

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

Д. В. Глазков, И. С. Кащенко

Уравнения динамики лазера

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлениям
Прикладная математика и информатика,
Математика и компьютерные науки

Ярославль 2012

УДК 517.912:535(075.8)

ББК 386-5я73

Г52

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2012 года*

Рецензенты:

Е. В. Григорьева, доктор физ.-мат. наук, профессор БГЭУ
кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета;

Г 52 **Глазков, Д. В.** Уравнения динамики лазера: учебное пособие
/ Д. В. Глазков, И. С. Кащенко; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Де-
мидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2012. — 128 с.

ISBN 978-5-8397-0902-7

Пособие содержит описание различных моделей динамики лазерных систем в их взаимосвязи, а также некоторых методов, позволяющих делать анализ свойств их решений.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 010400.68 Прикладная математика и информатика (дисциплины «Непрерывные математические модели», цикл М1; «Математические модели в естествознании», цикл М2), 010200.62 Математика и компьютерные науки (дисциплина «Концепции современного естествознания», цикл Б2), очной формы обучения.

ISBN 978-5-8397-0902-7

УДК 517.912:535(075.8)

ББК 386-5я73

©Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова, 2012

Содержание

Введение	5
1. Предварительные сведения	7
1.1. Принцип работы лазера	7
1.2. Простейшие методы анализа некоторых классов динамических систем	11
1.3. О бифуркациях динамических систем	16
1.4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром	21
1.5. Уравнения с запаздыванием и малыми (большими) параметрами	26
2. Базовые модели лазерной динамики	30
2.1. Система Максвелла – Блоха	30
2.2. Модель Лоренца – Хакена	34
2.3. Классическая модель Лоренца и ее свойства	37
2.4. Простейшие решения и их характеристика в общем случае .	40
2.5. Сценарии перехода к хаосу в системе Лоренца – Хакена . .	46
2.6. Уравнения Лоренца – Хакена и классификация лазеров . .	48
2.7. Модель Статца – Де Марса	50
2.8. Модель лазера класса В с внешней оптической накачкой . .	53
3. Система уравнений Ланга – Кобаяши	58
3.1. Формулировка задачи	58
3.2. Моды внешнего резонатора	61
3.3. Устойчивость простейших решений системы Ланга – Кобаяши	67
3.4. Условия Петермана – Тейгера, мосты и режимы короткого резонатора	76
3.5. Явление когерентного коллапса	81
3.6. Низкочастотные флуктуации	84
3.7. Асимптотический анализ модели Ланга – Кобаяши при больших значениях параметра накачки	91
3.8. Решения системы Ланга – Кобаяши при большом отношении времен затухания инверсии носителей и фотонов . . .	97
4. Другие модели динамики лазера с запаздывающей обратной связью	104
4.1. Некоторые модификации модели Ланга – Кобаяши	104

4.2. Модель лазера класса В с некогерентной оптической обратной связью и ее модификации	107
4.3. Модель полупроводникового лазера с оптическим фильтром	109
4.4. Синхронизация мод в лазере и модели для ее описания . . .	112
Заключение	117
Список литературы	118

Введение

Лазеры и технологии на их основе давно стали неотъемлемой частью нашей жизни. Хранение и передача информации, диагностика и лечение заболеваний, промышленная обработка материалов — это лишь малая часть приложений лазеров различных типов. Выявление и исследование новых эффектов основывается не только на экспериментальных данных, получение которых требует немало времени и средств, но и на теоретических результатах, которые нередко задают направление практических изысканий. Одной из наиболее актуальных задач в этой области является определение характеристик излучения при заданных параметрах лазерного устройства, а также указание действенных способов управления им. Здесь уместно привести следующую цитату: «...Проблема извлечения информации о параметрах лазера и отдельных внутрирезонаторных элементов имеет большую практическую значимость, и здесь в наибольшей мере требуются новые идеи, основывающиеся на современных концепциях нелинейной динамики» [28]. Для решения этой задачи за более чем полвека развития квантово-оптических технологий предложено большое число разнообразных моделей, описывающих динамику лазерных систем. Какие-то из них оказались удачными, от каких-то пришлось отказаться. Проверку временем прошли, главным образом, те уравнения, которые одновременно удовлетворяли двум противоречивым требованиям, которые предъявляются к любой математической модели. Первое — это простота. Простая модель способствует пониманию сути описываемого процесса. Все наиболее фундаментальные физические законы описываются довольно простыми уравнениями. Второе — это адекватность. Адекватная модель учитывает все наиболее существенные стороны изучаемого процесса и минимально расходится с практическими результатами. Наличие значительных отклонений от экспериментальных данных ставит вопрос об уточнении имеющейся модели, а также определении границ ее применимости. Ясно, что требование простоты предполагает максимальное уменьшение числа переменных и параметров в уравнениях. Требование адекватности означает учет как можно большего числа особенностей изучаемого явления, что, напротив, количество переменных и параметров увеличивает. Поэтому построение удачной математической модели того или иного процесса (особенно за пределами физики) оказывается своего рода искусством.

Пособие посвящено обзору уравнений, которые являются моделями динамики лазерных систем. В первой главе приводятся сведения, необходимые для понимания содержания последующих глав. Описывается ме-

ханизм работы лазера, излагаются некоторые методы исследования дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, поскольку почти все рассматриваемые модели относятся к этим классам динамических систем. Приводится ряд определений и теорем, касающихся понятий устойчивости, бифуркаций, а также особенностей, обусловленных малыми параметрами.

Во второй, третьей и четвертой главах описывается иерархия взаимосвязанных математических моделей динамики лазера. Во второй главе изложение идет от сложного к простому, следуя логике развития квантово-оптической теории на заре истории лазерной техники. Последовательное упрощение наиболее общей и трудной для анализа системы Максвелла – Блоха позволяет получить основанные на ОДУ модели Лоренца – Хакена и Статца – Де Марса. Краткий анализ их простейших решений традиционно является отправной точкой для дальнейших изысканий. В третьей главе подробно разбираются свойства системы Ланга – Кобаяши, которая является основной для исследования воздействия отраженного излучения на характер генерации в лазере. Краткий обзор близких к ней по духу моделей с запаздыванием приведен в четвертой главе. Явление синхронизации мод в лазере и модели для ее описания, существенно отличающиеся от системы Ланга – Кобаяши, приведены в пункте 4.4.

В завершение вводной части хотелось бы особо подчеркнуть еще один тезис. «Лазер принадлежит к числу систем, которые не только способны демонстрировать сложное поведение, но и более многих других пригодны для исследования общих закономерностей нелинейной динамики» [28]. То есть научные результаты, которые удастся получать в этой, казалось бы, сугубо практической области физики и техники, оказывают существенное влияние на формирование целостного мировоззрения в рамках новой междисциплинарной «нелинейной парадигмы». С другой стороны, подходы и методы нелинейной динамики позволяют значительно продвигаться в понимании процессов в лазерах. Здесь особую роль играет язык математики, язык уравнений. В этом смысле пособие оказывается посвящено не столько лазерам, сколько актуальным проблемам теории нелинейных динамических систем на примере некоторого их класса.

1. Предварительные сведения

1.1. Принцип работы лазера

Само слово «лазер» образовано первыми буквами слов английской фразы: «Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation», что можно перевести как «усиление света вынужденным излучением». Но о каком усилении идет речь и что такое вынужденное излучение? Ответ на этот вопрос требует ясного понимания основополагающих фактов квантовой теории излучения. Ее основы заложил еще А. Эйнштейн в двух работах 1916 года «Испускание и поглощение излучения по квантовой теории» и «К квантовой теории излучения». По сути в этих публикациях были развиты идеи, позволившие в 1905 году объяснить явление фотоэффекта как следствие поглощения излучения отдельными порциями – квантами. Именно «за открытие законов фотоэлектрического эффекта» в 1921 году А. Эйнштейн был удостоен Нобелевской премии по физике, а вовсе не за более известные специальную или общую теорию относительности. После теоретических работ Эйнштейна, Планка, Бора и других физиков, а также многочисленных экспериментов стало ясно, что атомы и молекулы вещества способны поглощать и испускать кванты электромагнитного излучения. При этом молекулы могут переходить из одного состояния в другое. Поглощая порцию энергии, молекула переходит на более высокий энергетический уровень, а испуская квант электромагнитного излучения (фотон), возвращается на более низкий. Как раз генерация таких квантов веществом и есть главная задача лазерных систем. Неудивительно, что синонимом слова «лазер», пусть и менее ходовым, является «окг» или «Оптический Квантовый Генератор».

Сама идея практической реализации устройства, которое могло бы усиливать проходящее через него излучение, по-видимому, принадлежит советскому физику В. А. Фабриканту, который сформулировал ее в 1939 году. Однако всерьез заняться разработкой такого устройства он смог лишь в 1946 году и в 1951 году подал заявку на изобретение, которая была удовлетворена с такой формулировкой в свидетельстве [24]: «Способ усиления электромагнитных излучений (ультрафиолетового, видимого, инфракрасного и радиодиапазонов волн), отличающийся тем, что усиливаемое излучение пропускают через среду, в которой с помощью вспомогательного излучения или другим путем создают избыточную по сравнению с равновесной концентрацию атомов, других частиц или их систем на верхних энергетических уровнях, соответствующих возбужденным состояниям». В 1952 году А. М. Прохоров и Н. Г. Басов на Обще-

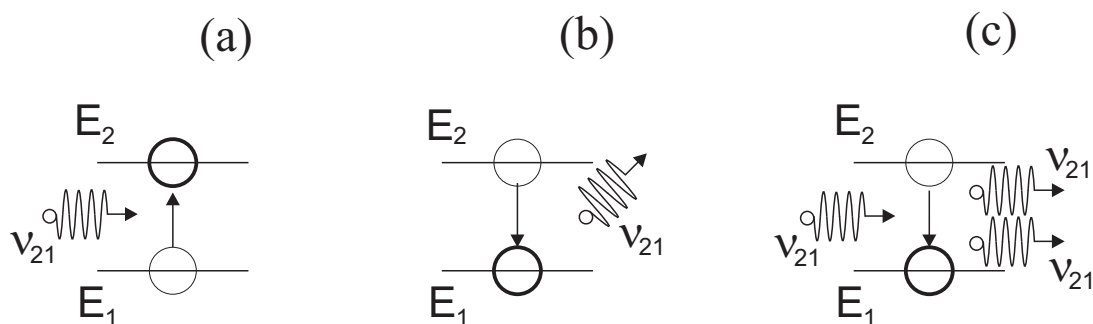


Рис. 1. Схема взаимодействия частиц вещества и носителей электромагнитного поля (фотонов), на которой показаны поглощение (а) кванта света частотой ν_{21} с переходом частицы вещества в возбужденное состояние, спонтанное излучение (b) и вынужденное излучение (с) с возвращением частицы вещества в основное состояние

союзной конференции по радиоспектроскопии сообщили о возможности создания «молекулярного генератора» волн СВЧ-диапазона на основе аммиака. Молекулы NH_3 , имеющие форму тетраэдра, совершают колебания частотой $24 \cdot 10^9$ раз в секунду, что соответствует длине волны 12,5 мм. Соответствующее электромагнитное излучение можно интерпретировать как результат спонтанных переходов молекул аммиака из возбужденного состояния в невозбужденное. В 1949 году американский физик Г. Лайонс использовал такие колебания для высокоточной сверки эталонных хронометров.

Практически одновременно в 1954 году мазеры на основе аммиака были созданы в Колумбийском университете (США) группой Ч. Таунса и в Физическом институте имени П. Н. Лебедева Академии наук СССР группой А. М. Прохорова и Н. Г. Басова. За эти работы все трое были удостоены Нобелевской премии по физике в 1964 году.

Первый лазер был изготовлен в 1960 году на основе синтетического рубина – окиси алюминия Al_2O_3 с примесью ионов хрома Cr . Успеха в борьбе за приоритет в создании особого лазера, излучающего в оптическом диапазоне, добился американский физик Т. Мейман. В том же году группа исследователей из Соединенных Штатов сумела сгенерировать пучок света, пропустив электрический разряд через подготовленную смесь неона и гелия – прообраз современных газовых лазеров. С тех пор в специализированных лабораториях получено большое число разнообразных лазерных систем с различными активными средами, типами накачки, конфигурациями резонаторов и так далее.

Остановимся на физических принципах, положенных в основу работы лазеров любых типов. Рассмотрим вещество с достаточно большим коли-

чеством частиц, которые находятся в возбужденном состоянии с энергией E_2 , превышающей энергию E_1 частицы в нормальном невозбужденном состоянии. Число частиц, находящихся в каждом из состояний, обозначим N_2 и N_1 соответственно. Эти величины называют также населенностью каждого из энергетических уровней, упомянутых выше. Отметим, что, вообще говоря, таких уровней может быть больше двух, однако для простоты ограничимся минимально возможным количеством. В обычных условиях $N_2 \ll N_1$. Если же оказывается, что $N_2 > N_1$, то такое вещество называют активным, а его состояние — инверсным. Переход отдельно взятой частицы из одного состояния в другое происходит при условии поглощения или выделения энергии $E_2 - E_1$. Носителями такой энергии могут являться, например, кванты электромагнитного излучения или фотоны, если речь идет об оптическом диапазоне. Частота ν_{21} такого излучения прямо пропорциональна энергии отдельного кванта, в данном случае $\nu_{21}h = E_2 - E_1$, где h — постоянная Планка. Приведенное соотношение в [27] носит название формулы Бора, а в [22] — условия частот Бора, хотя в [11] утверждается, что она была получена Планком. Возможные способы взаимодействия носителей электромагнитного поля с атомами (молекулами) представлены на рис. (1).

Заметим, что переход частицы активного вещества из возбужденного состояния в невозбужденное может происходить по-разному. В одном случае возвращение к уровню энергии E_1 является самопроизвольным. Испускаемый при этом электромагнитный квант, направление движения которого имеет случайный характер, относят к спонтанному излучению. В другом случае переход из возбужденного состояния с энергией E_2 в невозбужденное с энергией E_1 происходит под действием электромагнитного излучения с частотой ν_{21} . При этом вместо одного первоначального фотона появляются два, причем второй, испускаемый частицей активного вещества, оказывается «близнецом» первого, поскольку имеет такую же энергию, то же направление движения и так далее. Если эта пара фотонов вступит во взаимодействие с парой других частиц активного вещества, то дальше пойдет уже четыре одинаковых фотона. Таким образом происходит лавинообразное нарастание числа квантов света, то есть его усиление. При этом хорошо выдерживается направленность излучения, а также его частота, которая полностью определяется активной средой. Свет с такими свойствами называют когерентным, а процесс его генерации носит вынужденный характер.

Основная трудность, которую приходится преодолеть при создании работающего оптического квантового генератора, состоит в переводе активного вещества в возбужденное состояние и дальнейшем поддержании

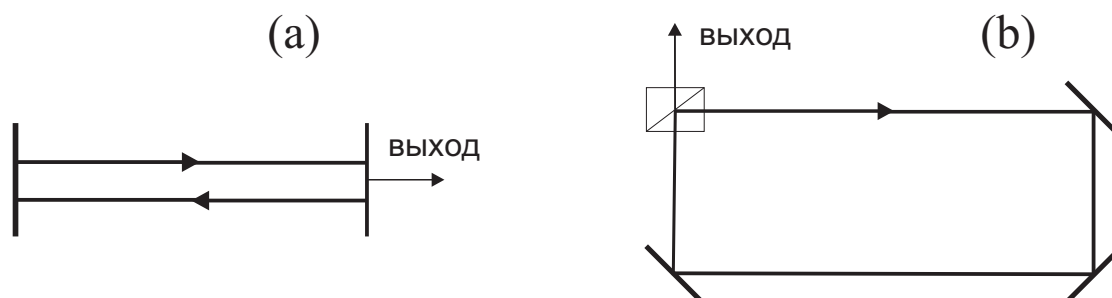


Рис. 2. Схемы наиболее распространенных типов резонаторов: Фабри – Перо (a) и кольцевого (b)

полученной инверсии. Наряду с внешним источником энергии (накачкой) существует естественный внутренний источник в виде лавины фотонов с нужными характеристиками. На практике большая часть таких световых квантов (95 – 98%) остается в некоторой ограниченной (зеркалами) области пространства и используется для поддержания инверсного состояния активной среды. Лишь незначительный процент от общего числа фотонов покидает ее через полупрозрачное зеркало и формирует лазерный луч. Эта область пространства, часть которой заполнена активным веществом, называется (внутренним) резонатором. Два наиболее популярных типа резонатора представлены на рис. (2). Резонатор Фабри – Перо представляет собой два параллельных зеркала, одно из которых не пропускает свет (на практике имеет коэффициент отражения около 99.8%), а второе частично пропускает (коэффициент отражения порядка 97 – 98%). Между зеркалами заключена активная среда, связанная с источником накачки. Такая организация резонатора использовалась в первых оптических квантовых генераторах, что неудивительно в силу ее простоты. В основе более сложного кольцевого резонатора лежит несколько иная геометрия зеркал, но главная идея остается той же самой, равно как и движение фотонов в двух прямо противоположных направлениях в пределах каждого из прямых участков. Отметим, что представленная на рис. (2) справа схема распространения светового луча не является единственно возможной. Вместо прямоугольника можно взять правильный треугольник или многоугольник. Важным преимуществом такой кольцевой конфигурации является возможность получения очень узкого спектра излучения за счет выделения одной из мод [27]. Отметим, что существуют и другие типы резонаторов, некоторые из которых описываются в [27].

Подробнее познакомиться с особенностями взаимодействия активного вещества и излучения можно, например, в [22].

1.2. Простейшие методы анализа некоторых классов динамических систем

В этом разделе представлен краткий обзор известных методов исследования систем дифференциальных уравнений, с использования которых обычно начинается глубокий и детальный анализ математических моделей, основанных на ОДУ или на уравнениях с запаздыванием.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в простейшем случае в отсутствие параметров представима в виде

$$\dot{x} = F(x), \quad (1)$$

где $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ — вектор-функция, действующая из \mathbb{R} в \mathbb{R}^n , $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))^T$ — векторное поле из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

Постоянная векторная величина $x^* \in \mathbb{R}^n$, которая обращает в нуль правую (а также левую как производную от константы) часть (1)

$$F(x^*) = 0, \quad (2)$$

называется состоянием равновесия системы (1).

Изучение малой окрестности постоянного решения (1) основано на представлении

$$x = x^* + u,$$

где u есть малая величина, а также разложении правой части системы (1) в ряд вида

$$F(x) = F(x^* + u) = F(x^*) + Au + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots \quad (3)$$

Здесь постоянная матрица A получается как матрица Якоби векторного поля F в точке x^* :

$$A = \frac{DF}{Dx} \Big|_{x=x^*} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{array} \right) \Big|_{x_k=x_k^*, \quad k=1,2,\dots,n}, \quad (4)$$

функции $F_2(u, u)$ и $F_3(u, u, u)$ линейны по каждому из аргументов, то есть являются билинейной и трилинейной формой соответственно. Так же как и A , они, вообще говоря, зависят от x^* . Отметим, что представленное разложение $F(x)$ обобщает известное разложение в ряд Тейлора скалярной функции f в малой окрестности действительной точки x_0

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{1}{2}f''(x_0)\varepsilon^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\varepsilon^3 + \dots,$$

где ε есть малая вещественная величина, а штрихом обозначена обычная скалярная производная.

Подставляя (3) в (1), учитывая (2) и $\dot{x}=\dot{u}$, получаем, что с точностью до слагаемых более высокого порядка малости по $|u|$ локальная динамика задачи (1) в малой окрестности состояния равновесия x^* определяется линеаризованной системой

$$\dot{u} = A u. \quad (5)$$

Именно, нулевое решение (5) соответствует положению равновесия x^* системы (1). Общее решение линейной задачи (5) получается с помощью эйлеровой подстановки $u(t) \rightarrow \exp(\lambda t)$ так, что

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t},$$

где λ_k и C_k есть собственные значения и собственные векторы матрицы A соответственно. Свойства экспоненты комплексного переменного определяют поведение $u(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, устойчивость состояния равновесия системы (1) определяется собственными значениями λ_k матрицы A . Именно, верна следующая

Теорема 1. Пусть $\forall k=1, \dots, n$ выполняется соотношение $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, тогда состояние равновесия x^* системы (1) является устойчивым. Пусть $\exists k$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, тогда состояние равновесия x^* системы (1) неустойчиво.

В общем случае правая часть системы ОДУ зависит от параметров:

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (6)$$

где x — по-прежнему вектор-функция из \mathbb{R} в \mathbb{R}^n , $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)^T$ — вектор из \mathbb{R}^m , состоящий из параметров задачи. Система (6) имеет фазовое пространство (пространство переменных) размерности n и пространство параметров размерности m . При этом состояния равновесия системы (6), их число и устойчивость, вообще говоря, зависят от параметров задачи:

$$F(x^*, \mu) = 0, \quad x^* = x^*(\mu), \quad A = A(\mu), \quad \lambda_k = \lambda_k(\mu).$$

Зависимость собственных значений матрицы A от параметров может быть довольно сложной, поэтому зачастую оказывается удобнее оценить области устойчивости x^* в пространстве параметров, воспользовавшись

критерием Рауса – Гурвица (см., например, [23] или [9]) или методом D -разбиений. В этом случае вместо вычисления собственных значений матрицы достаточно получить характеристический полином, коэффициенты которого, как правило, зависят от параметров задачи более простым образом.

Критерий Рауса – Гурвица (Raus, Hurwitz) заключается в следующем. Для оценки расположения корней характеристического уравнения

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (7)$$

где, вообще говоря, $a_k = a_k(\mu)$, вводится в рассмотрение матрица Гурвица

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ее диагональными элементами являются величины a_1, a_2, \dots, a_n . По ее столбцам записаны коэффициенты либо только с нечетными, либо только с четными номерами. Если $k > n$ или $k < 0$, то $a_k = 0$. Главные миноры матрицы H имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \det(H),$$

где как вертикальными чертами, так и буквами \det обозначен определитель соответствующей матрицы.

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $a_0 > 0$. В этом случае все корни характеристического уравнения (7) с вещественными коэффициентами удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

Отметим, что необходимым условием устойчивости состояния равновесия системы (6) является положительность всех коэффициентов $a_k > 0$ уравнения (7).

Теорема 2 дает достаточно простой и удобный способ оценки устойчивости состояния равновесия системы ОДУ по коэффициентам характеристического уравнения без явного вычисления его корней.

Заметим, что на практике целесообразнее использовать модификацию критерия Рауса – Гурвица, известную как критерий Льенара – Шипара и описанную в [26]. В этом случае в формулировке теоремы 2 условие $a_0 > 0$ заменяется на $a_k > 0$, где $k=1, \dots, n$, и уменьшается количество неравенств на определители так, что достаточно проверить лишь следующие соотношения:

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, \quad \dots$$

Окончательно получаем, что имеет место

Теорема 3. Пусть $a_k > 0$ при $k=0, \dots, n$. В этом случае все корни характеристического уравнения (7) с вещественными коэффициентами удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, \quad \dots$$

Наряду с теоремами 2 и 3, можно сформулировать еще одну теорему, которая носит название критерий Михайлова [26]. Основная идея заключается в рассмотрении характеристического уравнения при $\lambda = i\omega$. Тогда

$$\operatorname{Re} P_n(i\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 + \dots = 0,$$

$$\operatorname{Im} P_n(i\omega) = (a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 + \dots) \omega = 0.$$

Поскольку $\omega \neq 0$ (иначе $a_n = 0$), то имеем два уравнения на ω^2 . В случае, когда удастся найти $\omega^2 > 0$, удовлетворяющее обоим уравнениям, имеем пару комплексно сопряженных корней точно на мнимой оси. Значения параметров, при которых получаются такие корни, являются особыми в задаче об устойчивости, поскольку разделяют в пространстве параметров области с качественно различной структурой окрестности исследуемого состояния равновесия.

Например, при $n=3$ имеем

$$\operatorname{Re} P_3(i\omega) = -a_1\omega^2 + a_3 = 0,$$

$$\operatorname{Im} P_3(i\omega) = (-a_0\omega^2 + a_2) \omega = 0.$$

Оба соотношения выполнены, если

$$\omega^2 = a_2/a_0 = a_3/a_1.$$

Очевидно, это условие эквивалентно требованию $\Delta_2=0$, которое имеет место на границе областей устойчивости, задаваемых теоремами 1 и 2.

Развивая указанные соображения, можно показать, что справедлива

Теорема 4. *Все корни характеристического уравнения (7) с вещественными коэффициентами удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ тогда и только тогда, когда $a_n a_{n-1} > 0$ и корни многочленов*

$$\begin{aligned} p^*(\psi) &= a_n - a_{n-2}\psi + a_{n-4}\psi^2 + \dots, \\ p_*(\chi) &= a_{n-1} - a_{n-3}\chi + a_{n-5}\chi^2 + \dots \end{aligned}$$

положительны, различны и чередуются, начиная с ψ_1 , то есть

$$0 < \psi_1 < \chi_1 < \psi_2 < \chi_2 < \dots$$

Существует эквивалентная формулировка критерия Михайлова.

Теорема 4*. *Все корни характеристического уравнения (7) с вещественными коэффициентами удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ тогда и только тогда, когда кривая $P_n(i\omega)$ на комплексной плоскости при $0 < \omega < \infty$ не проходит через начало координат и делает вокруг него поворот на $n\pi/2$.*

Однако указанными критериями не всегда удобно пользоваться. Если величина n велика, конечные формулы становятся излишне громоздкими. Кроме того, предложенные критерии неприменимы, если левая часть уравнения (7) не является полиномом — для систем с запаздыванием, например.

Метод D -разбиений лишен указанных недостатков. Идея метода состоит в разбиении пространства параметров на области D_k с различным числом $D(\mu)=k$ корней уравнения (7) в правой комплексной полуплоскости. Точка $\mu_* \in D_k$, если $D(\mu_*)=k$. Границы между указанными областями задаются из условия $\lambda=i\omega$, где ω есть вещественная величина, то есть из условия наличия корня на мнимой оси. Параметрическое уравнение границы между соседними областями D_{k_1} и D_{k_2} из \mathbb{R}^m задается соотношением $P(i\omega)=0$, где $-\infty < \omega < \infty$. Примеры использования метода приведены в [9, 23].

Задача определения области устойчивости состояния равновесия x^* в пространстве параметров сводится, таким образом, к нахождению D_0 . После того как границы построены, остается определить число корней k в правой комплексной полуплоскости для каждой из областей. Поскольку в отдельно взятой области оно не меняется, можно определить его в одной точке при конкретном значении вектора μ .

Аналогичная процедура линеаризации возможна и для систем с запаздыванием [4, 30]

$$\dot{x} = F(x, x(t-h)), \quad (9)$$

у которых правая часть зависит не только от значения неизвестной функции $x=x(t)$ в текущий момент t , но и в некоторый предшествующий момент $t-h$. Для корректной постановки задачи систему вида (9) следует дополнить начальными условиями. Отметим, что значения $x(0)$ в начальной точке недостаточно. Задачу Коши применительно к уравнениям типа (9) впервые ввел в рассмотрение Н. Н. Красовский [19]. Начальные условия здесь выбираются из некоторого класса функций, заданных на отрезке длины запаздывания, например, из класса непрерывных функций $C[-h, 0]$. Поскольку размерность фазового пространства динамической системы полагают равной размерности пространства начальных условий, то системы с запаздыванием оказываются бесконечномерными.

В этом случае линеаризованная система имеет вид

$$\dot{u} = A u + B u(t-h), \quad (10)$$

где

$$A = \left. \frac{DF}{Dx} \right|_{x=x_*}, \quad B = \left. \frac{DF}{Dx(t-h)} \right|_{x=x_*},$$

то есть для построения матрицы B вычисляются частные производные по элементам, содержащим запаздывание.

1.3. О бифуркациях динамических систем

Наряду с системой (1), рассмотрим близкую к ней систему

$$\dot{x} = F(x) + \varphi(x), \quad (11)$$

где $\varphi(x)$ определяется аналогично $F(x)$. Обозначим $\varphi'(x)$ матрицу Якоби векторного поля φ .

По аналогии с [1, 3, 9] введем понятие грубой системы.

Определение 1. Система (1) называется грубой (структурно устойчивой) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall \varphi$, удовлетворяющей условию $\|\varphi(x)\| + \|\varphi'(x)\| < \delta$ при любых x из области Ω , существует гомеоморфизм $\Pi : \Omega \rightarrow \overline{\Omega}$ такой, что $\|\Pi - I\| \leq \Delta(\delta)$, $\Delta(0) = 0$, переводящий фазовые траектории системы (1), целиком принадлежащие Ω , в фазовые траектории системы (11), целиком принадлежащие $\overline{\Omega}$, того же типа.

Здесь под $\overline{\Omega}$ понимается замыкание множества Ω . Фраза «того же типа» означает, что особые траектории, например, состояния равновесия или предельные циклы отображаются снова в состояния равновесия или предельные циклы, причем свойство устойчивости (неустойчивости) при этом не меняется.

Данное определение позволяет говорить о том, что малое изменение грубой системы не приводит к качественному изменению ее поведения. Именно такие свойства и наблюдаются, главным образом, в различных физических процессах.

Системы, которые не удовлетворяют определению 1, называют негрубыми или структурно неустойчивыми.

Если Ω есть малая окрестность состояния равновесия системы (1), не содержащая других особых траекторий, то грубость системы в области Ω определяется грубостью состояния равновесия x_* . В случае $n=2$ [1, 3, 9] грубыми состояниями равновесия являются седло, фокус, узел. К негрубым относят центр, седло-узел, дискретический узел, для которых характеристические числа линеаризованной системы (5) удовлетворяют одному из условий: $\exists j : \operatorname{Re} \lambda_j = 0$ или $\lambda_1 = \lambda_2$.

В общем случае для систем вида (6) определение грубости оказывается наиболее востребованным в следующем смысле.

Определение 2. Значение параметра $\mu = \mu^*$ называется грубым, если система (6) при $\mu = \mu^*$ является грубой.

В этом случае найдется такое $\delta > 0$, что $\forall \mu \in O(\mu^*, \delta)$ система (6) также будет грубой. Множество грубых систем, таким образом, всюду плотно. Установлено, что при $n=2$ в пространстве параметров множество негрубых значений $\mu = \mu_*$ образует множество меры нуль. В общем случае это может и не выполняться — вопрос остается открытым.

Определение 3. Значение параметра $\mu = \mu_*$ называется бифуркационным, если система (6) при $\mu = \mu_*$ является негрубой.

Иными словами бифуркационным называют негрубое (критическое)

значение параметров системы. Такие значения μ_* образуют границы областей μ^* в пространстве параметров, в которых система структурно устойчива.

Определение 4. *Бифуркацией называется изменение качественной структуры фазового портрета системы (6), связанное с переходом параметра μ через критическое значение μ_* .*

Качественные изменения структуры фазового портрета означают изменение режима, в котором функционирует система. На практике это может оборачиваться далеко идущими последствиями, часть которых образует предмет теории катастроф.

Определение 5. *Коразмерность бифуркации — число k независимых условий негрубости.*

В общем случае $k \leq t$, то есть коразмерность бифуркации не превосходит размерности пространства параметров изучаемой системы. Наибольший интерес с прикладной точки зрения представляют бифуркации коразмерности 1, поскольку для них не требуется много условий, и они являются типичными и повсеместными. Неявно подразумевается, что k условий негрубости можно записать как k уравнений, которые задают в пространстве параметров многообразие размерности $t-k$. При $k=1$ они делят пространство параметров на области, внутри которых исследуемая система является структурно устойчивой.

Определение 6. *Бифуркационная диаграмма — график зависимости некоторой характеристики динамической системы от параметра.*

В качестве «некоторой характеристики» системы может выступать одна из фазовых переменных, полная энергия, амплитуда колебаний периодического решения, старший ляпуновский показатель, размерность аттрактора и другие величины.

Перечислим типичные бифуркации коразмерности 1. Такие бифуркации могут наблюдаться в системах с одним скалярным параметром $t=1$. Условие негрубости, накладываемое на параметр, связано с наличием у состояния равновесия характеристического значения с нулевой вещественной частью или второго единичного по модулю мультипликатора у предельного цикла. Иллюстрации и бифуркационные диаграммы перечисляемых случаев приводятся в цитируемой литературе [1–3, 9, 20].

1. Бифуркация седло-узла (saddle-node). «Из ничего» возникает пара состояний равновесия, одно из которых обязательно неустойчиво.

Простейший пример — скалярное уравнение ($n=1$)

$$\dot{x}=\mu-x^2.$$

2. Обмен устойчивости (transcritical). Два состояния равновесия при критическом значении параметра сливаются в одно и снова разделяются, при этом меняются свойства устойчивости. Примером может служить уравнение ($n=1$)

$$\dot{x}=\mu x-x^2.$$

3. Бифуркация вилка (pitchfork). Устойчивое состояние равновесия теряет устойчивость, отдавая ее паре возникающих состояний равновесия. Классический пример — уравнение ($n=1$)

$$\dot{x}=\mu x-x^3.$$

Отметим, что замена $y=x^2$ позволяет заменить кубическую нелинейность на квадратичную и рассматривать вместо бифуркации вилки бифуркацию типа обмен устойчивости. При этом области $x>0$ и $x<0$ переходят в одну область $y>0$, а $y<0$ соответствуют комплексному расширению фазового пространства вещественной переменной x . Подобные трансформации бифуркаций имеют место и при преобразованиях более сложных систем, например при переходе между моделями Статца – Де Марса и Ланга – Кобаяши, которые рассматриваются далее.

4. Бифуркация Андронова – Хопфа (Poincare – Andronov – Hopf; Hopf). Устойчивое состояние равновесия теряет устойчивость, при этом возникает устойчивый предельный цикл, имеющий при появлении нулевую амплитуду. В скалярном случае при $n=1$ невозможна. В качестве простого примера приведем комплексное уравнение ($n=2$)

$$\dot{z}=(i+\mu)z-z|z|^2.$$

Выполнив полярную замену $z=\rho e^{i\varphi}$, можем свести его к бифуркации типа вилка относительно амплитуды $\rho\geq 0$.

