v_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Интегралы  $v_n$  вычисляются в явном виде.

4. Доказать равенство

$$v_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2},$$

где  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ ,  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$ .

5. Сравнивая два последних равенства, получить формулу Валлиса:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

Приведённые выше утверждения верны и для несобственного интеграла вида

$$I(t) = \int_{\alpha}^{\omega} g(x)e^{-th(x)} \, dx. \quad (3)$$

6. Пусть функция  $g: (\alpha, \omega)$  непрерывна на промежутке  $(\alpha, \omega)$  и  $g(c) \neq 0$ , функция  $h: (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема на  $(\alpha, \omega)$ , причём 1)  $h$  достигает своего абсолютного минимума на  $(\alpha, \omega)$  в единственной точке  $c$  и

$$\inf_{\{x \notin (c-\delta, c+\delta)\}} h(x) > h(c)$$

при некотором  $\delta > 0$ ;

2)

$$h''(c) > 0;$$

3) интеграл (3) существует при  $t = 1$ .

Тогда интеграл (3) имеет смысл при всех  $t \geq 1$  и справедливо соотношение (2). (Это утверждение называют леммой Лапласа.)

В силу (2) интеграл  $I(t)$  имеет ту же асимптотику на  $\infty$ , что и интеграл

$$\int_{\alpha}^{\omega} g(c)e^{-t(h(c) + \frac{h''(c)}{2}(x-c)^2)} \, dx,$$

возникающий при замене функции  $h(x)$  её приближением Тейлора второго порядка

$$h(c) + \frac{h''(c)}{2}(x-c)^2.$$

Соотношение (2) выглядит несколько таинственно, поскольку неясно, почему поведение интеграла  $I(t)$  зависит лишь от одной точки  $c$ , в которой функция  $-h(x)$  имеет строгий максимум. Оказывается, что в равенстве

$$\int_{\alpha}^{\omega} g(x)e^{-th(x)} dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} g(x)e^{-th(x)} dx + \int_{(\alpha, \omega) \setminus (c-\delta, c+\delta)} g(x)e^{-th(x)} dx$$

второе слагаемое в правой части бесконечно мало по сравнению с первым (при  $t \rightarrow \infty$ ). Попробуйте придать точный смысл этой фразе.

Применим соотношение (2) к задаче об асимптотическом поведении  $\Gamma(t+1)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Из определения  $\Gamma$ -функции следует равенство

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^t du \quad (t > 0).$$

7. Доказать равенство

$$\Gamma(t+1) = \int_{-1}^{\infty} e^{-t(1+x)} (t(1+x))^t dx = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} \{e^{-x}(1+x)\}^t dx.$$

Если положить  $h_0(x) = x - \ln(1+x)$  ( $x > -1$ ), то приходим к равенству

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^{\infty} e^{-th_0(x)} dx. \quad (4).$$

8. Проверить следующие свойства функции  $h_0$ :

1° функция  $h_0: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  бесконечно дифференцируема и

$$h_0'(x) = \frac{x}{1+x}, \quad h_0''(x) = \frac{1}{(1+x)^2};$$

2° функция  $h_0$  достигает абсолютного минимума в единственной точке  $c = 0$ , при этом  $h_0(0) = 0$ ,  $h_0'(0) = 0$ ,  $h_0''(0) = 1$ , и если  $0 < \delta < 1$ , то

$$\inf\{h_0(x), \quad -1 < x < \infty, \quad |x| \geq \delta\} > 0 = h_0(0).$$

Вывести из (4) формулу Стирлинга<sup>2</sup>

$$\Gamma(t+1) \sim e^{-t} t^t \sqrt{2\pi t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (5)$$

<sup>2</sup>Стирлинг Джеймс (*Stirling James*) (1692–1770) – шотландский математик.

означающую, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(t+1)e^t}{t^t \sqrt{2\pi t}} = 1. \quad (6)$$

Частным случаем (5) является равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = 1, \quad (7)$$

которое также называют формулой Стирлинга.

