Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

В.С. Климов

Многомерный математический анализ

Часть I

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальностям
Математика и Прикладная математика и информатика

Ярославль 2009

УДК 517
ББК В16я73
К49

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ;
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ЯГПУ Е.И. Смирнов.

К49 **Климов, В.С.** Многомерный математический анализ. Ч. I:учебное пособие/ В.С. Климов; Яросл. гос. ун-т. — Ярославль: ЯрГУ, 2009. — 128 с.
ISBN 978-5-8397-0635-4

Пособие «Многомерный математический анализ. Часть I» содержит следующие разделы дисциплины «Математический анализ»: многомерное дифференциальное исчисление, кратные интегралы, интегралы, зависящие от параметра.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальностям 010100 Математика и 010200 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Математический анализ», блок ОПД), очной формы обучения. Большая часть пособия может быть полезной и для студентов педагогических университетов, обучающихся по специальности «Математика».

ISBN 978-5-8397-0635-4

УДК 517
ББК В16я73

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов математического анализа, изучаемых студентами второго курса университетов специальности 010200 Прикладная математика и информатика и 010100 Математика.

Весь материал разбит на три главы. Первая глава посвящена многомерному дифференциальному исчислению. Здесь доказана формула Тейлора для скалярных функций многих переменных и даны приложения к экстремальным задачам. Вывод правила множителей Лагранжа в задачах на относительный экстремум основан на модификации метода штрафных функций. Замыкают первую главу элементы дифференциального исчисления для векторных функций векторного переменного.

Во второй главе изложена теория кратных интегралов. Основу подхода составляет применение верхнего и нижнего интегралов Дарбу. Эти понятия фигурируют в формулировке теоремы Фубини о совпадении кратного и повторного интегралов. Значительную часть главы занимает доказательство правила замены переменных в кратном интеграле. Методологическую основу этого доказательства составляет исследование аддитивных функций множества, представляющих интерес и для физиков, и для математиков.

В третьей главе изучены свойства функций, определяемых собственными и несобственными интегралами. Особо следует отметить доказательство теоремы Лиувилля о дифференцировании кратных интегралов по переменной области интегрирования. Указаны асимптотические оценки интегралов, основанные на методе Лапласа.

В пособии принята автономная (в пределах каждой главы своя) нумерация секций, разбитых на отдельные пункты. Формулы (теоремы, упражнения и т.п.) нумеруются в пределах каждой секции. При ссылках внутри секции указывается лишь номер соответствующей формулы (теоремы и т.п.); в противном случае приводится и номер секции. Например, формула 2.6(8) – это формула (8) из секции 2.6; лемма 1.5.3 – это лемма 3 из секции 1.5. В ряде мест имеются ссылки на учебные руководства. Особенно велико число ссылок на пособие автора «Одномерный математический анализ. Ч. 1, 2», изданное в 2005 и 2006 годах соответственно; этому пособию присвоен специальный знак К 1, части 1, 2. Символы ◄ и ► указывают начало и конец доказательства.

Многие разделы пособия обуждались с коллегами. Считаю приятным долгом выразить им самую искреннюю признательность. Буду благодарен за указания на возможные ошибки в тексте, ответственность за которые автор полностью берёт на себя.

Климов В.С., доктор физико-математических наук.

Глава 1

Многомерное дифференциальное исчисление

1.1 Дифференцируемые функции многих переменных

1.1.1 Конечномерное евклидово пространство

.

Пусть n – натуральное число. Через $\mathbf{R}^n$ ниже обозначается совокупность вектор-столбцов $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, где $x_1, \ldots, x_n$ – действительные числа, называемые компонентами вектора x, T – символ транспонирования. Стандартным образом в $\mathbf{R}^n$ вводится структура линейного пространства. Сумму двух векторов $x = (x_j), y = (y_j)$ определяют равенством $x + y{:=}(x_j + y_j)$, произведение вектора $x = (x_j)$ на действительное число α – формулой $\alpha x := (\alpha x_j)$. Вектор $(0, \ldots, 0)^T$ будет обозначаться просто $\mathbf{0}$. Стандартным базисом в $\mathbf{R}^n$ будет называться базис, образованный векторами $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ с 1 на j-ом месте и 0 на всех остальных.

Функцию $\Lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$ называют *линейным функционалом* на $\mathbf{R}^n$, если

$$\Lambda(x + y) = \Lambda x + \Lambda y \quad \text{и} \quad \Lambda(\alpha x) = \alpha \Lambda(x) \tag{1}$$

для любых x, y из $\mathbf{R}^n$ и действительного числа α. Из (1) вытекает равенство

$$\Lambda\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Lambda(v_j),$$

где $v_j \in \mathbf{R}^n, \alpha_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$. Вектор $x = (x_j)$ допускает представление $x = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, поэтому

$$\Lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \Lambda(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j. \tag{2}$$

Равенство (2) позволяет идентифицировать линейный функционал Λ с соответствующей ему вектор-строкой $p = (p_1, \ldots, p_n)$, а пространство линейных функционалов на

$\mathbf{R}^n$ – с пространством вектор-строк $\mathbb{R}^n$. Если $x = (x_j) \in \mathbf{R}^n, p = (p_j) \in \mathbb{R}^n$, то полагаем $px = p_1x_1 + \cdots + p_nx_n$.

В линейных пространствах $\mathbf{R}^n, \mathbb{R}^n$ можно ввести структуру евклидова пространства, т. е. определить скалярное произведение. Будем считать, что скалярное произведение (x, y) векторов $x = (x_j), y = (y_j)$ определяется равенством $(x, y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$. Это позволяет ввести длину $|x| = \sqrt{(x, x)}$ вектора x из $\mathbf{R}^n$, определить в $\mathbf{R}^n$ метрику и топологию. Поскольку операция транспонирования осуществляет изоморфизм между ранее изученным пространством $\mathbb{R}^n$ и пространством $\mathbf{R}^n$, то нет нужды в отдельном изучении пространства $\mathbf{R}^n$. Далее будут использоваться неравенство Коши $(x, y) \leqslant |x|\ |y|$ и неравенство треугольника $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Очевидно, что $px = (p^T, x)\ \forall p \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbf{R}^n$.

Ниже $B(a, \rho) := \{x \in \mathbf{R}^n, |x - a| \leqslant \rho\}$ – замкнутый шар радиуса ρ с центром в точке a. Если $B(a, \rho) \subset E \subset \mathbf{R}^n$ при некотором $\rho > 0$, то точку a называют *внутренней* точкой множества E. Совокупность внутренних точек множества E обозначают символом $\overset{\circ}{E}$; используется и обозначение $int\ E$. Множество E называют *открытым*, если каждая его точка является внутренней. Для любого множества $M \subset \mathbf{R}^n$ его внутренность $int\ M$ есть открытое множество. Множество M именуют *замкнутым*, если дополнение к нему $CM := \mathbf{R}^n \backslash M$ открыто; M – ограниченное множество, если оно содержится в некотором шаре $B(a, \rho)$. Замкнутость и ограниченность множества M эквивалентны компактности этого множества. Наименьшее из замкнутых множеств M, содержащих множество $A \subset \mathbf{R}^n$, называют *замыканием* множества A и обозначают символом $\overline{A}$.

1.1.2 Дифференцируемость по Гато

Пусть $E \subset \mathbf{R}^n, a \in \overset{\circ}{E}$. Изучение поведения функции $f : E \to \mathbb{R}$ в окрестности точки a начнём с рассмотрения сужения функции f на прямые линии, проходящие через точку a. Пусть $v \in \mathbf{R}^n, v \neq \mathbf{0}$. Множество точек $L = \{x \in \mathbf{R}^n,\ x = a + tv, t \in \mathbb{R}\}$ есть прямая, проходящая через точку a. Пересечение $L \cap E \neq \varnothing$, поэтому имеет смысл функция $\varphi(t) = f(a + tv)$ действительного переменного t, определённая в некоторой окрестности $t = 0$. Если функция $\varphi(t) = f(a + tv)$ дифференцируема в 0, то число $\varphi'(0)$ называют *производной функции f в точке a по направлению v* и обозначают символом $f'(a, v)$. Итак,

$$f'(a, v) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0}\ \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}\ .$$

Производную по базисному вектору $\mathbf{e_j}$ в точке a обозначают символами

$$f_{x_j}(a) = D_jf(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

и называют *частной производной* функции f в точке a по переменному x_j. В качестве примера найдём частные производные функции $f(x_1, x_2) = arc\ tg\ (x_1^2 + x_2^3)$. Имеем

$$D_1f(x_1, x_2) = \frac{2x_1}{1 + (x_1^2 + x_2^3)^2}, \quad D_2f(x_1, x_2) = \frac{3x_2^2}{1 + (x_1^2 + x_2^3)^2)^2}.$$

Для того чтобы найти частную производную функции f по аргументу x_1, надо считать второй аргумент x_2 фиксированным и дифференцировать по x_1 функцию одного переменного $x_1 \to arc\ tg\ (x_1^2 + x_2^3)$. Это замечание носит общий характер и применимо к функциям любого числа переменных. Таким образом, вычисление частных производных сводится к вычислению хорошо знакомых читателю обычных производных от функций одного переменного.

Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют *дифференцируемой по Гато*[1] в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если производная $f'(a, v)$ существует для любого направления v и найдётся такой линейный функционал $\Lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$, что

$$f'(a, v) = \Lambda v \quad \forall v \in \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

Из (3) вытекают равенства $f'(a, \mathbf{e_j}) = \Lambda \mathbf{e_j} = D_j f(a)$ $(j = 1, \ldots, n)$, если $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$, то

$$f'(a, v) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a)\ v_j. \tag{4}$$

Из дифференцируемости по Гато функции f в точке a не следует непрерывность функции f в этой точке. Действительно, функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2 = x_1^2,\ x_1 \neq 0, \\ 0 & \text{для всех остальных } x \end{cases}$$

дифференцируема по Гато в точке $\mathbf{0}$, но разрывна в этой точке.

1.1.3 Дифференцируемость по Фреше

Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют *дифференцируемой по Фреше*[2] в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если существует такой линейный функционал $\Lambda : \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$, что

$$\lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{f(a + v) - f(a) - \Lambda v}{|v|} = 0. \tag{5}$$

Равенство (5) эквивалентно соотношению

$$f(a + v) - f(a) = \Lambda v + \omega(v), \tag{6}$$

в котором $\omega(v) = o(|v|)$, т.е.

$$\lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{\omega(v)}{|v|} = 0.$$

Слагаемое Λv называют *главной (линейной частью)* приращения функции f в точке a, или *дифференциалом* функции f в точке a, и обозначают символом $df|_{\,a}(v)$.

Теорема 1. *Дифференцируемость по Фреше функции f в точке a влечёт за собой дифференцируемость по Гато в той же точке; обратное, вообще говоря, неверно.*

[1] Гато Рене Эжен ($G\hat{a}teaux\ Rene'\ Euge'ne$) (г. рождения неизвестен – 1914) – французский математик.

[2] Фреше Морис Рене ($Fre'chet\ Maurice\ Rene$) (1878 – 1973) – французский математик.