5. Бифуркация седло-узла для предельных циклов происходит аналогично случаю состояний равновесия. Пример — комплексное уравнение ($n=2$)

$$\dot{z}=\mu\frac{z}{|z|}+2z-|z|z.$$

6. Бифуркация рождения предельного цикла из петли сепаратрисы. Происходит через образование негрубой гомоклинической траектории при критическом значении параметра, когда пересекаются устойчивое и неустойчивое многообразия седловой особой точки.
7. Бифуркация рождения предельного цикла из состояния равновесия типа седло-узел. Происходит вместе с обратной бифуркацией седло-узла, когда при исчезновении пары состояний равновесия возникает предельный цикл.
8. Бифуркация рождения предельного цикла из бесконечности. При возникновении цикл имеет бесконечно большую амплитуду. Можно трактовать как бифуркацию Андронова – Хопфа для бесконечно удаленной точки.
9. Бифуркация рождения предельного цикла из уплотнения фазовых траекторий при возмущении консервативной системы. Классический пример — уравнение Ван дер Поля ($n=2$)

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

10. Бифуркация удвоения периода предельного цикла. Хорошо описывается с помощью отображения последования на сечении Пуанкаре. Минимальное значение $n=3$.
11. Бифуркация рождения квазипериодического режима из предельного цикла. Если возможно сведение к уравнению для амплитуды цикла, то в обозначениях этого уравнения получится бифуркация Андронова – Хопфа. Периодические колебания амплитуды будут происходить на второй частоте, а в исходной системе получим двухчастотный режим. Минимальное значение $n=3$.

Проиллюстрируем условие негрубости из определения 5 на примере бифуркации Андронова – Хопфа. При критическом значении параметра $\mu_*=0$ нулевое состояние равновесия имеет пару характеристических чисел на мнимой оси $\lambda_{1,2}=\pm i$. На первый взгляд может показаться, что два собственных значения линеаризованной задачи с нулевой вещественной частью должны давать два условия негрубости. Однако поскольку λ_1 и λ_2 есть комплексно сопряженные величины, то есть $\lambda_1=\sigma+i\omega$ влечет $\lambda_2=\sigma-i\omega$, имеем одно независимое условие негрубости $\sigma=0$.

1.4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром

Известная теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений вида (6) от параметров предполагает гладкий характер зависимости правой части (6) от μ . Долгое время практическая проблематика не требовала от исследователей явного выхода за границы применимости упомянутой теоремы, либо ее модификаций. Однако в XX веке появились новые задачи, для решения которых понадобились несколько иные идеи и подходы. Прежде всего это разрывные колебания, которые характеризуются чередованием участков быстрых и медленных изменений переменных и с математической точки зрения хорошо описываются дифференциальными уравнениями с малыми параметрами при (старших) производных. Наиболее существенные результаты, которые легли в основу общей теории, были получены в работах Н. А. Железцова (ученика А. А. Андропова), Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко, А. Н. Тихонова, А. Б. Васильевой, Л. Флэтто, Н. Левинсона и других видных ученых, которых также по праву можно было бы включить в этот список. В результате возникли новые понятия и термины, такие как сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений, релаксационные (разрывные) колебания, быстрые и медленные переменные, срывы и падения. Все необходимые теоретические основы для математического исследования задач вида (6), то есть ОДУ, из этой области подробно изложены в [21]. Первоначальное знакомство с разрывными колебаниями также возможно на материале, который представлен в [9].

Поскольку под релаксационными колебаниями в разных областях науки понимаются несколько различные явления, внесем некоторую ясность в этот вопрос. С точки зрения физиков [28], «релаксационные колебания (Relaxation oscillations) — затухающие колебания интенсивности излучения и инверсии при установлении режима стационарной генерации в лазерах класса В. Релаксационные колебания образуют систему собственных низкочастотных колебаний лазера, существующую выше порога генерации в дополнение к системе оптических мод». Будем далее называть такие колебания релаксационными колебаниями в узком смысле и использовать для них (и только для них) аббревиатуру РК.

С феноменом РК в лазерах связаны возможности получения интересных эффектов. Одним из них является широко распространенный в колебательных системах параметрический резонанс. Его суть заключается в следующем. При модуляции параметров с частотой, близкой к частоте РК, колебания в системе становятся незатухающими. Адекват-

ной математической моделью такого процесса является система неавтономных дифференциальных уравнений с периодическими решениями. Таким образом, согласно [28], «резонансная модуляция параметров лазера (Resonance modulation of laser parameters) — модуляция параметров с частотой, совпадающей с какой-либо из собственных частот системы, например с частотой релаксационных колебаний, частотой межмодовых биений и т. п.».

В математической литературе под релаксационными или разрывными колебаниями понимают такие периодические решения, которые характеризуются чередованием участков быстрого и медленного изменения фазовых переменных [1, 21]. Поэтому во избежание путаницы для обозначения таких колебаний будем далее пользоваться термином разрывные колебания (или релаксационные колебания в широком смысле), не прибегая в данном случае к сокращениям.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида, которые зависят от малого скалярного параметра ε :

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = F(X, Y), \\ \frac{dY}{ds} = \varepsilon G(X, Y). \end{cases} \quad (12)$$

Здесь векторные поля F и G описывают подсистемы размерностей k и l соответственно. Первую обычно называют быстрой подсистемой, а вторую — медленной. Заменой времени $t = \varepsilon s$ можно получить (12) в следующей форме:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dX}{dt} = F(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} = G(X, Y). \end{cases} \quad (13)$$

Отметим, что системы (12) и (13) оказываются неравноправны при значениях ε из малой окрестности нуля. В этом случае (12) отвечает условиям теоремы о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметра, а (13) — нет. Иными словами, на любом конечном промежутке изменения величины ε система (12) гладко зависит от параметра и носит название регулярно возмущенной, а система (13) таким свойством, вообще говоря, уже не обладает и является сингулярно возмущенной. Возникает законный вопрос: почему рассматриваемые системы уравнений, эквивалентные на первый взгляд, оказываются все-таки неравноправны? Ответ здесь заключается в том, что при критическом значении параметра $\varepsilon = 0$ мы получаем существенно различ-

ные задачи, а связывающая их замена теряет смысл. В самом деле, в этом случае система (12) по-прежнему состоит из ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = F(X, Y), \\ \frac{dY}{ds} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

а векторная переменная Y фактически играет роль векторного параметра, так что задача исследования динамики (14) сводится к анализу задачи меньшей размерности (равной k)

$$\frac{dX}{ds} = F(X, Y_0), \quad (15)$$

где константа Y_0 определяется начальными условиями. В системе (13) некоторые уравнения (определяемые F) перестают быть дифференциальными и становятся алгебраическими

$$\begin{cases} 0 = F(X, Y), \\ \frac{dY}{dt} = G(X, Y). \end{cases} \quad (16)$$

Вообще говоря, соотношение

$$F(X, Y) = 0$$

задает в фазовом пространстве системы (13) многообразие W размерности l , на котором и располагаются все траектории вырожденной системы (16).

Если из уравнения, которое неявно задает такое многообразие, удастся выразить корень $X_0(Y)$, то, обозначая

$$\Phi(Y) = G(X_0(Y), Y),$$

переходим к рассмотрению задачи размерности l вида

$$\frac{dY}{dt} = \Phi(Y). \quad (17)$$

Принимая во внимание очевидное различие систем (15) и (17), естественно поинтересоваться, какая же из них более пригодна для приближенного описания динамики исходной модели при $\varepsilon \neq 0$ в любой из двух равноправных в этом случае формулировок? Отметим, что такая постановка

вопроса не вполне корректна по той причине, что, вообще говоря, для полного описания решения исходной задачи в «нулевом приближении» при достаточно малых ε требуются обе системы (15) и (17). Об этом не следует забывать. Другое дело, что движения в фазовом пространстве систем ОДУ вида (12) или (13) состоят из медленных участков, описываемых векторным полем G , и быстрых, описываемых векторным полем F . Время действия (15) оказывается пренебрежимо мало по сравнению с временем действия (17), так что для анализа исходной задачи более существенными с точки зрения практики оказываются ОДУ, определяемые переменной Y .

Возникает правомерный вопрос: при каких условиях фазовые траектории системы (13) могут быть приближенно заменены траекториями уравнения (17), которые определены на некотором подмножестве W целого фазового пространства размерности $k+l$? Ясно, что, коль скоро речь идет о близости решений (13) и (17), необходимо потребовать, чтобы начиная с некоторого момента времени траектории системы (13) находились бы в малой окрестности многообразия W . Вне этой малой окрестности отношение между $|dY/ds|$ и $|dX/ds|$ имеет порядок ε , поэтому там движение происходит почти параллельно подпространству $Y=0$, что приближенно описывают уравнения (15). Очевидно, что точки, удовлетворяющие $F(X, Y)=0$, являются состояниями равновесия быстрой подсистемы (15). Поэтому принципиальное значение имеет вопрос об их устойчивости. Справедлива следующая

Теорема 5. Пусть $Y_0(t)$ есть решение медленной подсистемы (17). Все собственные значения матрицы

$$A(t) = \frac{DF}{DX} \Big|_{X=X_0(Y_0(t))}$$

удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$. Тогда решения $X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon)$ системы (13)

$$\|X(t, \varepsilon) - X_0(Y_0(t))\| + \|Y(t, \varepsilon) - Y_0(t)\| \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t из отрезка $[\delta, 1]$ при любом фиксированном $\delta > 0$.

Условия теоремы аналогичны так называемым условиям несущественности малого параметра из [9]. В этом случае многообразие W медленной подсистемы размерности l целиком является устойчивым, так что задача исследования динамики (13) сводится к анализу поведения (17) на W . Если обозначить множество «устойчивых участков» многообразия W (или

устойчивых состояний равновесия (15)) через W^s , то это утверждение можно записать как $W=W^s$.

Отметим, что предположения теоремы 5 могут не выполняться. То есть найдется такое решение (17) $Y_0(t)$, что у матрицы A существует собственное значение с положительной вещественной частью. Эта ситуация характеризуется наличием неустойчивых состояний равновесия у быстрой подсистемы (15) или неустойчивых участков на многообразии W . Обозначим множество таких участков (или неустойчивых положений равновесия (15)) через W^u . Точки, которые не входят ни в W^s , ни в W^u (существует $\operatorname{Re} \lambda(A)=0$), в совокупности образуют W^c . Таким образом, полагаем $W=W^s+W^u+W^c$. В малой окрестности рассматриваемого множества W^u происходит следующее. Фазовые траектории системы (13), стартующие оттуда, будут быстро отдаляться от W^u .

Вообще говоря, существование непустых множеств W^s и W^u нередко оборачивается существованием нетривиальных режимов у системы (13). Наиболее простыми режимами такого типа являются релаксационные циклы, которые очень хорошо описываются решениями систем (15), (17), переключения между которыми происходят в точках срывов и падений. Другое семейство подобных режимов образуют траектории-утки, к которым первое время относились с недоверием как к «газетным уткам». Серьезный интерес к ним у математиков пробудился после того, как в 1970-х годах Понтрягиным было обнаружено явление затягивания потери устойчивости. Выяснилось, что в аналитических быстро-медленных системах с двумерной быстрой координатой после прохождения границы устойчивости траектория может находиться длительное время вблизи уже неустойчивой части медленной поверхности (проходя вдоль неё отдаленное от нуля расстояние) и лишь затем претерпевать срыв и переключаться на быстрое движение. Еще более сложная динамика характерна для систем, в которых происходит так называемая катастрофа голубого неба. Различные режимы, возникающие при ее описании, значительно обогащают общую картину поведения уравнений с малыми (большими) параметрами.

Отметим, что плодотворный подход к анализу динамики систем (12) и (13) связан с представлением решения в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра, где первое слагаемое соответствует случаю $\varepsilon=0$. Например, в условиях теоремы 5 естественно считать

$$X(t, \varepsilon) = X_0(Y_0(t)) + \varepsilon X_1(t) + \varepsilon^2 X_2(t) + \dots,$$

$$Y(t, \varepsilon) = Y_0(t) + \varepsilon Y_1(t) + \varepsilon^2 Y_2(t) + \dots$$

Подробное изложение теории, основанной на идее представления решений ОДУ в виде рядов такого типа, представлено в [6].

В заключение отметим, что даже для систем ОДУ остается много вопросов и белых пятен, которые ждут своих исследователей. Также подчеркнем, что подходы, основанные на выделении быстрой и медленной подсистем, каждая из которых может быть рассмотрена как независимая явно от малого параметра, а также использование асимптотических рядов оказываются наиболее действенными и результативными при описании динамики систем вида (13).

1.5. Уравнения с запаздыванием и малыми (большими) параметрами

Идеи, лежащие в основе анализа ОДУ с малым параметром и вкратце упомянутые в предыдущем разделе, оказываются весьма плодотворны для исследования и более сложных динамических систем, таких как уравнения с запаздыванием или с частными производными.

Методы исследования сингулярно возмущенных уравнений и методы регуляризации таких задач, связанные с построением систем бесконечной размерности, играющих роль нормальных форм, были предложены в работах [6, 14–16].

Основное преимущество метода нормальных форм и его многочисленных модификаций заключается в переходе от сингулярно возмущенной системы к регулярным уравнениями, которые малых (больших) параметров уже не содержат. Динамические свойства таких уравнений могут быть надежно установлены, а затем использованы для анализа решений исходной задачи.

Далее вкратце излагается методика, которая позволяет успешно исследовать некоторый класс сингулярно возмущенных уравнений с отклоняющимся аргументом в окрестности периодического решения невозмущенной системы при $\varepsilon=0$. Некоторые результаты, полученные с ее помощью для системы Ланга – Кобаяши, приводятся в конце третьей главы.

Рассмотрим модельное дифференциальное уравнение с запаздыванием вида

$$x' = F(x) + \varepsilon \cdot \Phi(x, x(s - h\varepsilon^{-1})). \quad (18)$$

Общая методика исследования его динамики была разработана в [15]. В соответствии с алгоритмом, представленным в этой статье, в малой окрестности некоторого периодического решения системы «нулевого приближения» $x' = F(x)$ строится нормализующая замена, позволяющая по-

лучить асимптотику решения возмущенной системы (18). Эта замена имеет следующий вид:

$$V(s, \varepsilon) = V_0(\tau) + \varepsilon V_1(t, \tau) + \varepsilon^2 V_2(t, \tau) + \dots, \quad (19)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = 1 + \varepsilon \varphi_1(t) + \varepsilon^2 \varphi_2(t) + \dots \quad (20)$$

Здесь $V_j(t, \tau)$ являются T -периодичными по τ , причем $V_0(s)$ есть периодическое решение системы ОДУ $x' = F(x)$, $\varphi_1(t)$ — скалярная почти периодическая функция, а «медленное» время t связано со временем системы (18) равенством $t = \varepsilon s$.

Отметим, что из (20) при дополнительном условии $\tau(s_0) = 0$ имеем

$$\tau(s) = s - s_0 + \varepsilon \int_{s_0}^s [\varphi_1(\varepsilon r) + \dots] dr$$

и

$$\tau(s - h\varepsilon^{-1}) = \tau(s) - h\varepsilon^{-1} - \int_{t-h}^t [\varphi_1(r) + \dots] dr,$$

и с точностью до слагаемых более высокого порядка малости получаем, что

$$\tau(s - h\varepsilon^{-1}) \approx \tau(s) - y, \quad \text{где} \quad y = h\varepsilon^{-1} + \int_{-h}^0 \varphi_1(t+r) dr. \quad (21)$$

Стандартная линеаризация $x' = F(x)$ на $V_0(s)$ приводит к системе

$$u' = A(s) u, \quad (22)$$

где

$$A(s) = \frac{DF}{Dx}(V_0(s))$$

есть $2\pi/\omega$ -периодическая матрица. Обозначим через $H_j(s)$ линейно независимые периодические решения сопряженной к (22) системы

$$w' = -A^*(s) w.$$

Подставляя ряды (19), (20) в (18) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим цепочку уравнений вида

$$\frac{dV_j}{d\tau} = A(\tau)V_j + f_j, \quad j \in N, \quad (23)$$

где через f_j обозначена неоднородность дифференциального уравнения. На первом шаге получим следующие условия разрешимости системы (23) относительно V_1 в классе периодических по τ функций:

$$\langle f_1, H_j \rangle = 0, \quad (24)$$

где угловыми скобками $\langle \rangle$ обозначено скалярное произведение

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (X(\tau), Y(\tau)) d\tau.$$

Используя (24), придем к уравнениям, которые играют роль нормальной формы в задаче о локальной динамике уравнения (18) в некоторой окрестности решения $V_0(s)$ системы «нулевого приближения» $x' = F(x)$. Отыскав решение V_1 системы (23) в указанном классе функций, можно, действуя аналогичным образом, последовательно найти любое число элементов рядов (19), (20).

Обоснование используемого алгоритма нахождения периодического решения векторного уравнения (18) в виде ряда (19) при условии (20) стандартно для задач, связанных с построением асимптотических рядов по малым параметрам, и приведено, например, в [15].

Из совокупности всевозможных значений ε , согласно теореме, сформулированной в [15], выберем последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, определяемую фиксированным значением величины

$$(h/\varepsilon) \bmod T.$$

Далее для простоты будем обозначать через ε элемент последовательности $\{\varepsilon_n\}$ с достаточно большим номером n .

Обозначим частичные суммы рядов (19), (20) как

$$\begin{aligned} x_k(\tau_k, \varepsilon) &= V_0(\tau_k) + \varepsilon V_1(t, \tau_k) + \dots + \varepsilon^k V_k(t, \tau_k), \\ \tau_k &= \tau_k(s, \varepsilon) = [1 + \varepsilon \varphi_1(t) + \dots + \varepsilon^k \varphi_k(t)]s. \end{aligned}$$

Периодическая (по τ_k) функция $x_k(\tau_k, \varepsilon)$ есть асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{k+1})$ решение системы (18). Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} x_k(\tau_k, \varepsilon) - F(x_k(\tau_k, \varepsilon)) - \varepsilon \Phi(x_k(\tau_k, \varepsilon), x_k(\tau_k(s - h\varepsilon^{-1}), \varepsilon)) &= \\ &= \varepsilon^{k+1} g_k(\tau_k, \varepsilon) \end{aligned} \quad (25)$$

Используя уравнения (18), (25), соотношения

$$x = x_k + \varepsilon^{k+1}\nu \quad \text{и} \quad \tau = \tau_k + \varepsilon^{k+1}\sigma_k s$$

получим, что

$$\frac{d\nu}{d\tau} - \frac{DF}{Dx}(V_0(\tau))\nu = f(\tau, \varepsilon, \sigma_k), \quad (26)$$

где функция f гладкая по всем аргументам и периодическая по τ . Ее явный вид приведен в [15]. Введем следующее обозначение для правой части (26):

$$L\nu = \frac{d\nu}{d\tau} - \frac{DF}{Dx}(V_0(\tau))\nu = \frac{d\nu}{d\tau} - A(\tau)\nu$$

Таким образом, линейный оператор L задает линейную неоднородную систему (26), вопрос о разрешимости которой в классе T -периодических функций определяется из равенства

$$\langle f, H_j \rangle = 0,$$

где $H_j(\tau)$ по-прежнему линейно независимые периодические решения сопряженной к (22) системы.

Единственности решения задачи (26) можно добиться введением дополнительных условий:

$$\langle \nu, H_j \rangle = 0.$$

При выполнении данных условий ортогональности линейный оператор L , переводящий непрерывно дифференцируемые вектор-функции в непрерывные, обратим. В силу его непрерывности и ограниченности функции f выполняется следующее соотношение

$$\| L^{-1}f(\tau, \varepsilon, \sigma_k) \|_{C^1} \leq N \| f(\tau, \varepsilon, \sigma_k) \|_C,$$

где положительная константа N не зависит от выбора функции f .

Доказательство существования периодического решения модельной задачи (18) вида (19) сводится к проверке условий применимости принципа сжимающих отображений для системы интегральных уравнений, которые записываются в форме

$$\nu = L^{-1}f(\tau, \varepsilon, \sigma_k).$$

Более полное представление о методах исследования уравнений с отклоняющимся аргументом можно получить, ознакомившись с [13] и приведенной там литературой.

2. Базовые модели лазерной динамики

2.1. Система Максвелла – Блоха

Лазерное излучение представляет собой колебания электромагнитного поля, которые описываются классическими электродинамическими уравнениями Максвелла. При некоторых естественных предположениях непосредственно из них можно получить систему [25, 28]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E + 4\pi P), \\ P = N_S \langle Sp(d\rho) \rangle, \\ \frac{d\rho}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \rho] + R. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь E — вектор электрического поля, P — вектор поляризации вещества, ρ — матрица плотности (статистический оператор), N_S — полное число молекул в единице объема, произведение $N_S \rho$ — объемная плотность статистического оператора, $\langle Sp(d\rho) \rangle$ — среднее значение по такому объему, H — гамильтониан, $[]$ — скобки Пуассона. Как обычно, c — скорость света в вакууме, σ — проводимость, отражающая наличие объемных потерь в среде, R — энергетический коэффициент отражения зеркала.

Самосогласованная система уравнений (27), описывающая основополагающие принципы работы произвольного оптического квантового генератора, носит название системы Максвелла – Блоха и является одной из наиболее общих и важных моделей лазерной физики. Поскольку уравнения состояния вещества носят квантовый характер, а уравнения для электромагнитного поля — классический, то модель Максвелла – Блоха нередко называют квазиклассической или полуклассической. Подобный полуклассический подход оказывается наиболее удачным и продуктивным для описания большинства лазеров. Исключение составляют микрорезонаторные лазеры, характер излучения которых хорошо отражают квантовые уравнения.

Непосредственное исследование модели (27) специалистам по лазерным системам не представлялось обозримой и перспективной задачей ввиду ее значительной общности и очевидной математической сложности. Устоявшийся подход к теоретическому анализу динамики процессов в лазере предполагает упрощение модели (27) тем или иным способом в зависимости от существенных особенностей активной среды, индуцированного ею электромагнитного поля, геометрии резонатора, способа на-

качки и т. п. Читателя, интересующегося подробностями, отошлем к [97], где изложен подобный переход в простейшем случае двухуровневой среды с кольцевым резонатором, и к [28], где описаны принципы построения лазерных моделей в более общих ситуациях трех-, четырехуровневой среды, а также для многомодовых лазеров. Сведения о физических основах процессов в оптических квантовых генераторах можно посмотреть в [5, 11, 22, 24, 27].

В простейшем, но, пожалуй, и важнейшем случае, характерном для многих типов лазеров, предполагается, что активная среда состоит из двухуровневых атомов или диполей, а комплексные амплитуды вектор-функций E и P медленно зависят от пространственных и временных переменных [28]. То есть вещество активной среды распределено практически однородно и такая ситуация почти не меняется с течением времени. В этом случае $\text{grad div} E$ и $\frac{\partial E}{\partial t}$ есть малые величины, которыми можно пренебречь. Воспользовавшись равенством

$$\text{rot rot} E = \text{grad div} E - \nabla^2 E,$$

из первого уравнения системы (27) можно получить следующее волновое уравнение в частных производных [27, 97]:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{n_0}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (28)$$

Из соображений простоты в данной формулировке оставлена лишь одна пространственная переменная z . Здесь n_0 — показатель преломления в основной среде в предположении, что она состоит из двухуровневых атомов, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

Система (27), в которой первое уравнение может быть преобразовано к виду (28), далее допускает последовательность из двух стандартных упрощающих аппроксимаций [27, 97]. В результате удастся редуцировать достаточно сложную исходную систему (27) к двухуровневой модели одномодового лазера с некогерентной накачкой. Ее наиболее простой формулировкой является система уравнений Лоренца – Хакена.

Первая аппроксимация основана на следующем представлении величин E и P :

$$E(z, t) = \frac{1}{2} A(z, t) e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

$$P(z, t) = \frac{1}{2} B(z, t) e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

Здесь «с.с.» является сокращением от complex conjugate, что означает комплексно сопряженные слагаемые, A и B — медленно меняющиеся амплитуды (по сравнению с фазой).

Частные производные первого порядка имеют следующий вид:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial z} e^{i\beta(z-ct)} + \frac{1}{2} i\beta A e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

и

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial t} e^{i\beta(z-ct)} - \frac{1}{2} ic\beta A e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

Частные производные второго порядка, возникающие в уравнении (28), определяются соотношениями

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} e^{i\beta(z-ct)} + i\beta \frac{\partial A}{\partial z} e^{i\beta(z-ct)} - \frac{1}{2} \beta^2 A e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} e^{i\beta(z-ct)} - ic\beta \frac{\partial A}{\partial t} e^{i\beta(z-ct)} - \frac{1}{2} c^2 \beta^2 A e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = i\beta \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right) e^{i\beta(z-ct)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - ic\beta \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{1}{2} c^2 \beta^2 B \right] e^{i\beta(z-ct)} + c.c.$$

Непосредственная подстановка полученных соотношений в уравнение (28) для электрического поля позволяет получить первое уравнение системы (27) в новом виде. Оставшиеся два уравнения этой системы преобразуются из квантово-механических свойств вещества активной среды. Собственно, суть второй из упомянутых аппроксимаций сводится к подсчету соотношения между числом возбужденных и невозбужденных атомов. Более подробно этот вопрос изложен в [27, 28, 97].

В результате получаем, что уравнения Максвелла – Блоха для двухуровневой среды с кольцевым резонатором можно записать в форме [97]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i\beta}{\varepsilon_0} B - \frac{A}{2T_{ph}c}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{B}{T_2} - i(\omega_A - \omega_0)B - \frac{i\mu^2}{2\hbar} AW, \\ \frac{dW}{dt} = \frac{W_0 - W}{T_1} + \frac{1}{i\hbar} (AB^* - A^*B). \end{array} \right. \quad (29)$$

Здесь A и B — комплексные амплитуды напряженности электрического поля и поляризации вещества (активной среды) соответственно, W —

плотность инверсии населенностей (усредненная величина), T_1 — время распада носителей (среднее время жизни возбужденных активных центров), T_2 — время дефазировки диполя, T_{ph} — время жизни фотона, μ — норма оператора, связанного с оператором Гамильтона, W_0 — уровень инверсии в отсутствие оптического поля. Символом «*» здесь обозначены комплексно сопряженные величины. Появление так называемого релаксационного слагаемого с величиной T_{ph} в знаменателе обусловлено тем фактом, что не все фотоны успевают за отведенное им время вступить во взаимодействие с элементами активной среды, а некоторые и вовсе покидают резонатор. Таким образом, учитываются неизбежные потери энергии при работе лазера.

Отметим, что система (29) не является системой ОДУ, поскольку в ней присутствует уравнение в частных производных, однако она, безусловно, проще, чем исходная модельная задача (27).

Выполняя нормировку

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 c}{2}} A, \quad \hat{B} = \frac{\beta_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 c}{2}} B, \quad g = \frac{\mu^2 \omega_0 T_2}{2 \varepsilon_0 \hbar c} W,$$

получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{A}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = \frac{i}{2} \hat{B} - \frac{\hat{A}}{2 T_{ph} c}, \\ T_2 \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = -(1 - i\delta) \hat{B} - i \hat{A} g, \\ T_1 \frac{dg}{dt} = g_0 - g + \frac{\text{Im}(\hat{A}^* \hat{B})}{I_s}. \end{cases}$$

Здесь $\delta = (\omega_0 - \omega_A) T_2$ — расстройка, $I_s = \hbar c \varepsilon_0 / (2 \mu^2 T_1 T_2)$ — интенсивность насыщения (saturation intensity).

Введем в рассмотрение \bar{A} и \bar{B} — средние значения \hat{A} и \hat{B} по пространственной переменной z соответственно. Поскольку усредненная по z величина от этой переменной уже не зависит, то считается, что $\partial \bar{A} / \partial z = 0$. Тем самым имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = \frac{ic}{2} \bar{B} - \frac{\bar{A}}{2 T_{ph}}, \\ T_2 \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -(1 - i\delta) \bar{B} - i \bar{A} g, \\ T_1 \frac{dg}{dt} = g_0 - g + \frac{\text{Im}(\bar{A}^* \bar{B})}{I_s}. \end{cases} \quad (30)$$

Выполняя обозначение параметров

$$\sigma = \frac{T_2}{2T_{ph}}, \quad b = \frac{T_2}{T_1}, \quad r = g_0 c T_{ph}, \quad \delta = (\omega_0 - \omega_A) T_2,$$

а также перенормировку времени $t/T_2 \rightarrow t$ и переменных

$$x = \sqrt{\frac{b}{I_s}} \bar{A}, \quad y = i c T_{ph} \sqrt{\frac{b}{I_s}} \bar{B}, \quad z = c T_{ph} (g_0 - g),$$

получаем нормированную систему уравнений, которая носит название модели Лоренца – Хакена.

2.2. Модель Лоренца – Хакена

Система Лоренца – Хакена (или комплексная модель Лоренца [99]) — одна из самых простых, но в то же время самых значимых и универсальных моделей лазерной динамики. Наряду с моделью Максвелла – Блоха, она является «квинтэссенцией» лазерной физики, отражающей самую суть процессов, происходящих в типичном оптическом квантовом генераторе. Простота формулировки — задача сводится к изучению системы ОДУ — сделала ее объектом многочисленных исследований. Уравнения Лоренца – Хакена, кроме того, лежат в основе целой иерархии моделей, описывающих динамику самых разнообразных лазерных устройств. Модель Лоренца – Хакена задается следующей нормированной системой уравнений [27, 46, 97]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y), \\ \frac{dy}{dt} = -(1-i\delta)y + (r-z)x, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + Re(xy). \end{cases} \quad (31)$$

Здесь x и y — нормированные комплексные амплитуды электрического поля волны и поляризации активной среды соответственно, z — инверсия населенностей. Параметры σ и b есть отношения скоростей релаксации, r — параметр накачки, δ — параметр расстройки.

Выполним следующие замены переменных:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{b} \xi \exp(i\varphi), \\ y &= \sqrt{b} \eta \exp(i\theta), \\ z &= r - n. \end{aligned}$$

В этом случае производные определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sqrt{b} [\dot{\xi} + i\dot{\varphi}\xi] \exp(i\varphi), \\ \dot{y} &= \sqrt{b} [\dot{\eta} + i\dot{\theta}\eta] \exp(i\theta), \\ \dot{z} &= -\dot{n}. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (31) и выполняя несложные преобразования, получим систему из пяти вещественных уравнений вида

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \sigma(\eta \cos(\theta - \varphi) - \xi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \sigma \frac{\eta}{\xi} \sin(\theta - \varphi), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\eta + n\xi \cos(\theta - \varphi), \\ \frac{d\theta}{dt} &= \delta\eta - n \frac{\xi}{\eta} \sin(\theta - \varphi), \\ \frac{dn}{dt} &= b[r - n - \xi\eta \cos(\theta - \varphi)]. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Заметим, что переменные φ и θ входят в правые части уравнений системы (32) лишь как разности в аргументах тригонометрических функций. Это позволяет ввести в рассмотрение новую переменную для обозначения разности фаз

$$\Phi = \theta - \varphi$$

и уменьшить число уравнений в системе (32) так, что

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \sigma(\eta \cos \Phi - \xi), \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\eta + n\xi \cos \Phi, \\ \frac{dn}{dt} &= b[r - n - \xi\eta \cos \Phi], \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \delta - n \frac{\xi}{\eta} \sin \Phi - \sigma \frac{\eta}{\xi} \sin \Phi. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

Заметим, что любые два преобразования из следующих трех

$$\xi \rightarrow -\xi, \quad \eta \rightarrow -\eta, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \pi$$

не изменяют вид уравнений (33).

Далее среди свойств системы (33) отметим следующее. Обозначим

$$v = \xi\eta \sin \Phi,$$

тогда

$$\dot{v} = \dot{\xi}\eta \sin \Phi + \xi\dot{\eta} \sin \Phi + \xi\eta\dot{\Phi} \cos \Phi.$$

Заменяя далее производные на соответствующие им выражения в системе (33), получим, что

$$\begin{aligned} \dot{v} = & \sigma(\eta \cos \Phi - \xi)\eta \sin \Phi + \xi[-\eta + n\xi \cos \Phi] \sin \Phi + \\ & + \xi\eta \left[\delta - n\frac{\xi}{\eta} \sin \Phi - \sigma\frac{\eta}{\xi} \sin \Phi \right] \cos \Phi. \end{aligned}$$

Собирая подобные слагаемые, преобразуем это соотношение к виду

$$\dot{v} = -(1 + \sigma)\xi\eta \sin \Phi + \delta\xi\eta \cos \Phi.$$

Заметим, что в отсутствие расстройки при $\delta=0$

$$\dot{v} = -(1 + \sigma)v.$$

Очевидно, при $\sigma > -1$ функция $v(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. В этом случае при больших t по крайней мере один из трех сомножителей $\xi, \eta, \sin \Phi$ стремится к нулю. Наиболее интересна ситуация, когда $\sin \Phi = 0$, а другие сомножители могут не обращаться в нуль. Ясно, что либо $\Phi \rightarrow 0$, либо $\Phi \rightarrow \pi$ с точностью до слагаемых, кратных 2π . В первом случае система (33) непосредственно сводится к системе

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \sigma(\eta - \xi), \\ \frac{d\eta}{dt} = -\eta + n\xi, \\ \frac{dn}{dt} = b[r - n - \xi\eta]. \end{cases} \quad (34)$$

Во втором случае, когда $\cos \Phi = -1$, замена ξ на $-\xi$ позволяет вновь получить систему вида (34). Таким образом, при $\delta=0$ модель Лоренца – Хакена (31) сводится к системе трех вещественных ОДУ, которая после замены

$$\xi \rightarrow x, \quad \eta \rightarrow y, \quad n \rightarrow r - z$$

ничем по форме не отличается от исходной задачи. Полученный частный случай системы (31) есть не что иное, как широко известная классическая система Лоренца [65].

2.3 Классическая модель Лоренца и ее свойства

Выполняя преобразования, приведенные в конце предыдущего пункта, получим систему (34) в ее наиболее распространенной форме

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y), \\ \frac{dy}{dt} = -y + (r-z)x, \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \end{cases} \quad (35)$$

Таким образом, если бы математическую модель, описываемую системой (35), не исследовал Эдвард Нортон Лоренц в 1963 году, то вскоре это мог бы сделать кто-то другой, исходя из потребностей лазерной физики. Сравнение динамики моделей (31) и (35) выполнено, например, в работе [41], где они названы вещественными и комплексными уравнениями Лоренца. Подробно вопрос о соответствии между переменными и параметрами систем (31) и (35) рассмотрен в [27].

Укажем ряд свойств системы уравнений (35). Ее простейшими решениями являются состояния равновесия

$$x = y = z = 0$$

и

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z = r - 1.$$

Условие существования ненулевых положений равновесия задается неравенством $r > 1$.