9. Пусть  $0 < p < 1, q = 1 - p$ ,

$$\mathcal{B}(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad x_{n,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

число  $k$  может зависеть от  $n$ , однако последовательность  $x_{n,k}$  ограничена:  $|x_{n,k}| \leq c$ . Используя формулу Стирлинга, доказать соотношение

$$\mathcal{B}(n, k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x_{n,k}^2 \right\} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

*Комментарий:* в теории вероятностей последнее соотношение называют локальной предельной теоремой.

10. Доказать асимптотическое равенство

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

11. Показать, что

$$\int_0^1 e^x x^n (1+x^2)^{-n} dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{e}{2^n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

12. Используя равенство

$$k!n^{-k} = \int_0^\infty e^{-nt} t^k dt,$$

установить асимптотическое равенство

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^{-k} k! \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

13. Функция Бесселя  $J_n(t)$  определяется равенством

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{t \cos x} \cos nx, dx$$

где  $n \geq 0$  – целое. Установить асимптотическое равенство

$$I_n(t) \sim \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi t}} \quad (t \rightarrow \infty).$$

14. Пусть  $[a, b]$  – конечный отрезок,  $S(x) > 0$ , функции  $g(x), S(x)$  – достаточно гладкие и пусть функция  $S(x)$  достигает максимума только в точке  $x_0$ . Доказать, что если  $S''(x_0) \neq 0$ , то при  $t \rightarrow \infty$

$$I(t) := \int_a^b g(x)[S(x)]^t dx \sim \varepsilon g(x_0) \sqrt{-\frac{2\pi}{tS''(x_0)}} [S(x_0)]^{t+0.5},$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{если } a < x_0 < b, \\ 0,5 & \text{если } (x_0 - a)(x_0 - b) = 0. \end{cases}$$

15. Пусть  $x > 1, \sqrt{x^2 - 1} > 0$ ,

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta -$$

полином Лежандра степени  $n$ . Доказать, что

$$P_n(x) \sim \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+0.5}}{\sqrt{2\pi n} \sqrt[4]{x^2 - 1}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Задачи 2, 6 относились к случаю, когда функция  $h$  достигает минимума во внутренней точке промежутка, по которому считается интеграл. Однако минимум  $h$  может достигаться и на границе промежутка, например, в его левом конце. Тогда производная будет там, вообще говоря, положительна.

Вновь рассмотрим интеграл  $I(t)$ , определяемый равенством (3).

16. Пусть  $h(x)$  – действительная и непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция,  $h(x) > h(a)$  ( $x > a$ ), производная  $h'(a)$  существует и больше 0,  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывная функция и  $g(a) \neq 0$ . Требуется доказать соотношение

$$I(t) \sim g(a)(th'(a))^{-1} e^{-th(a)} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Вывод этого соотношения основан на неравенстве

$$|h(x) - h(a) - (x - a)h'(a)(x - a)| \leq \varepsilon(x - a) \quad (a \leq x \leq a + \delta),$$

вытекающем из дифференцируемости функции  $h$  в точке  $a$ . Используется равенство

$$I(t) = \int_a^{a+\delta} g(x)e^{-th(x)} dx + \int_{a+\delta}^b g(x)e^{-th(x)} dx,$$

в котором асимптотика первого слагаемого легко находится, а второе слагаемое бесконечно мало по сравнению с первым.

17. Доказать асимптотическое равенство

$$\int_0^\pi x^n \sin x dx \sim \pi^{n+2} n^{-2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Замечание. Правила интегрирования по частям и замена переменных весьма полезны при исследовании асимптотики интегралов. Например, имеем

$$\int_0^\pi x^n \sin x dx = -\frac{1}{n+1} \int_0^\pi x^{n+1} \cos x dx = \int_0^\pi (\pi-x)^{n+1} \cos x dx.$$