◀ Пусть $v \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. В силу (6) имеем

$$f(a+tv) - f(a) = \Lambda(tv) + \omega(tv).$$

Поэтому

$$f'(a,v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \Lambda(v) + \lim_{t\to 0} \frac{\omega(tv)}{t} = \Lambda v.$$

Итак, дифференцируемость по Фреше влечёт дифференцируемость по Гато.

Правая часть (6) стремится к нулю при $v \to \mathbf{0}$. Это означает, что приращение функции f в точке a стремится к 0, если приращение аргумента стремится к $\mathbf{0}$, т.е. функция f непрерывна в точке a. Как показывает пример, приведённый в конце предшествующего пункта, существуют функции, дифференцируемые по Гато в некоторой точке, но разрывные в той же точке. Это доказывает и второе утверждение теоремы.▶

Следствие. *Справедливы равенства*

$$df|_{\,a}(v) = f'(a,v) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) v_j.$$

Итак, для дифференцируемости по Фреше функции f в точке a необходимы дифференцируемость по Гато и непрерывность функции f в этой точке.

Теорема 2. *Пусть в некоторой окрестности точки a из $\overset{\circ}{E}$ существуют все частные производные $D_j f(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$. Если эти производные непрерывны в точке a, то функция f дифференцируема по Фреше в точке a.*

◀ Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $\Delta f = f(a_1+v_1, a_2+v_2) - f(a_1, a_2)$– приращение функции f в точке $a = (a_1, a_2)^T$, соответствующее приращению $v = (v_1, v_2)^T$ аргумента x. Тогда в силу формулы конечных приращений

$$\Delta f = f(a_1+v_1, a_2+v_2) - f(a_1, a_2) = f(a_1+v_1, a_2+v_2) - f(a_1, a_2+v_2) +$$

$$+ f(a_1, a_2+v_2) - f(a_1, a_2) = D_1 f(a_1 + \theta_1 v_1, a_2+v_2) v_1 + D_2 f(a_1, a_2 + \theta_2 v_2) v_2,$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Следовательно,

$$\begin{gathered} \Delta f = \overbrace{D_1 f(a_1,a_2) v_1 + D_2 f(a_1,a_2) v_2}^{I} + \\ + \overbrace{\left(D_1 f(a_1+\theta_1 v_1, a_2+v_2) - D_1 f(a_1,a_2)\right) v_1}^{II} + \\ + \overbrace{\left(D_2 f(a_1, a_2+\theta_2 v_2) - D_2 f(a_1,a_2)\right) v_2}^{III}. \end{gathered} \tag{7}$$

Поскольку частные производные $D_1 f, D_2 f$ непрерывны в точке a, то второе и третье слагаемые в правой части (7) бесконечно малы по сравнению с v: $II = o(v), III = o(v)$ при $v \to 0$. Первое слагаемое линейно по v. Равенство (7) означает дифференцируемость функции f в точке a. Теорема в случае $n = 2$ доказана. Общий случай рассматривается аналогично. ▶

Упражнение 1.*Доказать, что функция одного переменного*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

всюду дифференцируема, но её производная разрывна в точке 0.

Упражнение 2. *Доказать дифференцируемость в точке* $\mathbf{0} = (0,0)^T$ *функции* $f(x_1, x_2) = |x_1 x_2|$.

1.1.4 Производная и градиент

Пусть функция $f \colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема по Гато в точке a. Тогда производная функции f по любому направлению $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ существует и вычисляется по формуле (4). Набору частных производных $D_j f(a) (j = 1, \ldots, n)$ функции f можно сопоставить вектор-строку $f'(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a))$ из $\mathbb{R}^n$, называемую *производной* функции f в точке a, и вектор-столбец $\nabla f(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a))^T$ из $\mathbf{R}^n$, называемый *градиентом* функции f в точке a. Равенство (4) с учётом принятых обозначений может быть записано в виде

$$f'(a, v) = f'(a)v = (\nabla f(a), v). \tag{8}$$

Теорема 3. *Существует вектор v_0 длины 1 такой, что для любого вектора v длины 1*

$$f'(a, v_0) \geqslant f'(a, v). \tag{9}$$

◀ Возможны два случая: 1)$\nabla f(a) = \mathbf{0}$; 2)$\nabla f(a) \neq \mathbf{0}$. В первом случае $f'(a, v) \equiv 0$, поэтому в качестве v_0 можно взять любой вектор единичной длины.

Во втором случае $\nabla f(a) \neq \mathbf{0}$. Убедимся, что в данном случае вектор v_0 определяется однозначно и $v_0 = \nabla f(a)/|\nabla f(a)|$. Действительно, если $|v| = 1$, то

$$f'(a, v) = (\nabla f(a), v) \leqslant |\nabla f(a)||v| = |\nabla f(a)|,$$

причём знак равенства имеет место лишь в случае

$$v = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|}. \ ▶$$

Неравенство (9) эквивалентно следующему утверждению: производная по направлению максимальна, если направление задаётся градиентом функции f. Иначе говоря, в направлении градиента функция растёт быстрее всего.

1.1.5 Дифференцируемость суперпозиции функций

Установим правило дифференцирования суперпозиции функций многих переменных.

Теорема 4. *Пусть функции $y_i = f_i(x) (i = 1, \ldots, m)$ определены на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ и дифференцируемы по Фреше в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, а функция $z = g(y)$ определена* *в некоторой окрестности точки $b = (f_1(a), \dots, f_m(a))^T \in \mathbf{R}^m$ и дифференцируема по Фреше в этой точке. Тогда 1) суперпозиция $z = h(x) = g[f_1(x), \dots, f_m(x)]$ определена на некоторой окрестности точки a и дифференцируема в этой точке; 2) справедливо равенство*

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(a) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad (j = 1, \dots, n). \tag{10}$$

◀ В силу дифференцируемости по Фреше функций $f_i (i = 1, \dots, m)$ и g в точках a и b соответственно имеют место равенства

$$\Delta f_i = f_i(a + \Delta x) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \Delta x_j + \omega_i(\Delta x) \quad (i = 1, \dots, m), \tag{11}$$

$$\Delta g \ = \ g(b + \Delta y) - g(b) \ = \ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \Delta y_i + \omega(\Delta y), \tag{12}$$

где $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$, $\Delta y = (\Delta y_1, \dots, \Delta y_m)^T$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\omega_i(\Delta x)}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\omega(\Delta y)}{|\Delta y|} = 0.$$

Если в равенстве (12) положить $\Delta y_i = \Delta f_i (i = 1, \dots, m)$, то получим соотношения

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{m} \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \Delta x_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \omega_i(\Delta x) + \omega(\Delta y) = I_1 + I_2 + I_3,$$

в которых $\Delta h = h(a + \Delta x) - h(a)$. Первое слагаемое

$$I_1 = \sum_{i=1}^{m} \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \right) \Delta x_j$$

линейно относительно Δx. Поскольку $\omega_i(\Delta x) = o(\Delta x) (i = 1, \dots, m)$, то

$$I_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \omega_i(\Delta x) = o(\Delta x).$$

Так как $I_3 = \omega(\Delta y) = 0(\Delta y)$, а $\Delta y = O(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $I_3 = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Объединяя установленные выше соотношения, приходим к равенству

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) \Delta x_j + o(\Delta x), \tag{13}$$

означающему дифференцируемость функции $h(x) = g[f_1(x), \dots, g_m(x)]$ в точке a. Коэффициент при Δx_j в правой части (13) равен $\dfrac{\partial h}{\partial x_j}(a)$, что и приводит к формуле (10).▶

В условиях теоремы дифференцируемость по Фреше нельзя заменить дифференцируемостью по Гато. Вместе с тем если функция $g(y)$ дифференцируема по Гато в точке $b = a + sv, s \in \mathbb{R}, v \in \mathbf{R}^n$, то функция $h(t) = g(a + tv)$ дифференцируема в точке s и $h'(s) = g'(b)v$.

1.1.6 Формула конечных приращений

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – скалярная функция, определённая на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$. Если отрезок $[a, b]{:=}\{z \in \mathbf{R}^n, z = (1-t)a+tb, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ принадлежит множеству E, то имеет смысл функция

$$\varphi(t) = f[a + t(b - a)] \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Как нетрудно видеть, $\varphi(0) = f(a), \varphi(1) = f(b)$; непрерывность функции f на отрезке $[a, b]$ влечёт непрерывность функции $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть сужение функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на отрезок $[a, b]$ $(a \neq b)$ непрерывно. Пусть в каждой точке интервала $(a, b) \subset \overset{\circ}{E}$ функция f дифференцируема по Гато. Тогда найдётся такая точка c из интервала (a, b), что справедливо равенство*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) = (\nabla f(c), b - a), \tag{14}$$

называемое формулой конечных приращений.

◀ В условиях теоремы функция $\varphi(t) = f[a + t(b - a)]$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и дифференцируема на интервале $(0, 1)$. Поэтому найдётся такое число θ из $(0, 1)$, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$. Поскольку $\varphi(0) = f(a),\ \varphi(1) = f(b),\ \varphi'(\theta) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$, то последовательно получаем

$$f(b) - f(a) \ = \ \varphi(1) - \varphi(0) \ = \ \varphi'(\theta) = f'(a + \theta(b - a))(b - a),$$

что и влечёт равенство (14), в котором $c = a + \theta(b - a) \in (a, b)$.▶

Напомним некоторые определения. Функция $f\colon X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица, если найдется такая константа L, что

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant L|x' - x''| \quad \forall x', x'' \in X, \tag{15}$$

константу L при этом называют постоянной Липшица. Множество X именуют *выпуклым*, если для любых точек u, v из X соединяющий их отрезок $[u, v]$ содержится в X. Из теоремы 5 вытекает

Следствие. *Пусть X – открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, f – числовая функция на X, дифференцируемая по Гато в каждой точке множества X. Если $|\nabla f(x)| \leqslant L$ для всех x из X, то справедливо неравенство (15).*

◀ Пусть $x', x'' \in X$. Так как X – выпуклое множество, то $[x', x''] \subset X$. Сужение функции f на любой принадлежащий X отрезок непрерывно. Согласно формуле конечных приращений справедливо равенство $f(x') - f(x'') = (\nabla f(c), x' - x'')$ для некоторого c из (x', x''). Используя это равенство, оценку $|\nabla f(x)| \leqslant L$ и неравенство Коши, получаем неравенство (15).▶

Открытое линейно связное подмножество $\mathbf{R}^n$ называют *областью.* В качестве самостоятельного упражнения читателю предлагается доказать следующие утверждения:

1) открытое множество $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ есть область в том и только в том случае, когда две произвольные точки множества Ω могут быть соединены ломаной линией, целиком содержащейся в Ω;

2) точная нижняя грань длин ломаных, соединяющих две точки a, b области Ω и содержащихся в этой области, есть неотрицательное число $d_\Omega(a, b)$, называемое *внутренним расстоянием* между точками a, b; оно удовлетворяет соотношениям: $\alpha)$ $d_\Omega(a, b) > 0$, если $a \neq b$ (положительность расстояния), $\beta)$ $d_\Omega(a, b) = d_\Omega(b, a)$ (симметрия), $\gamma)$ $d_\Omega(a, c) \leqslant d_\Omega(a, b) + d_\Omega(b, c)$ (неравенство треугольника);

3) если f – числовая функция на области Ω, дифференцируемая по Гато в каждой точке этой области, то

$$|f(a) - f(b)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |\nabla f(x)|\; d_\Omega(a,b) \quad \forall\; a,b \in \Omega\,;$$

4) функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ постоянна в области Ω, если и только если $\nabla f(x) = 0\,\forall x \in \Omega$ (критерий постоянства функции многих переменных).