Матрица Якоби от правой части системы (35) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

На нулевом решении получаем следующую постоянную матрицу:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + \sigma(1-r)] = 0.$$

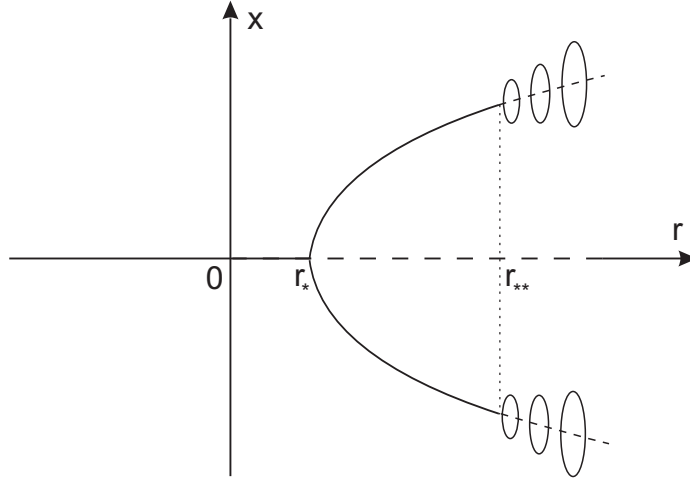


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для системы Лоренца, на которой показаны границы областей устойчивости состояний равновесия. При критических значениях параметров r_* и r_{**} происходят бифуркации типа вилка и Андронова – Хопфа соответственно

Критическое значение в задаче об устойчивости нулевого решения $r_*=1$ легко определяется при условии положительности параметров b и σ . Если r меньше этой величины, то реализуется случай устойчивости, иначе — случай неустойчивости.

Утверждение о локальной устойчивости нулевого положения равновесия при $r < 1$ можно усилить. Именно, в указанных границах значений параметров нулевое решение системы (35) глобально устойчиво, то есть является единственным аттрактором.

Это утверждение может быть обосновано методом функций Ляпунова [12] или вторым методом Ляпунова [9]. Рассмотрим функцию

$$L(x, y, z) = x^2/\sigma + y^2 + z^2,$$

которая является положительно определенной в любой ограниченной подобласти фазового пространства системы (35). Ее производная в силу системы при $r < 1$ отрицательно определена

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{2x}{\sigma} \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} + 2z \frac{dz}{dt} = 2x(y-x) + 2y(rx-y-xz) + 2z(xy-bz) = \\ &= 2[(r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2] = -2 \left(x - \frac{r+1}{2} y \right)^2 - 2 \left(1 - \left(\frac{r+1}{2} \right)^2 \right) y^2 - 2bz^2 \end{aligned}$$

Это означает, что фазовые траектории системы (35) пересекают любые поверхности уровня функции L , которые являются эллипсоидами, в направлении снаружи внутрь, то есть стремятся к началу координат при любых начальных условиях.

Действуя подобным образом, можно установить свойство диссипативности системы (35), то есть ограниченность ее решений при $t \geq t_0$.

Для ненулевых состояний равновесия имеем

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp \sqrt{b(r-1)} \\ \pm \sqrt{b(r-1)} & \pm \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы не изменятся, если ее k -ю строку умножить на число α^{-1} , а k -й столбец — на α . В данном случае, полагая $k=3$ и $\alpha = \pm \sqrt{b(r-1)}$, получим

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -b(r-1) \\ 1 & 1 & -b \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение каждой из этих двух матриц имеет вид

$$P_3(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 + \sigma + b, \quad a_2 = b(\sigma + r), \quad a_3 = 2b\sigma(r-1).$$

Необходимое условие устойчивости $a_k > 0$ (см [26]) выполнено в области существования ненулевых состояний равновесия $r > 1$. Проверка условия из критерия Лъенара – Шипара

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

сводится к сравнению r и r_{**} , где

$$r_{**} = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} = 1 + \frac{(1 + \sigma)(1 + \sigma + b)}{\sigma - b - 1}.$$

Знак выражения в знаменателе определяет характер неравенства:

$$r > r_{**}, \quad \text{где} \quad r_{**} < 0 \quad \text{при} \quad \sigma < b + 1,$$

$$r < r_{**}, \quad \text{где} \quad r_{**} > 1 \quad \text{при} \quad \sigma > b + 1.$$

Картина бифуркаций, соответствующая второму случаю, представлена на рис. (3). Колебательный характер потери устойчивости нетрудно установить, непосредственно оценивая корни характеристического уравнения вида $\lambda = i\omega$ при $r = r_{**}$. Согласно критерию Михайлова, приведенному в п. 1.2, для случая $n=3$ на границе области устойчивости имеем

$$\omega^2 = a_2/a_0 = a_3/a_1 > 0$$

при $a_k > 0$, то есть пару комплексно сопряженных корней на мнимой оси. Именно такой сценарий потери устойчивости характерен для бифуркации Андронова – Хопфа.

2.4. Простейшие решения и их характеристика в общем случае

Преобразуем систему Лоренца – Хакена, выполнив следующие замены:

$$x = \sqrt{b} f, \quad y = \sqrt{b} p, \quad z = r - n.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = \sigma(p-f), \\ \frac{dp}{dt} = -(1-i\delta)p + nf, \\ \frac{dn}{dt} = b \left[r - n - \frac{1}{2}(f^*p + fp^*) \right]. \end{cases} \quad (36)$$

Теперь перейдем к системе из пяти вещественных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} m &= |f|^2 = \xi^2, & q &= |p|^2 = \eta^2, \\ u &= \frac{1}{2}(f^*p + fp^*) = \operatorname{Re}(f^*p) = \xi\eta \cos \Phi, \\ v &= \frac{i}{2}(fp^* - f^*p) = \operatorname{Im}(f^*p) = \xi\eta \sin \Phi. \end{aligned}$$

Соответствующие производные в этом случае определяются как

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \frac{d(\xi^2)}{dt} = 2\xi \frac{d\xi}{dt} = 2\xi\sigma(\eta \cos \Phi - \xi) = 2\sigma(u - m), \\ \frac{dn}{dt} &= b \left[r - n - \frac{1}{2}(f^*p + fp^*) \right] = b[r - n - u], \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{d(\eta^2)}{dt} = 2\eta \frac{d\eta}{dt} = 2\eta(n\xi \cos \Phi - \eta) = 2(nu - q), \\ \frac{du}{dt} &= \frac{d(\xi\eta \cos \Phi)}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\eta \cos \Phi + \frac{d\eta}{dt}\xi \cos \Phi - \frac{d\Phi}{dt}\xi\eta \sin \Phi = \\ &= \sigma q + mn - (1+\sigma)u + \delta v, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{d(\xi\eta \sin \Phi)}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\eta \sin \Phi + \frac{d\eta}{dt}\xi \sin \Phi + \frac{d\Phi}{dt}\xi\eta \cos \Phi = \\ &= -(1+\sigma)v - \delta u. \end{aligned}$$

Окончательно получаем систему уравнений Лоренца – Хакена в форме

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = 2\sigma(u - m), \\ \frac{dn}{dt} = b[r - n - u], \\ \frac{dq}{dt} = 2(nu - q), \\ \frac{du}{dt} = -(1+\sigma)u + \delta v + \sigma q + mn, \\ \frac{dv}{dt} = -(1+\sigma)v - \delta u. \end{cases} \quad (37)$$

Матрица Якоби от правой части этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2\sigma & 0 & 0 & 2\sigma & 0 \\ 0 & -b & 0 & -b & 0 \\ 0 & 2u & -2 & 2n & 0 \\ n & m & \sigma & -(1+\sigma) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & -(1+\sigma) \end{pmatrix}.$$

Анализ устойчивости нулевого решения сводится к анализу свойств матрицы с постоянными коэффициентами

$$\begin{pmatrix} -2\sigma & 0 & 0 & 2\sigma & 0 \\ 0 & -b & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2r & 0 \\ r & 0 & \sigma & -(1+\sigma) & \delta \\ 0 & 0 & 0 & -\delta & -(1+\sigma) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение можно переписать в виде

$$(\lambda+b)(\Lambda^2 + [\delta^2 - (1-\sigma)^2 - 4r\sigma]\Lambda - \delta^2(1-\sigma)^2) = 0,$$

где

$$\Lambda = (1+\sigma+\lambda)^2.$$

Для этого достаточно воспользоваться следующими простыми тождествами:

$$\begin{aligned} (2\sigma+\lambda) + (2+\lambda) &= 2(1+\sigma+\lambda), \\ (2\sigma+\lambda)(2+\lambda) &= (1+\sigma+\lambda)^2 - (1-\sigma)^2. \end{aligned}$$

Поскольку корень $\lambda=-b$ на устойчивость не влияет, рассмотрим следующее уравнение 4-го порядка:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 4(1+\sigma), \\ a_2 &= 5(1+\sigma)^2 + \delta^2 - 4\sigma(r-1), \\ a_3 &= 2(1+\sigma)[\delta^2 + (1+\sigma)^2 - 4\sigma(r-1)], \\ a_4 &= 4\sigma[\delta^2 - (1+\sigma)^2(r-1)]. \end{aligned}$$

Последние три соотношения можно получить в указанном виде, если заметить, что

$$(1+\sigma)^2 - (1-\sigma)^2 = 4\sigma.$$

Необходимым условием расположения всех корней характеристического уравнения в левой комплексной полуплоскости является выполнение соотношений вида $a_k > 0$ для всех значений индекса k . В данном случае a_0 и a_1 очевидно положительны. Условие $a_4 > 0$ справедливо, если

$$r < r_* = 1 + \frac{\delta^2}{(1+\sigma)^2}.$$

Это условие оказывается наиболее жестким, поскольку оно автоматически влечет выполнение неравенств

$$a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0,$$

которых оказывается достаточно для использования критерия Ляпунова – Шипара.

Анализ устойчивости простейшего ненулевого решения удобнее выполнять для системы (33). Она имеет меньшую размерность и коэффициенты характеристического уравнения в этом случае записываются существенно компактнее. Состояния равновесия системы (33) определяются из алгебраической системы

$$\begin{cases} \xi = \eta \cos \Phi, \\ \eta = n \xi \cos \Phi, \\ r - n = \xi \eta \cos \Phi, \\ \delta = \left[n \frac{\xi}{\eta} + \sigma \frac{\eta}{\xi} \right] \sin \Phi. \end{cases} \quad (38)$$

В результате несложных преобразований имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^2 = r-n, \\ \eta^2 = n(r-n), \\ \cos^2 \Phi = 1/n, \\ \tan \Phi = \frac{\delta}{1+\sigma}, \\ n = 1 + \left(\frac{\delta}{1+\sigma} \right)^2. \end{array} \right. \quad (39)$$

С учетом симметричности системы (33) относительно любой пары из тройки замен

$$\xi \rightarrow -\xi, \quad \eta \rightarrow -\eta, \quad \Phi \rightarrow \Phi + \pi$$

достаточно рассмотреть

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{r-n}, \\ \eta = \sqrt{n(r-n)}, \\ \cos \Phi = 1/\sqrt{n}, \\ \sin \Phi = \sqrt{(n-1)/n}, \end{array} \right. \quad (40)$$

где

$$n = r_* = 1 + \left(\frac{\delta}{1+\sigma} \right)^2.$$

Условие существования такого решения задается неравенством $r > n$.

Матрица Якоби от правой части системы (33) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \cos \Phi & 0 & -\sigma \eta \sin \Phi \\ n \cos \Phi & -1 & \xi \cos \Phi & -n \xi \sin \Phi \\ -b \eta \cos \Phi & -b \xi \cos \Phi & -b & b \xi \eta \sin \Phi \\ \left[\frac{\sigma \eta}{\xi^2} - \frac{n}{\eta} \right] \sin \Phi & \left[\frac{n \xi}{\eta^2} - \frac{\sigma}{\xi} \right] \sin \Phi & -\frac{\xi}{\eta} \sin \Phi & -\left[\frac{\sigma \eta}{\xi} + \frac{n \xi}{\eta} \right] \cos \Phi \end{pmatrix}.$$

На рассматриваемом состоянии равновесия получим

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma/\sqrt{n} & 0 & -\sigma \sqrt{(r-n)(n-1)} \\ \sqrt{n} & -1 & \sqrt{\frac{r-n}{n}} & -\sqrt{n(r-n)(n-1)} \\ -b\sqrt{r-n} & -b\sqrt{\frac{r-n}{n}} & -b & b(r-n)\sqrt{n-1} \\ (\sigma-1)\sqrt{\frac{n-1}{r-n}} & (1-\sigma)\sqrt{\frac{n-1}{n(r-n)}} & -\frac{\sqrt{n-1}}{n} & -(\sigma+1) \end{pmatrix}.$$

Задачу на собственные значения можно упростить, выполнив простые преобразования, описанные в предыдущем пункте:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 & \sigma(1-n) \\ 1 & -1 & -b(r-n)/n & 1-n \\ 1 & 1 & -b & 1-n \\ \sigma-1 & 1-\sigma & b(r-n)/n & -(\sigma+1) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение каждой из этих матриц имеет вид

$$P_4(\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= b + 2(1+\sigma), \\ a_2 &= n(\sigma-1)^2 + 4\sigma + b(r-n) + 2b(1+\sigma), \\ a_3 &= b [n(\sigma-1)^2 + (r-n)(1+3\sigma) + 4\sigma], \\ a_4 &= 2b\sigma(r-n)(1+\sigma). \end{aligned}$$

Необходимое условие устойчивости $a_k > 0$ в области существования состояния равновесия $r-n > 0$ автоматически выполнено. Согласно критерию Лъенара – Шипара требуется выполнение неравенства

$$a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0,$$

которое можно переписать в форме

$$P_2(r-n) = \alpha_0(r-n)^2 + \alpha_1(r-n) + \alpha_2 > 0,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -b^2(\sigma-b-1)(1+3\sigma), \\ \alpha_1 &= b^3(3+(n-1)(\sigma-1)^2+8\sigma+5\sigma^2) + b^2((1+\sigma)^2(5+3\sigma)-(n-1)(\sigma-1)^3) + \\ &\quad + 2b(\sigma^2-1)((n-1)(3\sigma^2-2\sigma-1)-(1+\sigma)^2), \\ \alpha_2 &= 2b(1+\sigma)((n-1)(\sigma-1)^2+(1+\sigma)^2)((n-1)(\sigma-1)^2+(1+\sigma+b)^2). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_2 > 0$. Таким образом, при $r=n+\varepsilon$, где ε есть бесконечно малая величина, все условия устойчивости выполняются.

При $r=n$ характеристическое уравнение имеет нулевой корень

$$\lambda(\lambda + b)[\lambda^2 + 2(1+\sigma)\lambda + r(\sigma-1)^2 + 4\sigma] = 0,$$

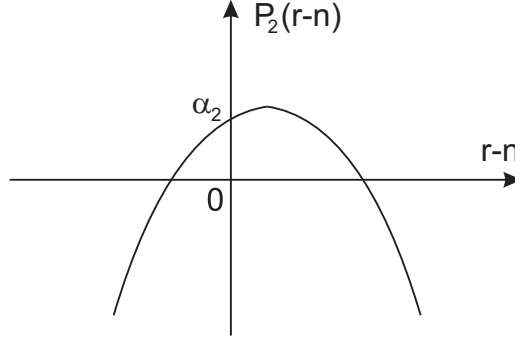


Рис. 4. Неравенство из критерия Лъенара – Шипара относительно $r-n$ при $\sigma > b+1$

который сдвигается влево при увеличении r , что подтверждается оценкой

$$\operatorname{Re} \frac{d\lambda}{dr} \Big|_{r=n} = -\frac{2\sigma(1+\sigma)}{n(\sigma-1)^2 + (r-n)(1+3\sigma) + 4\sigma} < 0.$$

При условии $\sigma > b+1$ очевидно $\alpha_0 < 0$. Поскольку $\alpha_2 > 0$ при $b > 0$ и $n > 1$, то это влечет существование единственного положительного корня (см. рис. (6), второй отрицательный)

$$r - n = \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4(-\alpha_0)\alpha_2}}{2(-\alpha_0)} > 0,$$

то есть

$$r_{**} = r_* + \frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4(-\alpha_0)\alpha_2}}{2(-\alpha_0)} > r_*.$$

Таким образом, можно заключить, что в случае $\sigma > b+1$ ненулевая особая точка на промежутке $r_* < r < r_{**}$ будет устойчивым решением, как и в случае классической системы Лоренца.

Согласно [97], аналогичные результаты можно получить и непосредственно из (31). Простейшим решением уравнений (31) является нулевое состояние равновесия. Его устойчивость определяется корнями следующего полинома:

$$(\lambda+b) \cdot [\lambda^2 + (1+\sigma-i\delta)\lambda - \sigma(r-1+i\delta)].$$

Несложный анализ показывает, что при

$$r_* = 1 + \frac{\delta^2}{(1+\sigma)^2}$$

нулевое решение теряет устойчивость, которую отбирает предельный цикл, который может быть задан аналитически равенствами

$$\begin{aligned}x &= \pm \sqrt{bz} \exp \left(i \left[\frac{\sigma \delta}{1+\sigma} t - \arctg \left(\frac{\delta}{1+\sigma} \right) \right] \right), \\y &= \pm \sqrt{r_* bz} \exp \left(i \left[\frac{\sigma \delta}{1+\sigma} t \right] \right), \\z &= r - r_*.\end{aligned}$$

Физически такому периодическому решению отвечает рабочий режим свободной генерации излучения постоянной амплитуды и частоты, а потеря устойчивости нулевым решением соответствует переходу лазера в рабочее состояние. Бифуркационное значение r_* параметра накачки r принято называть первой пороговой величиной.

Устойчивость выписанного периодического решения в случае $\delta=0$ определяется расположением в комплексной плоскости корней следующего характеристического полинома третьей степени

$$\lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1).$$

Можно показать, что старший корень переходит из левой комплексной полуплоскости в правую при $r=r_{**}$, где

$$r_{**} = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} = 1 + \frac{(1+\sigma)(1+\sigma+b)}{\sigma-b-1}$$

называется второй пороговой величиной. Согласно [28], «второй порог лазера (Second laser threshold) — бифуркационное значение управляющего параметра, соответствующее порогу неустойчивости стационарной генерации». В случае превышения параметром накачки этой величины в модели Лоренца – Хакена устанавливаются более сложные динамические состояния (в том числе хаотические).

2.5. Сценарии перехода к хаосу в системе Лоренца – Хакена

В моделях оптических квантовых генераторов вообще и в системе уравнений Лоренца – Хакена в частности выделяют три основных сценария перехода к хаотической динамике. Дадим краткое описание наиболее значимых особенностей каждого из них.

- Сценарий Фейгенбаума или последовательность удвоений периода (Feigenbaum scenario). Характеризуется переходом к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода при изменении параметра порядка.
- Сценарий Рюэля – Такенса – Ньюхауза (Roelle – Takens scenario). Характеризуется переходом к хаосу через три бифуркации: точка – цикл – 2-тор – странный аттрактор. Образующийся из предельного цикла тор или режим двухчастотных колебаний дал второе название квазипериодического сценария такой цепочке фазовых перестроек.
- Сценарий Помо – Манневиля (Pomeau – Manneville scenario) или перемежаемость (intermittency). Сценарий перехода от периодического к хаотическому решению, характеризующийся той особенностью, что при превышении управляющим параметром некоторого критического значения регулярные колебания в динамической системе через непредсказуемое время прерываются всплесками нерегулярного поведения. Длительность хаотических этапов достаточно регулярна и слабо зависит от управляющего параметра. Средняя длительность регулярных этапов уменьшается по мере роста управляющего параметра над критическим значением и, в конце концов, вообще обращается в нуль.

Перечисленные сценарии признаны универсальными и наблюдаются повсеместно [20, 29] в самых разнообразных нелинейных моделях.

В работе [28] предложено следующее определение наиболее интересного и значимого этапа в сценарии Рюэля – Такенса – Ньюхауза. «Квазипериодичность (Quasiperiodicity) — колебательный процесс, спектр которого содержит компоненты с несоизмеримыми частотами».

Ключевое различие между сценариями Фейгенбаума и Рюэля – Такенса заключается в себе понятие соизмеримость. В данном случае соизмеримость первой и второй частот, которые являются важнейшими характеристиками колебаний.

Еще один важный феномен теории динамических систем, который может проявлять себя в возникновении сложных режимов, носит название кризис аттрактора. Этот бифуркационный эффект, связанный со взаимодействием различных инвариантных подмножеств фазового пространства системы, часто встречается в моделях лазерной физики. Согласно [28], «Кризис аттрактора (Attractor crisis) — явление внезапного расширения, сжатия или исчезновения аттрактора при изменении

управляющего параметра. Причиной кризиса может явиться столкновение (слияние) двух аттракторов или столкновение аттрактора с неустойчивым множеством».

В работе [99] обсуждается гомоклиническая бифуркация коразмерности два в модели Лоренца – Хакена.

2.6. Уравнения Лоренца – Хакена и классификация лазеров

В той или иной степени динамика модели Лоренца – Хакена хорошо согласуется с динамическими свойствами большинства известных типов лазеров [28]. Известно много [28, 97] модификаций данной модели для конкретных типов оптических квантовых генераторов.

На основе соотношений между параметрами системы уравнений Лоренца – Хакена (31) принято выделять четыре класса лазеров.

- Класс *A*: $\sigma \ll b, \sigma \ll 1$. В этом случае система (31) допускает адиабатическое исключение переменных поляризации и инверсии.
- Класс *B*: $b \ll \sigma \ll 1$. Для этого класса лазеров удастся исключить только уравнение относительно поляризации.
- Класс *C*: $b \leq \sigma = O(1)$. Все переменные входят в систему (31) неустранимым образом.
- Класс *D*: $\sigma \gg b, \sigma \gg 1$. Лазеры класса *D* допускают адиабатическое исключение переменной, отвечающей амплитуде электрического поля.

Классу *A* принадлежат жидкостные, большинство атомарных газовых лазеров, лазеры на растворах органических красителей.

Класс *B* включает в себя полупроводниковые, волоконные, твердотельные лазеры на слабелегированных кристаллах и стеклах (рубиновые, неодимовые, хромовые, титаново-сапфировые и т. п.), молекулярные газовые лазеры низкого давления (на углекислом газе).

Класс *C* содержит молекулярные газовые лазеры далекого инфракрасного диапазона (FIR), прежде всего, аммиачный лазер.

К классу *D* относят пучковые лазеры (аммиачный, водородный).

Предложенная классификация, основана на динамических свойствах лазерных моделей. Наряду с ней, существуют другие способы систематизации, среди которых можно указать следующие.

- По особенностям активной среды:
 - твердотельные;
 - полупроводниковые;
 - на диэлектрических кристаллах и стеклах;
 - жидкостные;
 - газовые;
 - плазменные.

- По особенностям устройства:
 - твердотельные;
 - полупроводниковые;
 - химические;
 - жидкостные;
 - газовые;
 - ионные;
 - фотодиссоционные;
 - плазмодинамические;
 - на свободных электронах;
 - электроразрядные;
 - газодинамические.

- По способу накачки:
 - оптические;
 - электрические;
 - газоразрядные;
 - тепловые;
 - химические;
 - на продуктах ядерных реакций;
 - рекомбинационные.

- По спектральному диапазону:
 - видимые;
 - инфракрасные;
 - ультрафиолетовые;
 - рентгеновские;
 - гамма-излучение.

- По использованию:
 - научные исследования;
 - информационные технологии (хранение и воспроизведение информации);

- промышленные технологии (резка, сварка, увеличение прочности материала);
- связь;
- геодезия;
- типография;
- пусковой механизм химических реакций;
- разделение изотопов;
- медицина (диагностика, лечение);
- военная техника.

В книге [5] представлены и другие возможные подходы к классификации, однако перечисленные выше являются наиболее употребляемыми. Также при систематизации нередко используют отношения между совокупностями различных признаков.

Главным достоинством классификации по динамическим свойствам является то, что она определяется наиболее значимыми параметрами лазерного устройства. Поэтому качественный характер излучения (постоянная, периодическая, хаотическая генерация и переходы между ними) в пределах одного класса варьируется не столь сильно, как при других подходах.

Таким образом, модели динамики лазеров класса В, которые будут интересовать нас в дальнейшем, включают в себя лишь уравнения для вещественной или комплексной амплитуды электрического поля и инверсии носителей.

2.7. Модель Статца – Де Марса

Система уравнений Лоренца – Хакена допускает дальнейшее упрощение при выполнении некоторых типичных условий, накладываемых на параметры. При описании динамики наиболее широкого и востребованного класса лазеров (класса В) уже многие десятилетия основной и наиболее простой является предложенная еще в 1960 году модель Статца – Де Марса [24] (или Танга – Статца – ДеМарса согласно [18]), называемая в [28] также системой уравнений баланса лазера бегущей волны класса В с однородным рабочим веществом.

Далее рассмотрим ситуацию, когда $b, \sigma \ll 1$, характерную для лазеров класса В. Это условие означает, что система (37) является частным случаем системы ОДУ общего вида (13).

Отметим, что в модели (37) можно выделить медленную (первые два уравнения относительно переменных m и n) и быструю (остальные

уравнения) подсистемы. Используя основные факты теории дифференциальных уравнений с малым параметром при (старшей) производной, перейдем к анализу соотношения $F(X, Y)=0$, задающего многообразие размерности $l=2$, где X соответствует тройка q, u, v , а Y — пара m, n . Выполнив несложные преобразования, можем установить, что алгебраическое уравнение на F эквивалентно условиям

$$q = nu, \quad v = -\frac{\gamma\delta}{\gamma+\sigma}u = -\frac{\delta}{1+(\sigma/\gamma)}u.$$

Отсюда ясно, что для описания зависимости $X_0(Y)$ достаточно выразить u через m и n , а аналогичные соотношения для q и v получатся автоматически. В данном случае это удастся сделать так, что

$$u = \frac{mn}{1 + (\sigma/\gamma)(1-n) + \delta^2(1+(\sigma/\gamma))^{-1}}.$$

Условия устойчивости медленного многообразия W (или его части W^s), согласно теореме 5, задаются собственными значениями матрицы $A(t)$, которая в случае системы (37) представляется следующим образом:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2 & 2n & 0 \\ \sigma & -(1+\sigma) & \delta \\ 0 & -\delta & -(1+\sigma) \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение, из которого определяются собственные значения матрицы $A(t)$, имеет вид

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 2(2+\sigma), \\ a_2 &= 4(1+\sigma) + (1+\sigma)^2 + \delta^2 - 2n\sigma, \\ a_3 &= 2(1+\sigma)^2 + 2\delta^2 - 2n\sigma(1+\sigma). \end{aligned}$$

Необходимое условие устойчивости $a_k > 0$, а также условие из критерия устойчивости

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$

приводит к следующим неравенствам:

$$n < \frac{(1+\sigma)^2 + 4(1+\sigma) + \delta^2}{2\sigma},$$

$$n < \frac{(1+\sigma)^2 + \delta^2}{\sigma(1+\sigma)},$$

$$n < \frac{(1+\sigma)[(1+\sigma)^2 + \delta^2 + 4(2+\sigma)]}{2\sigma}.$$

Подчеркнем, что только при выполнении этих соотношений оказывается правомерной редукция, использованная в формулировке теоремы 5.

Медленная подсистема в данной ситуации имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = 2\sigma(u - m), \\ \frac{dn}{dt} = b[r - n - u]. \end{cases} \quad (41)$$

Выполняя замены переменных, времени, вводя в рассмотрение параметр $G=2\sigma/b$, который является большим в условиях $b \ll \sigma$, исключая из рассмотрения малые величины, пропорциональные σ/γ , получаем систему уравнений Статца – Де Марса

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = Gm(n - 1), \\ \frac{dn}{dt} = r - n(m + 1). \end{cases} \quad (42)$$

Это максимально простая модель динамики лазера класса B , состоящая всего из двух ОДУ и содержащая лишь два параметра (если параметров больше, то некоторыми заменами их число можно уменьшить). Отметим, что для лазеров класса B величина G имеет характерный порядок $10^3 - 10^4$.

Укажем некоторые свойства системы Статца – Де Марса. Ее простейшими решениями являются состояния равновесия

$$m = 0, \quad n = r$$

и

$$m = r - 1, \quad n = 1.$$

Устойчивость таких решений определяется свойствами матрицы линеаризованной системы

$$\dot{U} = AU,$$

где матрица A может быть определена по матрице Якоби от правой части системы ОДУ (42)

$$\begin{pmatrix} G(n-1) & Gm \\ -n & -(m+1) \end{pmatrix}.$$

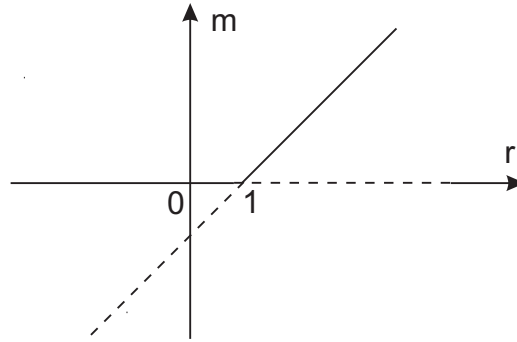


Рис. 5. Бифуркация типа обмен устойчивости в модели Статца – Де Марса

Подставляя сюда конкретные значения m и n , постоянные для положений равновесия, получим, что для первого (нулевого по m) положения равновесия

$$A_1 = \begin{pmatrix} G(r-1) & 0 \\ -r & -1 \end{pmatrix},$$

а для второго —

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & G(r-1) \\ -1 & -r \end{pmatrix}.$$

При очевидном условии $G > 0$ исследование устойчивости стационарных решений оказывается тривиальной задачей. В результате получаем, что первое состояние равновесия устойчиво при $r < 1$, а второе — при $r > 1$. В критическом случае $r = 1$, очевидно, оба стационарных решения совпадают, из чего можно сделать вывод, что это значение параметра является бифуркационным. При переходе r через единицу происходит бифуркация типа обмен устойчивости, показанная на рис. (5), так что одно состояние равновесия теряет устойчивость, а другое, наоборот, приобретает.

2.8. Модель лазера класса В с внешней оптической накачкой

Рассмотрим модель лазера класса В, которая описывает практически важный случай внешней оптической накачки. В этом случае лазер (чаще всего полупроводниковый) приводится в рабочий режим генерации излучения через воздействие на резонатор внешнего оптического квантового генератора (рис. (6)), называемого обычно задающим или главным лазером (master laser, seed laser). Для простоты будем иногда обозначать его как первый лазер. Собственно полупроводниковый лазер в этом случае называют лазером, синхронизированным внешним сигналом или

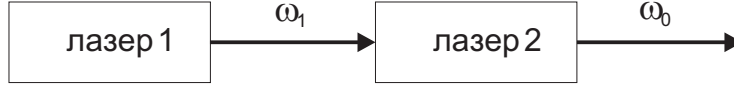


Рис. 6. Схема лазера с оптической накачкой. Первый лазер с частотой излучения ω_1 воздействует на второй лазер с частотой ω_0 свободной генерации

синхронизируемым лазером (slave laser), поскольку его динамическое состояние полностью определяется внешним излучением. Его будем также называть вторым лазером. Эволюционные уравнения [97], определяющие динамику синхронизируемого лазера, могут быть приведены к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{i(\omega_1-\omega_0)t}, \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2, \end{cases} \quad (43)$$

где $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, $Z(t)$ — инверсия носителей; $\gamma > 0$ — интенсивность внешнего излучения, ω_1 и ω_0 — оптическая частота задающего и синхронизируемого лазера соответственно; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля.

Если выполнить замену $E(t) = R(t) \cdot e^{i\theta(t)}$, то можно перейти от исходной системы (43) к уравнениям для действительной амплитуды и фазы поля:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = vRZ + \gamma \cos((\omega_1 - \omega_0)t - \theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = v\alpha Z + \frac{\gamma}{R} \sin((\omega_1 - \omega_0)t - \theta), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)R^2. \end{cases} \quad (44)$$

Если параметр $\gamma = 0$, то динамика системы (44) полностью определяется следующей парой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = vRZ, \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)R^2, \end{cases} \quad (45)$$

не зависящих от фазы θ . Укажем, что замена переменных

$$m = R^2, \quad n = 1 + Z,$$

и параметров

$$r = 1 + Q, \quad G = 2v$$

сводит систему (45) к системе (42). Таким образом, модель лазера класса В с внешней оптической накачкой (43), равно как и рассматриваемая далее модель Ланга – Кобаяши, является обобщением наиболее простой модели Статца – Де Марса.

Простейшие аттракторы системы ОДУ (45) задаются равенствами

$$R = 0, \quad Z = Q,$$

и

$$R^2 = Q, \quad Z = 0.$$

Естественное условие $R > 0$ позволяет рассматривать лишь положения равновесия $(0, Q)$ и $(\sqrt{Q}, 0)$, которые физически соответствуют состоянию, когда излучение отсутствует, и режиму свободной генерации [83]. Согласно [28], «свободная генерация (Free running mode of operation) — режим генерации, реализующийся в отсутствие внешних воздействий на лазер».

Устойчивость состояния равновесия $(0, Q)$ системы (45) определяется расположением корней полинома

$$(vQ - \lambda)(-1 - \lambda),$$

а $(\pm\sqrt{Q}, 0)$ — полинома

$$\lambda^2 + (1+Q)\lambda + 2vQ.$$

Корни второго квадратного трехчлена, которые имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1+Q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1+Q)^2 - 8vQ},$$

описывают поведение малого возмущения решения $(\sqrt{Q}, 0)$ системы (45). Поскольку характерные значения параметра v достаточно велики, то при $Q > 0$ это решение физически «почти всюду» является устойчивым фокусом. Малое возмущение со временем колебательным образом стремится к нулю, поэтому в данном случае обычно говорят о РК.

Корни квадратного трехчлена в этой ситуации представляют в виде

$$\lambda_{1,2} = -\lambda_R \pm i\sqrt{\omega_R^2 - \lambda_R^2},$$

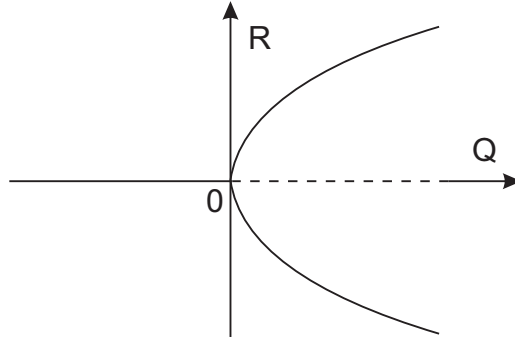


Рис. 7. Бифуркация типа вилки в отсутствие обратной связи

где

$$\lambda_R = (1+Q)/2$$

есть скорость затухания колебаний,

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_R^2 - \lambda_R^2} \quad (\omega_R^2 = 2vQ)$$

— угловая частота. В случае $v \gg 1, Q \ll 1$ можно считать, что $\Omega_R \approx \omega_R$.