В качестве ещё одного иллюстрирующего примера рассмотрим следующий интеграл

$$J = \int_2^5 \sin x^{10} dx. \quad (8)$$

Под знаком интеграла находится непрерывная на отрезке  $[2,5]$  функция  $f(x) = \sin x^5$ , модуль которой не превосходит 1, поэтому  $|J| \leq 3$ . Попытки уточнения величины интеграла, основанные на формулах трапеций, Симпсона и т. п., не приводят к результату. Отказываются считать этот интеграл и программы типа Maple, Mathematica. Это становится ясным, если учесть сильную осцилляцию функции  $f(x)$ , её производная  $f'(x) = 10x^9 \cos x^{10}$  достигает значений  $1.9 \times 10^7$ . И в данном случае становятся эффективными асимптотический метод и правило интегрирования по частям.

18. Установите равенство

$$J = \frac{1}{10} \int_{2^{10}}^{5^{10}} y^{-9/10} \sin y dy. \quad (9)$$

Подынтегральная функция  $g(y) = y^{-9/10} \sin y$  уже не является быстро колеблющейся, но возникла другая неприятность – очень большой промежуток интегрирования. Введём обозначение

$$\Phi(t, r) = \int_t^\infty y^{-r} \sin y dy.$$

При любых положительных  $t, r$  интеграл  $\Phi(t, r)$  сходится. Очевидно равенство

$$J = \frac{1}{10} \left[ \Phi(2^{10}, \frac{9}{10}) - \Phi(5^{10}, \frac{9}{10}) \right]. \quad (10)$$

19. Интегрируя по частям, получить соотношение

$$\Phi(t, r) = \frac{\cos t}{t^2} + \frac{\sin t}{t^{r+1}} r - \frac{\cos t}{t^{r+2}} r(r+1) - \frac{\sin t}{t^{r+3}} r(r+1)(r+2) + \Psi(t, r), \quad (11)$$

где остаток  $\Psi(t, r)$  допускает представление

$$\Psi(t, r) = r(r+1)(r+2)(r+3)\Phi(t, r+4). \quad (12)$$

20. Из (12) вытекают неравенства

$$\left| \Psi \left( 2^{10}, \frac{9}{10} \right) \right| < 1.2 \cdot 10^{-11}, \quad \left| \Psi \left( 5^{10}, \frac{9}{10} \right) \right| < 4 \cdot 10^{-20}.$$

Объединяя установленную оценку остатка с (10), (11), находим искомый интеграл

$$J \approx 1.9276385 \cdot 10^{-4},$$

все десятичные знаки равны. Убедиться в этом, используя имеющиеся средства.

Разобранный пример достаточно поучителен. Не всегда прямолинейное использование мощности компьютеров приводит к цели; в ряде случаев оказываются полезными и соображения качественного характера.

# Литература

- [1] *Дьяконов, В. П.* Mathematica 5/6/7 : Полное руководство / В. П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2010.
- [2] Компьютерная геометрия : практикум : учебное пособие / А. О. Иванов и др. – М. : Интернет-университет информационных технологий, 2010. – 391 с.
- [3] *Тер-Крикоров, А. М.* Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – 3-е изд., испр. – М. : ФИЗМАТ-ЛИТ, 2001. – 672 с.
- [4] *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. – М. : Астрель ; АСТ, 2005. – 558 с.
- [5] *Белых, Т. И.* Методы чебышёвских точек выпуклых множеств и их приложения / Т. И. Белых, В. П. Булатов, Э. Н. Яськова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 1. – С. 18–32.
- [6] *Петровский, И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : Либроком, 2009. – 240 с.
- [7] *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1992. – 128 с.
- [8] *Малкин, И. Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / И. Г. Малкин. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.
- [9] *Моисеев, Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1969. – 380 с.

Учебное издание

**Климов Владимир Степанович**  
**Ухалов Алексей Юрьевич**

**Решение задач математического анализа  
с использованием систем  
компьютерной математики**

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина  
Компьютерная верстка А. Ю. Ухалов  
Подписано в печать 10.06.2014. Формат 60 x 84/8.  
Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 5,0.  
Тираж 50 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.  
Ярославский государственный университет им П. Г. Демидова  
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.