1.1.7 Неявные функции

Пусть Ω – подмножество плоскости $\mathbf{R}^2, F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – числовая функция, определённая на множестве Ω и для некоторого $\hat{x}$ из $\mathbb{R}$ уравнение $F(\hat{x}, y) = 0$ имеет единственное решение $y = \hat{y}$. Представляется естественным следующий вопрос: будет ли уравнение

$$F(x,y) = 0 \tag{16}$$

иметь единственное решение для x, близких к $\hat{x}$, т.е. существует ли определённая в малой окрестности $\hat{x}$ функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая в этой окрестности тождеству $F(x, \varphi(x)) \equiv 0$?. Если подобная функция существует, то она называется *неявной функцией*, определяемой уравнением (16).

Теорема 6. *Пусть Ω – выпуклое открытое подмножество $\mathbf{R}^2, F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – числовая функция, непрерывно дифференцируемая в области Ω, причём $F_y(x,y) \neq 0$ в области Ω. Пусть $(\hat{x}, \hat{y})^T \in \Omega$ и $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$.*

Тогда существует функция $y = \varphi(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая на некотором интервале $(\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)\,(\delta > 0)$, удовлетворяющая равенству

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \tag{17}$$

тождественно на интервале $(\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta)$.

◀ Не нарушая общности, будем считать, что $F_y(x,y) > 0\;\forall (x,y)^T \in \Omega$. Отсюда вытекает, в частности, строгое возрастание функции $y \to F(\hat{x}, y)$. Поскольку $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, то $F(\hat{x}, y) < 0$, если $y < \hat{y}$, и $F(\hat{x}, y) > 0$, если $y > \hat{y}, ((\hat{x}, y)^T \in \Omega)$. Фиксируем положительное число p так, что $(\hat{x}, \hat{y} - p)^T \in \Omega$ и $(\hat{x}, \hat{y} + p)^T \in \Omega$. При подобном выборе числа p справедливы неравенства

$$F(\hat{x}, \hat{y} - p) < 0 < F(\hat{x}, \hat{y} + p).$$

В предположениях теоремы функция F непрерывна. Можно указать такое $\delta > 0$, что

$$1) F(x, \hat{y} - p) < 0 < F(x, \hat{y} + p) \quad \forall x \in [\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]; \tag{18}$$

2) прямоугольник Π с вершинами $(\hat{x} \pm \delta, \hat{y} \pm p)^T$ принадлежит области Ω. При каждом x из $[\hat{x} - \delta, \hat{x} + \delta]$ функция $y \to F(x,y)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[\hat{y} - p, \hat{y} + p]$, в силу (18) функция $F(x,y)$ принимает на концах этого отрезка значения разных знаков. Поэтому найдётся единственное число $y = \varphi(x)$, для которого $F[x, \varphi(x)] = 0$. Существование функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей равенству (17), доказано.

Установим непрерывность функции $\varphi\colon [\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta] \to \mathbb{R}$. Пусть $x_n \in [\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta]$, $x_n \to x_0$ и $y_n = \varphi(x_n)$. Последовательность точек $(x_n, y_n)^T$ принадлежит прямоугольнику Π и $F(x_n, y_n) = 0$. Если $(x_0, y_0)^T$ – предельная точка этой последовательности, то $(x_0, y_0)^T \in \Pi$ и $F(x_0, y_0) = 0$. Отсюда следует равенство $y_0 = \varphi(x_0)$. Из проведённых рассуждений и вытекает непрерывность функции φ.

Докажем теперь дифференцируемость функции φ на интервале $(\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)$. Пусть точки x_0, x принадлежат интервалу $(\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)$. Из определения функции φ вытекают соотношения

$$F(x_0, \varphi(x_0)) = 0, \quad F(x, \varphi(x)) = 0. \tag{19}$$

Из (19) в силу формулы конечных приращений вытекает равенство

$$F_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y = 0,$$

в котором $\Delta x = x - x_0, \Delta y = \varphi(x) - \varphi(x_0), 0 < \theta < 1$. Таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{F_y(x_0+\theta x, y_0+\theta\Delta y)}. \tag{20}$$

Поскольку функция $y = \varphi(x)$ непрерывна, то $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Переходя в (20) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем соотношения

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0, \varphi(x_0))}{F_y(x_0, \varphi(x_0))}. \tag{21}$$

Равенство (21) влечёт за собой непрерывность функции $\varphi'(x)$ на интервале $(\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)$.▶

Многомерным аналогом теоремы 6 является

Теорема 7. *Пусть Ω – выпуклое открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}, F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – числовая функция, непрерывно дифференцируемая на области Ω и $F_y(x, y) \neq 0$ в области Ω. Пусть*

$$\hat{x} \in \mathbf{R}^k,\ \hat{y} \in \mathbf{R},\ (\hat{x}, \hat{y})^T \in \Omega,\ F(\hat{x}, \hat{y}) = 0.$$

Тогда существует функция $y = \varphi(x)$, определённая и непрерывно дифференцируемая на некотором открытом шаре $|x - \hat{x}| < \delta$ $(\delta > 0)$, удовлетворяющая на этом шаре равенству $F(x, \varphi(x)) = 0$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в случае $k = 1$. Необходимо лишь вместо промежутков $[\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta]$, $(\hat{x}-\delta, \hat{x}+\delta)$ рассматривать шары $|x-\hat{x}| \leqslant \delta$, $|x-\hat{x}| < \delta$ соответственно. Неявная функция $y = \varphi(x)$ в предположениях теоремы 7 зависит от k переменных $x_1, \ldots, x_k$. Её частные производные $\varphi_{x_j}(x)\,(j = 1, \ldots, k)$ находятся по формулам

$$\varphi_{x_j}(x) = -\frac{F_{x_j}(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}, \quad (j = 1, \ldots, k),$$

аналогичным равенству (21).

1.1.8 Касательное множество

Пусть Q – произвольное подмножество $\mathbf{R}^n$. Вектор v из $\mathbf{R}^n$ называют *касательным* к множеству Q в точке $a \in Q$, если существует такая функция $\psi\colon [0,\delta] \to \mathbf{R}^n$, что $\psi(t) \in Q\,(0 \leqslant t \leqslant \delta)$, $\psi(0) = a$ и

$$v = \lim_{t\to+0} \frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \psi'(0).$$

Геометрически требования к функции ψ означают следующее: кривая $x = \psi(t)$ расположена в множестве $Q\,(\psi(t) \in Q)$, проходит через точку $a\,(\psi(0) = a)$ и вектор $v = \psi'(0)$ есть касательная к кривой $x = \psi(t)$. Совокупность векторов v, касательных к Q в точке a, называют *касательным множеством* и обозначают символом $T_Q(a)$. Касательное множество полезно при изучении геометрических свойств множества Q, оно естественным образом возникает в оптимизационных задачах.

Рассмотрим случай, когда Q есть поверхность уровня функции многих переменных. Именно, пусть

$$Q = \{x \in W, \qquad \Phi(x) = 0\}, \tag{22}$$

где W– открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n, \Phi$– непрерывно дифференцируемая на W функция.

Теорема 8. *Пусть множество Q определено равенством (22), $a \in Q$ и $\nabla\Phi(a) \neq 0$. Тогда*

$$T_Q(a) = \{v \in \mathbf{R}^n, (\nabla\Phi(a), v) = 0\}\,. \tag{23}$$

◀ Пусть $v \in T_Q(a)$. Тогда существует функция $\psi\colon [0,\delta] \to \mathbf{R}^n$, для которой $\Phi[\psi(t)] = 0\ (0 \leqslant t \leqslant \delta)$, $\psi'(0) = v$. Дифференцируя тождество $\Phi[\psi(t)] = 0$ по t, получаем $(\nabla\Phi(a), \psi(0)) = 0 = (\nabla\Phi(a), v)$. Следовательно,

$$T_Q(a) \subset \{v \in \mathbf{R}^n, (\nabla\Phi(a), v) = 0\}\,.$$

Установим противоположное включение. Пусть $v \in \mathbf{R}^n$, $v \neq \mathbf{0}$ и $(\nabla\Phi(a), v) = 0$. Введём в рассмотрение функцию двух действительных переменных t, s, полагая $F(t,s) = \Phi(a + tv + s\nabla\Phi(a))$ Функция $F(t,s)$ непрерывно дифференцируема вблизи точки $(0,0)^T$ и удовлетворяет соотношениям

$$F(0,0) = 0, \quad F_t(0,0) = (\nabla\Phi(a), v) = 0, \quad F_s(0,0) = |\nabla\Phi(a)|^2 > 0.$$

Из теоремы 6 вытекает, что уравнение $F(t,s) = 0$ имеет решение $s = \varphi(t)$, определённое и непрерывно дифференцируемое на некотором интервале $(-\delta, \delta)$ положительной длины. При этом

$$\varphi'(0) \;=\; -\frac{F_t(0,0)}{F_s(0,0)} \;=\; 0.$$

Функция $\psi(t) = a + tv + \varphi(t)\nabla\Phi(a)$ обладает свойствами: $\Phi[\psi(t)] = 0$, т.е. $\psi(t) \in Q$, $\psi(0) = a$ и $\psi'(0) = v$. Следовательно, $v \in T_Q(a)$. Таким образом, справедливо включение

$$\{v \in \mathbf{R}^n, (\nabla\Phi(a), v) = 0\} \subset T_Q(a).$$

Равенство (23) доказано.▶

Множество $a+T_Q(a)$ называют *касательной гиперплоскостью* к поверхности (22) в точке $a=(a_1,\dots,a_n)^T$. Касательная гиперплоскость задаётся уравнением

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(a)(x_1-a_1)+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}(a)(x_n-a_n)=0.$$

Прямую, проходящую через точку a и перпендикулярную касательной гиперплоскости, именуют *нормалью* к поверхности (22). В качестве направляющего вектора нормали можно взять, например, градиент функции Φ в точке a. В частности, если Q есть сфера в $\mathbf{R}^n$, определяемая уравнением $\Phi(x) = x_1^2+\dots+x_n^2-1=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $a=(a_1,\dots,a_n)^T\in Q$ имеет вид $a_1x_1+\dots+a_nx_n=1$.