Переход параметра Q через нуль соответствует переходу лазера в рабочий режим. При этом происходит бифуркация типа «вилка», изображенная на рис. (7), для двух рассматриваемых состояний равновесия системы (45). Поэтому $Q=0$ принято называть первой пороговой величиной. Второй пороговой величины для лазеров класса В не существует. При $\gamma > 0$ тип бифуркации для решения $(0, Q)$ системы (44) не изменится. Для исходных уравнений (43) в данном случае реализуется бифуркация Андронова – Хопфа, связанная с рождением устойчивого предельного цикла.

Таким образом, система (43) описывает динамику синхронизируемого полупроводникового лазера, которая определяется оптическим сигналом задающего лазера. В зависимости от величины внешней оптической накачки синхронизируемый лазер может изменять свою частоту излучения. В этом случае происходит либо захват частоты (frequency locking) ω_1 внешнего излучения или, иными словами, синхронизация мод, определяемых параметрами ω_1 и ω_0 , либо переход к более сложному динамическому состоянию. Отметим, что модифицированные уравнения (43) демонстрируют оба экспериментально обнаруженных сценария поведения синхронизируемого лазера.

Простейшие решения системы (43) при условии захвата частоты определяются равенствами [97]

$$E(t) = R_L e^{i(\omega_1 - \omega_0)t + i\theta_L}, \quad Z(t) = Z_L,$$

где константа θ_L определяется разностью фаз $\omega_1 - \omega_0$. Необходимое условие захвата частоты определяется неравенством вида [97]

$$|\omega_1 - \omega_0| \leq \frac{\gamma}{R_L} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Когда выполнено это условие, система (43) имеет два периодических решения [97] одинаковой амплитуды R_L и частоты $\omega_1 - \omega_0$, но разной фазы θ_L . Одно из этой пары состояний при любом выборе параметров демонстрирует седловую неустойчивость, а другое может быть устойчивым. Устойчивое решение дестабилизируется либо при увеличении параметра γ , либо при увеличении расстройки между собственными частотами ω_1 и ω_0 задающего и синхронизируемого лазеров.

Для устройств, моделируемых системой (43), экспериментально наблюдаются три качественно различных режима генерации [97]. Это устойчивый захват частоты внешнего излучения, неустойчивый захват и режим без захвата.

В режиме без захвата частоты характер излучения второго лазера зависит от первого лазера более сложным образом. В силу присутствия в системе третьей частоты, на которой происходят так называемые релаксационные колебания [97], наблюдается ряд интересных эффектов, связанных с перемешиванием волн.

В пространстве параметров системы (43) существуют области с интересной нелинейной динамикой. В 1992 году было проведено одно из первых экспериментальных исследований эффектов, обусловленных внешней оптической накачкой [86]. С тех пор опубликован ряд работ, посвященных изучению и обсуждению подобных эффектов, в частности различным типам неустойчивостей и возникновению хаотической динамики. Был обнаружен сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода [60], в том числе при модуляции величины внешней оптической накачки [89]. Определены области с хаотической динамикой между режимами устойчивого захвата и без захвата [56]. Для описания динамики системы (43) при переходе от устойчивого захвата к неустойчивому построено маятниковое уравнение третьего порядка относительно фазы $\theta = \arg(E)$ [35].

3. Система уравнений Ланга – Кобаяши

3.1. Формулировка задачи

Особый класс моделей лазерных систем представляют собой модели, учитывающие воздействие запаздывающей оптической обратной связи. Их сложность обусловлена тем, что они описываются в терминах дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, которые обладают бесконечным числом степеней свободы. Кроме того, динамические системы с запаздыванием демонстрируют различные типы неустойчивостей, обусловленных воздействием задержки. В таких областях, как хранение данных или оптические и оптоволоконные коммуникации, отражения и связанные с ними сложные сопутствующие эффекты неизбежны. Например, искажения сигнала при передаче данных нередко обусловлены неминуемыми отражениями от торцов волноводов. Поэтому изучение влияния оптической запаздывающей обратной связи на работу лазеров разных типов представляет собой важную прикладную задачу.

Отражающая поверхность подходящей конфигурации, расположенная вне резонатора излучающего лазерного устройства, с точки зрения теории оптической накачки создает эффект наличия внешнего генератора электромагнитного поля. При этом независимый внешний источник оптической накачки фактически отсутствует. Синхронизируемый (и одновременно задающий) лазер оказывается зависимым от самого себя (рис. (8)), а точнее, от своего предшествующего состояния. Разность частот продольных волн предыдущего и текущего состояний определяется временем прохода излучения по петле, образованной резонатором лазера и отражающими поверхностями. Таким образом, характер излучения оптического квантового генератора зависит от двух источников: стандартной «внутренней» электрической и «внешней» оптической накачки. В ходе экспериментальных исследований были выявлены интересные эффекты, обусловленные механизмом обратной связи. Прежде всего это возникновение целой совокупности новых частот генерации — так называемых мод внешнего резонатора — под действием отраженного излучения. Определение всех устойчивых мод при любом наперед заданном наборе параметров представляет собой довольно сложную задачу, которая поддается лишь численному решению в рамках некоторых теоретических моделей. Сильное нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой электрического поля полупроводникового лазера является главной причиной возможного изменения частоты генерации под воздействием отраженного излучения.

При аккуратном изменении параметров обратной связи в полупроводниковом лазере наблюдается явление мультистабильности, то есть сосуществование при одном наборе параметров системы нескольких различных устойчивых режимов генерации. На языке математической модели процесса излучения это означает присутствие в фазовом пространстве системы нескольких различных ω -предельных множеств.

Модели, учитывающие воздействие запаздывающей оптической обратной связи на излучатель, представляют собой особый класс моделей лазерных систем. Их сложность обусловлена тем, что этот класс задач описывается в терминах дифференциальных уравнений с запаздыванием, которые обладают бесконечным числом степеней свободы.

Нелинейная динамика, обусловленная запаздывающей обратной связью, хорошо описывается математической моделью, предложенной в 1980 году в статье Р. Ланга и К. Кобаяши [59] для случая одномодового полупроводникового лазера. Одним из упрощающих предположений является относительная малость величины обратной связи. Благодаря этому, различными неоднородностями отраженного излучения можно пренебречь.

Математическая модель Ланга – Кобаяши [59] динамики полупроводникового лазера имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (46)$$

Здесь $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, $Z(t)$ — инверсия носителей; $\gamma > 0$ и $-\omega_0 h$ — сила и фаза обратной связи, ω_0 — оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля; h — время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Если выполнить замену $E(t) = R(t) \cdot e^{i\theta(t)}$, то можно перейти от исходной системы (46) к уравнениям для действительной амплитуды и фазы поля:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = vRZ + \gamma \cos(\omega_0 h + \theta - \theta(t-h)) R(t-h), \\ \frac{d\theta}{dt} = v\alpha Z - \gamma \sin(\omega_0 h + \theta - \theta(t-h)) \frac{R(t-h)}{R}, \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z) R^2. \end{cases} \quad (47)$$

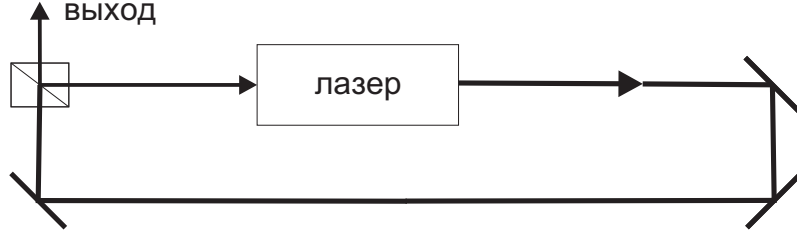


Рис. 8. Схема лазера с оптической запаздывающей обратной связью

Отметим, что в случае $\gamma=0$ система (47) сводится к системе (45), которая, в свою очередь, эквивалентна (42). Соответствующие обоснования приведены в п. 2.8.

Укажем на важность величин

$$\lambda_R = (1+Q)/2, \quad \omega_R^2 = 2vQ,$$

и

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_R^2 - \lambda_R^2},$$

которые также определены в п. 2.8.

Замена параметров

$$T = \frac{v}{2}, \quad P = \frac{Q}{2}, \quad \tau = Th, \quad \kappa = \frac{\gamma}{T}, \quad \Omega = \frac{\omega_0}{T},$$

и переменных

$$t_1 = Tt, \quad Y = \frac{E}{\sqrt{2}}, \quad N = \frac{Z}{2},$$

сводит систему (46) к системе

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt_1} = (1+i\alpha)YN + \kappa e^{-i\Omega\tau} Y(t_1-\tau), \\ T \frac{dN}{dt_1} = P - N - (1+2N)|Y|^2, \end{cases} \quad (48)$$

которая является наиболее популярной постановкой задачи. В случае $v \gg 1$ уравнение (48) написано для «быстрого» времени t_1 .

В терминах системы (48) $\omega_R^2 = 2P/T$. Это связано с заменой времени, которая учитывается в обоих уравнениях системы (45).

Существует еще одна интересная постановка задачи (46), связанная с нормировкой параметра запаздывания [103]. Выполняя замену переменных вида

$$t_2 = \frac{t_1}{\tau} = \frac{t}{h}, \quad E = \sqrt{2}Y = E, \quad n = \tau N = \frac{vhZ}{4}$$

и преобразуя параметры

$$\eta = \tau\kappa = h\gamma, \quad \nu = \frac{\tau}{2} = \frac{vh}{4}, \quad J = \tau P = \frac{vhQ}{4},$$

$$\epsilon = \frac{\tau}{T} = h, \quad \phi = \Omega\tau = \omega_0 h,$$

получим следующий вариант системы (46):

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt_2} = (1+i\alpha)En + \eta e^{-i\phi} E(t_2-1), \\ \frac{dn}{dt_2} = \epsilon [J - n - (\nu+n) |E|^2] . \end{cases} \quad (49)$$

Наконец, замена переменных, предложенная в работе [32], позволяет изучать модель Ланга – Кобаяши при достаточно больших значениях параметров α и v . Эта замена имеет вид

$$t_3 = \omega_R t, \quad E = \sqrt{Q} \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right) e^{i(\Phi - \omega_0 t)}, \quad Z = \frac{\omega_R}{v\alpha} x,$$

где $\omega_R = \sqrt{2Qv}$ определяет частоту РК. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt_3} = x \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right) + \frac{\alpha\gamma}{\omega_R} \cos(\Phi - \Phi(t_3 - \omega_R h)) \left(1 + \frac{y(t_3 - \omega_R h)}{\alpha}\right), \\ \frac{d\Phi}{dt_3} = x + \frac{\omega_0}{\omega_R} - \frac{\gamma}{\omega_R} \sin(\Phi - \Phi(t_3 - \omega_R h)) \frac{\alpha + y(t_3 - \omega_R h)}{\alpha + y}, \\ \frac{dx}{dt_3} = -y - \frac{1+Q}{\omega_R} x - \frac{y^2}{2\alpha} - \frac{Qx}{\omega_R} \left(\frac{2y}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha^2}\right), \end{cases} \quad (50)$$

где все величины выражены через параметры исходной задачи (46).

3.2. Моды внешнего резонатора

Простейшие решения системы уравнений Ланга – Кобаяши (46) определяются из условий

$$E(t) = R_k \cdot e^{i(\omega_k - \omega_0)t}, \quad Z(t) = Z_k,$$

где R_k, ω_k, Z_k — константы. Такие периодические решения называются модами внешнего резонатора (external cavity modes) в [83] или модами

составного резонатора (compound-cavity modes) в [97]. В обозначениях системы (47) они имеют вид

$$R(t) = R_k, \quad \theta(t) = (\omega_k - \omega_0) t, \quad Z(t) = Z_k.$$

Подставляя эти выражения в (47), получим уравнения

$$\begin{cases} 0 = vR_k Z_k + \gamma \cos(\omega_k h) R_k, \\ (\omega_k - \omega_0) = v\alpha Z_k - \gamma \sin(\omega_k h), \\ 0 = Q - Z_k - (1 + Z_k) R_k^2, \end{cases} \quad (51)$$

которые, полагая $R_k \neq 0$, можно упростить следующим образом:

$$\begin{cases} vZ_k = -\gamma \cos(\omega_k h), \\ (\omega_k - \omega_0) = -\gamma[\alpha \cos(\omega_k h) + \sin(\omega_k h)], \\ R_k^2 = \frac{Q - Z_k}{1 + Z_k}. \end{cases} \quad (52)$$

Обозначая $\eta_k = \omega_k h$ и преобразуя второе уравнение (52), получим хорошо известное соотношение для определения числа мод внешнего резонатора [61, 83, 87]:

$$\eta - \omega_0 h = -\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\eta + \arctg(\alpha)). \quad (53)$$

Обозначим правую часть этого равенства $f(\eta)$, а левую $g(\eta)$. Соотношение (53), проиллюстрированное на рис. (9), очевидно, имеет, по крайней мере, одно решение

$$\eta_1 \in \begin{cases} [-\arctg(\alpha), \omega_0 h], & \text{если } \sin(\omega_0 h + \arctg(\alpha)) > 0, \\ [\omega_0 h, 2\pi - \arctg(\alpha)], & \text{если } \sin(\omega_0 h + \arctg(\alpha)) < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что уравнение (53) имеет тем больше решений, чем больше значение $\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2}$, называемое иногда эффективной величиной обратной связи. Важным параметром [61] является также величина $\omega_0 h + \arctg \alpha$, которую логично было бы называть эффективной фазой обратной связи.

Используя введенные обозначения, получим, что моды внешнего резонатора соответствуют точкам пересечения графиков функций f и g . Образование новой пары периодических режимов происходит в результате бифуркации седло-узла, которая имеет место при значениях параметров, удовлетворяющих одновременно уравнениям

$$\begin{cases} f(\eta) = g(\eta), \\ f'(\eta) = g'(\eta). \end{cases}$$

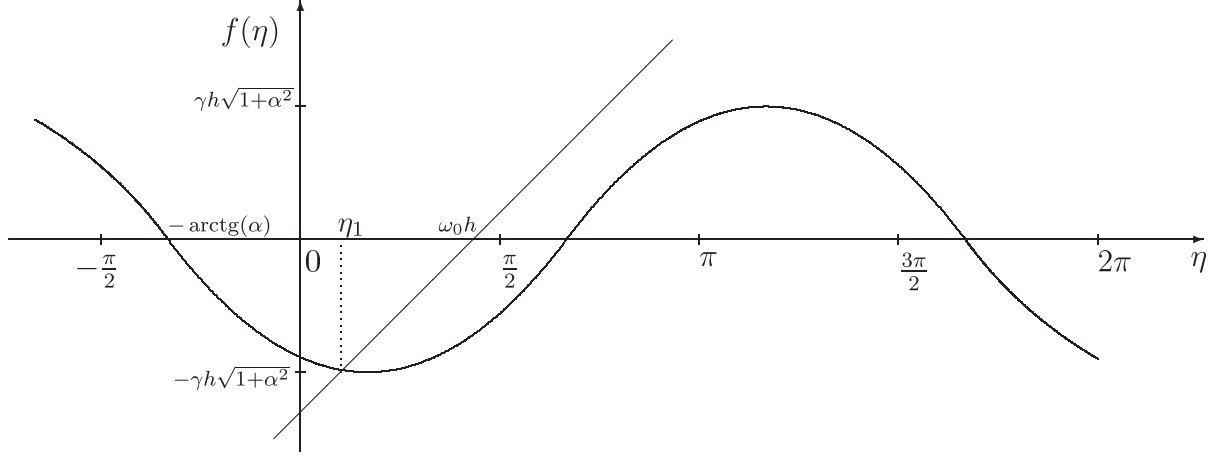


Рис. 9. Величины η_k , а затем и значения ω_k, Z_k, R_k , характеризующие моды внешнего резонатора, определяются из уравнения (53)

В этом случае происходит касание графиков функций f и g . Точнее, эта пара равенств записывается в виде

$$\begin{cases} \eta - \omega_0 h = -\gamma h \sqrt{1+\alpha^2} \sin(\eta + \arctg(\alpha)), \\ 1 = -\gamma h \sqrt{1+\alpha^2} \cos(\eta + \arctg(\alpha)). \end{cases} \quad (54)$$

Исключая η и преобразуя (54), можем получить следующее уравнение для бифуркационных поверхностей в пространстве параметров:

$$\omega_0 h + \arctg(\alpha) = \pm \left[\sqrt{\gamma^2 h^2 (1+\alpha^2) - 1} + \arccos \left(-\frac{1}{\gamma h \sqrt{1+\alpha^2}} \right) \right] + 2\pi m,$$

где $m \in \mathbb{Z}$, или в другом виде

$$\cos(\omega_0 h \mp \sqrt{\gamma^2 h^2 (1+\alpha^2) - 1} + \arctg(\alpha)) = -\frac{1}{\gamma h \sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Отметим, что это соотношение не зависит от Q и 2π -периодично по $\omega_0 h$.

Минимальной величиной γ , при которой может произойти бифуркация седло-узла с рождением новой пары мод является значение

$$\gamma_{min}^{SN} = \frac{1}{h \sqrt{1+\alpha^2}},$$

которое достигается в точке излома (см рис. (10)) при

$$\omega_0 h + \arctg(\alpha) = \pi + 2\pi k.$$

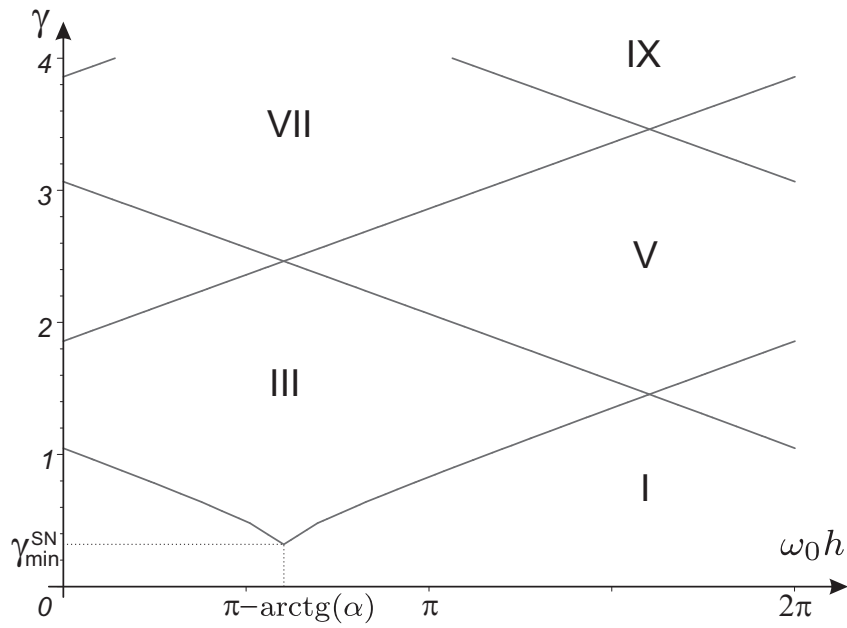


Рис. 10. Области параметров с различным количеством (обозначенным римскими цифрами) простейших периодических решений системы (46) на плоскости $(\omega_0 h, \gamma)$.

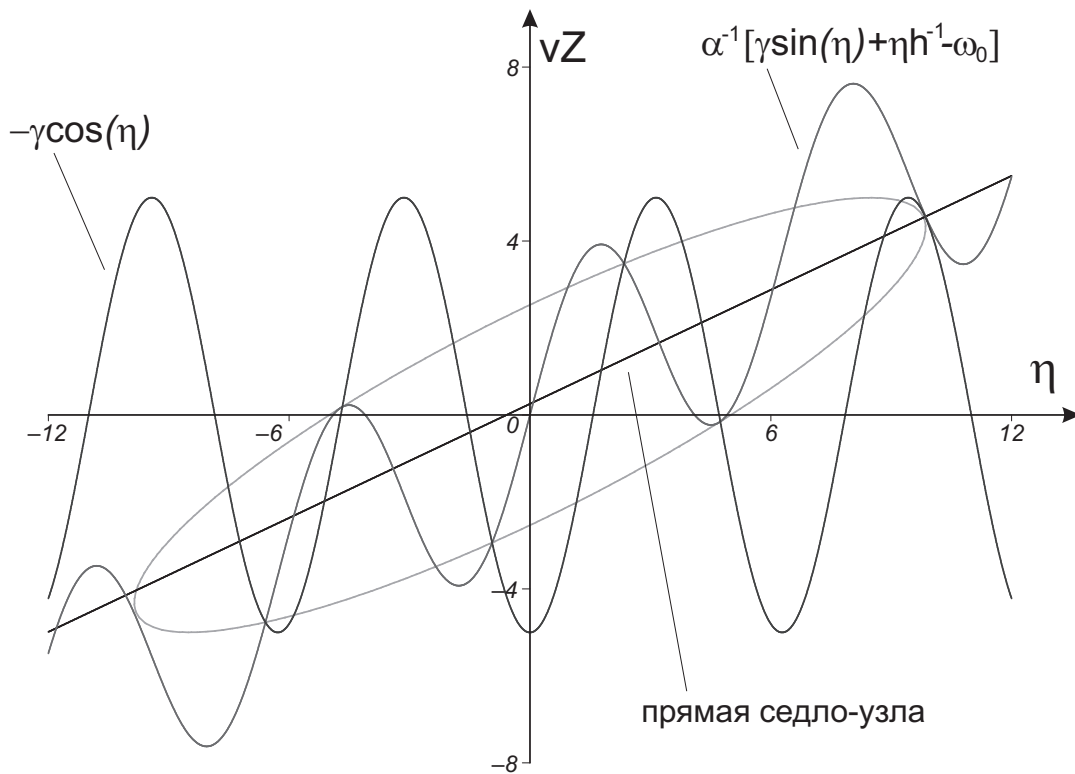


Рис. 11. Точки пересечения кривых (55) и (56) лежат на эллипсе (57) и соответствуют характеристикам (ω_k, Z_k) мод внешнего резонатора. Выбраны следующие значения параметров: $\alpha=1.7$; $\gamma=5$; $\omega_0=0$; $h=1$

Из первых двух уравнений системы (51) при условии $R_k \neq 0$ можем получить пару уравнений для определения мод внешнего резонатора

$$vZ_k = -\gamma \cos(\eta_k), \quad (55)$$

$$\alpha vZ_k = \eta_k h^{-1} - \omega_0 + \gamma \sin(\eta_k). \quad (56)$$

Отметим, что точки пересечения соответствующих кривых на плоскости (η, Z) лежат на эллипсе, изображенном на рис. (11). Аналитически он задается уравнением

$$(vZ)^2 + (\alpha vZ - \eta h^{-1} + \omega_0)^2 = \gamma^2. \quad (57)$$

Выражая в соответствии с (51) синусы и косинусы через Z , из второго уравнения (54) получаем соотношение вида

$$vZ = \frac{1 + \alpha\eta - \alpha\omega_0 h}{h(1 + \alpha^2)}, \quad (58)$$

которое на плоскости (η, Z) задает так называемую седло-узловую прямую. Эта прямая играет важную роль при определении устойчивости мод внешнего резонатора.

В силу третьего соотношения системы (52) из (57) несложно получить

$$\left(v \frac{Q - R^2}{1 + R^2}\right)^2 + \left(\alpha v \frac{Q - R^2}{1 + R^2} - \eta h^{-1} + \omega_0\right)^2 = \gamma^2. \quad (59)$$

Таким образом, проекция кривой, на которой лежат моды внешнего резонатора, на плоскость (η, R) эллипсом не является (рис. (12)). «Прямая седло-узла» в этом случае при внимательном рассмотрении также вовсе не прямая. Однако при достаточно больших значениях v проекции соответствующих кривых визуально почти не отличимы от эллипса и прямой.

Среди всей совокупности мод внешнего резонатора существует особая мода, у которой величина Z принимает минимальное значение. Наименьшее возможное значение при фиксированном γ достигается в случае $\eta = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, то есть в точке минимума функции $-\gamma \cos \eta$. В этой точке графики уравнений (55) и (56) пересекаются тогда и только тогда, когда одновременно выполнены соотношения

$$vZ_k = -\gamma \quad \text{и} \quad \alpha vZ_k = \frac{2\pi m}{h} - \omega_0,$$

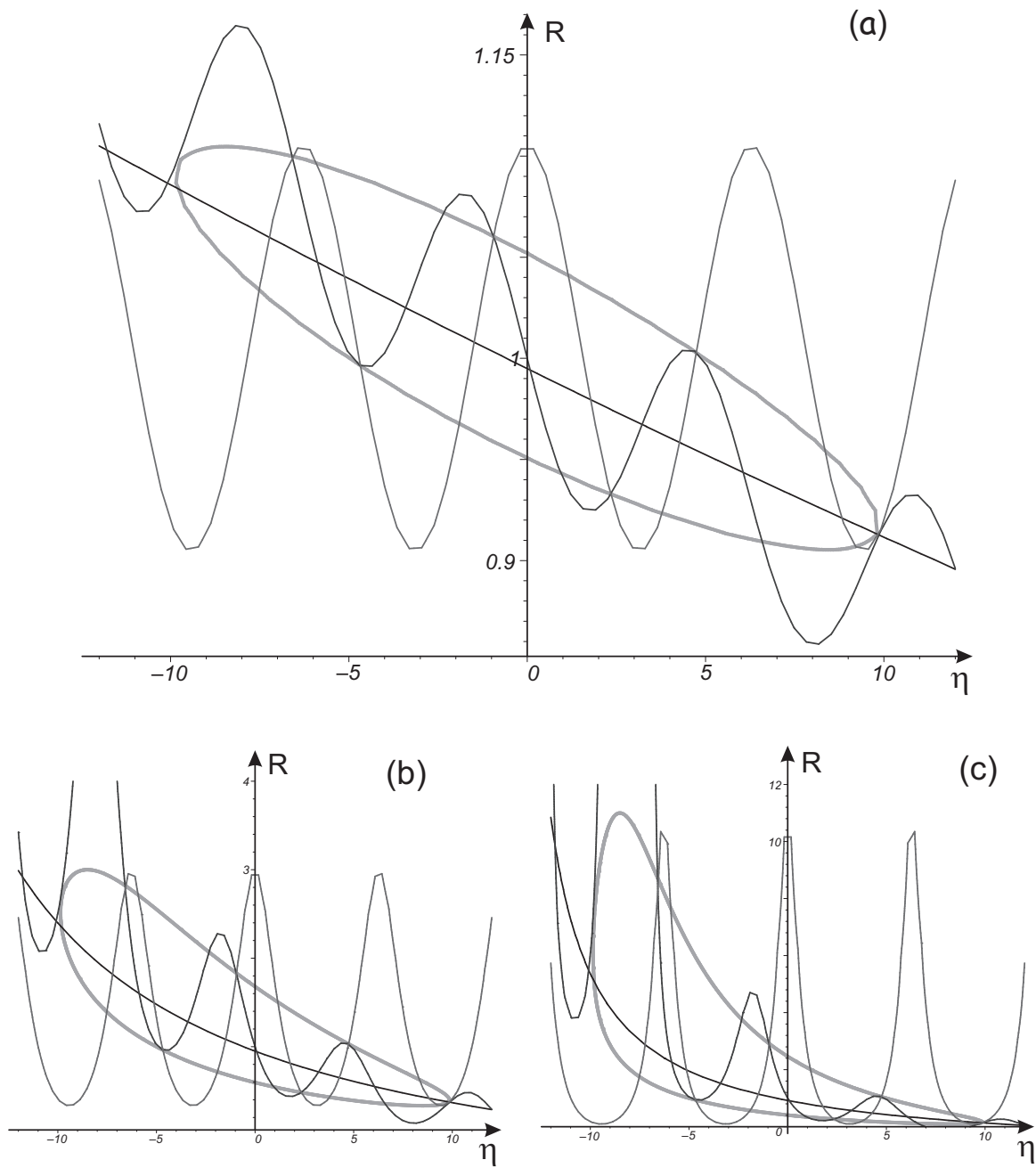


Рис. 12. Точки пересечения кривых (55) и (56) при замене Z на R в силу (52) лежат на кривой (59) и соответствуют характеристикам (ω_k, R_k) мод внешнего резонатора. Выбраны следующие величины параметров: $\alpha=1.7$; $\gamma=5$; $\omega_0=0$; $h=1$; $Q=1$. Параметр v принимает значения 100 (a), 10 (b), 6 (c)

то есть

$$\omega_0 h = \gamma \alpha h + 2\pi m.$$

Если такое условие удовлетворяется, то соответствующая мода носит название моды с максимальным усилением [61], поскольку в этом случае достигается максимально возможная для стационарного решения величина амплитуды R электрического поля

$$R^2 = \frac{vQ + \gamma}{v - \gamma}$$

и достигается верхнее положение на замкнутой кривой на рис. (12). Касательные к кривым, изображенным на рисунках (11), (12), при этом горизонтальны.

3.3. Устойчивость простейших решений системы Ланга – Кобаяши

При определении устойчивости (по первому приближению) решений дифференциальных уравнений широко используются понятия линеаризации и характеристического уравнения, описанные в п. 1.2. Если все корни такого уравнения расположены в левой комплексной полуплоскости, то ему соответствующее решение устойчиво, и неустойчиво, если существует хотя бы один корень с положительной вещественной частью. В случае ОДУ характеристическое уравнение является полиномиальным, и при оценке местоположения его корней не возникает трудностей принципиального характера. При наличии запаздывания эта задача перестает быть полиномиальной, и в ряде случаев найти ее удовлетворительное решение достаточно сложно.

В общем случае устойчивость состояния равновесия $(0, Q)$ системы (46) определяется корнями характеристического уравнения относительно переменной λ

$$\lambda = \gamma e^{-i\omega_0 h} e^{-\lambda h} + vQ(1 + i\alpha). \quad (60)$$

Теорема 6. Пусть

$$Q > v^{-1} \min(\gamma, h^{-1}) > 0.$$

Тогда выписанное уравнение (60) имеет корень в правой комплексной полуплоскости, то есть решение $(0, Q)$ системы (46) неустойчиво.

Доказательство.

Рассмотрим λ как комплекснозначную функцию действительного аргумента γ . Легко заметить, что $Re\lambda(0)=vQ>0$ при $Q>0$. Положим $\gamma=\gamma_*$ такое, что $\lambda(\gamma_*)=i\mu$, тогда справедлива пара равенств

$$\begin{cases} \gamma \cos(\omega_0 h + \mu h) = -vQ, \\ -\mu - \gamma \sin(\omega_0 h + \mu h) = -\alpha vQ, \end{cases} \quad (61)$$

для действительной и мнимой частей характеристического уравнения. Поскольку при $\gamma < |vQ|$ выполнение первого соотношения невозможно, то при $Q > \gamma v^{-1} > 0$ решение $(0, Q)$ неустойчиво.

С другой стороны, дифференцируя характеристическое уравнение по γ и рассматривая производную неявной функции $\lambda'(\gamma)$, приходим к соотношению

$$\lambda' = \frac{q(\lambda)}{1 + \gamma h q(\lambda)}, \quad \text{где} \quad q(\lambda) = e^{-i\omega_0 h - \lambda h}.$$

Заметим, что при $\lambda(\gamma_*)=i\mu$ знак $Re\lambda'$ определяется знаком выражения $\gamma h + \cos(\omega_0 h + \mu h)$. Соответственно, в случае $Q > 0$ при $\gamma h > 1$ выполняется $Re\lambda' > 0$ и состояние равновесия $(0, Q)$ неустойчиво.

Объединяя две полученные оценки, получаем требуемое неравенство.

■

Таким образом, при выполнении условий теоремы лазер находится в режиме генерации излучения.

Укажем, что наряду с аналитическими оценками границ областей устойчивости простейших решений модели Ланга – Кобаяши, в том числе решения $(0, Q)$, возможно численное определение этих областей. Такой подход реализован, например, в работе [17], а некоторые его результаты представлены на рис. (13).

Подчеркнем, что в присутствии оптической обратной связи выполнения неравенства $Q > 0$, вообще говоря, недостаточно для перехода лазера в рабочее состояние. Из-за отраженного излучения решение $(0, Q)$ системы (46) может оставаться устойчивым и при превышении током накачки первой пороговой величины. О таких небольших областях устойчивости состояния равновесия $(0, Q)$ говорится, например, в [83].

Существование этих областей приводит при малых Q к усложнению бифуркационной картины, представленной на рис. (10). Есть особая точка [45] p_2 , которая показана на рис. (14) и задается равенствами:

$$\begin{cases} \eta - \omega_0 h = -\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\eta + \arctg(\alpha)), \\ 1 = -\gamma h \sqrt{1 + \alpha^2} \cos(\eta + \arctg(\alpha)), \\ vQ = -\gamma \cos \eta. \end{cases} \quad (62)$$

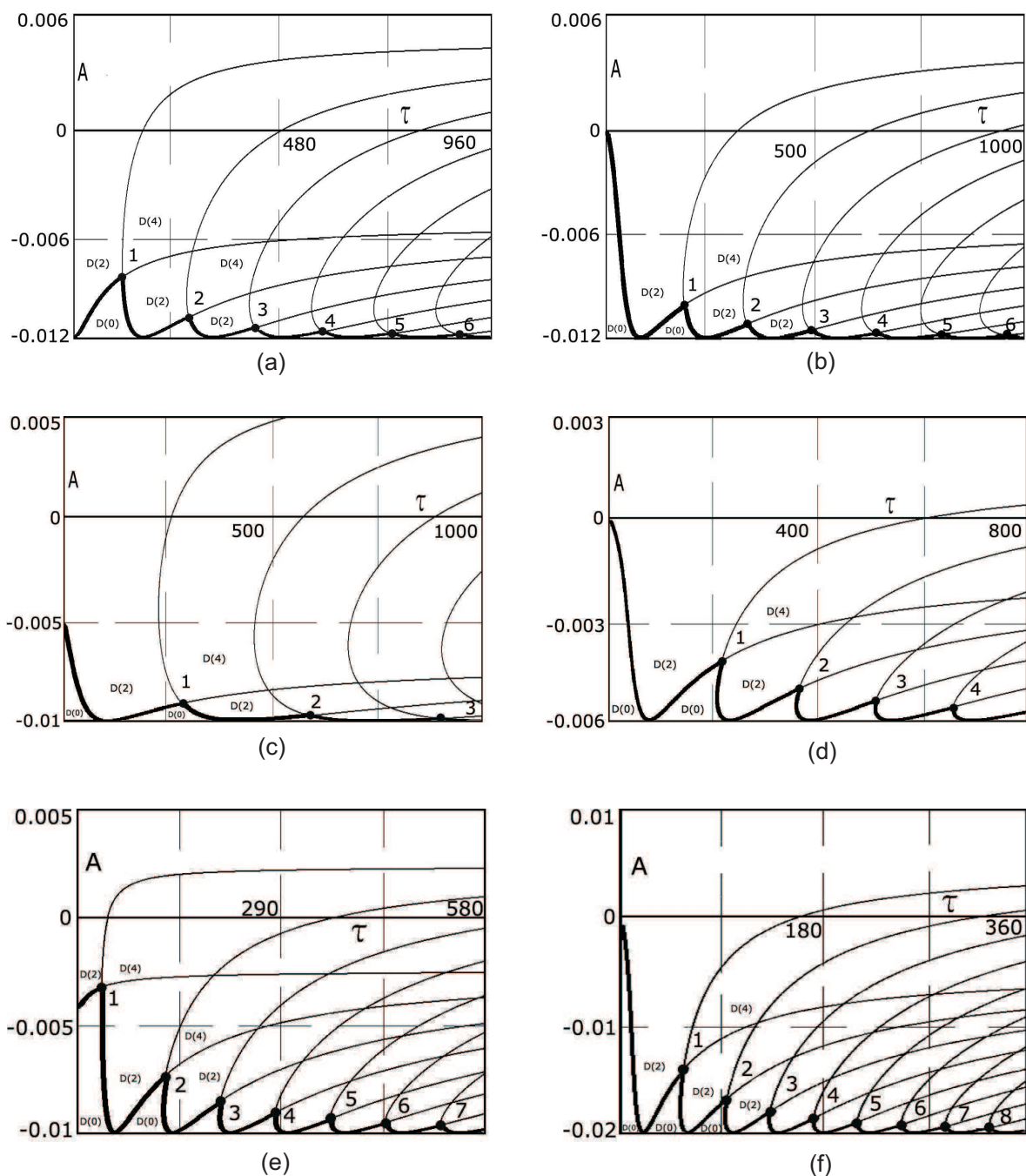


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма для решения $(0, Q)$, полученная методом D -разбиений, на плоскости переменных $\tau = \nu h/2$, $A = \nu Q$. Значения параметров: (a) $\alpha=2, \gamma=0.01, \omega_0 h=0$; (b) $\alpha=2, \gamma=0.01, \omega_0 h=\pi/2$; (c) $\alpha=1, \gamma=0.01, \omega_0 h=1$; (d) $\alpha=4, \gamma=0.005, \omega_0 h=1$; (e) $\alpha=4, \gamma=0.01, \omega_0 h=2$; (f) $\alpha=4, \gamma=0.02, \omega_0 h=\pi/2$. Граница области устойчивости $D(0)$ обозначена жирной линией. На рисунках оставлены обозначения из работы [17], а также диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, Коверга А. Ю.

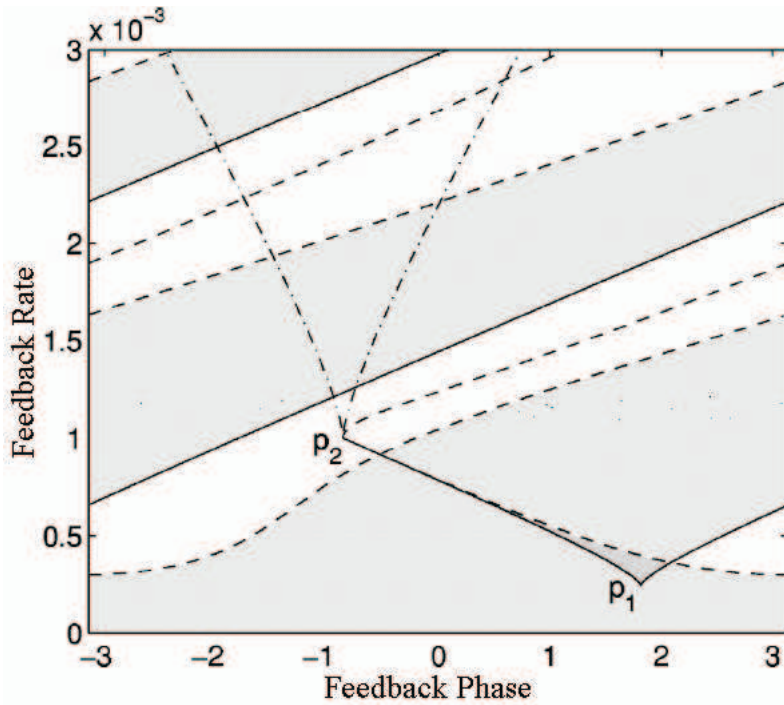


Рис. 14. Бифуркационная диаграмма для мод внешнего резонатора из работы [45]. Светло-серые области содержат одну устойчивую моду, темно-серые — две. Бифуркации седло-узла, Андронова – Хопфа и вилки изображены сплошными, пунктирными и штрихпунктирными линиями соответственно

Очевидно, первые два соотношения (62) совпадают с (54), поэтому в p_2 происходит бифуркация седло-узла. Третье уравнение следует из условия $R=0$. Таким образом, в точке p_2 реализуется ситуация, когда новая пара мода-антимода при возникновении имеет нулевую интенсивность. Бифуркации-вилки на рис. (14) связаны с потерей устойчивости решением $(0, Q)$ системы (46).

Генерация лазером излучения может происходить в различных режимах, простейшим из которых соответствуют моды внешнего резонатора. Те моды на рисунке (11), которые располагаются над седло-узловой прямой (58), называются антимодами или седловыми точками. Доказано, что они всегда неустойчивы. Собственно моды, лежащие ниже этой прямой, могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Новая пара мода-антимода появляется на одном из двух пересечений прямой (58) и эллипса (57).

Определяя точки пересечения графиков (58) и (57), исключим из уравнения прямой седло-узла переменную Z . В результате получим, что

моды, лежащие на прямой (58), удовлетворяют соотношению

$$\gamma h(\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) = -1.$$

Если знак равенства меняется на знак $<$, то мы имеем дело с антимодой, иначе — с модой. Таким образом, существует легко проверяемое необходимое условие устойчивости простейших решений системы (46).

Критерием устойчивости мод внешнего резонатора является отсутствие в правой комплексной полуплоскости корней следующего характеристического уравнения:

$$\det (A_1 + B_1 e^{-\lambda h} - \lambda I) = 0,$$

где I обозначена единичная матрица, соответствующая оператору тождественного преобразования,

$$A_1 = \begin{pmatrix} vZ_k & -R_k \gamma \sin \eta_k & vR_k \\ R_k^{-1} \gamma \sin \eta_k & -\gamma \cos \eta_k & \alpha v \\ -2(1+Z_k)R_k & 0 & -1-R_k^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \gamma \begin{pmatrix} \cos \eta_k & R_k \sin \eta_k & 0 \\ -R_k^{-1} \sin \eta_k & \cos \eta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы такого вида получаются при стандартной линеаризации системы (47) в окрестности решения

$$R(t) = R_k, \quad \theta(t) = (\omega_k - \omega_0) t, \quad Z(t) = Z_k.$$

Учитывая, что

$$vZ_k = -\gamma \cos \eta_k, \quad 1+R_k^2 = \frac{1+Q}{1+Z_k},$$

вычислим выписанный определитель и получим следующий характеристический квазиполином (см. также [44, 66]):

$$\left[\frac{1+Q}{1+Z_k} + \lambda \right] \left[\lambda^2 + 2\gamma \cos \eta_k (1-e^{-\lambda h}) \lambda + \gamma^2 (1-e^{-\lambda h})^2 \right] + 2v(Q - Z_k) \left[\lambda + \gamma(\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) (1-e^{-\lambda h}) \right]. \quad (63)$$

Если все корни квазиполинома для данной моды располагаются в левой комплексной полуплоскости, то такая мода устойчива и, стало быть, физически значима [83]. В противном случае соответствующая мода внешнего резонатора неустойчива. Наличие неподвижного нулевого корня

связано с периодичностью соответствующего решения системы (46). При бифуркационных значениях параметров у характеристического квазиполинома (63) появляются дополнительные корни на мнимой оси. Их количеством определяется коразмерность бифуркации. В точке p_2 , которая определяется из системы (62), таких корней четыре [45].

Среди свойств характеристического квазиполинома (63) и уравнения (60) отметим, что они всегда имеют конечное число корней в правой комплексной полуплоскости и бесконечное (счетное) число — в левой. Тем самым соответствующее решение системы уравнений с запаздыванием располагает конечным набором неустойчивых направлений и бесконечным количеством устойчивых.

Для исследования устойчивости мод в нижней части эллипса важно понимать, как ведут себя с течением времени фазовые траектории системы с начальными условиями из некоторой их окрестности при различных значениях параметров. В общем случае явные аналитические формулы для угловой частоты и скорости затухания колебаний найти очень сложно [81], однако приближенные выражения были получены. Авторы работы [81] определили асимптотику амплитуды и частоты устойчивых периодических колебаний, которые возникают при потере устойчивости модой в результате бифуркации Андронова – Хопфа. Величина обратной связи, при которой мода теряет устойчивость, приближенно оценивается как [61]

$$\gamma_k^H \approx \frac{2\lambda_R}{B_k[1 - \cos(\omega_R h)]} \quad (64)$$

где $\omega_R = \sqrt{2vQ}$ задает угловую частоту, а $\lambda_R = (1+Q)/2$ — скорость затухания колебаний в отсутствие обратной связи,

$$B_k = -\sqrt{1+\alpha^2} \cos(\eta_k - \arctg \alpha).$$

Очевидно, чем больше ток накачки Q , тем больше дестабилизирующая величина обратной связи и тем устойчивее моды внешнего резонатора. Впервые этот результат был получен в работе [81], авторами которой обсуждалась важность слагаемого $\omega_R h$ при анализе так называемой моды с минимальной шириной линии. Разница между различными модами внешнего резонатора в предложенной оценке определяется параметром B_k . Минимально возможная (положительная) величина обратной связи, при которой может происходить бифуркация Андронова – Хопфа, очевидно, достигается при условии $\cos(\omega_R h) = -1$ и $B_k = B_{max} = \sqrt{1+\alpha^2}$ и имеет вид:

$$\gamma_{min}^H \approx \frac{\lambda_R}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

При увеличении коэффициента обратной связи устойчивость теряют лишь те моды, для которых $B_k > 0$ [61]. Одной из таких мод является мода с минимальной шириной линии или, иными словами, минимальное пороговое состояние. Она достигается при выполнении соотношения

$$\omega_0 h = -\operatorname{arctg} \alpha \mod 2\pi$$

и с точностью до 2π удовлетворяет равенствам

$$\eta_k = -\operatorname{arctg} \alpha \quad \text{или} \quad \cos \eta_k = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

В этом случае

$$B_* = \frac{\alpha^2 - 1}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

При достаточно больших значениях α , характерных для полупроводниковых лазеров, эта мода, а также моды, достаточно близкие к ней, теряют устойчивость при малом увеличении величины обратной связи γ .

В то же время существует особая мода — так называемая мода с максимальным усилением [61]. Как уже отмечалось, это состояние достигается при

$$\omega_0 h = \gamma h \alpha$$

и удовлетворяет следующим равносильным соотношениям:

$$\omega_k h \mod 2\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \eta_k = 1.$$

Здесь

$$B^* = -1.$$

Таким образом, утверждается [61], что мода с максимальным усилением физически «почти всегда» устойчива. Кроме того, из оценки (64) в силу соотношения

$$\operatorname{arctg}(1/\alpha) + \operatorname{arctg} \alpha = \pi/2, \quad \text{при} \quad \alpha > 0$$

следует, что моды, удовлетворяющие неравенству

$$-\operatorname{arctg}(1/\alpha) < \eta_k < \operatorname{arctg}(1/\alpha) + 2 \operatorname{arctg} \alpha,$$

также не могут быть дестабилизированы. Подчеркнем, что, как отмечено в [97], формулы, подобные (64), получают в результате использования асимптотических методов, то есть они не вполне точны. Кроме того,

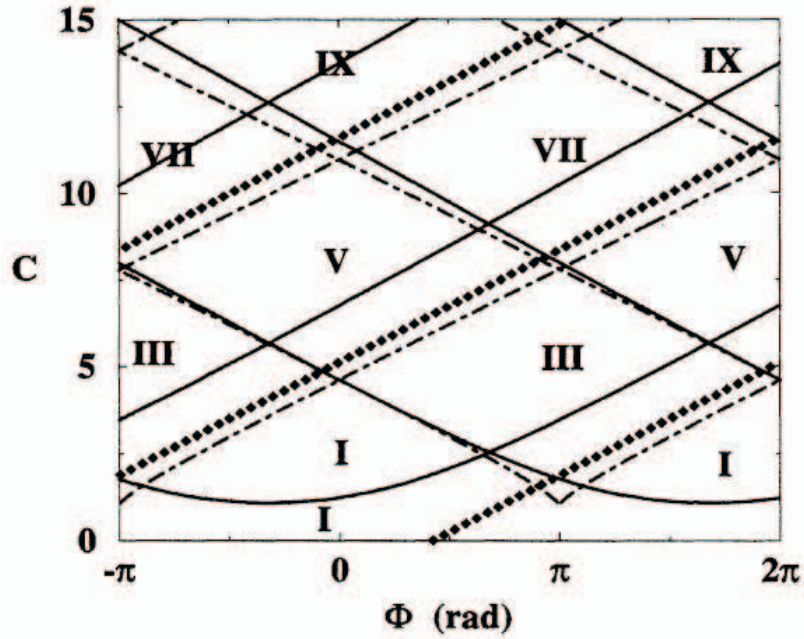


Рис. 15. Области устойчивости мод внешнего резонатора на плоскости (Φ, C) , где $\Phi = \omega_0 h + \arctg \alpha$, $C = \gamma h \sqrt{1 + \alpha^2}$. Штрихпунктирные линии разделяют области с разным числом мод. Они независимы от параметров v и Q . При пересечении сплошной линии снизу вверх в результате бифуркации Андронова – Хопфа одна из мод теряет устойчивость. Ромбиками показано расположение всегда устойчивых мод с максимальным усилением. Используются следующие значения параметров: $\alpha = 4$, $\lambda_R h = 1.567$ и $\cos(\omega_R h) = -1$. Рисунок взят из статьи [61]

известно, что в целом ряде случаев ни при помощи численного моделирования, ни в эксперименте систему не удастся вывести на эти «хорошие» стационарные решения. Большинство исследователей объясняют этот факт тем, что бассейн притяжения таких мод крайне мал. В самом деле, при возрастании эффективной величины обратной связи число мод растет, а межмодовые расстояния уменьшаются. Это приводит к сокращению областей с постоянной генерацией.

Упомянутая ранее эффективная фаза обратной связи в случае моды с минимальной шириной линии имеет простой вид:

$$\Phi_* = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

а для моды с максимальным усилением получаем, что

$$\Phi^* = \gamma h \alpha + \arctg \alpha + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Условия, при которых происходит потеря модой устойчивости в результате бифуркации Андронова – Хопфа, на основе оценки (64) сводятся к следующему аналитическому соотношению [61]:

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \arctg \alpha - \frac{2\alpha G}{1+\alpha^2} \pm \arccos \left(\frac{G}{\gamma h \sqrt{1+\alpha^2}} \right) \pm \\ \pm \frac{\alpha^2 - 1}{1+\alpha^2} \sqrt{\gamma^2 h^2 (1+\alpha^2) - G^2} + (2m+1)\pi, \end{aligned}$$

где

$$G = \frac{2\lambda_R h}{1 - \cos(\omega_R h)}.$$

Заметим, что в случае $Q \gg 1$ колебания затухают достаточно быстро: $\lambda_R \gg 1$. Это означает, что $G \gg 1$ и подкоренное выражение может оказаться отрицательным. Однако бифуркации Андронова – Хопфа в системе (46) даже при таких условиях все равно происходят. Таким образом, оценка (64) в этой ситуации перестает быть достаточно точной.

В том случае если ток накачки асимптотически близок к первой пороговой величине, то есть $Q \rightarrow 0$, то частота колебаний, возникающих в результате бифуркации Андронова – Хопфа, асимптотически близка к частоте РК [66]. Особенности неустойчивостей, возникающих при небольших значениях α , отмечались в [88].

Если зафиксировать фазу обратной связи $\omega_0 h$, то при увеличении параметров γ , h , α , помимо возникновения новых пар мода-антимода в результате бифуркации седло-узла, наблюдается последовательность бифуркаций Андронова – Хопфа с переходом от мод к автоколебаниям. О

дальнейшей судьбе таких предельных циклов при увеличении величины обратной связи, вообще говоря, известно мало. В определенной мере восполнить этот пробел могли бы работы, посвященные аккуратному теоретическому анализу возникающих автоколебаний, подобные [81].

Полное понимание сложной нелинейной динамики, которую показывает полупроводниковый лазер с оптической обратной связью, таким образом, больше всего полагается на тщательное численное моделирование и экспериментальные исследования. Тем не менее результаты линейного анализа устойчивости состояний равновесия и предельных циклов необходимы для понимания и объяснения экспериментально наблюдаемого поведения.

3.4. Условия Петермана – Тейгера, мосты и режимы короткого резонатора

Описания так называемых колебаний Петермана – Тейгера [103] (PT pulsations) в полупроводниковом лазере впервые даются в работах [91, 92]. Кроме того, для их обозначения используются такие термины, как решения в виде комбинации двух мод внешнего резонатора [36] (mixed external cavity mode solutions) или микроволновые же колебания [37] (microwave oscillations) в силу их высокочастотности. Было замечено, что существование пары мод с почти одинаковыми значениями инверсии населенностей Z может приводить к образованию в системе устойчивых колебаний с частотой, близкой к разности между частотами таких мод. Численные и экспериментальные результаты Тейгера и Петермана были позже подтверждены методами асимптотического разложения [36] и независимыми исследованиями [75, 76]. Отмечается [37, 103], что обнаруженные периодические режимы наблюдаются в коротком резонаторе, то есть величина запаздывания h в этом случае сравнительно невелика. Частота колебаний пропорциональна $1/h$ [37].

В предположении, что значения параметра v достаточно велики, колебания Петермана – Тейгера допускают следующее асимптотическое представление [36]:

$$E(t) = E_0(t) + v^{-1}E_1(t) + \dots, \quad Z(t) = Z_0(t) + v^{-1}Z_1(t) + \dots,$$

где $Z_0(t)=Z_0$ есть константа, а

$$E_0(t) = A_1 e^{i(\omega_1 - \omega_0)t} + A_2 e^{i(\omega_2 - \omega_0)t}.$$

С помощью этой асимптотики авторами статьи [36] получены интересные аналитические результаты. В частности, приводится оценка величин

параметров, при которых происходит появление и исчезновение таких решений, то есть приближенно определены области их существования. Изучаются условия устойчивости колебаний Петермана – Тейгера, а также условия возникновения из них устойчивых квазипериодических режимов в результате бифуркации Андронова – Хопфа.

Таким образом, условия Петермана – Тейгера достаточно просты и сводятся к условиям существования двух мод с одинаковой инверсией населенностей $Z_1=Z_2=Z$, но с разными частотами $\omega_1 \neq \omega_2$. Очевидно, здесь можно также говорить об идентичной интенсивности $|E_1|=|E_2|=|E|$. Иначе при совпадении частот реализуется ситуация, когда моды совпадают. Простейшим вырожденным случаем такого рода является бифуркация седло-узла. Появляющаяся пара мода-антимода в пределе удовлетворяет требованию $Z_1=Z_2=Z$, однако возникновения необычных колебаний в системе не происходит. Условия Петермана – Тейгера на основе системы (52) могут быть записаны аналитически:

$$\begin{cases} vZ = -\gamma \cos(\omega_j h), \\ (\omega_j - \omega_0) = \alpha vZ - \gamma \sin(\omega_j h), \end{cases} \quad (65)$$

где $j=1, 2$. Из первого уравнения системы (65) при условии $\omega_1 \neq \omega_2$ несложно получить, что частоты ω_1 и ω_2 связаны следующим образом:

$$\omega_1 h = 2\pi m - \omega_2 h, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично, преобразуя вторые уравнения (одно относительно ω_1 , а другое относительно ω_2), приходим к равенствам вида

$$\omega_1 + \omega_2 = 2(\omega_0 + \alpha vZ), \quad \omega_1 - \omega_2 = 2(\omega_1 - \omega_0 - \alpha vZ).$$

Из полученных соотношений следует, что

$$(\omega_0 + \alpha vZ)h = \pi m.$$

Разделим первое уравнение системы (65) на второе и исключим, таким образом, параметр γ :

$$\frac{vZ}{\omega_j - \omega_0 - \alpha vZ} = \operatorname{ctg}(\omega_j h).$$

Используя периодичность котангенса, окончательно получим

$$vZ = (\omega_j - \omega_0 - \alpha vZ) \operatorname{ctg}((\omega_j - \omega_0 - \alpha vZ)h). \quad (66)$$

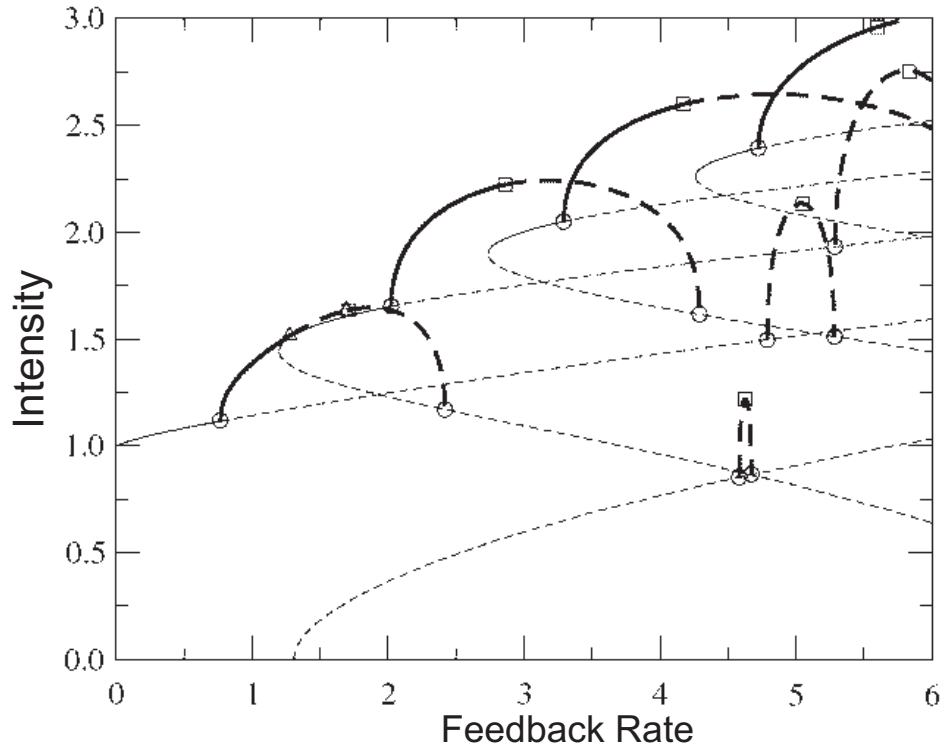


Рис. 16. Бифуркационная диаграмма стационарных и периодических решений. Сплошные линии соответствуют устойчивым решениям, пунктирные — неустойчивым. Кружками, треугольниками и квадратами обозначены соответственно бифуркации Андронова – Хопфа, удвоения периода и образования тора. При наличии пары мода-антимода почти одинаковой интенсивности возникают колебания Петермана – Тейгера (неустойчивые). Значения параметров системы (48): $T=\tau=10^3$, $P=10^{-3}$, $\alpha=4$, $\Omega\tau=-1$. Рисунок заимствован из работы [76]

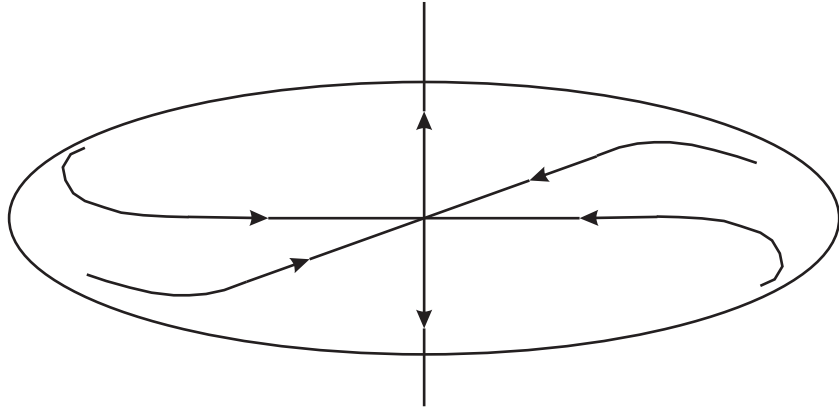


Рис. 17. Локальная динамика в окрестности антимоды при ее слиянии с неустойчивым циклом

Существование устойчивых колебательных решений [103] можно ожидать лишь в том случае, когда одна из мод в паре Петермана – Тейгера устойчива. На рис. (16) колебания такого типа неустойчивы, поскольку возникают на дестабилизированной моде.

В работе [37] утверждается, что при достаточно больших α область устойчивости такого решения в пространстве параметров ограничена. В случае малых α реализуется ситуация, когда условия Петермана – Тейгера выполняются для двух устойчивых мод. При взаимодействии между ними также возможно образование высокочастотных колебаний [37].

В статьях [45, 76] были установлены интересные взаимосвязи между модами и антимодами, изображенные на бифуркационной диаграмме (16). Как известно, образовавшийся на моде цикл Андронова – Хопфа (Hopf on mode) теряет устойчивость при дальнейшем увеличении величины обратной связи. Оказалось, что, в конце концов, этот неустойчивый цикл заканчивает свое существование, сливаясь с антимодой (Hopf on antinode), как схематически показано на рис. (17). Несмотря на седловую неустойчивость антимоды, представленный сценарий (названный в [45] сценарием типа Шильникова) выглядит весьма правдоподобно, поскольку все простейшие решения системы (46) имеют бесконечное число устойчивых направлений. Такого рода связи между модами и антимодами получили название мостов [45, 76]. Результат был получен численными методами нахождения устойчивых и неустойчивых периодических решений системы (46).

Отмечено, что при больших значениях α структура мостов сильно усложняется из-за взаимодействия с гомоклиническими орбитами в окрестности антимоды [45].

Обнаруженные мосты позволяют объяснять возникновение хаотиче-

ской динамики в системе (46) при увеличении величины обратной связи. В самом деле, аттракторы, появляющиеся при бифуркациях цикла, будут неизбежно взаимодействовать с антимодой и, таким образом, терять устойчивость. Представленный сценарий объясняет природу некоторых наблюдаемых в экспериментах неустойчивостей, которым на языке модели Ланга – Кобаяши соответствует явление кризиса аттракторов.

Так называемые режимы короткого резонатора (РКР, short cavity regime, SCR) в полупроводниковом лазере с запаздывающей обратной связью были обнаружены экспериментально в [50]. Результаты численного исследования модели Ланга – Кобаяши, показанные на рис. (18), (19), подтвердили неслучайный, закономерный характер наблюдаемого феномена. В статье [51] изучены возможные сценарии перехода при изменении фазы обратной связи $\omega_0 h$ от стационарной генерации через периодическое излучение к сложным режимам, образованным так называемыми регулярными импульсными пакетами (РИП, regular pulse package, RPP) и нерегулярными импульсными пакетами (НИП, irregular pulse package, IPP). Особо подчеркивается чувствительность РКР к изменениям фазы обратной связи в отличие от режимов длинного резонатора (РДР, long cavity resonator, LCR) при $h \gg 1$. Утверждается, что РКР возникают как проявления динамики системы Ланга – Кобаяши в окрестности неустойчивых многообразий простейших решений и определяются структурой этих многообразий. Важное место в сценарии фазовых перестроек в модели (46) при изменении параметра $\omega_0 h$ занимают прямые и обратные бифуркации седло-узла, при которых возникает новая пара мода-антимода. Высказывается предположение, что РКР могут играть важную роль в возникновении феномена низкочастотных флуктуаций. Обнаружена близкая к линейной зависимость частоты РИП от величины тока накачки в отличие от частоты РК уединенного лазера, связанного при $v \gg 1$ и небольших Q с параметром накачки законом, близким к квадратичному. Отмечено, что величина запаздывания h не оказывает влияния на характеристики этой зависимости. Авторы отмечают хорошую согласованность между результатами экспериментов и теоретическими выводами, полученными на основе модели Ланга – Кобаяши [51].

В работе [90] выявлен ряд особенностей динамики РКР. Периодические режимы РИП могут претерпевать бифуркации удвоения периода. Численно показано сосуществование РИП с устойчивым состоянием равновесия (соответствующего моде) или предельным циклом. Наибольшую область притяжения при небольшой накачке такие регулярные режимы имеют при значениях h порядка π/ω_R , а при h , оцениваемых примерно как $2\pi/\omega_R$, происходит переход от РКР к низкочастотным флуктуациям,

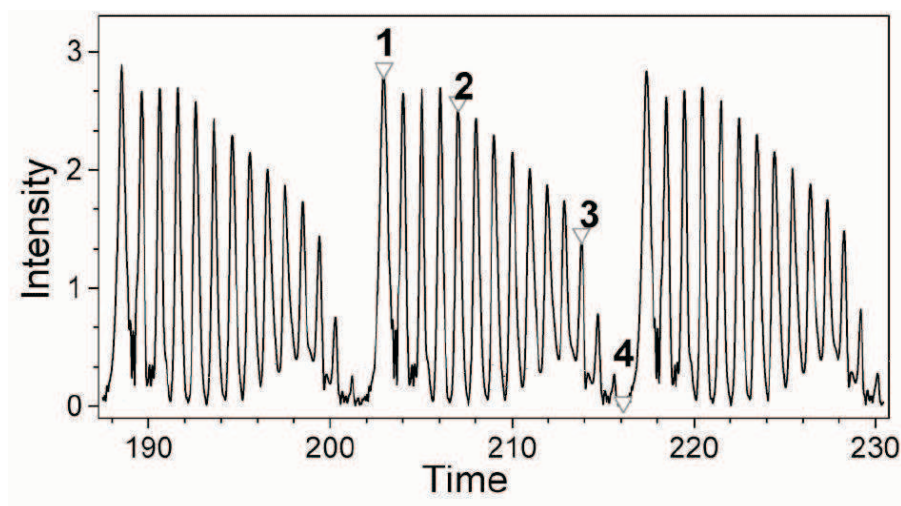


Рис. 18. Зависимость интенсивности излучения полупроводникового лазера от времени в режиме РИП. Рисунок заимствован из [50]

описанным в п. 1.2.7. На основании анализа бифуркаций динамика режимов РИП объясняется существованием мостов [90], сходных по своим свойствам с мостами для колебаний Петермана – Тейгера.

При сравнении колебаний Петермана – Тейгера и регулярных импульсных пакетов может возникнуть закономерный вопрос: не представляют ли они одно и то же явление? И в том и в другом случае мы имеем дело с высокочастотными регулярными осцилляциями, возникающими в коротком резонаторе. Однако в природе обнаруженных циклов все же существует разница. Основное различие состоит в том, что в возникновении колебаний Петермана – Тейгера «принимают участие» две моды, как показано на рис. (16), в образовании РИП — целый ансамбль (рис. (19)).

3.5. Явление когерентного коллапса

Как известно, две волны называются когерентными, если разность фаз между ними постоянна. На практике, как правило, используются лазеры, которые создают когерентное электромагнитное поле, то есть излучают в достаточно узком диапазоне частот. В терминах решений модельных уравнений это иногда означает излучение на одной строго заданной частоте, соответствующей одной из устойчивых мод. Когерентным коллапсом (КК, coherence collapse, CC) в экспериментальной физике называют дестабилизацию лазера, приводящую к резкому уширению (в сотни и тысячи раз) спектра излучения. Как отмечается в [37], КК возникает в результате взаимодействия между частотами мод внешнего резонатора и частотой РК лазера. На языке математических моделей

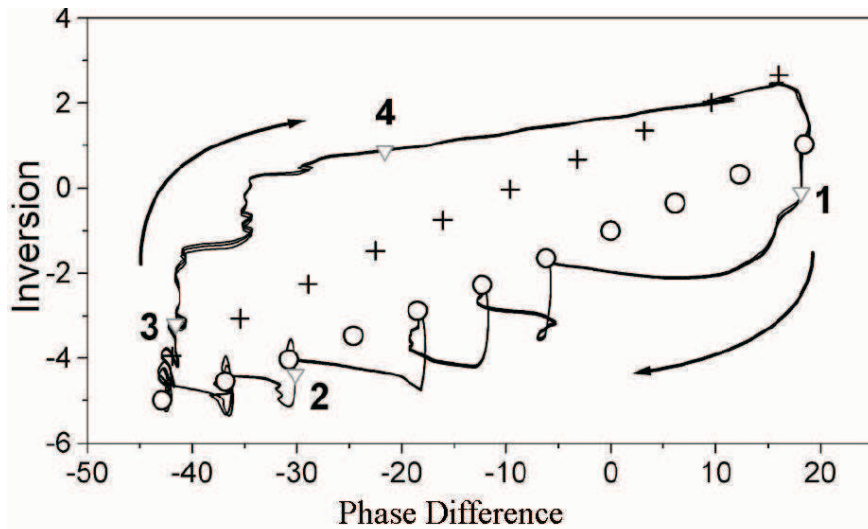


Рис. 19. Проекция фазовой траектории РИП на плоскости (η, Z) . Кружками обозначены моды, крестиками — антимоды. Рисунок взят из статьи [50]

оптических квантовых генераторов феномен КК обычно выражается через явление детерминированного динамического хаоса. В модели Ланга – Кобаяши состояние когерентного коллапса [44, 49, 87, 97] реализуется, когда ток накачки заметно превосходит первую пороговую величину ($Q > 2$) и интенсивность вторичного запаздывающего излучения (ОС) достигает некоторого критического значения, сопоставимого по порядку с параметром v . Следует отметить, что в большинстве работ не приводится четкого определения для режима когерентного коллапса, не говоря уже об установлении его границ. В результате оказывается довольно трудно надежно классифицировать всевозможные типы нерегулярной динамики, наблюдаемой в модели (46).

При когерентном коллапсе в полупроводниковом лазере устанавливается достаточно сложное динамическое состояние с десятками и сотнями уже неустойчивых мод внешнего резонатора, а также всегда неустойчивых антимод или седловых точек. Каждая из таких точек имеет конечное число неустойчивых и счетное число устойчивых направлений. Исходя из этого, феномен КК объясняют как «случайный» перескок с моды на моду [34]. Важной особенностью КК является близость среднего значения интенсивности колебаний к одной и той же константе вне зависимости от отрезка усреднения. При уменьшении параметра накачки в лазере начинают происходить внезапные падения интенсивности излучения через непредсказуемое время. Таким образом осуществляется переход [48] к так называемым низкочастотным флуктуациям — друго-

му типу хаотической динамики, обусловленной запаздывающей обратной связью. К настоящему моменту опубликовано большое количество численных и экспериментальных результатов, касающихся хаотической природы нелинейной динамики в режимах КК.