1.2 Частные производные высших порядков

1.2.1 Определение частных производных высших порядков

Предположим, что функция $f\colon E\to\mathbb{R}\,(E\subset\mathbf{R}^n)$ имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ для всех x, принадлежащих некоторой окрестности $\mathscr{U}(a)$ точки a из $\overset{\circ}{E}$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\colon\mathscr{U}(a)\to\mathbb{R}$ есть снова функция n переменных и у неё могут существовать частные производные по некоторым переменным, она может быть непрерывной, липшицевой, дифференцируемой и т.п. Если существует частная производная функции $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ по аргументу x_i в точке a, то она называется частной производной второго порядка в точке a и обозначается символом $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$ (или $D_iD_jf(a), f_{x_ix_j}(a)$). Если $i=j$, то соответствующую производную D_iD_if именуют чистой, используется обозначение $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ (или $D_i^2f(a), f_{x_i{}^2}(a)$). При $i\neq j$ производная $D_iD_jf(a)$ называется смешанной; она, вообще говоря, не совпадает с производной $D_jD_if(a)$. В качестве примера рассмотрим функцию двух действительных переменных x,y, определяемую равенством

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{при } x=y=0.\end{cases}$$

Так как $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ и

$$f_x(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}\ \text{ при } x^2+y^2>0,$$

$$f_y(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\ \text{при } x^2+y^2>0,$$

то $f_{yx}(0,0) = 1 \neq f_{xy}(0,0) = -1$. Таким образом, в рассматриваемом случае смешанные производные различны. Условия совпадения смешанных производных приводятся в следующем пункте.

Аналогичным образом определяются частные производные третьего и последующих порядков. Например, $(D_m D_i D_j)f = D_m(D_i D_j f)$ и т.д.; полагают $D_i D_i D_j f = D_i^2 D_j f$, $D_i D_i D_i f = D_i^3 f$; подобные обозначения используются и для производных более высоких порядков. Более удобная система обозначений частных производных рассматривается в п. 3.

1.2.2 Смешанные производные

Вначале установим результат, относящийся к функциям двух действительных переменных.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ двух действительных переменных x, y определена в некоторой окрестности точки $P(x_0, y_0)$ и имеет там частные производные f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}. Если смешанные производные f_{xy}, f_{yx} непрерывны в точке P, то они совпадают: $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$.*

◀ Пусть смешанные производные определены в квадрате

$$\{(x,y)^T \in \mathbf{R}^2 : |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \xi\}$$

и непрерывны в точке $P(x_0, y_0)$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t) + f(x_0, y_0) \quad (0 < t < \xi).$$

Установим равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t^2} = f_{yx}(P). \tag{1}$$

Положим $\varphi(x) = f(x, y_0 + t) - f(x_0, y_0)$. Как нетрудно видеть, $\Phi(t) = \varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0)$. Применяя теорему о среднем к функции φ переменного x, имеем

$$\Phi(t) = \varphi(x_0 + t) - \varphi(x_0) = \varphi_x(c)t = (f_x(c, y_0 + t) - f_x(c, y_0))\, t;$$

здесь $c \in (x_0, x_0 + t)$. Выражение в скобках можно представить в виде

$$f_x(c, y_0 + t) - f_x(c, y_0) = f_{yx}(c, d)t,$$

где $d \in (y_0, y_0 + t)$ (снова используется формула конечных приращений). Объединяя установленные равенства, приходим к соотношению $\Phi(t) = f_{yx}(c,d)t^2$. Числа c, d зависят от t, но при $t \to 0 \quad (c,d) \to (x_0, y_0)$. Поскольку функция f_{yx} непрерывна в точке P, то $f_{yx}(c,d) \to f_{yx}(P)$ при $t \to 0$. Следовательно, и $\dfrac{\Phi(t)}{t^2} \to f_{yx}(P)$, что и доказывает равенство (1). Ввиду симметрии переменных x, y в выражении Φ верно равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t)}{t^2} = f_{xy}(P). \tag{2}$$

Соотношения (1),(2) влекут за собой доказываемое утверждение. ▶

Остановимся на модификациях и обобщениях теоремы 1. Аналогичное теореме 1 утверждение верно и для функций многих переменных: если в некоторой окрестности точки a существуют производные $f_{x_i x_j}, f_{x_j x_i}$, непрерывные в точке a, то они совпадают: $f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)$. В частности, если все производные второго порядка $f_{x_i x_j}$ непрерывны в точке a, то матрица

$$f''(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(a) & f_{x_1x_2}(a) & \dots & f_{x_1x_n}(a) \\ f_{x_1x_2}(a) & f_{x_2x_2}(a) & \dots & f_{x_2x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(a) & f_{x_nx_2}(a) & \dots & f_{x_nx_n}(a) \end{pmatrix}$$

симметрична: $f_{x_i x_j}(a) = f_{x_j x_i}(a)\,(i, j = 1, \dots, n)$. Определяемую таким образом матрицу $f''(a)$ называют матрицей Гессе [3] функции f в точке a. Утверждение теоремы 1 сохранится, если непрерывность вторых производных заменить условием дифференцируемости функций f_x, f_y в точке P. Аналогичное замечание относится к функциям n переменных.

Результаты такого рода справедливы и для производных высших порядков. Например, если все производные порядка s функции f непрерывны в точке a, то

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(a) = \frac{\partial^s f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_s}}(a),$$

где набор $(j_1 \dots j_s)$ получен перестановкой набора $(i_1 \dots i_s)$.

1.2.3 Дифференциалы высших порядков

Если не оговорено противное, ниже дифференцируемость функции означает её дифференцируемость по Фреше. Напомним, что достаточным условием дифференцируемости функции f переменных $x_1, \dots, x_n$ в точке a является существование всех частных производных $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$ в окрестности точки a и их непрерывность в этой точке.

Пусть m– натуральное число, $m \geqslant 2$. Функцию $f\colon E \to \mathbb{R}\,(E \subset \mathbf{R}^n)$ назовём m раз дифференцируемой в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если все производные до порядка $m-1$ включительно функции f дифференцируемы в точке a. Например, функция f дифференцируема m раз в точке a, если все её производные до порядка m включительно определены в некоторой окрестности точки a и непрерывны в этой точке.

Определим дифференциалы порядка m. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дифференцируема m раз в точке $a \in \overset{\circ}{E}$. Фиксируем вектор $v = (v_j)$ из $\mathbf{R}^n$ и положим $\varphi(t) = f(a + tv)$. Функция φ определена в некоторой окрестности точки 0. Покажем, что функция φ дифференцируема m раз в точке 0 и найдём производную $\varphi^{(m)}(0)$. Имеем последовательно

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a + tv) v_j, \qquad \varphi''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f(a + tv) v_i v_j,$$

$$\varphi^{(m-1)}(t) = (v_1 D_1 + \dots + v_n D_n)^{m-1} f_{|x=a+tv},$$

[3] Гессе Отто Людвиг (*Hesse Otto Lüdwig*) (1811 – 1874) – немецкий математик.

$$\varphi^{(m)}(0) = (v_1 D_1 + \dots + v_n D_n)^m f_{|x=a}.$$

Функцию $v \to \varphi^{(m)}(0)$ называют дифференциалом порядка m функции f в точке a и обозначают символом $d^m f\big|_a(v)$. Отметим равенства

$$df\big|_a(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j D_j f(a) = f'(a)v = (\nabla f(a), v),$$

$$d^2 f\big|_a(v) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j D_i D_j f(a) = (f''(a)v, v).$$

Обычно вместо v_j пишут dx_j, где dx_j – единое переменное. С учётом этих обозначений

$$d^m f\big|_a = \sum_{(i_1 \dots i_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(a) dx_{i_1} \dots dx_{i_m},$$

суммирование ведётся по всем выборкам $(i_1 \dots i_m)$ из чисел $1, \dots, n$.

Иногда (особенно в руководствах по уравнениям с частными производными) используют другие обозначения. Набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называют мультииндексом, а число $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ – порядком мультииндекса α. Если $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ – мультииндекс, то моном $x_1^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_n}$ обозначают символом x^α, производную вида $\dfrac{\partial^{\|\alpha\|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ – символом $D^\alpha f$, так что $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. С учётом этих обозначений

$$d^m f\big|_a = \sum_{\|\alpha\|=m} (D^\alpha)(a)(dx)^\alpha = \sum_{\|\alpha\|=m} (D^\alpha f)(a) v^\alpha.$$

1.2.4 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Лемма 1. *Пусть функция $h\colon E \to \mathbb{R}$ m раз дифференцируема в точке a, принадлежащей внутренности множества E и*

$$h(a) = (D^\alpha h)(a) = 0, \quad \text{если } \|\alpha\| \leqslant m. \tag{3}$$

Тогда $h(x) = o(|x-a|^m)$ при $x \to a$, т.е.

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{|x-a|^m} = 0. \tag{4}$$

◀ Доказательство проводится методом математической индукции по числу m. Проверим доказываемое утверждение при $m = 1$. В этом случае (3) означает, что $h(a) = h_{x_1}(a) = \dots = h_{x_n}(a) = 0$. Поскольку функция h дифференцируема в точке a, то её приращение допускает представление

$$h(x) - h(a) = \sum_{j=1}^{n} h_{x_j}(a)(x_j - a_j) + \omega(x-a)\,,$$

где $\omega(z) = o(z)$ при $z \to 0$. Так как $h(a) = h_{x_j}(a) = 0\,(j = 1, \ldots, n)$, то при $m = 1$ всё доказано.

Пусть доказываемое утверждение верно для $m = k - 1$. Установим его справедливость и для $m = k$. Фиксируем индекс $j = 1, \ldots, n$. Функция $g_{x_j}(x)\,(k-1)$ раз дифференцируема в точке a, и её производные до порядка $k - 1$ включительно равны 0 в точке a. Следовательно, $h_{x_j}(x) = 0(|x-a|^{k-1})$ при $x \to a$. В силу формулы конечных приращений

$$h(x) - h(a) = \sum_{j=1}^{n} h_{x_j}(a + \theta(x-a))(x_j - a_j) = o(|x-a|^k). \blacktriangleright$$

Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}\,(E \subset \mathbf{R}^n,\ \mathring{E} \neq \varnothing)$ m раз дифференцируема в точке $a \in \mathring{E}$. Существует единственный многочлен $P_f(x)$ степени m, обладающий свойствами

$$D^\alpha f(a) = D^\alpha P_f(a) \text{ для всех мультиндексов } \alpha \text{ длины } \leqslant m; \tag{5}$$

как легко проверить,

$$P_f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} D_j f(a)(x_j - a_j) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{m!}\sum_{i_1 \ldots i_m} D_{i_1} \ldots D_{i_m} f(a)(x_{i_1} - a_{i_1}) \ldots (x_{i_m} - a_{i_m}).$$

Многочлен $P_f(x)$ называют *многочленом Тейлора* для функции f в точке a, разность $r_m(x) = f(x) - P_f(x)$ – *остатком* в формуле Тейлора

$$f(x) = P_f(x) + r_m(x). \tag{6}$$

Функция $r_m\colon E \to \mathbf{R}$ m раз дифференцируема в точке a. Из (5), (6) вытекают соотношения

$$D^\alpha r_m(a) = 0 \text{ для всех мультииндексов } \alpha \text{ длины } \leqslant m.$$

Согласно лемме 1 справедливо равенство

$$r_m(x) = o(|x-a|^m), \tag{7}$$

называемое представлением остатка $r_m(x)$ в форме Пеано.