В 1990 году [70] было предложено первое убедительное доказательство хаоса в полупроводниковых лазерах, обусловленное слабой обратной связью. В этом эксперименте наблюдался квазипериодический переход к хаосу, прерываемый иногда захватом частоты. Там же были обнаружены переходы, обусловленные спонтанным излучением, между двумя сосуществующими аттракторами. Дальнейшее поведение уже численно моделировалось в терминах захвата накачки [93]. Одной из особенностей этой работы стало изучение наряду с системой Ланга – Кобаяши уравнений, которые включают заданное внешнее воздействие вместо слагаемого с запаздыванием. Детальное теоретическое и экспериментальное изучение этого явления было дано позже [71], в 1992 году. Главным результатом этой статьи явилось надежное обоснование сосуществования циклов и торов, а также гипотезы относительно природы хаоса в полупроводниковом лазере. Анализ поведения предельных циклов и различных типов неустойчивостей в случае достаточно большой накачки, выполненный в [81], подтвердил и обосновал сделанные выводы.

В эксперименте 1993 года, описанном в статье [104], впервые на практике наблюдался фейгенбаумовский сценарий перехода к хаотической динамике. Каскад бифуркаций удвоения периода реализуется всякий раз, когда частота РК захватывается внешним резонансом. В отсутствие такого захвата частоты наблюдается квазипериодический переход к хаосу. Фрактальная природа КК аттрактора была показана в результате вычисления размерностей [67]. По какому пути пойдет лазер, зависит от длины внешнего резонатора. Если эта величина достаточно мала, то возникновение хаотической динамики происходит исключительно по сценарию Фейгенбаума. Анализ решений модели Ланга – Кобаяши, приведенный в п. 3.7, подтверждает этот факт.

В моделях полупроводниковых лазеров отмечаются явления мультистабильности и кризиса аттракторов. Возникновение каждого из сосуществующих аттракторов в конечном счете связано с одной из мод внешнего резонатора, которая при увеличении величины обратной связи претерпевает ряд бифуркационных переходов. Такие переходы связаны с образованием в фазовом пространстве системы (46) неустойчивых торов. Когда все торы перестают быть ω -предельными множествами, в соответствии с результатами, представленными в [68], возникают явления перемежаемости и гиперхаоса.

Поскольку явление детерминированного хаоса долгое время воспринималось как нежелательное, естественным образом возник вопрос о возможных путях его преодоления, то есть сведения динамики системы к регулярным режимам. Возможность управления хаосом применительно к полупроводниковым лазерам впервые обсуждалась в статье [74]. Вскоре для этих целей была предложена схема, известная как случайная линейная обратная связь [84] (occasional proportional feedback). Ее суть предельно проста. Если рассматривать хаотический аттрактор как устойчивую совокупность неустойчивых регулярных траекторий, то возникает вопрос, можно ли при помощи достаточно малых управляющих сигналов «заблокировать» систему на одной из таких орбит. При этом важно не забывать, что управляющее воздействие должно с течением времени сходиться на нет, то есть асимптотически стремиться к нулю. Иначе вместо того, чтобы на самом деле «управлять хаосом», мы просто изменим изучаемую динамическую систему, перейдем к другой модели.

Управлению динамическим хаосом в режимах КК с помощью техники случайной линейной обратной связи было посвящено несколько работ, например [62, 63]. Для практической реализации такой схемы использовался лазерно-диодный интерферометр. Теоретически и экспериментально установлено, что, динамически изменяя время задержки и пользуясь предложенной схемой, можно добиться стабилизации почти гармонических периодических траекторий. При этом синхронизированные частоты допускают достаточно точную оценку из отношения параметра запаздывания и времени затухания колебаний в системе. Однако в эксперименте [62] управляющее воздействие не было асимптотически исчезающим. В более поздних практических исследованиях [63] теоретический анализ модели Ланга – Кобаяши использовался для нахождения таких регулярных траекторий, которые могли бы быть стабилизированы с помощью случайной линейной обратной связи. Соответствующая методика нахождения неустойчивых периодических орбит была разработана в нескольких работах, например в [94].

Таким образом, возможным путям преодоления динамического хаоса, который долгое время воспринимался как нежелательное явление, посвящен ряд работ, например [31, 62, 63, 74, 84, 94].

3.6. Низкочастотные флуктуации

Сизиф, герой греческих мифов, был осужден богами вкатывать громадный и тяжелый камень на крутую и высокую гору. Всякий раз, когда вершина уже близка, камень вырывается из рук Сизифа и катится

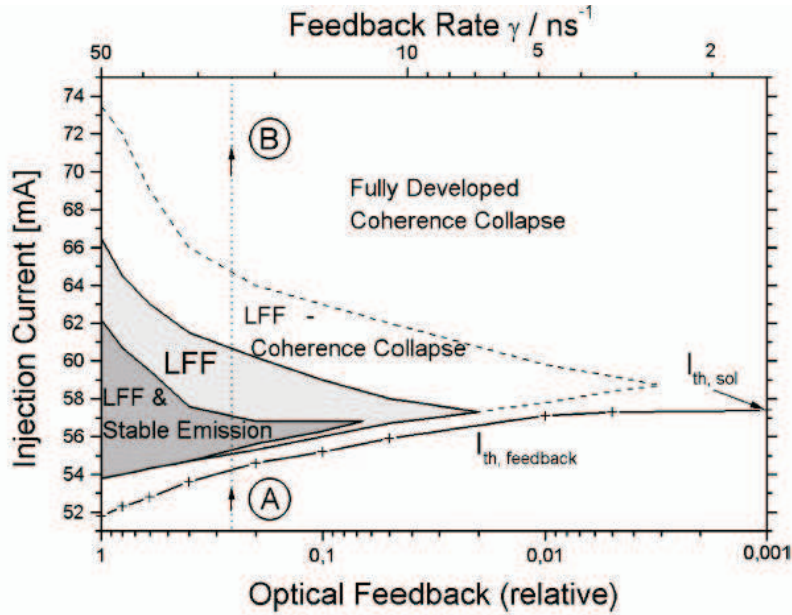


Рис. 20. Области с различной динамикой полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью в зависимости от тока накачки и силы обратной связи. Диаграмма взята из [48]

вниз. Он вновь вынужден начинать всю работу сначала. Так вечно катит камень Сизиф и не может никогда достигнуть вершины горы — своей заветной цели.

Эта легенда дала название одному интересному феномену, наблюдаемому в лазерной физике. Когда полупроводниковый лазер подвергается действию оптической сильно запаздывающей обратной связи при величине накачки, близкой к первому порогу (в модели Ланга – Кобаяши (46) Q есть малый положительный параметр, а задержка h достаточно велика), в спектре мощности появляется низкочастотный пик. Такие низкочастотные колебания характеризуются длительным (на отрезке, превышающем $10h$) постепенным увеличением интенсивности излучения лазера, которое сменяется ее внезапным падением до околонулевого уровня, после чего процесс повторяется. Подобное динамическое поведение получило название «эффект Сизифа» [96]. Альтернативный термин для обозначения этого феномена носит наименование низкочастотных флуктуаций (НЧФ, low frequency fluctuations, LFF). Заметим, что «эффект Сизифа» в полупроводниковом лазере с запаздывающей обратной связью реализуется при тех же типичных значениях параметров, что и когерентный коллапс, за исключением величины накачки Q .

Явление низкочастотных флуктуаций в лазерах класса В во внешнем оптическом резонаторе стало изучаться с середины 1970-х годов. В

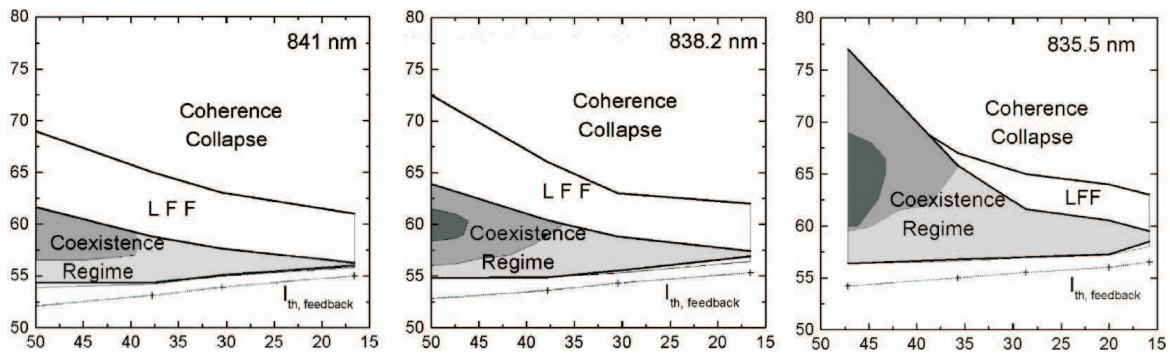


Рис. 21. Области с различной динамикой полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью в зависимости от тока накачки и силы обратной связи при $\alpha \approx 2.8$; $\alpha \approx 2.1$; $\alpha \approx 1.6$. Рисунки заимствованы из работы [49]

статье [80] отмеченный феномен получил название низкочастотных автоколебаний (low frequency self-pulsations, LFP), в отличие от более распространенных высокочастотных колебаний (high frequency pulsations, HFP). Первое экспериментальное наблюдение «эффекта Сизифа» в полупроводниковом лазере с запаздывающей оптической обратной связью относится [39] к 1981 году. После этого эксперимента петля НЧФ стала рассматриваться как важная характеристика слабого тока. Одно из первых объяснений феномена НЧФ было предложено [52] в 1986 году. В этой работе получен целый ряд результатов, касающихся динамики уравнений Ланга – Кобаяши. В частности, предпринята попытка упростить исходную модель через адиабатическое исключение уравнения для фазы. Также авторами выписано уравнение движения в асимметричном потенциальном поле с конечной высотой барьера для ограниченной области малых осцилляций и получено уравнение Фоккера – Планка для распределения плотности вероятности амплитуд колебаний. В предложенной модели система, совершающая над потенциальной ямой переходы, обусловленные спонтанным излучением, стохастически описывает статистику временного интервала между падениями интенсивности. Это объяснение феномена НЧФ оказалось достаточно удачным, поскольку полученные в [52] результаты качественно хорошо соотносились с экспериментальными данными.

Тем не менее предложенная стохастическая модель НЧФ до сих пор не имеет ясного теоретического обоснования. Поэтому исследовательские попытки найти физический источник НЧФ не прекращались и продолжают по сей день. В 1988 году в [69] была разработана спектральная итерационная схема, базирующаяся на переходе от дифференциальных

уравнений к дискретному отображению относительно инверсии населенностей. В основе этого перехода лежит идея переключения, обусловленного шумом. Это переключение приводит к одновременной динамической устойчивости минимального порогового состояния и состояния низкой интенсивности. Предложенная в [69] схема неплохо работает до тех пор, пока в качестве начальных состояний берутся состояния сразу после падения интенсивности излучения. Однако для предсказания долговременного поведения она не подходит из-за участков сильной вариации инверсии [96].

Авторы статьи [85] в 1989 году предположили, что низкочастотным флуктуациям соответствует хаотический аттрактор в фазовом пространстве в модели Ланга – Кобаяши. Эта гипотеза была основана на экспериментально подтвержденной [85] физической стохастичности динамики полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Явление НЧФ было классифицировано как перемежаемость II типа с обращением времени.

В 1994 году источник НЧФ был обнаружен Сано [87]. Он установил, что модель Ланга – Кобаяши проявляет низкочастотные флуктуации как результат взаимодействия между антимодой и потерявшим устойчивость предельным циклом, ассоциированным с одной из мод внешнего резонатора. В работе [87] впервые численно показано, что режим низкочастотных флуктуаций есть медленное «путешествие по модам», которое завершается почти мгновенным прыжком к моде с минимальной шириной линии. Экспериментально получить доказательство такого сценария очень трудно. В работе [96] теоретически установлено, что низкочастотные флуктуации на длительном временном промежутке между предшествующим и последующим кризисом фактически состоят из нерегулярных пикосекундных пульсаций. Такое поведение позже экспериментально наблюдалось авторами статьи [38]. Экспериментальные данные хорошо качественно и даже количественно согласуются с выводами, полученными из анализа уравнений Ланга – Кобаяши.

Механизм НЧФ носит еще одно название [38] — хаотическое блуждание со сдвигом. Его смысл можно пояснить следующим образом. Расположенные на нижнем полуэллипсе на рис. (11) моды в результате бифуркации Андронова – Хопфа теряют устойчивость с образованием в системе (47) предельных циклов. Полученные циклы, в свою очередь, могут терять устойчивость. При этом возможно возникновение циклов удвоенного периода, торов и других аттракторов. Далее происходит образование еще более сложных режимов генерации за счет взаимодействия между этими аттракторами (или пока еще устойчивыми цикла-

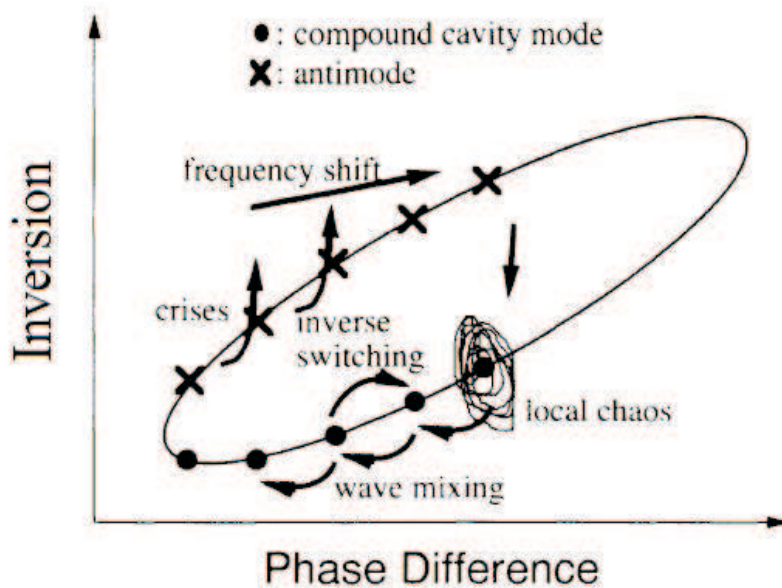


Рис. 22. Схема поведения фазовой траектории в режиме НЧФ на плоскости (η, Z) из работы [87]

ми). Согласно результатам перечисленных работ, вследствие взаимодействия такого режима с антимодой он теряет устойчивость, и, в конце концов, возникает эффект хаотического блуждания фазовой траектории между потерявшими устойчивость сложными аттракторами, возникшими в конечном счете из мод внешнего резонатора. Заметим, что, несмотря на нерегулярность этого блуждания, оно имеет четко выраженное главное направление — к увеличению амплитуды электрического поля $|E|$. Характер этого движения экспериментально исследовался в [54, 64]. На языке модели Ланга – Кобаяши фазовая траектория системы стремится к «вершине эллипса», к «вершине горы» на рис. (12), к стационарному состоянию с максимальным усилением. Работа в этом режиме дает наибольшую отдачу от обратной связи. Однако, как и мифическому Сизифу, ей не суждено попасть к заветной цели — «камень стремительно летит вниз». За короткое время происходит сдвиг (или сброс) частоты генерации лазера до той, которая соответствует минимальному пороговому состоянию. Экспериментальное исследование феномена резкого падения интенсивности излучения и очередная попытка его объяснения были предприняты в работе [40].

После обнаружения режимов РИП было высказано естественное предположение, впоследствии подтвержденное, об их взаимосвязи с НЧФ. В самом деле, в обоих случаях характер динамики системы (46) относительно мод внешнего резонатора, представленный на рис. (19) и (22),

примерно один и тот же. Разница заключается в регулярности режимов и обусловлена длиной резонатора [90].

Как отмечается в [48], мода с максимальным усилением при любом физически осмысленном выборе параметров представляет собой альтернативу НЧФ, то есть в системе (46) реализуется мультистабильность, и режим НЧФ не является единственно возможным аттрактором. Отличие частоты состояния с максимальным усилением от частоты колебаний в режиме свободной генерации обусловлено параметром α . Когда $\alpha=0$, эллипс переходит в окружность. В этом случае состояние с максимальным усилением имеет ту же частоту, что и лазер в режиме свободной генерации, и НЧФ не будут происходить. Зависимость размеров области устойчивой генерации на одной моде от параметра α исследовалась в [49]. Как и следовало ожидать, при увеличении α эта область уменьшается. Свойства устойчивости моды с максимальным усилением обсуждались в [61]. Авторами работы [53] численно и экспериментально установлена возможность возникновения НЧФ уже при сравнительно небольших значениях величины эффективной обратной связи, при этом отмечается достижимость моды с максимальным усилением.

Сдвиги в интенсивности излучения (сбросы или падения мощности) обусловлены тем, что, когда лазер подходит к состоянию с максимальным усилением, расстояния между антимодами и остатками аттрактора уменьшаются. В конце концов, фазовая траектория системы (46) подойдет слишком близко к одной из этих антимод, проявляющих седлоузловую неустойчивость. В результате произойдет падение энергии. Методы асимптотического разложения [61] показывают, что неподвижные точки, близкие к моде с максимальным усилением, наименее неустойчивы. А фактически весьма часто являются устойчивыми. Бассейн притяжения таких точек настолько мал, что система не придет в эти состояния иначе как с помощью некоторых типов больших внешних возмущений или управляющих воздействий. Поскольку те подмножества в пространстве параметров, в которых происходят явления НЧФ и КК, огромны, существуют области, где шум, обусловленный спонтанным излучением, играет важную роль в реальных проявлениях НЧФ.

В работе [34] для более глубокого понимания источника НЧФ было предложено рассматривать в качестве основных не только моды внешнего резонатора, но и целый ряд других структурно устойчивых решений уравнений Ланга – Кобаяши.

Отметим ряд статей, посвященных поискам некоторой упрощенной по сравнению с системой Ланга – Кобаяши, «минимальной» модели, демонстрирующей «эффект Сизифа». Наиболее радикальный шаг в этом

направлении был препринят в работе [55]. Авторы, используя идею разложения слагаемых с запаздыванием в ряд Тейлора, предложили выполнить замены

$$R(t-h) \approx R(t), \quad \frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\psi}{h} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt}, \quad \text{где} \quad \psi = \theta - \theta(t-h),$$

и перейти от системы вида (47) к системе ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt} = R[vZ + \gamma \cos(\omega_0 h + \psi)], \\ \frac{d\psi}{dt} = 2\left[-\frac{\psi}{h} + v\alpha Z - \gamma \sin(\omega_0 h + \psi)\right], \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)R^2. \end{cases} \quad (67)$$

Среди свойств редуцированной модели отмечается, в частности, сохранение стационарных решений и наличие режима с характеристиками, близкими к низкочастотным флуктуациям в системе Ланга – Кобаяши. Правда, остается невыясненным вопрос, почему в упрощенной модели остаются проявления НЧФ, хотя в исходной задаче такие режимы возникают лишь при достаточно большом запаздывании. Тем более что авторы указывают на невозможность описания когерентного коллапса в рамках их модели. Впрочем, высказывается предположение, что, взяв большее число членов разложения, можно добиться лучшего согласования с динамикой системы Ланга – Кобаяши.

В работе [32] рассматривается характерный для полупроводниковых лазеров случай достаточно больших значениях параметров α и v . В качестве редуцированной модели из системы (50) при условии

$$O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leq \gamma \leq O\left(\frac{\sqrt{v}}{\alpha}\right)$$

получено следующее уравнение третьего порядка с запаздыванием относительно фазы Φ :

$$\frac{d^3\Phi}{dt_3^3} + \frac{1+Q}{\omega_R} \frac{d^2\Phi}{dt_3^2} + \frac{d\Phi}{dt_3} - \frac{\omega_0}{\omega_R} + \frac{\alpha\gamma}{\omega_R} \cos(\Phi - \Phi(t_3 - \omega_R h)) = 0, \quad (68)$$

где $t_3 = \omega_R t$, $\omega_R = \sqrt{2Qv}$ и все величины выражены через параметры исходной задачи (46).

В статье [77] утверждается, что при большой задержке $h \gg 1$ система Ланга – Кобаяши может быть сведена к одному комплексному уравнению с запаздыванием вида

$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha) (Q - |E|^2) E + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h). \quad (69)$$

Считая параметр Q малым и исключая его таким образом из рассмотрения, авторы предлагают уравнение (69) как упрощенную модель для изучения механизма возникновения НЧФ. В уравнении (69) наблюдается [78] сложная хаотическая динамика, характерная для «эффекта Сизифа», а также явление мультистабильности.

3.7. Асимптотический анализ модели Ланга – Кобаяши при больших значениях параметра накачки

В ряду попыток описания феномена КК отметим математическое исследование модели Ланга – Кобаяши (46), выполненное в предположении, что параметр накачки Q асимптотически велик [7]. Вводя в рассмотрение малый параметр $\varepsilon = Q^{-1}$, выполняя замены переменных и времени, можно свести рассматриваемую модель к частному случаю уравнения (18). Используя методику, описанную в п. 1.5, придем к рассмотрению системы, которая играет роль нормальной формы в задаче о локальной динамике (46) в малой окрестности цикла, который является решением (46) при $\varepsilon = 0$. Полученное в результате уравнение является более простым, чем исходная задача, и описывает «в главном» поведение решений первоначальной системы. Это уравнение представимо в виде

$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha) (|E|^{-2}-1) E + \gamma e^{-i\omega_0 h} E(t-h). \quad (70)$$

Укажем, что оно не имеет решения $E=0$, что можно интерпретировать как требование $E>0$, то есть наличие излучения в условиях сильной накачки.

Моды внешнего резонатора находятся из таких же соотношений, что и в исходной модели, однако задача определения их устойчивости оказывается проще. В этом случае характеристическое уравнение можно записать в виде

$$\lambda^2 + 2\lambda\gamma \cos \eta_k (1-e^{-\lambda h}) + \gamma^2 (1-e^{-\lambda h})^2 + \\ + 2(v-\gamma \cos \eta_k) [\lambda + \gamma (\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) (1-e^{-\lambda h})] = 0. \quad (71)$$

Здесь левая часть содержит меньше слагаемых и меньшие степени λ , чем общий характеристический квазиполином (63). В случае $\cos \eta_k = 1$ для моды с максимальным усилением [61] уравнение (71) сводится к сле-

дующей простой совокупности:

$$\begin{cases} \lambda + \gamma(1 - e^{-\lambda h}) = 0, \\ \lambda + \gamma(1 - e^{-\lambda h}) + 2(v - \gamma) = 0. \end{cases} \quad (72)$$

При $0 < \gamma < v$ у каждого из уравнений (72) отсутствуют корни с положительной вещественной частью. Следовательно, мода с максимальным усилением в случае асимптотически большой накачки является устойчивой. Этот результат хорошо согласуется с выводами, сделанными в работе [61].

Мода с минимальной шириной линии достигается при $\eta_k = -\arctg(\alpha)$. Достаточным условием ее устойчивости является следующая

Теорема 7. Пусть $\eta_k = -\arctg(\alpha)$ и $\gamma \leq \gamma_1 = \frac{v}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Тогда все корни уравнения (71) имеют неположительные действительные части.

Доказательство. Подставим в уравнение (71)

$$\cos \eta_k = (1 + \alpha^2)^{-1/2}, \quad \sin \eta_k = -\alpha(1 + \alpha^2)^{-1/2}.$$

Рассмотрим λ как комплекснозначную функцию действительного аргумента γ . Не принимая во внимание однократный нулевой корень, легко заметить, что $Re \lambda(0) = -v < 0$ при $v > 0$. Положим $\gamma = \gamma_*$ такое, что $\lambda(\gamma_*) = i\omega$, тогда, выделяя его вещественную и мнимую части, получим систему вида

$$\begin{cases} -\omega^2 - 2\omega \frac{\gamma}{\sqrt{1+\alpha^2}} \sin(\omega h) + \gamma^2 [(1 - \cos(\omega h))^2 - \sin^2(\omega h)] + \\ \quad + 2 \left(v - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right) \gamma \sqrt{1+\alpha^2} (1 - \cos(\omega h)) = 0, \\ 2\omega \frac{\gamma}{\sqrt{1+\alpha^2}} (1 - \cos(\omega h)) + 2\gamma^2 (1 - \cos(\omega h)) \sin(\omega h) + \\ \quad + 2 \left(v - \frac{\gamma}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right) [\omega + \gamma \sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega h)] = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение этой системы эквивалентно следующей совокупности:

$$\begin{cases} v \sqrt{1+\alpha^2} = \gamma \cos(\omega h), \\ \omega = -\gamma \sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega h). \end{cases}$$

В силу условий диссипативности задачи (46) первое уравнение совокупности не имеет решений. Заменяя в силу второго уравнения ω в первом

уравнении системы, получим следующие условия:

$$\begin{cases} \gamma(1 - \cos(\omega h)) = 0, \\ \gamma(1 + \alpha^2)(1 + \cos(\omega h)) = 2v\sqrt{1 + \alpha^2}. \end{cases}$$

Поскольку решением системы

$$\begin{cases} 1 - \cos(\omega h) = 0, \\ \omega = -\gamma\sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega h), \end{cases}$$

может быть только $\omega=0$, то далее будем рассматривать только систему

$$\begin{cases} 1 + \cos(\omega h) = \frac{2v}{\gamma\sqrt{1 + \alpha^2}}, \\ \omega = -\gamma\sqrt{1 + \alpha^2} \sin(\omega h). \end{cases}$$

Из нее несложно получить, что

$$\omega^2 = 4v(\gamma\sqrt{1 + \alpha^2} - v).$$

Из условий действительности ω или из естественного ограничения на область значений функции \cos вещественного аргумента

$$0 \leq 1 + \cos(\omega h) \leq 2,$$

получаем те области в пространстве параметров, где могут достигаться бифуркационные значения, при которых на мнимой оси появляются пара комплексно сопряженных корней уравнения (71). При выполнении противоположных условий все корни (71) имеют неположительную вещественную часть. Отсюда непосредственно получаем требуемое неравенство. ■

Исследуя устойчивость минимального порогового состояния в случае большого запаздывания, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} & (\mu\lambda)^2 + 2\mu\lambda \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \alpha^2}} (1 - e^{-\lambda}) + \gamma^2 (1 - e^{-\lambda})^2 + \\ & + 2 \left(v - \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \right) \left[\mu\lambda + \gamma\sqrt{1 + \alpha^2} (1 - e^{-\lambda}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

где $\mu = h^{-1}$, но при этом $\varepsilon = o(\mu)$.

Критерием устойчивости моды с минимальной шириной линии в случае большого запаздывания является

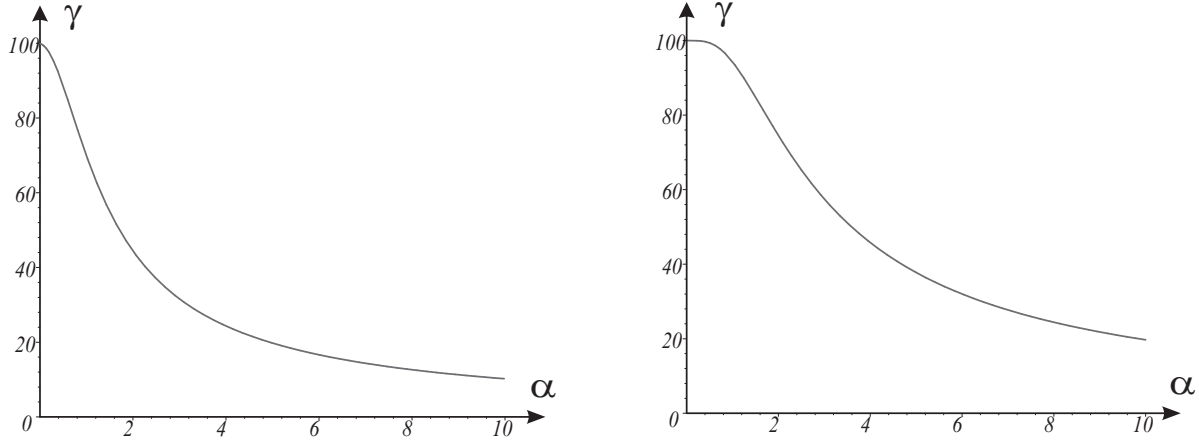


Рис. 23. Графики зависимостей $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$ из теорем 7 и 8 при $v=100$

Теорема 8. Пусть $\eta_k = -\arctg(\alpha)$ и $\gamma < \gamma_2 = \frac{2v\sqrt{1+\alpha^2}}{2+\alpha^2}$. Тогда все корни уравнения (73) имеют неположительные действительные части. В случае $\gamma > \gamma_2$ существует корень с положительной действительной частью.

Условие большого запаздывания существенно используется при доказательстве, схема которого имеет следующий вид. Непосредственной подстановкой несложно проверить, что корней с асимптотикой $i\omega_*\mu^{-p}$, где $p > 0$, у уравнения (71) в случае $\eta_k = -\arctg(\alpha)$ нет. Раскладывая λ в ряд по степеням малого параметра μ , так что

$$\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \mu^2\lambda_2 + \dots,$$

получаем

$$\operatorname{Re}\lambda_0 = \operatorname{Re}\lambda_1 = 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_2 = \gamma(2+\alpha^2) - 2v\sqrt{1+\alpha^2}.$$

Отметим, что $\gamma_1 \leq \gamma_2$, поскольку

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2v\sqrt{1+\alpha^2}}{2+\alpha^2} - \frac{v}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{v\alpha^2}{(2+\alpha^2)\sqrt{1+\alpha^2}} \geq 0.$$

На рис. (23) изображены графики $\gamma_1(\alpha)$ и $\gamma_2(\alpha)$.

Численное исследование уравнения (70) показывает, что наряду с бифуркациями Андронова – Хопфа потери устойчивости модами происходит ряд более сложных перестроек решений. Были обнаружены проиллюстрированные на рис. (24) явления мультистабильности, кризиса аттракторов, последовательного удвоения периода циклов, определены области с хаотической и сложной нехаотической динамикой. Отметим,

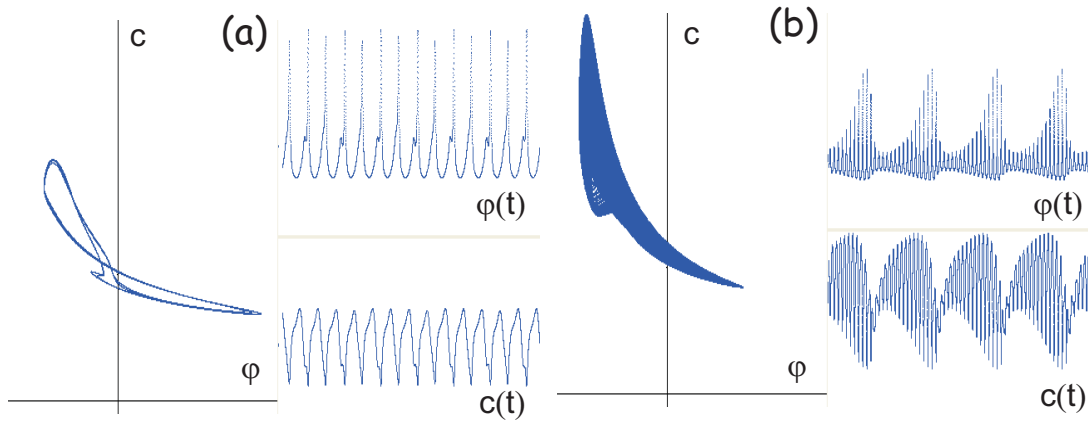


Рис. 24. Иллюстрация явления мультистабильности. При значениях параметров $v=100, \alpha=5, \omega_0 h=1, \gamma=97.9, h=0.04$ найдено 3 различных устойчивых режима: мода, близкая к состоянию с максимальным усилением, цикл удвоенного периода (a) и режим, известный как РИП [51, 90] или регулярный импульсный пакет (b)

что используемые на рис. (24) переменные связаны с полярной заменой в уравнении (70)

$$E(t) = c(t)e^{i\theta(t)},$$

откуда получаем $\varphi(t) = \theta'(t)$.

Важные особенности динамики уравнения (70) отражает бифуркационная диаграмма, представленная на рис. (25). Выбраны следующие значения параметров $v=100, \alpha=5, \omega_0 h=1$. Цифрами обозначены области:

1. Состояние равновесия.
2. Цикл, рождающийся в результате бифуркации Андронова-Хопфа.
3. Сценарий Фейгенбаума — каскад бифуркаций удвоения периода (пунктиром отмечены первые две бифуркации удвоения).
4. Нефейгенбаумовские переходные режимы (в некоторых случаях интерпретировались как квазипериодические или двухчастотные на основе анализа временного ряда с помощью быстрого Фурье преобразования).
5. Хаос.