Равенства (6), (7) имеют место, например, если функция f и все её производные до порядка m включительно определены и непрерывны в окрестности точки a. Более компактен (и выразителен!) дифференциальный вариант формулы Тейлора

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\, d^k f\big|_a (v) + o(|v|^m).$$

Приведём вариант этой формулы, относящийся к случаю $m = 2$:

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) v_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_i D_j f(a) v_i v_j + o(|v|^2). \tag{8}$$

Упражнение 1. *Установить равенство*

$$e^x \sin y = y + xy - \frac{y^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + o\left((x^2+y^2)^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad x^2+y^2 \to 0\,.$$

1.2.5 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Пусть Ω – открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$– функция, дифференцируемая $m+1$ раз в каждой точке отрезка $[a, a+v]$, содержащегося в Ω. Введём функцию одного действительного переменного t, полагая $\varphi(t) = f(a+tv)\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Функция $\varphi(t)$ дифференцируема $m+1$ раз в каждой точке отрезка $[0,1]$. Согласно формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функций одного переменного имеет место равенство

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}$$

с некоторым θ из $(0,1)$. Фигурирующие в этом равенстве значения функции φ и её производных вычислены в пункте 3. Имеем $\varphi(0) = f(a)$,

$$\varphi^{(k)}(0) = (v_1 D_1 + \cdots + v_n D_n)^k\, f(x)\big|_{x=a}\,,$$

$$\varphi^{(m+1)}(\theta) = (v_1 D_1 + \cdots + v_n D_n)^{m+1}\, f(x)\big|_{x=a+\theta v}\,.$$

Объединяя выведенные выше равенства, приходим к соотношению

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(v_1 D_1 + \cdots + v_n D_n)^k\, f(x)\big|_a +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}(v_1 D_1 + \cdots + v_n D_n)^{m+1}\, f(x)\big|_{x=a+\theta v}\,,$$

называемому формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Упражнение 2. *Сформулировать и доказать многомерный вариант формулы Шлёмильха-Роше представления остатка в формуле Тейлора.*

1.2.6 Выпуклые функции многих переменных

Функция f, определённая на выпуклом множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, называется *выпуклой*, если для произвольных $u \in E, v \in E, \lambda \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$f[(1-\lambda)u + \lambda v] \leqslant (1-\lambda) f(u) + \lambda f(v)\,. \tag{9}$$

Соотношение (9) называют *неравенством Иенсена*. Если при $u \neq v$ неравенство (9) является строгим, то функцию f называют *строго выпуклой* на множестве E.

Любая аффинная функция $f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b$ выпукла. Для неё (9) превращается в равенство, поэтому она не является строго выпуклой функцией. Функция $f(x) = |x|^2$ строго выпукла на $\mathbf{R}^n$. Действительно, пусть $u \neq v$, $\lambda \in (0,1)$. Тогда

$$|(1-\lambda)u + \lambda v|^2 = (1-\lambda)^2 |u|^2 + 2\lambda(1-\lambda)(u,v) + \lambda^2 |v|^2 <$$

$$< (1-\lambda)^2|u|^2 + \lambda(1-\lambda)(|u|^2+|v|^2) + \lambda^2|v|^2 = (1-\lambda)|u|^2 + \lambda|v|^2$$
в силу неравенства $2(u,v) < |u|^2 + |v|^2$.

Отметим некоторые свойства класса выпуклых функций.

1. Сумма двух выпуклых функций есть выпуклая функция.

2. Произведение выпуклой функции на положительную постоянную есть выпуклая функция.

3. Точная верхняя грань любого семейства выпуклых функций есть выпуклая функция.

4. Если $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$– возрастающая выпуклая функция одного переменного, $f\colon E \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, то суперпозиция $\varphi \circ f\colon E \to \mathbb{R}$– выпуклая функция.

Для функций одного переменного свойства 1–3 доказывались ранее (см., например, $[K1]$,часть 1); приведённые там рассуждения без всяких изменений переносятся на функции многих переменных. Докажем свойство 4. Если $u \in E, v \in E, 0 < \lambda < 1$, то в силу выпуклости функций φ, f и возрастания функции φ мееем

$$\varphi(f[(1-\lambda)u + \lambda v]) \leqslant \varphi[(1-\lambda)f(u) + \lambda f(v)] \leqslant (1-\lambda)\varphi[f(u)] + \lambda\varphi[f(v)].$$

Верны следующие утверждения: выпуклая функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\mathring{E}$ и почти всюду дифференцируема.

Установим многомерные варианты известных для функций одного переменного признаков выпуклости. Пусть Ω – открытое выпуклое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$ (случай $\Omega = \mathbf{R}^n$ не исключается), $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ – дифференцируемая в области Ω функция, $\nabla f(x)$ – градиент f в точке x.

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ выпукла;

2) для любой пары точек u, v из Ω имеет место неравенство

$$f(v) - f(u) \geqslant (\nabla f(u), v-u)\,; \tag{10}$$

3) справедливы соотношения

$$(\nabla f(v) - \nabla f(u), v-u) \geqslant 0\,\forall v, u \in \Omega\,. \tag{11}$$

◀ 1) $\to$ 2). В силу неравенства Иенсена справедливо соотношение

$$f[u + \lambda(v-u)] - f(u) \leqslant \lambda[f(v) - f(u)]\,(0 < \lambda < 1)\,.$$

Следовательно,

$$\frac{f[u + \lambda(v-u)] - f(u)}{\lambda} \leqslant f(v) - f(u)\,.$$

При $\lambda \to +0$ получаем неравенство (10).

2) $\to$ 1). Из (10) следует равенство

$$f(x) = \sup_{v\in\Omega}(f(v) + (\nabla f(v), x-v))\,,$$

поэтому функция f выпукла как точная верхняя грань следующего семейства выпуклых (и даже аффинных) функций $g_v(x) = f(v) + (\nabla f(v), x-v)\,(v \in \Omega)$.

2) $\to$ 3). Меняя в (10) элементы u, v местами, приходим к неравенству

$$f(u) - f(v) \geqslant (\nabla f(v), u - v),$$

складывая которое с (10), получаем (11).

3) $\to$ 2). В силу формулы конечных приращений справедливо равенство

$$f(u) - f(v) = (\nabla f(w), u - v),$$

в котором $w = u + \theta(v - u)$, $0 < \theta < 1$. Теперь 2) вытекает из соотношений

$$(\nabla f(w), v - u) = \frac{1}{\theta}(\nabla f(w), w - u) \geqslant \frac{1}{\theta}(\nabla f(u), w - u) = (\nabla f(u), v - u).$$

Итак, условие 2) эквивалентно каждому из условий 1), 3). ▶

В качестве примера рассмотрим полином второй степени

$$P(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{j}^{n} b_j x_j + c\,; \tag{12}$$

здесь $a_{ij} = a_{ji}\,(i, j = 1, \ldots, n)$, b_j, c – действительные числа. Как нетрудно видеть,

$$\frac{\partial P}{\partial x_i}(x) = 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Система равенств (13) эквивалентна одному векторному равенству

$$\nabla P(x) = 2Ax + b\,, \tag{14}$$

в котором A – симметричная матрица размеров $n \times n$ с элементами a_{ij}, b– вектор-столбец с компонентами $b_i (i = 1, \ldots, n)$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Из равенства (14) вытекает соотношение

$$(\nabla f(v) - \nabla f(u), v - u) = 2(A(v - u), v - u),$$

поэтому выпуклость полинома, определяемого равенством (12), эквивалентна неотрицательности квадратичной формы $\Phi(w) = (Aw, w)$. Если $(Aw, w) \geqslant 0\,\forall w \in \mathbf{R}^n$, то будем писать $A \geqslant 0$. В курсах линейной алгебры доказывается, что условие $A \geqslant 0$ эквивалентно неотрицательности всех главных миноров матрицы A. (Главными минорами матрицы $A = (a_{ij})$ называются все возможные определители

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \ldots & a_{i_1 i_l} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \ldots & a_{i_2 i_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_l i_1} & a_{i_l i_2} & \ldots & a_{i_l i_l} \end{vmatrix},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_l \leqslant n$, $l = 1, 2, \dots, n$).

Неотрицательная квадратичная форма $\Phi(w) = (Aw, w)$ называется *положительно определённой*, если она обращается в нуль только при $w = \mathbf{0}$; используется запись $A \gg 0$. Напомним критерий Сильвестра [4]: положительная определенность квадратичной формы $\Phi(w) = (Aw, w)$ эквивалентна положительности всех угловых миноров матрицы A, т.е. определителей

$$\Delta_l = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ll} \end{vmatrix}, \ l = 1, 2, \dots, n\,;$$

в этом случае выполняется неравенство $\Phi(w) = (Aw, w) \geqslant \beta|w|^2\,\forall w \in \mathbf{R}^n$ с некоторой положительной постоянной β. Строгая выпуклость полинома (12) эквивалентна неравенству $A \gg 0$.

Выпуклость дважды дифференцируемой на интервале функции одного переменного равносильна неотрицательности её второй производной. Приведём аналог этого результата для функций многих переменных.

Теорема 3. *Выпуклость дважды дифференцируемой на выпуклой области Ω функции f эквивалентна неотрицательности квадратичной формы*

$$(f''(x)w, w) \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) w_i w_j$$

при любом x из Ω (краткая запись $f''(x) \geqslant 0\,\forall x \in \Omega$).

◀ Выпуклость функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ равносильна выпуклости её сужения на пересечениях области Ω с прямыми $L := \{x \in \mathbf{R}^n\,,\ x = a + tv, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}\}$, т.е. выпуклости функции $\varphi(t) = f(a+tv)$ одного переменного t. Теперь доказываемое утверждение следует из равенства $\varphi''(t) = (f''(a + tv)v, v)$ и критерия выпуклости функций одного переменного.▶

Если $f''(x) \gg 0$ для всех x из Ω, то функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ строго выпукла. Для проверки условия $f''(x) \gg 0$ можно использовать критерий Сильвестра. Теоремы 2, 3 удобно комбинировать с отмеченными в начале пункта свойствами 1-4 класса выпуклых функций.

Упражнение 3. *Пусть Q – собственное выпуклое подмножество $\mathbf{R}^n$. Доказать выпуклость функции $f(x) = \inf\{|x - y|,\ y \in \Omega\}\,(x \in \mathbf{R}^n)$.*

Упражнение 4. *Исследовать на выпуклость функции*

$$\nu_p(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ (p \geqslant 1),\ \ \nu_\infty(x) = \max_j |x_j|\,. \tag{15}$$

Функцию $\nu\colon \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$ называют *нормой*, если она обладает свойствами:
1) $\nu(x) > 0\,(x \neq \mathbf{0})$ (позитивность);
2) $\nu(\alpha x) = |\alpha|\nu(x)$ (абсолютная однородность);
3) $\nu(x + y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$ (неравенство треугольника).

[4]Сильвестр Джеймс Джозеф (*Sylvester James Joseph*) (1814 – 1897) – английский математик.