Штрихпунктиром обозначены первые две бифуркации седло-узла, в которых происходит рождение пары мода-антимода. Правее первой из них существуют области мультистабильности. Изменение бассейнов притяжения лежит в основе перехода (при возрастании параметров h, γ) от

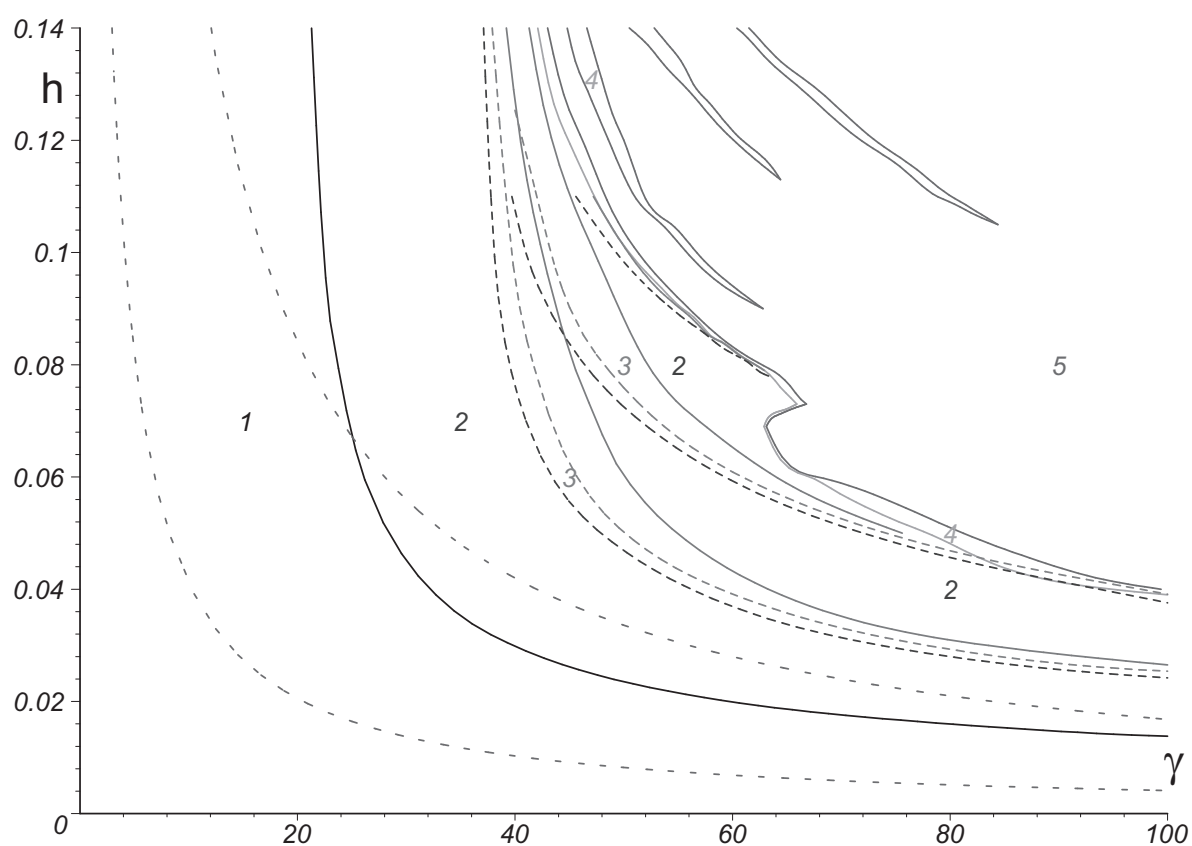
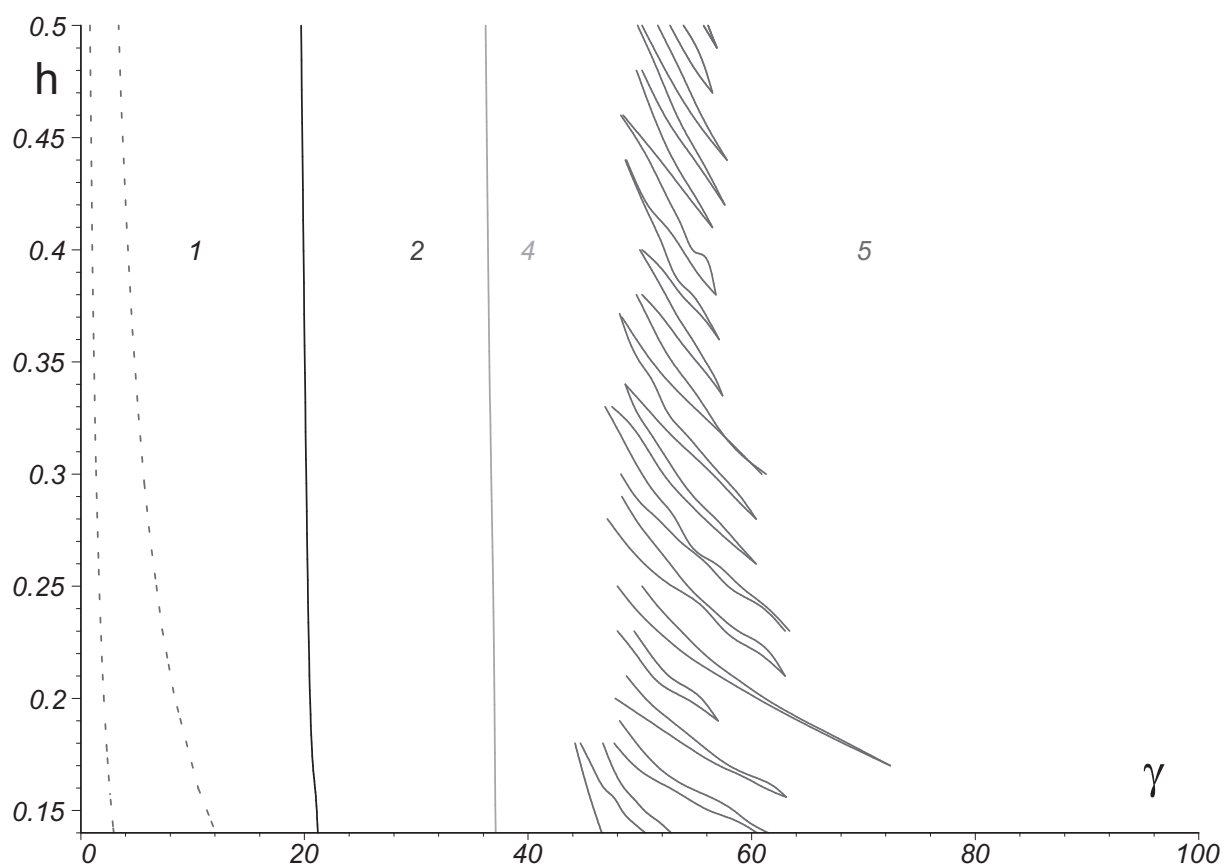


Рис. 25. Бифуркационная диаграмма системы (70) на плоскости (γ, h) , разделенная на две части с разным масштабом по параметру h

все усложняющихся режимов из области 3 к следующей области, обозначенной вновь цифрой 2. Область, отмеченная цифрой 4 на верхней части диаграммы, имеет сложную структуру и содержит многочисленные участки типа 2 и 5 малых размеров. Отметим, что существование устойчивого состояния равновесия, близкого к моде с максимальным усилением, подтверждается численно. При $\gamma > v\sqrt{1+\alpha^2}$ система (46), вообще говоря, теряет свойство диссипативности. Это объясняется тем, что столь большие значения γ физически недостижимы, поскольку величину $v^{-1}\gamma$ следует понимать как ту долю отраженного излучения, которая возвращается в резонатор.

Отметим также, что известные о когерентном коллапсе факты [44, 49, 87, 97, 104] хорошо согласуются с наблюдаемой динамикой системы (70).

3.8. Решения системы Ланга – Кобаяши при большом отношении времен затухания инверсии носителей и фотонов

Еще одно математическое исследование модели Ланга – Кобаяши (46) было выполнено в предположении, что параметр $v \gg 1$. Подробное изложение всех особенностей данной задачи приведено в [8]. Этот случай достаточно сложен с точки зрения математики и важен с точки зрения физики. В самом деле, типичными физическими значениями параметра v являются значения порядка $10^3 - 10^4$, то есть естественно считать его (асимптотически) большим. Оказывается, что в данном случае на основе методики, описанной в п. 1.5, удастся построить совокупность однотипных уравнений, каждое из которых описывает локальную динамику исходной модели в окрестности одной из мод. Таким образом, предлагается альтернативный подход к ряду проблем, связанных с изучением воздействия отраженного излучения на полупроводниковый лазер.

Рассмотрим систему уравнений Ланга – Кобаяши при условии, что параметр v асимптотически велик. Проанализировав зависимость корней характеристического квазиполинома (63) от v , удобно ввести малый параметр следующим образом:

$$\varepsilon = v^{-1/2} \ll 1.$$

Используя малость ε и заменяя

$$Z_k = -\varepsilon^2 \gamma \cos \eta_k,$$

постараемся упростить задачу оценки местоположения корней (63) с максимальной вещественной частью. Для этого выполним перенормировку

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

После необходимых преобразований квазиполином (63) примет вид

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\varepsilon(1+Q)}{1-\varepsilon^2\gamma \cos \eta_k} + \lambda \right] \left[\lambda^2 + 2\varepsilon\gamma \cos \eta_k \left(1-e^{-\lambda h/\varepsilon}\right) \lambda + \varepsilon^2\gamma^2 \left(1-e^{-\lambda h/\varepsilon}\right)^2 \right] + \\ & + 2 \left(Q + \varepsilon^2\gamma \cos \eta_k \right) \left[\lambda + \varepsilon\gamma(\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) \left(1-e^{-\lambda h/\varepsilon}\right) \right]. \end{aligned} \quad (74)$$

Лемма. Квазиполином (74) не имеет корней с асимптотикой $i\omega_*\varepsilon^{-p}$, где $p > 0$.

Доказательство сводится к непосредственной подстановке величины $i\omega_*\varepsilon^{-p}$ в выражение (74). Собирая слагаемые наибольшего порядка ε^{-3p} , получим, что $\omega_*=0$.

Утверждение леммы, сформулированное для корней с нулевой вещественной частью, справедливо и для корней с положительной вещественной частью.

Таким образом, при достаточно малых значениях параметра ε корни характеристического квазиполинома (74), определяющие устойчивость соответствующей моды внешнего резонатора, могут быть представлены в виде ряда по степеням ε :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \dots,$$

то есть корни (63) при $v \gg 1$ имеют асимптотику

$$\lambda = v^{1/2}\lambda_0 + \lambda_1 + v^{-1/2}\lambda_2 + \dots$$

Непосредственная подстановка этого разложения показывает, что в критическом случае $\varepsilon=0$ останется всего три корня, расположенных на мнимой оси и показанных на рис. (26):

$$\begin{cases} \lambda_0^{(0)} = 0, \\ \lambda_0^{(1,2)} = \pm i\sqrt{2Q}. \end{cases}$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ к ним стягивается счетное число корней квазиполинома (74). Таким образом, в исходной задаче при $v \rightarrow \infty$ реализуется критический случай бесконечной размерности.

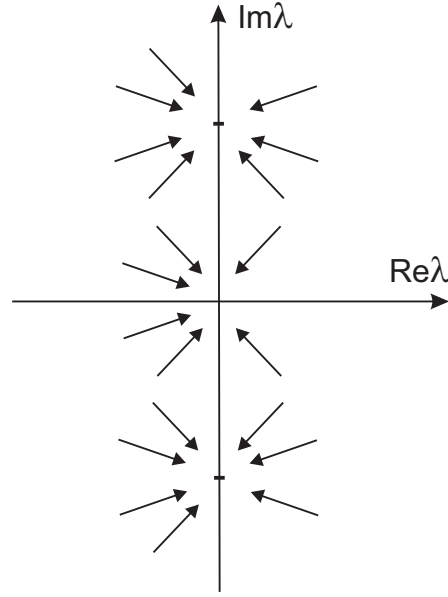


Рис. 26. Асимптотическое поведение корней квазиполинома (74)

Величина $\lambda_1^{(0)}$ находится из следующего уравнения:

$$\lambda_1^{(0)} + \gamma(\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k) \left(1 - e^{-\lambda_1^{(0)} h}\right) = 0. \quad (75)$$

Местоположение в комплексной плоскости решения с наибольшей вещественной частью $Re\lambda_1$ определяется величиной

$$\gamma h(\cos \eta_k - \alpha \sin \eta_k).$$

Если она меньше, чем -1 , то у выписанного уравнения существует корень с положительной вещественной частью $Re\lambda_1^{(0)} > 0$, иначе все корни уравнения, кроме неподвижного нулевого, расположены в левой комплексной полуплоскости $Re\lambda_1^{(0)} < 0$. Это условие в точности повторяет необходимое условие устойчивости для мод внешнего резонатора, которое разделяет их на всегда неустойчивые антимоды и собственно моды, потенциально устойчивые. В этом смысле уравнение, полученное для $\lambda_1^{(0)}$, новой информации не несет. В случае ненулевых комплексно сопряженных $\lambda_0^{(1,2)}$ соотношение для определения $\lambda_1^{(1,2)}$ имеет вид

$$2\lambda_1^{(1,2)} + (1+Q) + \gamma(\cos \eta_k + \alpha \sin \eta_k) \left(1 - e^{-(\lambda_1^{(1,2)} \pm \lambda_0^{(1,2)}/\varepsilon)h}\right) = 0. \quad (76)$$

В данном случае достаточным условием устойчивости является неравенство

$$\frac{1}{2}\gamma h(\cos \eta_k + \alpha \sin \eta_k) > -1.$$

Использование методики, описанной в п. 1.5, приводит к следующему комплексному уравнению [8]:

$$\xi' = -a\xi - b_k \left[\xi - e^{ih\sqrt{2Qv}} \xi(t-h) \right] + i\xi|\xi|^2, \quad (77)$$

где

$$a = \frac{1}{2}(1+Q), \quad b_k = \frac{1}{2}\gamma[\cos \eta_k + \alpha \sin \eta_k].$$

Его нулевому решению соответствует одна из мод внешнего резонатора, то есть периодическое решение системы (46) вида $E = R_k e^{i(\omega_k - \omega_0)t}$, $Z = Z_k$. При этом значение параметра b_k зависит от ω_k . Таким образом, уравнение (77) описывает локальную динамику в окрестности мод внешнего резонатора, каждой из которых соответствует свое значение параметра b_k уравнения (77).

Заметим, что система (77) инвариантна относительно замены $\xi \rightarrow -\xi$. Кроме того, параметры уравнения (77) связаны с величинами из соотношения (64). В частности,

$$a = \lambda_R, \quad b_k = -\frac{1}{2}\gamma B_k, \quad \sqrt{2Qv} = \omega_R.$$

Устойчивость нулевого решения уравнения (77) определяется расположением на комплексной плоскости корней характеристического уравнения

$$\lambda = -a - b_k (1 - e^{-\lambda h + i\omega_R h}), \quad (78)$$

которое совпадает с (76). Знак величины $\omega_R h$ в показателе экспоненты можно изменить на противоположный, если перейти от (77) к сопряженному уравнению, то есть выполнить замену $\xi \rightarrow \bar{\xi}$. Достаточным условием устойчивости нулевого решения (77) является

Теорема 9. Пусть $Q > 0$, то есть $a > \frac{1}{2}$ и выполнено соотношение $a \geq -2b_k$. Тогда все корни уравнения (78) имеют неположительные вещественные части. В этом случае нулевое решение уравнения (77) устойчиво.

Доказательство.

Рассмотрим λ как комплекснозначную функцию действительного аргумента b_k . Легко заметить, что $Re \lambda(0) = -a < -\frac{1}{2} < 0$ при $Q > 0$. Положим $b_k = b_*$ такое, что $\lambda(b_*) = i\mu$, тогда справедлива пара равенств

$$\begin{cases} a + b_* [1 - \cos(-\omega_R h + \mu h)] = 0, \\ \mu + b_* \sin(-\omega_R h + \mu h) = 0, \end{cases} \quad (79)$$

для действительной и мнимой частей характеристического уравнения. Поскольку при $b_* > 0$, а также при $a > -2b_*$ в случае $b_* < 0$ выполнение первого соотношения невозможно, то при $a \geq -2b_k$ все корни уравнения (78) имеют неположительные действительные части. ■

Замечание. Рассматривая соотношение

$$a + b_k [1 - \cos(-\omega_R h + \mu h)] = 0,$$

где μ вычисляется как

$$\mu = \pm \sqrt{-a^2 - 2ab_k} = \pm \sqrt{\lambda_R \gamma B_k - \lambda_R^2},$$

можем получить следующую оценку области устойчивости моды по параметру γ :

$$\gamma \leq \gamma_H \approx \frac{2\lambda_R}{B_k [1 - \cos(\omega_R h - \mu h)]}.$$

Если выполнено это соотношение, то нулевое решение (77) устойчиво, а значит, устойчива и соответствующая мода внешнего резонатора. При условии, что μh кратно 2π , эта оценка совпадает с (64). Заметим, что при $Q \gg 1$ нулевое решение (77) устойчиво.

Очевидно, уравнение (77) может иметь и другие аттракторы, отличные от нулевого состояния равновесия. Для изучения периодических решений вида

$$\xi(t) = \rho_* e^{i\beta_* t}$$

где ρ_*, β_* — константы, удобно перейти к уравнениям для амплитуды и фазы комплексной величины $\xi(t)$:

$$\begin{cases} \rho' = -a\rho - b_k [\rho - \cos(\omega_R h + \beta(t-h) - \beta) \rho(t-h)], \\ \beta' = b_k \sin(\omega_R h + \beta(t-h) - \beta) \frac{\rho(t-h)}{\rho} + \rho^2. \end{cases} \quad (80)$$

Решения вида $(\rho_*, \beta_* t)$ системы (80) при условии $\rho_* \neq 0$ определяются из следующей пары алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -a - b_k [1 - \cos(-\omega_R h + \beta_* h)], \\ \beta_* = -b_k \sin(-\omega_R h + \beta_* h) + \rho_*^2. \end{cases}$$

Эта система с точностью до обозначений и слагаемого ρ_*^2 совпадает с (79). Отсюда можно сделать вывод, что в области устойчивости нулевого положения равновесия уравнение (77) не имеет периодических решений искомого вида.

Величины ρ_* , β_* явно выражаются через параметры:

$$\begin{cases} \beta_* h = \omega_R h \pm \arccos\left(\frac{a+b_k}{b_k}\right) + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z}, \\ \rho_*^2 = \beta_* \mp \sqrt{-a^2 - 2ab_k}. \end{cases}$$

Отметим, что в случае, когда характеристическое уравнение (78) имеет чисто мнимые корни, одним из возможных значений величины ρ_* является нуль. Таким образом, при переходе пары корней (78) через мнимую ось из левой комплексной полуплоскости в правую происходит рождение предельного цикла в задаче (77), а, значит, нулевое решение теряет устойчивость в результате бифуркации Андронова – Хопфа.

Устойчивость решений вида $(\rho_*, \beta_* t)$ системы (80) определяется корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2(a+b_k)\lambda(1-e^{-\lambda h}) + b_k^2(1-e^{-\lambda h})^2 + 2\rho_*^2[\rho_*^2 - \beta_*)(1-e^{-\lambda h}) = 0. \quad (81)$$

Исследование этого уравнения в общем случае представляет собой достаточно сложную задачу. Тем не менее численный анализ систем (77) и (80) позволяет утверждать, что на промежутке $b_k \leq -a/2$ существует целый диапазон значений параметра b_k , при которых аттрактором уравнения (77) является предельный цикл. В случае физической постановки задачи важно учитывать, что ξ_1, ξ_2 определяют отклонения от V_0 порядка $\sqrt{\varepsilon} = v^{-1/4}$. При $v \sim 10^4$ эта величина составляет 10^{-1} , что сопоставимо по порядку с другими параметрами модели Ланга – Кобаяши.

Общий характер фазовых перестроек, происходящих в полученной квазинормальной форме, можно описать следующим образом.

1. При значениях параметра b_k больше некоторой критической величины $b^{(1)} \leq -a/2$ устойчиво нулевое положение равновесия.
2. В случае $b^{(1)} > b_k > b^{(2)}$ устойчив предельный цикл, который рождается в результате бифуркации Андронова – Хопфа. При этом периодическому решению уравнения (77) соответствует стационарное значение переменной ρ системы (80).
3. При $b_k = b^{(2)}$ цикл теряет устойчивость, и при значениях $b^{(2)} > b_k > b^{(3)}$ в (77) устанавливаются двухчастотные колебания, которым соответствует периодическое изменение величины ρ в системе (80).
4. При $b_k = b^{(3)}$ тор теряет устойчивость, и при $b^{(3)} > b_k > b^{(4)}$ в обеих системах устанавливаются хаотические режимы. Такой вывод делается на основании вычисления старшего ляпуновского показателя.

5. В случае $b_k < b^{(4)}$ для систем (77) и (80) характерна нелокальная динамика, величина $|\xi(t)|$ может неограниченно возрастать. При некоторых значениях параметров величина $b^{(4)}$ может превышать $b^{(2)}$ и даже $b^{(1)}$. В этом случае в уравнении (77) реализуется сценарий жесткой потери устойчивости нулевым решением, обусловленный взаимодействием с неустойчивым предельным циклом.

Среди особенностей динамики системы (77) отметим явление мультистабильности. Например, при значениях параметров $a=0.52$, $b_k=-0.27$, $h=0.1$, $\omega_R h \bmod 2\pi=3.9$ обнаружено 8 сосуществующих аттракторов: нулевое состояние равновесия и 7 устойчивых предельных циклов. При этом чем больше амплитуда колебаний, тем выше их частота. В самом деле,

$$\beta_* = \rho_*^2 \pm \sqrt{-a^2 - 2ab_k}.$$

Не исключено, что указанные периодические решения (77) могут отчасти объяснить природу регулярных импульсных пакетов или колебаний Петермана – Тейгера. Можно также предположить, что локальные хаотические режимы уравнения (77), окажутся полезны при объяснении механизмов возникновения феноменов когерентного коллапса и низкочастотных флуктуаций. Отметим некоторое расширение границ области динамического хаоса при увеличении запаздывания.

Таким образом, при асимптотически больших значениях параметра v задача изучения бифуркаций мод внешнего резонатора в терминах системы (77) формулируется проще, чем в исходных уравнениях (46), и допускает, в отличие от (46), надежный численный анализ.

4. Другие модели динамики лазера с запаздывающей обратной связью

4.1. Некоторые модификации модели Ланга – Кобаяши

Стандартные уравнения Ланга – Кобаяши описывают полупроводниковый лазер с обычной оптической обратной связью (conventional optical feedback, COF). Однако это не единственный технически возможный тип обратной связи. Лазер, имеющий обратную связь с обращением волнового фронта (или с сопряжением по фазе, phase conjugate feedback, PCF), описывается следующей системой [95], близкой к (48):

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h} E^*(t-h), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (82)$$

Отличие уравнений (82) от (48) заключается в замене $E(t-h)e^{-i\omega_0 h}$ на выражение $E^*(t-h)e^{-i\omega_0 h}$, где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Исследованию модели (82) посвящено множество работ, например [42, 95] и цитируемые там источники. Как и в исходной системе Ланга – Кобаяши, в (82) наблюдаются различные интересные динамические эффекты. Обнаружены области с достаточно сложной, в том числе хаотической, динамикой.

В настоящее время известно много различных методов, позволяющих практически реализовать такого рода сопряжение. О некоторых из них можно узнать в приведенных выше источниках.

Для подавления нежелательных эффектов, связанных с LFF, было предложено использование двойного резонатора [82]:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma_1 e^{-i\omega_0 h_1} E(t-h_1) + \gamma_2 e^{-i\omega_0 h_2} E(t-h_2), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (83)$$

Главное отличие этой модели от стандартной системы (46) состоит в наличии двух отражающих поверхностей, которые характеризуются различными временами h_1 и h_2 прохода излучения до его возвращения в резонатор. При этом величины γ_1 и γ_2 сопоставимы и не являются настолько малыми, что ими можно пренебрегать. Утверждается, что воздействие второго запаздывания на резонатор в системе (83) позволяет

фактически исключить явление НЧФ из числа возможных динамических состояний полупроводникового лазера [82].

Наряду с моделью Ланга – Кобаяши, описывающей динамику одно-модового лазера, рассматривались также близкие по духу модели много-модового лазера, подвергающегося воздействию запаздывающей обратной связи. Одна из них, приведенная в работе [98], может быть выписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)E_m Z_m + \gamma_m e^{-i\omega_m h} E_m(t-h), \\ \frac{dZ_m}{dt} = Q - Z_m - (1+Z_m) \sum_{j=1}^n |E_j|^2. \end{cases} \quad (84)$$

где n — число мод когерентного оптического излучения, индекс m изменяется от 1 до n , величины обратной связи γ_m в простейшем случае одинаковы и от m не зависят. Утверждается [98], что в модели (84) наблюдаются режимы, близкие к НЧФ, что хорошо согласуется с результатами экспериментальных наблюдений.

Относительно недавно была предложена модификация этой модели [18], которая, по мнению ее автора, более корректно учитывает взаимодействие между модами

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha) [\gamma_m(Z_0 - Z_m) - 1] E_m + \gamma_m e^{-i\omega_m h} E_m(t-h), \\ \frac{dZ_m}{dt} = - \left(1 + d + \sum_{j=1}^n \gamma_j |E_j|^2 \right) Z_m + \gamma_m |E_m|^2 Z_0 / 2, \\ \frac{dZ_0}{dt} = Q - Z_0 + \sum_{j=1}^n |E_j|^2 (Z_j - Z_0). \end{cases} \quad (85)$$

Здесь E_m — медленно меняющиеся комплексные амплитуды полей мод, Z_0 и Z_m — пространственно однородная компонента и амплитуда пространственной решетки плотности неравновесных носителей (инверсии), ω_m — оптические частоты лазерных мод без обратной связи, γ_m — коэффициент усиления соответствующей (m -й) моды относительно усиления моды, ближайшей к центру линии, d — безразмерный коэффициент диффузии. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и в базовой одномодовой модели Ланга – Кобаяши.

Близкая по духу модель [57, 100], описывающая взаимодействие сразу нескольких полупроводниковых лазеров, объединенных в так называе-

мую лазерную матрицу, имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)E_mZ_m + i\gamma e^{-i\omega h}n^{-1} \sum_{j=1}^n E_j(t-h), \\ \frac{dZ_m}{dt} = Q_m - Z_m - (1+Z_m)|E_m|^2. \end{cases} \quad (86)$$

Здесь n — число генераторов в матрице, индекс m изменяется от 1 до n , $\omega = n^{-1} \sum_j \omega_j$ — среднее значение частот свободной генерации в матрице. Особенности динамики такой системы изучались в статье [57], а условия синхронизации связанных таким образом лазерных осцилляторов явились предметом работы [100].

Еще один путь обобщения модели Ланга – Кобаяши состоит в рассмотрении нескольких связанных друг с другом лазеров. В наиболее простой постановке задачи взаимное воздействие друг на друга двух идентичных оптических квантовых генераторов (рис. (27)) описывается следующей системой уравнений [58]:

$$\begin{cases} \frac{dE_j}{dt} = v(1+i\alpha)E_jZ_j + \gamma e^{-i\omega_0 h} E_l(t-h) \mp i\delta E_j, \\ \frac{dZ_j}{dt} = Q - Z_j - (1+Z_j)|E_j|^2. \end{cases} \quad (87)$$

где индексы j и l принимают значения 1 или 2, $j \neq l$. Здесь $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — среднее значение частот свободной генерации, параметром δ , который пропорционален величине $\omega_2 - \omega_1$, определяется расстройка между частотами излучения. Изучены простейшие решения этой системы, выявлены некоторые типы бифуркаций, соответствующих известным бифуркациям в стандартной модели.

Существует еще одна интересная математическая модель оптического квантового генератора класса В, объединяющая в себе свойства систем (43), (46), (83). Она описывает полупроводниковый лазер, на который одновременно воздействуют отраженное запаздывающее излучение и внешняя оптическая накачка [73]:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma_1 e^{-i\omega_0 h} E(t-h) + \gamma_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_0)t}, \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (88)$$

Авторами статьи [73] отмечается некоторое сходство между динамикой модели (88) и системы, описывающей воздействие оптического фильтра на полупроводниковый лазер с запаздывающей обратной связью.

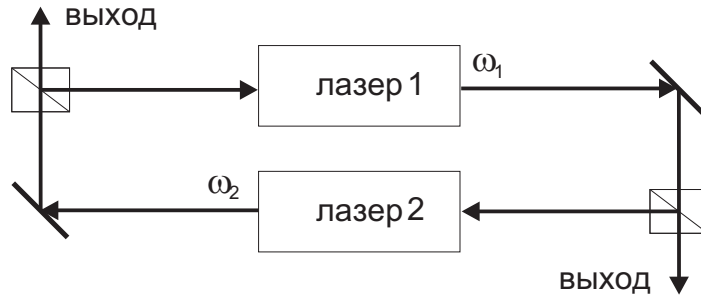


Рис. 27. Схема взаимодействия двух взаимосвязанных полупроводниковых лазеров с запаздывающей обратной связью

4.2. Модель лазера класса В с некогерентной оптической обратной связью и ее модификации

Наряду с обширным классом моделей, основанных так или иначе на системе уравнений Ланга – Кобаяши, существует большое семейство, ведущее свою «родословную» от системы Статца – Де Марса и имеющее определенные отличия от уравнений из предыдущего раздела. Свойства этого семейства моделей подробно излагаются в [10], поэтому видится целесообразным ограничиться в настоящем пособии лишь весьма кратким обзором на уровне постановки задачи.

Наиболее простая модель динамики одномодового лазера класса В с периодической модуляцией накачки записывается в виде неавтономной системы ОДУ

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = Gm(n - 1), \\ \frac{dn}{dt} = r + a \cos(\omega t) - n(1 + m). \end{cases} \quad (89)$$

Здесь и далее в данном разделе $m(t)$ и $n(t)$ — вещественная амплитуда электрического поля внутри резонатора и инверсия носителей соответственно; G есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; r соответствует, вообще говоря, величине тока накачки, а в (89) описывает ее постоянную часть. Величины a и ω характеризуют глубину и частоту модуляции накачки.

В работе [33] была предложена схема обратной связи, в которой часть генерируемого излучения, отражаясь от внешнего зеркала, возвращается обратно в резонатор. При этом поляризация отраженного света оказывается ортогональна к поляризации падающего света, что исключает когерентное взаимодействие между ними. Это позволяет несколько упростить (по сравнению с системой Ланга – Кобаяши) уравнения для

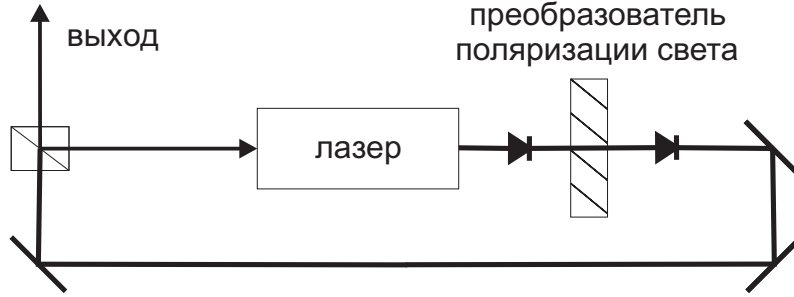


Рис. 28. Схема лазера класса В с некогерентной оптической запаздывающей обратной связью

описания такого лазера, которые имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = Gm(n - 1), \\ \frac{dn}{dt} = r - n(1 + m + \gamma m(t-h)). \end{cases} \quad (90)$$

Переменные и параметры, имеющие те же обозначения, что и в предыдущей модели, заключают в себе тот же смысл; $\gamma > 0$ — коэффициент обратной связи; h — время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Принимая во внимание возможные неоднородности потерь внутри резонатора, систему (90) можно модифицировать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = Gm(n - p(t)), \\ \frac{dn}{dt} = r - n(1 + m + \gamma m(t-h)), \end{cases} \quad (91)$$

где

$$p(t) = 1 + a \cos(\omega t + \phi)$$

есть потери внутри резонатора, постоянная часть которых нормирована к единице, a характеризует глубину модуляции потерь, ω — частота модуляции, ϕ — фаза модуляции в начальный момент времени $t=0$.

Балансные уравнения для описания динамики лазера с нелинейным элементом, который располагается внутри резонатора и потери которого

увеличиваются с ростом плотности генерируемого излучения, имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = Gm[n - 1 - \gamma m(t-h)] + \mu, \\ \frac{dn}{dt} = r - n(1 + m). \end{cases} \quad (92)$$

Новым параметром по сравнению с предыдущими уравнениями здесь является параметр μ , характеризующий плотность излучения внешних источников. Кроме того, слагаемое с запаздыванием в системе (92) появляется во втором уравнении, а не в первом.

Ввиду относительной простоты моделей, приведенных в данном разделе, их можно предлагать в качестве объектов для самостоятельного исследования, точнее — для отработки различных методов анализа систем дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений.

4.3. Модель полупроводникового лазера с оптическим фильтром

Интересная идея по управлению воздействием отраженного запаздывающего излучения связана с фильтрованием излучения лазера. Устройство, называемое оптическим фильтром, позволяет пропускать лишь излучение с желательными характеристиками. В данном случае исходная модель полупроводникового лазера дополняется еще одним уравнением, которое описывает воздействие оптического фильтра [43]. Таким образом, изучаемая система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma f, \\ \frac{df}{dt} = i\Delta f + \Lambda[E(t-h)e^{-i\omega_0 h} - f], \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)|E|^2. \end{cases} \quad (93)$$

Здесь $E(t)$ и $f(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля внутри резонатора и на выходе из фильтра соответственно, $Z(t)$ — инверсия носителей; $\gamma > 0$ и $-\omega_0 h$ — сила и фаза обратной связи (ОС), ω_0 — оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v есть отношение времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное взаимодействие между амплитудой и фазой поля; h — время прохода излучения по внешнему

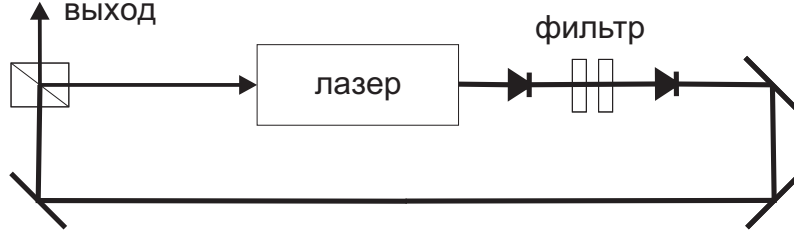


Рис. 29. Схема полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью, организованной с помощью оптического фильтра

резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии; Λ — ширина спектра; Δ — расстройка между частотой излучения уединенного лазера и несущей частотой фильтра.

Замена

$$E(t) = R_E(t) \cdot e^{i\theta_E(t)}, \quad f(t) = R_f(t) \cdot e^{i\theta_f(t)}$$

приводит систему (93) к амплитудно-фазовому виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR_E}{dt} = vR_E Z + \gamma R_f \cos(\theta_f - \theta_E), \\ \frac{d\theta_E}{dt} = v\alpha Z + \gamma \frac{R_f}{R_E} \sin(\theta_f - \theta_E), \\ \frac{dR_f}{dt} = \Lambda [R_E(t-h) \cos(\theta_E(t-h) - \omega_0 h - \theta_f) - R_f(t)], \\ \frac{d\theta_f}{dt} = \Delta + \Lambda \frac{R_E(t-h)}{R_f} \sin(\theta_E(t-h) - \omega_0 h - \theta_f), \\ \frac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z) R_E^2. \end{array} \right. \quad (94)$$

Несмотря на то что система (94) кажется более сложной, чем (93), подобный переход имеет свои преимущества, главное из которых заключается в упрощении работы с простейшими периодическими решениями.