Каждая норма ν в $\mathbf{R}^n$ есть выпуклая функция. Определяемые равенствами (15) функции ν_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ являются нормами; этот факт очевиден при $p = 1, \infty$. Для каждой нормы ν соответствующий ей шар $B_\nu(a, \rho) := \{x \in \mathbf{R}^n, \nu(x-a) \leqslant \rho\}$ есть замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $\mathbf{R}^n$. Если $\nu = \nu_\infty$, $a = (a_1, \ldots, a_n)^T, \rho > 0$, то соответствующий шар

$$B_\nu(a, \rho) = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, |x_i - a_i| \leqslant \rho,\, i = 1, \ldots, n\}$$

представляет куб с центром в точке a со сторонами длины 2ρ, параллельными осям координат; иногда этот куб будет обозначаться символом $\square(a, \rho)$; норму ν_∞ называют кубической. По аналогичной причине норму ν_1 именуют октаэдрической.

Выпуклые функции играют важную роль во многих разделах анализа и его приложений. Особо отметим их роль в оптимизационных задачах, к рассмотрению которых мы сейчас и приступаем.

1.3 Экстремальные задачи

1.3.1 Необходимые условия внутреннего локального экстремума

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – действительная функция, определённая на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$. Точку a из E называют *точкой локального минимума* функции f, если существует такое $\delta > 0$, что из условий $|x - a| < \delta, x \in E$ следует неравенство $f(x) \geqslant f(a)$; для точек локального максимума выполняется противоположное неравенство $f(x) \leqslant f(a)$; объединяющее точки локального минимума и локального максимума название – *точки локального экстремума.*

Теорема 1. *Пусть $E \subset \mathbf{R}^n, a$ – точка локального экстремума функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{E}$ и функция f дифференцируема в точке a. Тогда*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

◀ При любом v из $\mathbb{R}^n$ функция $\varphi(t) := f(a + tv)$ действительного переменного t достигает в точке 0 локального минимума. Следовательно, $\varphi'(0) = 0$ (теорема Ферма). Поскольку $\varphi'(0) = f'(a, v) = (\nabla f(a), v)$, то $(\nabla f(a), v) = 0$ для любого v из $\mathbf{R}^n$. Полагая $v = \nabla f(a)$, получаем $|\nabla f(a)|^2 = 0$, а это эквивалентно равенствам (1). ▶

Система (1) эквивалентна векторным равенствам $\nabla f(a) = \mathbf{0}, f'(a) = 0$; она может быть записана и в дифференциальной форме: $df\big|_a = 0$. Если выполнены соотношения (1), то a называют стационарной (критической) точкой функции f. Поэтому теорема 1 может быть сформулирована таким образом: экстремальность влечёт за собой стационарность.

Теорема 2. *Пусть a – точка локального минимума функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{E}$ и функция f дважды дифференцируема в точке a. Тогда для любого вектора $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ из $\mathbf{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j \;\geqslant\; 0\,. \tag{2}$$

◀ Пусть, как и выше, $v \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(t) = f(a+tv)$. Так как 0 есть точка локального минимума функции φ, то $\varphi''(0) \geqslant 0$. Поскольку (см. 1.2.3)

$$\varphi''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j,$$

то неравенство (2) доказано.▶

Соотношение (2) эквивалентно тому, что $d^2 f\big|_a \geqslant 0$; его можно записать в виде $f''(a) \geqslant 0$, где $f''(a) = \big(f_{x_i x_j}(a)\big)$ – матрица Гессе функции f в точке a.

Если a – точка локального максимума функции f, то a – точка локального минимума функции $-f$. Поэтому из теоремы 2 вытекает необходимое условие локального максимума второго порядка: $d^2 f\big|_a \leqslant 0$, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) v_i v_j \leqslant 0 \quad \forall v \in \mathbf{R}^n\,;$$

самая короткая запись выглядит вполне традиционно: $f''(a) \leqslant 0$ в точке локального максимума.

1.3.2 Достаточные условия внутреннего локального экстремума

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке a из $\overset{\circ}{E}$. Если*

$$f'(a) = 0,\; f''(a) \gg 0\,, \tag{3}$$

то a – точка локального минимума функции f.

(Комментарий к соотношениям (3). Равенство $f'(a) = 0$ означает, что a – критическая точка функции f. В силу критерия Сильвестра условие $f''(a) \gg 0$ равносильно положительности главных миноров матрицы Гессе $f''(a)$.)

◀ По формуле Тейлора с остатком в форме Пеано (см. § 2) имеем

$$f(a+v) - f(a) = \frac{1}{2}(f''(a)v, v) + \omega(v), \tag{4}$$

где

$$\lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{\omega(v)}{|v|^2} = 0\,. \tag{5}$$

Поскольку $f''(a) \gg 0$, то существует такое $\beta > 0$, что $(f''(a)v, v) \geqslant \beta |v|^2\, \forall v \in \mathbf{R}^n$. Подберём число $\delta > 0$ так, что $|4\omega(v)| \leqslant \beta |v|^2$, если $|v| \leqslant \delta$. Это возможно в силу соотношения (5). Будем считать, что $B(a,\delta) \subset E$. При $|v| \leqslant \delta$ имеем

$$f(a+v) - f(a) \geqslant \frac{\beta}{2}|v|^2 - \frac{\beta}{4}|v|^2 = \frac{\beta}{4}|v|^2 \geqslant 0\,.$$

Следовательно, a – точка локального минимума функции f.▶

Следствие. *Пусть функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема в точке* a *из* $\overset{\circ}{E}$. *Если* $f'(a) = 0$, $f''(a) \ll 0$, *то* a *есть точка внутреннего локального максимума функции* f.

Критическая точка a функции f может не доставлять ни минимума, ни максимума. Например, такая ситуация возникает, если квадратичная форма $(f''(a)v, v)$ знакопеременна: существуют такие v_1, v_2 из $\mathbf{R}^n$, что $(f''(a)v_1, v_1) < 0 < (f''(a)v_2, v_2)$.

В ряде случаев удаётся использовать следующую схему. Пусть на основании каких-либо соображений удаётся установить, что точка максимума (минимума) функции f на множестве E существует и принадлежит $\overset{\circ}{E}$. Если функция f имеет в $\overset{\circ}{E}$ единственную критическую точку, то эта точка реализует максимум (соответственно, минимум) функции f на множестве E.

В качестве примера рассмотрим изопериметрическую задачу для треугольников, состоящую в следующем: среди треугольников заданного периметра $2p$ найти наибольший по площади. Если x, y, z– стороны треугольника, то $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ и $x + y + z = 2p$; таким образом допускаются и вырожденные треугольники. В силу формулы Герона площадь S треугольника со сторонами x, y, z равна

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}\,.$$

Рассматриваемая задача эквивалентна следующей:

$$f(x, y) = (p-x)(p-y)(x+y-p) \to \max\,, \tag{6}$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant 2p\,. \tag{7}$$

Разрешимость задачи (6), (7) вытекает из теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной на компакте $E = \{(x, y)^T \in \mathbf{R}^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 2p\}$ функции $f(x, y)$ своего максимума. Очевидно, что точка максимума $a = (x_0, y_0)^T$ функции f является внутренней для множества E. Условие стационарности точки a приводят к равенствам

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(p-y)(x+y-p) + (p-x)(p-y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(p-x)(x+y-p) + (p-x)(p-y) = 0.$$

Данная система имеет единственное принадлежащее $\overset{\circ}{E}$ решение $a = \left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right)^T$. Следовательно, a есть решение задачи (6), (7). Решением поставленной выше изопериметрической задачи является правильный треугольник.

Для выпуклых функций даваемое теоремой 1 необходимое условие минимума совпадает с достаточным условием абсолютного минимума. Более точно, пусть f – выпуклая и дифференцируемая на выпуклой области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ функция. Если a – критическая точка функции f, то $\nabla f(a) = \mathbf{0}$. Отсюда в силу выпуклости функции $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вытекают соотношения $f(x) - f(a) \geqslant (\nabla f(a), x - a) \geqslant 0$ для всех x из Ω, означающие, что a реализует абсолютный минимум функции f на всей области Ω. Отмеченный факт во многом объясняет важную роль выпуклых функций в экстремальных задачах.

1.3.3 Метод исключения в задачах на относительный экстремум

Пусть $\mathscr{U}$ – непустое подмножество $\mathbf{R}^n$ и на множестве $\mathscr{U}$ определены числовые функции $f_0, f_1, \dots, f_m$. Предположим, что множество

$$Q := \{x \in \mathscr{U}, f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$$

непусто. Задача минимизации функции f_0 на множестве Q будет записываться следующим образом

$$f_0(x) \to \min\,, \tag{8}$$

$$x \in \mathscr{U}, f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0 \tag{9}$$

и называться задачей на относительный минимум.

Элемент a из Q называют решением задачи (8), (9), если $f(x) \geqslant f(a)$ для всех x из Q; иногда в этом случае говорят, что a реализует абсолютный минимум функции f_0 на множестве Q. Элемент a из Q именуют локальным решением задачи (8), (9), если найдётся такое $\delta > 0$, что $f_0(x) \geqslant f_0(a)\,\forall x \in Q \cap B(a,\delta)$.

Один из распространённых методов решения задачи (8), (9) заключается в сведении её к задаче на безусловный минимум. Проиллюстрируем данный метод в случае $m = 1$. В этой ситуации возникает задача

$$f_0(x) \to \min, \quad x \in \mathscr{U}, \quad f_1(x) = 0\,. \tag{10}$$

Предположим, что уравнение $f_1(x) = 0$ можно разрешить относительно одного из неизвестных x_j, например, относительно x_n. Иначе говоря, пусть равенство $f_1(x) = 0$ эквивалентно соотношению $x_n = g(x')$, где $x' = (x_1, \dots x_{n-1})^T$ принадлежит проекции Q' множества Q на гиперплоскость $x_n = 0$, отождествляемой с пространством $\mathbf{R}^{n-1}$. Тогда задача (10) эквивалентна задаче минимизации функции $h(x')$ на множестве Q'. Действительно, если $a' = (a_1, \dots, a_{n-1})^T$ есть точка минимума функции $h(x')$, то точка $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, g(a'))^T$ – решение задачи (10); верно и обратное. Внимательный читатель уже заметил, что метод исключения использовался выше при решении изопериметрической задачи для треугольников.

Достоинством метода исключения является уменьшение числа искомых переменных и уменьшение числа уравнений. Вместе с тем следует отметить и недостатки данного метода: 1) нахождение в явном виде функции g достаточно затруднительно; 2) в ряде случаев переменные $x_1, \dots, x_n$ равноправны, а при методе исключения это равноправие нарушается.

1.3.4 Правило множителей Лагранжа

В правиле множителей Лагранжа появляются новые переменные и новые уравнения. Известны разнообразные версии этого правила, относящиеся к различным экстремальным задачам. Приведём правило множителей Лагранжа для задачи (8),(9).

Теорема 4. *Пусть a – локальное решение задачи (8),(9), $\mathscr{U}$ – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$ и функции $f_i\,(i = 0, 1, \dots, m)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки a. Тогда найдутся числа $\lambda_i\,(i = 0, 1, \dots, m)$, не все равные нулю и такие, что*

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0\,. \tag{11}$$

Комментарий. Числа λ_i называют *множителями Лагранжа*, а теорему 4 – *правилом множителей Лагранжа.* Ясно, что вместе с набором (λ_i) условию (11) удовлетворяет набор $(t\lambda_i)$, $t \neq 0$, иначе говоря, набор множителей Лагранжа определяется неоднозначно.

◀ Введём в рассмотрение функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m} f_i^2(x)\,.$$

Равенство $\Phi(x) = 0$ эквивалентно предположениям $f_i(x) = 0\,(i = 1, \dots, m)$. Действительно, если $\Phi(x) = 0$, то $f_i(x) = 0\,(i = 1, \dots, m)$. Верно и обратное; таким образом, $Q = \{x \in \mathscr{U}, \Phi(x) = 0\}$. Функция $\Phi(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки a.

Фиксируем положительное число R так, что $B(a, R) \subset \mathscr{U}$, $f_0(x) \geqslant f_0(a)$ для всех x из $Q \cap B(a, R)$, функции f_i $(i = 0, 1, \dots, m)$ непрерывно дифференцируемы на шаре $B(a, R)$. Каждому натуральному числу N сопоставим функцию $\Phi^N(x) = f_0(x) + N\Phi(x) + \dfrac{|x-a|^2}{2}$ и экстремальную задачу

$$\Phi^N(x) \to \min, \quad x \in B(a, R)\,. \tag{12}$$

Существование решения x^N задачи (12) следует из теоремы Вейерштрасса. Справедливо неравенство $\Phi^N(x^N) \leqslant \Phi^N(a)$, более подробно

$$f_0(x^N) + N\Phi(x^N) + \frac{|x^N - a|^2}{2} \leqslant f_0(a)\,. \tag{13}$$

В частности, из (13) вытекает оценка

$$N\Phi(x^N) \leqslant f_0(a) - f_0(x^N)\,.$$

Правая часть последнего неравенства ограничена, поэтому $\Phi(x^N) \to 0$ при $N \to \infty$. Последовательность x^N принадлежит шару $B(a, R)$. Если $\bar{x}$ – предельная точка этой последовательности, то $\Phi(\bar{x}) = 0$. Из (13) следуют неравенства

$$f_0(x^N) + \frac{|x^N - a|^2}{2} \leqslant f_0(a), \quad f_0(\bar{x}) + \frac{|\bar{x} - a|^2}{2} \leqslant f_0(a)\,.$$

С другой стороны, $\bar{x} \in B(a, R) \cap Q$, следовательно, $f_0(\bar{x}) \geqslant f_0(a)$, поэтому $\bar{x} = a$. Всякая предельная точка последовательности x^N совпадает с a. Это означает, что последовательность x^N сходится к a при $N \to \infty$. При больших N элемент x^N есть внутренняя точка шара $B(a, R)$. Не нарушая общности, можно считать, что $|x^N - a| < R$ при всех N.

Поскольку x^N – внутренняя точка шара $B(a, R)$ и x^N минимизирует функцию Φ^N на этом шаре, то x^N – критическая точка этой функции: $\nabla\Phi^N(x^N) = 0$, т.е.

$$\nabla f_0(x^N) \;+\; N\sum_{i=1}^{m} f_i(x^N)\nabla f_i(x^N) + x^N - a = 0\,.$$

Разделим это равенство на положительное число K^N так, чтобы получилось равенство

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i^N \nabla f_i(x^N) + \frac{x^N - a}{K^N} = 0\,, \tag{14}$$

в котором

$$\sum_{i=0}^{m} (\lambda_i^N)^2 = 1 \quad \text{для всех } N. \tag{15}$$

Таким образом,

$$K^N = \left(1 \ + \ N^2 \sum_{i=1}^{m} f_i^2(x^N)\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 1\,,$$

$$\lambda_0^N = \frac{1}{K^N}, \quad \lambda_i^N = \frac{N}{K^N}\, f_i(x^N) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Каждая из последовательностей $\lambda_i^N (i = 0, 1, \ldots, m)$ ограничена, поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $\lambda_i^N \to \lambda_i$ при $N \to \infty\, (i = 0, 1, \ldots, m)$. Переходя в (14), (15) к пределу, приходим к равенствам

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i^2 = 1\,. \tag{16}$$

Набор $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ является искомым.▶

Упражнение 1. *Покажите, что если a – локально единственный минимум, то в функцию $\Phi^N(x)$ (см. доказательство теоремы 4) можно не включать слагаемое $|x-a|^2/2$; в этом случае указанный выше приём может быть использован для решения задачи (8), (9) – метод штрафных функций.*

1.3.5 Обсуждение правила множителей Лагранжа

Если в равенстве (11) $\lambda_0 \neq 0$, то, поделив это равенство на λ_0, придём к аналогичному (11) соотношению с множителем Лагранжа $\lambda_0 = 1$. Однако этот подход применим лишь при дополнительных условиях. Например, в экстремальной задаче

$$f_0(x_1, x_2) = x_2 \to \min, \quad f_(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1^2 = 0$$

решение $a = \mathbf{0}, \nabla f_0(a) = (0\ 1)^T$, $\nabla f_1(a) = (0\ 0)^T$. Если $\lambda_0 \nabla f_0(a) + \lambda_1 \nabla f_1(a) = 0$, то $\lambda_0 = 0$.

Любое предположение, гарантирующее неравенство $\lambda_0 \neq 0$, именуют *условием регулярности ограничений* (9) в точке a.

Теорема 5. *Если векторы $\nabla f_i(a)\,(i = 1, \ldots, m)$ образуют линейно независимую систему, то в точке a выполнено условие регулярности.*

◀ Действительно, если в (11) $\lambda_0 = 0$, то

$$\lambda_1 \nabla f_1(a) + \lambda_2 \nabla f_2(a) + \cdots + \lambda_m \nabla f_m(a) = 0.$$

Поскольку система векторов $\nabla f_i(a)\,(i = 1, \dots, m)$ линейно независима, то

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Таким образом, набор (λ_i) оказывается нулевым, что противоречит правилу множителей Лагранжа. ►

Следствие 1. *Если $m = 1$ и хотя бы одна из частных производных функции f_1 в точке a отлична от нуля, то в точке a выполнено условие регулярности.*

Следствие 2. *Если $1 \leqslant m \leqslant n$ и ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

равен m, то в точке a выполнено условие регулярности.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: в круг фиксированного радиуса $R > 0$ вписать n-угольник $(n \geqslant 3)$ максимальной площади. Обозначим через $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ центральные углы, опирающиеся на стороны n-угольника. Задача сводится к следующей

$$S = \frac{R^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \sin\varphi_i \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 2\pi, \quad \varphi_i \geqslant 0.$$

Существование решения этой задачи вытекает из теоремы Вейерштрасса. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – центральные углы максимального по площади многоугольника, то $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ (ясно из геометрических соображений). Тогда точка $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ является решением следующей экстремальной задачи

$$f_0(x_1, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \to \min,$$

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 2\pi = 0, \quad x_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{17}$$

Условие регулярности заведомо выполнено, поскольку все частные производные функции f_1 равны 1. В правиле множителей Лагранжа можно взять $\lambda_0 = 1$. Тогда a является критической точкой для функции $f_0 + \lambda_1 f_1$ при некотором λ_1. Отсюда вытекает равенство $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, т.е. оптимальный многоугольник правилен.

Анализ решения данной конкретной задачи позволяет сделать ряд выводов общего характера. Прежде чем применять правило множителей Лагранжа, полезно установить разрешимость соответствующей экстремальной задачи; на подготовительном этапе желательно получить некоторую информацию о расположении точки экстремума. Это может облегчить проверку условий регулярности ограничений (9). В предположении регулярности для определения точки $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ и набора $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ имеется система $n + m$ уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)\,, \tag{18}$$

$$f_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \tag{19}$$

Таким образом, число уравнений совпадает с числом неизвестных и равно $n + m$. Это позволяет надеяться, что система уравнений (18), (19) имеет лишь конечное число решений. Если это действительно так и решения системы (18), (19) известны, то выбрать из них точку, оптимизирующую функцию f_0, уже несложно.

Упражнение 2.*(a) Найти максимум функции* $x_1^2 \dots x_n^2$ *на сфере* $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.
(b) Вывести из (a) неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \;\leqslant\; \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\,,$$

в котором $a_1, \dots, a_n$ *– произвольные неотрицательные числа.*

Упражнение 3. *Найти эктремумы функции* $f_0(x, y) = e^{axy}, a \neq 0$ *при наличии ограничения*

$$x^3 + y^3 + x + y - 4 = 0\,.$$

Для задач на относительный экстремум известны условия оптимальности второго порядка, аналогичные теоремам 2, 3. Формулировки и доказательства соответствующих утверждений можно найти в руководствах [3], [4], [17], [20].

1.4 Дифференцируемые отображения

1.4.1 Липшицевы отображения

Пусть $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ – евклидовы пространства размерностей n и m соответственно, (u, v) и $|u|$ – скалярное произведение векторов u, v и длина вектора u. Если каждому x из подмножества E пространства $\mathbf{R}^n$ сопоставлен вектор $y = f(x)$ из $\mathbf{R}^m$, то соответствие $f\colon E \to \mathbf{R}^m$ называют отображением из E в $\mathbb{R}^m$ (или вектор-функцией на множестве E со значениями в пространстве $\mathbf{R}^m$). Поскольку при любом x из E вектор $f(x)$ принадлежит $\mathbf{R}^m$, то $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$, где $f_1(x), \dots, f_m(x)$ – компоненты $f(x)$. Тем самым на множестве E определяются скалярные функции $f_i\colon E \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, m)$, называемые *компонентами отображения* f.

Наличие длины (нормы, метрики) в пространствах $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ позволяет обычным образом определить предел отображения в точке, ввести понятия непрерывности и равномерной непрерывности отображения на множестве, установить аналоги теорем Вейерштрасса, Кантора, Больцано-Коши и т.п. Ниже используются терминология, обозначения и результаты, приведённые в
[К 1, часть 2]; более подробные сведения содержатся в [1], [3 – 5], [7 – 20].