В данном случае простейшие решения системы уравнений (93) определяются из условий

$$E(t) = E_k \cdot e^{i\omega_k t}, \quad f(t) = f_k \cdot e^{i\omega_k t + i\phi_k}, \quad Z(t) = Z_k.$$

Такие периодические решения по аналогии с модами внешнего резонатора называются модами внешнего фильтра (external filtered modes, EFMs) в [43]. В обозначениях системы (94) они имеют вид

$$R_E(t) = E_k, \quad \theta_E(t) = \omega_k t,$$

$$R_f(t) = f_k, \quad \theta_f(t) = \omega_k t + \phi_k, \quad Z(t) = Z_k,$$

где $R_k, f_k, \omega_k, \phi_k, Z_k$ — константы. Подставляя найденные выражения в (94), получим уравнения

$$\begin{cases} 0 = v E_k Z_k + \gamma \cos(\phi_k) f_k, \\ \omega_k = v \alpha Z_k + \gamma \sin(\phi_k) \frac{f_k}{E_k}, \\ 0 = \Lambda [E_k \cos(-\omega_0 h - \omega_k h - \phi_k) - f_k], \\ \omega_k = \Delta + \Lambda \sin(-\omega_0 h - \omega_k h - \phi_k) \frac{E_k}{f_k}, \\ 0 = Q - Z_k - (1 + Z_k) E_k^2, \end{cases} \quad (95)$$

которые, полагая $E_k \neq 0$, можно упростить следующим образом:

$$\begin{cases} v Z_k = -\gamma \cos(\phi_k) \frac{f_k}{E_k}, \\ \omega_k = \gamma [-\alpha \cos(\phi_k) + \sin(\phi_k)] \frac{f_k}{E_k}, \\ \frac{f_k}{E_k} = \cos(\omega_0 h + \omega_k h + \phi_k) = \frac{\Lambda}{\Delta - \omega_k} \sin(\omega_0 h + \omega_k h + \phi_k), \\ E_k^2 = \frac{Q - Z_k}{1 + Z_k}. \end{cases} \quad (96)$$

Из второго и третьего соотношений нетрудно получить уравнение, из которого определяются величины ω_k :

$$\omega_k = -\gamma \sqrt{1 + \alpha^2} \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2}} \sin \left(\omega_0 h + \omega_k h + \arctg \alpha + \arctg \left(\frac{\Delta - \omega_k}{\Lambda} \right) \right). \quad (97)$$

Трансцендентное уравнение (97) является основным при определении мод внешнего фильтра. Здесь использовалась зависимость величины ϕ_k от ω_k :

$$\phi_k = -\omega_0 h - \omega_k h - \arctg \left(\frac{\Delta - \omega_k}{\Lambda} \right). \quad (98)$$

Зная частоты колебаний моделируемых электрических полей, несложно определить все остальные их характеристики.

$$v Z_k = -\gamma \cos(\phi_k) \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2}}, \quad (99)$$

$$E_k^2 = \frac{Q - Z_k}{1 + Z_k}, \quad (100)$$

$$f_k^2 = \frac{\Lambda^2 E_k^2}{\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2}. \quad (101)$$

Если в правой части формулы (97) множитель, задаваемый функцией \sin , принимает значения ± 1 , то (97) переходит в уравнение

$$P(\omega_k) = 0,$$

где

$$P(\omega_k) = [\Lambda^2 + (\Delta - \omega_k)^2] \omega_k^2 - \Lambda^2 \gamma^2 (1 + \alpha^2). \quad (102)$$

Его решения задают границу области существования решений (97).

В пределе при $\Lambda \rightarrow \infty$, когда фильтр пропускает весь спектр излучения, уравнение (97) переходит в уравнение (53), а моды внешнего фильтра совпадают с модами внешнего резонатора.

Таким образом, простейшие решения системы (93), моды внешнего фильтра, как и в случае стандартной модели Ланга – Кобаяши, играют роль «базовых элементов», «элементарных кирпичиков», с изучения свойств которых начинается исследование динамики модели с оптическим фильтром.

В заключение этого пункта отметим, что, наряду с использованием оптического фильтра, существуют другие способы управления динамикой лазерных систем. Внешняя оптическая накачка, периодическая модуляция параметров излучающего устройства, реализация обратной связи с узкополосным режекторным фильтром [31] — далеко не полный список принципиально возможных технологических решений, позволяющих контролировать характер генерации.

4.4. Синхронизация мод в лазере и модели для ее описания

Актуальность задачи создания лазеров с высокой мощностью излучения обусловлена практическими интересами многих современных областей науки и техники, включая астрофизику и исследования в области управляемого термоядерного синтеза. Развитие современных телекоммуникационных технологий также требует постоянного улучшения технических характеристик используемой элементной базы, в том числе и таких, которые зависят от интенсивности исходящего сигнала. При этом

получение наиболее сильной генерации возможно лишь на очень короткое время — вообще говоря, тем более короткое, чем большую мощность излучения способен дать лазер. Одним из наиболее распространенных способов получения нано-, пико- и фемтосекундных импульсов является синхронизация мод. Основная идея состоит в следующем. Во многих типах лазеров может излучаться большое количество продольных мод, между которыми существует определенное частотное расстояние. О синхронизации мод говорят в том случае, когда между любыми соседними модами возникает одна и та же разница в фазе. Тогда интенсивность излучения будет пропорциональна функции, зависящей от количества связанных мод и разницы частот между ними. Среди способов получения импульсного излучения с такими свойствами выделяют модуляцию добротности (Q-switching), активную и пассивную синхронизацию мод.

Основная идея метода модуляции добротности состоит в том, что во время накачки намеренно «ухудшают» свойства оптического резонатора, не давая, таким образом, лазеру излучать. Благодаря этому, мощность не расходуется на излучение и удается получить высокий уровень инверсной населенности энергетических уровней активной среды. Далее свойства резонатора быстро «улучшают», и вся накопленная энергия реализуется в виде короткого, мощного импульса.

Активная синхронизация заключается в модуляции оптического поля по амплитуде или фазе. Длительность импульсов и промежутки между ними определяются конструкцией резонатора. Так, в кольцевом резонаторе с подключенным к нему обычным волокном длиной 2 км с сильной аномальной дисперсией можно получить длительность импульса около 4 пс. Резонатор Фабри – Перо позволяет достичь длительностей порядка 1 пс. Существуют приборы, позволяющие получать импульсы длительностью до 10 пс при частоте их следования до 10 ГГц. Однако общей проблемой лазеров подобного типа является неустойчивость амплитуды импульсов при длительном периоде генерации.

В случае пассивной синхронизации мод используется некоторый нелинейный элемент, при прохождении которого импульс становится уже. В роли нелинейных элементов могут выступать так называемые насыщаемые поглотители, нелинейные зеркала типа волоконной петли и так далее. Идея использования насыщаемого поглотителя состоит в том, что при распространении импульса через такой прибор его края поглощаются существенно сильнее, чем центр (амплитуда которого намного больше). Это эквивалентно уменьшению длительности импульса. Существуют образцы лазеров, использующих насыщаемые поглотители для генерации импульсов длительностью 320 фс. Нелинейные зеркала или нели-

нейное вращение поляризации позволяют создать полностью волоконную конструкцию.

Отметим, что на практике возможно комбинированное использование различных способов получения импульсного излучения, например пассивной синхронизации мод и модуляции добротности.

Важнейшими источниками импульсов с высокой частотой повторения являются монолитные полупроводниковые лазеры, функционирующие в режиме синхронизации мод, в силу их надежности, компактности и низкой стоимости. Отправной точкой для теоретических исследований в этой области послужили работы Нью и Хауса [47, 72]. Предложенные ими уравнения для описания явления пассивной синхронизации мод в лазере можно записать в виде

$$\begin{cases} d^2 \frac{d^2 A_1}{dt^2} = (Q_1 - G_1 + k)A_1 + 2[A_1 - A_1(t - T)], \\ \frac{dG_1}{dt} = \gamma_g(g_{max} - G_1) - s_g G_1 A_1^2, \\ \frac{dQ_1}{dt} = \gamma_q(q_{max} - Q_1) - s_q Q_1 A_1^2. \end{cases} \quad (103)$$

Здесь A_1 — среднее значение амплитуды электрического поля, G_1 и Q_1 — безразмерные интегральные плотности в усиливающей и поглощающей секциях соответственно. Параметр d определяет естественную границу ширины импульсов, обусловленную шириной полосы пропускания оптического резонатора, время прохода по которому фотонами излучения задается значением T . Величина k описывает линейные потери в резонаторе так, что полный коэффициент усиления задается выражением $G_1 - Q_1 - k$. Параметры $\gamma_{g,q}$ определяют скорости релаксации для усиливающей и поглощающей секций соответственно, а $s_{g,q}$ — коэффициенты насыщения. Величины g_{max} и q_{max} задают максимальные значения интегральной плотности носителей в усиливающей и поглощающей секциях соответственно.

Система уравнений (103) позволяет объяснить явление синхронизации мод в лазерах класса А (медленный поглотитель). Однако при значениях параметров, типичных для лазеров класса В, модель Нью и Хауса уже не может дать удовлетворительную картину феномена Q-switching, который, тем не менее, наблюдался экспериментально для полупроводниковых лазеров.

Это обстоятельство, наряду с другими выявленными недостатками системы (103), а также серьезными вычислительными трудностями при работе непосредственно «с первоосновами» теории лазера, привело к воз-

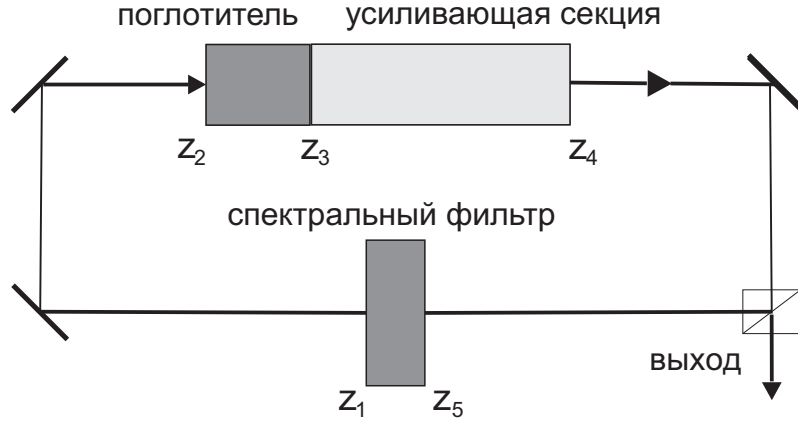


Рис. 30. Схема кольцевого резонатора лазера с пассивной синхронизацией мод. Интервалы от z_1 до z_2 и от z_4 до z_5 заполнены пассивной средой. Интервалы от z_2 до z_3 и от z_3 до z_4 соответствуют поглощающей и усиливающей секциям. Между z_5 и z_1 (точнее $z_1 + L$, где L — длина резонатора) располагается спектральный фильтр

никновению предпосылок для создания новой улучшенной модели. Она была предложена в 2004 году [101, 102] и может быть записана в следующей форме:

$$\begin{cases} \gamma^{-1} \frac{dA}{dt} + A = K \exp \left(\frac{1-i\alpha_g}{2} G(t-T) - \frac{1-i\alpha_q}{2} Q(t-T) \right) A(t-T), \\ \frac{dG}{dt} = g_0 - \gamma_g G - e^{-Q} (e^G - 1) |A|^2, \\ \frac{dQ}{dt} = q_0 - \gamma_q Q - s (1 - e^{-Q}) |A|^2. \end{cases} \quad (104)$$

В этой системе, как и в модели Нью и Хауса, A есть среднее значение амплитуды электрического поля, G и Q — интегральные плотности в усиливающей и поглощающей секциях соответственно. Время прохода резонатора фотонами излучения определяется значением T . Параметр γ задает ширину полосы пропускания секции, содержащей спектральный фильтр. Величина K описывает суммарные линейные нерезонансные потери, при этом можно считать, что все они сосредоточены в первой пассивной секции. Параметры $\alpha_{g,q}$ есть альфа-факторы (коэффициенты уширения) для усиливающей и поглощающей секций соответственно. Величина s задает отношение интенсивностей насыщения в усиливающей и поглощающей секциях соответственно. Параметры g_0 и q_0 , пожалуй, проще всего ввести, используя обозначения системы (103):

$$g_0 = \gamma_g g_{max}, \quad q_0 = \gamma_q q_{max},$$

хотя в работах [101, 102] они определены довольно сложными выражениями, которые включают в себя различные физические характеристики лазера.

Простейшими решениями каждой из систем уравнений (103) и (104) являются состояния равновесия

$$A = 0, \quad G = g_0/\gamma_g, \quad Q = q_0/\gamma_q,$$

которые соответствуют нулевому значению амплитуды электрического поля, то есть отсутствию излучения. Таким образом, можно говорить о том, что при значениях параметров из области устойчивости указанного решения лазер находится в нерабочем состоянии.

Основным объектом исследований модели (104) являются периодические решения, обладающие определенными особенностями. Прежде всего это наличие всплесков величины $|A|$, которые характеризуются большими пиковыми значениями и малой продолжительностью, много меньше периода. Именно такая динамика хорошо соответствует экспериментально наблюдаемым режимам синхронизации мод. Результаты численного анализа модели (104), выполненного в ряде работ, позволяют утверждать, что эта ситуация наиболее характерна для нулевых значений альфа-факторов, то есть

$$\alpha_g = \alpha_q = 0.$$

Однако это условие не является необходимым. Аналогичная динамика проявляется при значениях параметров, подобранных таким образом, что воздействие усиливающей и поглощающей секций в резонаторе в определенном смысле «взаимнокомпенсируется», так что на выходе получается устойчивый импульсный режим генерации, обусловленный синхронизацией мод.

Заключение

Лазерная физика является одной из наиболее активно развивающихся областей современного естествознания. Большие коллективы ученых из разных стран работают над решением фундаментальных и прикладных задач квантовой оптики. Такие исследования являются приоритетными и выполняются в ведущих научных центрах нашей страны и за рубежом. В числе таких центров отметим Калифорнийский, Миланский, Токийский, Брюссельский университеты, Институт Вейерштрасса в Берлине, Технический университет в Дрездене, Университетский колледж в Дублине, Университет Глазго, Бристольский университет, Технологический институт в Атланте, Университет штата Нью-Мексико и другие. К их числу принадлежат также лаборатории крупнейших компаний, разрабатывающих телекоммуникационное оборудование, таких как TELECOM (Франция), AT&T Bell Laboratories (США), Hitachi Cable Ltd. (Япония), Phillips (Нидерланды). Такие высокотехнологичные лаборатории, оснащенные самым современным и дорогостоящим оборудованием для исследования лазерных систем, продолжают создаваться, а получаемые в них результаты используются различными ведомствами развитых государств и транснациональными корпорациями.

Математическое моделирование является одним из наиболее действенных и эффективных теоретических подходов к решению задач лазерной физики. Удачная модель и ее квалифицированный анализ становятся ключом к пониманию наблюдаемых феноменов и значительно сокращают сроки исследований и затраты на эксперименты. Поэтому в развитых странах ежегодно выходят в свет тысячи теоретических работ, посвященных квантово-оптической тематике. Только за последнее десятилетие появились десятки (если не сотни) новых уравнений динамики лазерных систем, часть из которых была включена в пособие. Весьма вероятно, что сопоставимое число новых моделей будет предложено в обозримом будущем. При этом полный и всесторонний анализ даже относительно простых уравнений требует немало времени и сил. Как показывает опыт изучения системы Ланга – Кобаяши, новые результаты могут появляться даже спустя два – три десятилетия после выхода пионерских работ. Поэтому можно смело говорить о большом количестве задач, которые еще только ждут своих исследователей.

Список литературы

1. *Андронов, А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — 2-е изд. — М.: Физматгиз, 1959.
2. *Анищенко, В. С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах / В. С. Анищенко. — 2-е изд. — М.: «ЛИБРОКОМ», 2009.
3. *Баутин, Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М.: Наука, 1990.
4. *Беллман, Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Л. Кук. — М.: Мир, 1967.
5. *Борейшо, А.С.* Лазеры: устройство и действие / А.С. Борейшо. — СПб.: Мех. ин-т, 1992.
6. *Васильева, А. Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. — М.: Наука, 1973.
7. *Глазков, Д. В.* Особенности динамики модели Ланга – Кобаяши в одном критическом случае / Д. В. Глазков // Моделирование и анализ информационных систем. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 36–45.
8. *Глазков, Д. В.* Качественный анализ сингулярно возмущенных моделей одного класса оптико-электронных систем / Д. В. Глазков // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. — 2008. — Т. 16, № 4. — С. 167–181.
9. *Горяченко, В. Д.* Элементы теории колебаний: учеб. пособие для вузов / В. Д. Горяченко. — 2-е изд. — М.: Высш. шк., 2001.
10. *Григорьева, Е. В.* Релаксационные колебания в лазерах / Е. В. Григорьева, С. А. Кащенко. — М.: Едиториал УРСС, 2013.
11. *Звелто, О.* Принципы лазеров / О. Звелто. — 3-е изд. — М.: Мир, 1990.

12. *Каток, А. Б.* Введение в теорию динамических систем / А. Б. Каток, Б. Хассельблат. — М.: МЦНМО, 2005.
13. *Кащенко, Д. С.* Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием / Д. С. Кащенко, И. С. Кащенко. — Ярославль: ЯрГУ, 2006.
14. *Кащенко, С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С. А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 2. — С. 262–270.
15. *Кащенко, С. А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах / С. А. Кащенко // Известия РАЕН, серия МММИУ. — 1998. — Т. 2, № 4. — С. 5–53.
16. *Кащенко, С. А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / С. А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1999. — Т. 35, № 10. — С. 1343–1355.
17. *Коверга, А. Ю.* Некоторые особенности поведения решений уравнений Ланга – Кобаяши / А. Ю. Коверга, Е. П. Кубышкин // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. — Вып. 7. — Ярославль. ЯрГУ, 2005. — С. 146–150.
18. *Корюкин, И. В.* Динамика многомодового полупроводникового лазера с оптической обратной связью / И. В. Корюкин // Физика и техника полупроводников. — 2009. — Т. 43, № 3. — С. 405–411.
19. *Красовский, Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. — М.: Физматгиз, 1959.
20. *Малинецкий, Г. Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. — 2-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2002.
21. *Мищенко, Е. Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. — М.: Наука, 1975.
22. *Пихтин, А. Н.* Оптическая и квантовая электроника: учеб. для вузов / А. Н. Пихтин. — М.: Высш. шк., 2001.

23. *Рабинович, М. И.* Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. — 3-е изд. — М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
24. *Тарасов, Л. В.* Физика лазера / Л. В. Тарасов — 2-е изд. — М.: ЛИБРОКОМ, 2010.
25. *Файн, В. М.* Квантовая радиофизика / В. М. Файн, Я. И. Ханин // М.: Сов. радио, 1965.
26. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
27. *Хакен, Г.* Лазерная светодинамика / Г. Хакен. — М.: Мир, 1988.
28. *Ханин, Я. И.* Основы динамики лазеров / Я. И. Ханин. — М.: Наука; Физматлит, 1999.
29. *Шустер, Г.* Детерминированный хаос / Г. Шустер. — М.: Мир, 1988.
30. *Эльсгольц, Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. — М.: Наука, 1971.
31. *Ahlborn, A.* Chaos Control using Notch Filter Feedback / A. Ahlborn, U. Parlitz // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96, 034102.
32. *Alsing, P.* Lang and Kobayashi phase equation / P. Alsing [et al.] // Phys. Rev. A. — 1996. — Vol. 53, № 6. — P. 4429–4434.
33. *Chern, J.-L.* Coexistence of two attractors in lasers with delayed incoherent optical feedback / J.-L. Chern, K. Otsuka, F. Ishiyama // Optics Communications. — 1993. — Vol. 96, № 4–6. — P. 259–266.
34. *Davidchack, R. L.* Regular dynamics of low-frequency fluctuations in external cavity semiconductor lasers / R. L. Davidchack [et al.] // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, 056206.
35. *Erneux, T.* Mechanism for period-doubling bifurcation in a semiconductor laser subject to optical injection / T. Erneux [et al.] // Phys. Rev. A. — 1996. — Vol. 53, № 6. — P. 4372–4380.

36. *Erneux, T.* Bifurcation to mixed external cavity mode solutions for semiconductor lasers subject to optical feedback / T. Erneux [et al.] // Opt. Commun. — 2000. — Vol. 183. — P. 467–477.
37. *Erneux, T.* Stable microwave oscillations due to external-cavity-mode beating in laser diodes subject to optical feedback / T. Erneux, A. Gavrielides, M. Sciamanna // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66, 033809.
38. *Fischer, I.* Fast pulsing and chaotic itinerancy with a drift in the coherence collapse of semiconductor lasers / I. Fischer [et al.] // Phys. Rev. A. — 1994. — Vol. 50, № 4. — P. R2837–R2840.
39. *Fujiwara, M.* Low-frequency intensity fluctuation in laser diodes with external optical feedback / M. Fujiwara, K. Kubota, R. Lang // Appl. Phys. Lett. — 1981. — Vol. 38. — P. 217–220.
40. *Gavrielides, A.* Synchronous Sisyphus effect in diode lasers subject to optical feedback / A. Gavrielides [et al.] // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60, №2. — P. 1577–1581.
41. *Gibbon, J. D.* The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers / J. D. Gibbon, M. J. McGuinness // Physica D. — 1982. — Vol. 5. — P. 108–122.
42. *Green, K.* A two-parameter study of the locking region of a semiconductor laser subject to phase-conjugate feedback / K. Green, B. Krauskopf, G. Samaey // J. Appl. Dynamical Systems. — 2003. — Vol. 2, № 2. — P. 254–276.
43. *Green, K.* Mode structure of semiconductor laser subject to filtered optical feedback / K. Green, B. Krauskopf // Opt. Commun. — 2006. — Vol. 258. — P. 243–255.
44. *Grigorieva, E. V.* Quasiperiodicity in Lang-Kobayashi model of lasers with delayed optical feedback / E. V. Grigorieva // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2001. — Vol. 4, № 4. — P. 333–340.
45. *Haegeman, B.* Stability and rupture of bifurcation bridges in semiconductor lasers subject to optical feedback / B. Haegeman [et al.] // Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66. — 046216.
46. *Haken, H.* Analogy between higher instabilities in fluids and lasers / H. Haken // Phys. Lett. A. — 1975. — Vol. 53, № 1. — P. 77–78.

47. *Haus, H.* Theory of mode locking with a slow saturable absorber / H. Haus // IEEE J. Quantum Electron. — 1975. — Vol. 11. — P. 736–746.
48. *Heil, T.* Coexistence of low-frequency fluctuations and stable emission on a single high-gain mode in semiconductor lasers with external optical feedback / T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer // Phys. Rev. A. — 1998. — Vol. 58, № 4. — P. R2672–R2675.
49. *Heil, T.* Influence of amplitude-phase coupling on the dynamics of semiconductor lasers subject to optical feedback / T. Heil, I. Fischer, W. Elsässer // Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60, № 1. — P. 634–641.
50. *Heil, T.* Dynamics of semiconductor lasers subject to delayed optical feedback: the short cavity regime / T. Heil [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, № 24, 243901.
51. *Heil, T.* Delay dynamics of semiconductor lasers with short external cavities: Bifurcation scenarios and mechanisms / T. Heil [et al.] // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 67, 066214.
52. *Henry, C. H.* Instability of semiconductor lasers due to optical feedback from distant reflectors / C. H. Henry, R. Kazarinov // IEEE J. Quantum Electron. — 1986. — Vol. 22, № 2. — P. 294–301.
53. *Hohl, A.* Bifurcation cascade in a semiconductor laser subject to optical feedback / A. Hohl, A. Gavrielides // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 82, № 6. — P. 1148–1151.
54. *Huyet, G.* Low frequency fluctuations and multimode operation of a semiconductor laser with optical feedback / G. Huyet [et al.] // Opt. Commun. — 1998. — Vol. 149. — P. 341–347.
55. *Huyet, G.* A low-dimensional dynamical system to describe low-frequency fluctuations in a semiconductor laser with optical feedback / G. Huyet [et al.] // Opt. Commun. — 2000. — Vol. 180. — P. 339–344.
56. *Kovanis, V.* Instabilities and chaos in optically injected semiconductor lasers / V. Kovanis [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 1995. — Vol. 67, № 19. — P. 2780–2782.
57. *Kozyreff, G.* Dynamics of a semiconductor laser array with delayed global coupling / G. Kozyreff, A. G. Vladimirov, P. Mandel // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64, 016613.

58. *Krauskopf, B.* Bifurcation analysis of coupled laser modes in mutually delay-coupled lasers [Электронный ресурс] / B. Krauskopf, H. Erzgräber, D. Lenstra // Proc. IFAC-TDS 2004, to appear. — URL: <http://www.enm.bris.ac.uk/anm/preprints/2004r08.html>.
59. *Lang, R.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties / R. Lang, K. Kobayashi // IEEE J. Quantum Electron. — 1980. — Vol. 16(1), № 3. — P. 347–355.
60. *Lee, E. K.* Bistability and chaos in an injection-locked semiconductor laser / E. K. Lee [et al.] // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 47, №1. — P. 736–739.
61. *Levine, A. M.* Diode lasers with optical feedback: Stability of the maximum gain mode / A. M. Levine [et al.] // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52, № 5. — P. 3436–3439.
62. *Liu, Y.* Experimental control of chaos in a laser-diode interferometer with delayed feedback / Y. Liu, J. Ohtsubo // Opt. Lett. — 1994. — Vol. 19, № 7. — P. 448.
63. *Liu, Y.* Controlling dynamical behavior of a semiconductor laser with external optical feedback / Y. Liu, N. Kikuchi, J. Ohtsubo // Phys. Rev. E. — 1995. — Vol. 51, № 4. — P. R2697–R2700.
64. *Liu, Y.* Recovery process of low-frequency fluctuations in laser diodes with external optical feedback / Y. Liu, P. Davis and Y. Takiguchi // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 60, № 6. — P. 6595–6601.
65. *Lorenz, E. N.* Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // Journal of the Atmospheric Science. — 1963. — Vol. 20. — P. 130–141.
66. *Lythe, G.* Low pump limit of the bifurcation to periodic intensities in a semiconductor laser subject to external optical feedback / G. Lythe [et al.] // Phys. Rev. A. — 1997. — Vol. 55, № 6. — P. 4443–4448.
67. *Masoller, C.* Chaotic properties of the coherence collapsed state of laser diodes with optical feedback / C. Masoller, A. C. S. Schifino, C. Cabeza // Opt. Commun. — 1993. — Vol. 100. — P. 331–340.
68. *Masoller, C.* Coexistence of attractors in a laser diode with optical feedback from a large external cavity / C. Masoller // Phys. Rev. A. — 1994. — Vol. 50, № 3. — P. 2569–2578.

69. *Mork, J.* Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback: a theoretical analysis / J. Mork, B. Tromborg, P. L. Christiansen // IEEE J. Quantum Electron. — 1988. — Vol. 24, № 2. — P. 123–133.
70. *Mork, J.* Route to chaos and competition between relaxation oscillations for a semiconductor laser with optical feedback / J. Mork, J. Mark, B. Tromborg // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 65, № 16. — P. 1999–2002.
71. *Mork, J.* Chaos in semiconductor lasers with optical feedback: theory and experiment / J. Mork, B. Tromborg, J. Mark // IEEE J. Quantum Electron. — 1992. — Vol. 28, № 1. — P. 93–108.
72. *New, G. H. C.* Pulse evolution in mode-locking quasi-continuous lasers / G. H. C. New // IEEE J. Quantum Electron. — 1974. — Vol. 10. — P. 115–134.
73. *Nizette, M.* Stability of injection-locked CW-emitting external-cavity semiconductor lasers / M. Nizette, T. Erneux // IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron. — 2004. — Vol. 10. — P. 961–967.
74. *Ott, E.* Controlling Chaos / E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 64, № 11. — P. 1196–1199.
75. *Pieroux, D.* Interacting pairs of periodic solutions lead to tori in lasers subject to delayed feedback / D. Pieroux [et al.] // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 63, № 3, 036211.
76. *Pieroux, D.* Bridges of Periodic Solutions and Tori in Semiconductor Lasers Subject to Delay / D. Pieroux [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87, № 19, 193901.
77. *Pieroux, D.* Bifurcation diagram of a complex delay-differential equation with cubic nonlinearity / D. Pieroux, P. Mandel // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 67, 056213.
78. *Pieroux, D.* Low frequency fluctuations in the Lang-Kobayashi equations / D. Pieroux, P. Mandel // Phys. Rev. E. — 2003. — Vol. 68, 036204.
79. *Pomeau, Y.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems / Y. Pomeau, P. Manneville // Commun. Math. Phys. — 1980. — Vol. 74. — P. 189.

80. *Risch, Ch.* Self-pulsation in the output intensity and spectrum of GaAs-AlGaAs cw diode lasers coupled to a frequency-selective external optical cavity / Ch. Risch, C. Voumard // J. Appl. Phys. — 1977. — Vol. 48, № 5. — P. 2083–2085.
81. *Ritter, A.* Theory of laser diodes with weak optical feedback: I. Small-signal analysis and side-mode spectra; II. Limit-cycle behavior, quasi-periodicity, frequency locking, and route to chaos / A. Ritter, H. Haug // J. Opt. Soc. Am. B. — 1993. — Vol. 10. — P. 130–154.
82. *Rogister, F.* Suppression of low-frequency fluctuations and stabilization of a semiconductor laser subjected to optical feedback from a double cavity: theoretical results / F. Rogister [et al.] // Opt. Lett. — 1999. — Vol. 24, № 17. — P. 1218–1220.
83. *Rottschäfer, V.* A three-parameter study of external cavity modes in semiconductor lasers with optical feedback [Электронный ресурс] / V. Rottschäfer, B. Krauskopf // Proc. IFAC-TDS 2004, to appear. — URL: <http://www.enm.bris.ac.uk/anm/preprints/2004r05.html>.
84. *Roy, R.* Dynamical control of a chaotic laser: experimental stabilization of a globally coupled system / R. Roy [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 68, № 9. — P. 1259–1262.
85. *Sacher, J.* Intermittency in the coherence collapse of a semiconductor laser with external feedback / J. Sacher, W. Elsässer, E.O. Göbel // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 63, № 20. — P. 2224–2227.
86. *Sacher, J.* Intensity instabilities of semiconductor lasers under current modulation, external light injection, and delayed feedback / J. Sacher [et al.] // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45, № 3. — P. 1893–1905.
87. *Sano, T.* Antimode dynamics and chaotic itinerancy in the coherence collapse of semiconductor lasers with optical feedback / T. Sano // Phys. Rev. A. — 1994. — Vol. 50, № 3. — P. 2719–2726.
88. *Sciamanna, M.* Hopf bifurcation cascade in small- α laser diodes subject to optical feedback / M. Sciamanna, P. Megret, M. Blondel // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 69, 046209.
89. *Simpson, T. B.* Period-doubling cascades and chaos in a semiconductor laser with optical injection / T. B. Simpson [et al.] // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 51, № 5. — P. 4181–4185.

90. *Tabaka, A.* Bifurcation study of regular pulse packages in laser diodes subject to optical feedback / A. Tabaka [et al.] // Phys. Rev. E. — 2004. — Vol. 70, 036211.
91. *Tager, A. A.* Stability regimes and high-frequency modulation of laser diodes with short external cavity / A. A. Tager, B. B. Elenkrig // IEEE J. Quantum Electron. — 1993. — Vol. 29, № 12. — P. 2886–2890.
92. *Tager, A. A.* High-frequency oscillations and self-mode locking in short external-cavity laser diodes / A. A. Tager, K. Petermann // IEEE J. Quantum Electron. — 1994. — Vol. 30, № 7. — P. 1553–1561.
93. *Tromborg, B.* Nonlinear injection locking dynamics and the onset of coherence collapse in external cavity lasers / B. Tromborg, J. Mork // IEEE J. Quantum Electron. — 1990. — Vol. 26, № 4. — P. 642–654.
94. *Turovets, S. I.* Nonlinear dynamics of a laser diode subjected to both optical and electronic feedback / S. I. Turovets, J. Dellunde, K. A. Shore // J. Opt. Soc. Am. B — 1997. — Vol. 14, № 1. — P. 200–208.
95. *Van Tartwijk, G. H. M.* Theory of a diode laser with phase-conjugate feedback / G. H. M. van Tartwijk, H. J. C. van der Linden, D. Lenstra // Opt. Lett. — 1992. — Vol. 17, № 22. — P. 1590–1592.
96. *Van Tartwijk, G. H. M.* Sisyphus effect in semiconductor lasers with optical feedback / G. H. M. van Tartwijk, A. M. Levine, D. Lenstra // IEEE J. Quantum Electron. — 1995. — Vol. 1, № 2. — P. 466–472.
97. *Van Tartwijk, G. H. M.* Laser instabilities: a modern perspective / G. H. M. Van Tartwijk, G. P. Agrawal // Progress in Quantum Electronics. — 1998. — Vol. 22. — P. 43–122.
98. *Vicktorov, E. A.* Low frequency fluctuations in a multimode semiconductor laser with optical feedback / E. A. Vicktorov, P. Mandel // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85, № 15. — P. 3157–3160.
99. *Vladimirov, A. G.* The complex Lorenz model: geometric structure, homoclinic bifurcation and one-dimensional map / A. G. Vladimirov, V. Y. Toronov, V. L. Derbov // International Journal of Bifurcations and chaos. — 1998. — Vol. 8, № 4. — P. 723–729.
100. *Vladimirov, A. G.* Synchronization of weakly stable oscillators and semiconductor laser arrays / A. G. Vladimirov, G. Kozyreff, P. Mandel // Europhys. Lett. — 2003. — Vol. 61, № 5. — P. 613–619.

101. *Vladimirov, A. G.* A new model for a mode-locked semiconductor laser / A. G. Vladimirov, D. V. Turaev // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2004. — Vol. 47, № 10–11. — P. 769–776.
102. *Vladimirov, A. G.* Model for passive mode-locking in semiconductor lasers / A. G. Vladimirov, D. V. Turaev // Phys. Rev. A. — 2005. — Vol. 72, № 3. — 033808.
103. *Wolfrum, M.* Instabilities of lasers with moderately delayed optical feedback / M. Wolfrum, D. Turaev // Opt. Commun. — 2002. — Vol. 212. — P. 127–138.
104. *Ye, J.* Period-doubling route to chaos in a semiconductor laser with weak optical feedback / J. Ye, H. Li, J. M. McInerny // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 47, № 3. — P. 2249–2252.

Учебное издание

**Глазков Дмитрий Владимирович,
Кащенко Илья Сергеевич**

**Уравнения
динамики лазера**

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерная верстка Д. В. Глазков

Подписано в печать 27.11.2012. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура "Times New Roman".

Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 5,0.

Тираж 31 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.