Назовём отображение $f\colon E \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *липшицевым*, если найдётся такая константа L, что

$$|f(u) - f(v)| \leqslant L|u - v| \quad \text{для всех } u, v \text{ из } E. \tag{1}$$

Наименьшую из констант L, для которых справедлива оценка (1), обозначим символом $\mathscr{N}(f)$. Число $\mathscr{N}(f)$ может быть определено равенством

$$\mathscr{N}(f) = \sup_{u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}, \quad u \in E, v \in E.$$

Совокупность липшицевых отображений из E в пространство $\mathbf{R}^m$ обозначим символом $Lip\ (E, \mathbf{R}^m)$. Если f, g – отображения класса $Lip\ (E, \mathbf{R}^m)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то и

$$f + g \in Lip\ (E, \mathbf{R}^m),\ \alpha f \in Lip\ (E, \mathbf{R}^m).$$

Таким образом, класс $Lip\ (E, \mathbf{R}^m)$ есть линейное пространство над полем действительных чисел. Числовая характеристика $\mathscr{N}(\cdot)$ обладает следующими свойствами:

1°$\mathscr{N}(f) \geqslant 0$ и $\mathscr{N}(f) = 0$, лишь если f – постоянное отображение (позитивность);

2°$\mathscr{N}(\alpha f) = |\alpha| \mathscr{N}(f)$ (абсолютная однородность);

3°$\mathscr{N}(f+g) \leqslant \mathscr{N}(f) + \mathscr{N}(g)$ для всех f, g из $Lip\ (E, \mathbf{R}^m)$ (неравенство треугольника);

4° липшицевость отображения $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ эквивалентна липшицевости каждой компоненты $f_k\ (k = 1, \ldots, m)$ данного отображения; при этом справедливы оценки

$$\mathscr{N}(f_k) \leqslant \mathscr{N}(f) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} \mathscr{N}^2\ (f_i) \right)^{\dfrac{1}{2}}; \tag{2}$$

5° если $f \in Lip\ (E, \mathbf{R}^m), E_1 \in \mathbf{R}^m, g \in Lip\ (E_1, \mathbf{R}^k)$ и $f(E) \subset E_1$, то суперпозиция $g \circ f \colon E \to \mathbf{R}^k$ есть также липшицево отображение и

$$\mathscr{N}(g \circ f) \leqslant \mathscr{N}(g) \mathscr{N}(f)\,.$$

Докажем, например, правое из неравенств (2). Если $|f_i(u) - f_i(v)| \leqslant L_i |u - v|$ для всех u, v из множества E, то

$$|f(u) - f(v)| = \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(u) - f_i(v)|^2 \right)^{\dfrac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} L_i^2 |u - v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{m} L_i^2 \right)^{\dfrac{1}{2}} |u - v|\,.$$

Положив $L_i = \mathscr{N}(f_i)\,(i = 1, \ldots, m)$, приходим к требуемому результату.

Из теоремы 1.5. и неравенства (2) вытекает

Следствие. *Пусть E– выпуклая область в $\mathbf{R}^n$, $f_i \colon E \to \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, m)$ – всюду дифференцируемые по Гато функции. Если все частные производные*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\ (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

равномерно ограничены в области E, то отображение $f = (f_1, \dots, f_m)^T \colon E \to \mathbf{R}^m$ липшицево и

$$\mathscr{N}(f) \leqslant \sup_{x \in E} \left(\sum_{i=1}^{m} |\nabla f_i(x)|^2 \right)^{\dfrac{1}{2}} . \tag{3}$$

Частным случаем липшицева отображения пространства $\mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^m$ является линейное отображение $\Lambda \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Такое отображение задаётся матрицей (p_{ij}) $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$: если $y = \Lambda x$ и $x = (x_1, \dots, x_n)^T,\ y = (y_1, \dots, y_m)^T$, то

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m). \tag{4}$$

Матрицу (p_{ij}), порождающую отображение Λ, будем также обозначать символом Λ, что вполне естественно, поскольку соотношения (4) эквивалентны матричному равенству

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Совокупность линейных отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ будем обозначать символом $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Очевидно, что $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ есть линейное подпространство пространства $Lip(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Если $\Lambda \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, то число $\mathscr{N}(\Lambda)$ называют *нормой* отображения $\Lambda \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и обозначают символом $\|\Lambda\|$. Имеют место соотношения

$$\|\Lambda\| = \mathscr{N}(\Lambda) = \max_{|x| \leqslant 1} |\Lambda x| \leqslant \left(\sum_{ij} p_{ij}^2 \right)^{\dfrac{1}{2}} ,$$

вытекающие из линейности отображения Λ и оценки (3).

1.4.2 Производные Гато и Фреше

Пусть $E \subset \mathbf{R}^n, a \in \overset{\circ}{E}; f \colon E \to \mathbf{R}^m$ – отображение из E в $\mathbf{R}^m$. Для любого вектора v из $\mathbf{R}^n$ имеет смысл вектор-функция $\varphi(t) = f(a + tv)$ одного действительного переменного t, определённая в некоторой окрестности $t = 0$. Если функция $\varphi(t) = f(a + tv)$ дифференцируема в точке $t = 0$, то вектор $\varphi'(0)$ из $\mathbf{R}^m$ называют *производной отображения* f в точке a по направлению v и обозначают символом $f'(a, v)$. Таким образом,

$$f'(a, v) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} .$$

Отображение $f \colon E \to \mathbf{R}^m$ называют *дифференцируемым по Гато* в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если производная $f'(a, v)$ существует для любого вектора v из $\mathbf{R}^n$ и найдётся такое линейное отображение $\Lambda \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, что $f'(a, v) = \Lambda v$. Линейное отображение Λ обозначают символом $f'(a)$ и именуют *производной* отображения f в точке a. Найдём матричное представление отображения $f'(a)$ через частные производные компонент $f_1, \dots, f_m$ отображения f.

Теорема 1. *Отображение $f = (f_1, \dots, f_m)^T \colon E \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо по Гато в точке a из $\overset{\circ}{E}$, если и только если каждая компонента f_i отображения f дифференцируема по Гато в точке a; матричное представление производной $f'(a)$ даётся матрицей Якоби* [5]

$$f'(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \dots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

◀ Дифференцируемость вектор-функции $\varphi(t) = f(a+tv)$ в точке $t = 0$ эквивалентна дифференцируемости в этой точке функций $\varphi_i(t) = f_i(a + tv)$ $(i = 1, \dots, m)$, при этом

$$\varphi'(0) = f'(a, v) = (f_1'(a, v), \dots, f_m'(a, v))^T.$$

Отображение $v \to f'(a, v)$ линейно в том и только в том случае, когда линейны функции $v \to f_i'(a, v)$ $(i = 1, \dots, m)$. Это и доказывает первую часть теоремы. Поскольку

$$f_i'(a, v) = \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(a) v_j \ (i = 1, \dots, m),$$

то

$$f'(a, v) = (f_i'(a, v)) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \dots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \dots & D_n f_m(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство влечёт за собой соотношение (4). ▶

В случае $m = n$ матрица $f'(a)$ квадратна. Её определитель $\det f'(a)$ называют *якобианом* отображения $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ и обозначают символом

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a).$$

Геометрический смысл якобиана будет выяснен в следующей главе.

Отображение $f \colon E \to \mathbf{R}^m$ называют *дифференцируемым по Фреше* в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если существует такое линейное отображение $\Lambda \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, что

$$\lim_{v \to \mathbf{0}} \frac{f(a + v) - f(a) - \Lambda v}{|v|} = 0\,. \tag{5}$$

Равенство (5) эквивалентно соотношению

$$f(a + v) - f(a) = \Lambda v + \omega(v), \tag{6}$$

[5] Якоби Карл Густав (*Jacobi Carl Gustav*) (1804 – 1851) – немецкий математик.

в котором $\omega(v) = o(v)$ при $v \to 0$, т.е.

$$\lim_{v\to 0} \frac{\omega(v}{|v|} = 0 \ . \tag{7}$$

Дифференцируемость по Фреше отображения f в точке a очевидным образом влечёт дифференцируемость по Гато отображения f в этой же точке; при этом $\Lambda = f'(a)$ есть матрица Якоби отображения f. Справедлива

Теорема 2. *Отображение $f = (f_1, \ldots, f_m)^T \colon E \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо по Фреше в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если и только если каждая компонента $f_i\,(i = 1, \ldots, m)$ отображения f дифференцируема по Фреше в этой точке.*

◄ Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, поэтому опускается. ►

Следствие. *Пусть в некоторой окрестности точки a, принадлежащей $\overset{\circ}{E}$, функции $f_i \colon E \to \mathbb{R}, (i = 1, \ldots, m)$ имеют частные производные $D_j f_i(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ и все эти производные непрерывны в точке a. Тогда отображение $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$ дифференцируемо по Фреше в точке a.*

Пусть Ω– открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, l – натуральное число. Ниже через $C^l(\Omega, \mathbf{R}^m)$ обозначается совокупность таких отображений

$$f = (f_1, \ldots, f_m)^T \colon \Omega \to \mathbf{R}^m,$$

каждая компонента f_i которых имеет непрерывные в области Ω частные производные до порядка l включительно. Условие $f \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m)$ достаточно для дифференцируемости по Фреше отображения f в каждой точке области Ω.

Читатель без труда докажет следующие утверждения:

1° Если $f(x) = Ax + b$ (A – матрица размеров $m \times n$, $b \in \mathbf{R}^m$), то $f'(x) = A$ – производная аффинного отображения постоянна.

2° Если отображения $f, g \colon E \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемы по Гато (Фреше) в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, то при любых действительных α, β отображение $h = \alpha f + \beta g$ дифференцируемо в том же смысле в точке a и $h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$ – линейность операции дифференцирования.

1.4.3 Производная суперпозиции отображений

Пусть $\mathscr{U}$ – открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{V}$ – открытое множество в $\mathbf{R}^m$,

$$f = (f_1, \ldots, f_m)^T \colon \mathscr{U} \to \mathbf{R}^m,\ g = (g_1, \ldots, g_k)^T \colon \mathscr{V} \to \mathbf{R}^k$$

– отображения, определённые на множествах $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ со значениями в пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^k$ соответственно. Если $f(\mathscr{U}) \subset \mathscr{V}$, то определена суперпозиция

$$h = g \circ f = (h_1, \ldots, h_k) \colon \mathscr{U} \to \mathbf{R}^k$$

отображений f и g: $h(x) = g[f(x)] \quad (x \in \mathscr{U})$.

Теорема 3. *Пусть отображения f, g дифференцируемы по Фреше в точках $a \in \mathscr{U}$ и $b = f(a) \in \mathscr{V}$. Тогда отображение $h = g \circ f$ дифференцируемо по Фреше в точке a и имеет место равенство*

$$h'(a) = g'(b) f'(a)\,, \tag{8}$$

называемое правилом дифференцирования суперпозиции (или цепным правилом дифференцирования).

◀ Поскольку отображения $f(x)$ и $g(y)$ дифференцируемы по Фреше в точках a, $b = f(a)$ соответственно, то их приращения $\Delta f = f(a+\Delta x)-f(a)$, $\quad \Delta g = g(b+\Delta y)-g(b)$ выражаются через приращения $\Delta x, \Delta y$ аргументов x, y следующим образом

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x), \quad \Delta g = g'(b)\Delta y + r_2(\Delta y)\,,$$

в этих равенствах $r_1(\Delta x) = o(\Delta x)$, $r_2(\Delta y) = o(\Delta y)$. Если положить $\Delta y = \Delta f$, то придём к равенству

$$\Delta h = h(a+\Delta x) - h(a) = g'(b)(f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x)) + r_2(f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x)) =$$
$$= g'(b)f'(a)\Delta x + g'(b)r_1(\Delta x) + r_2(f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x)) = I_1 + I_2 + I_3.$$

Слагаемое $I_1 = g'(b)f'(a)\Delta x$ линейно зависит от Δx. Так как $r_1(\Delta x) = o(\Delta x)$, то второе слагаемое $I_2 = g'(b)r_1(\Delta x)$ бесконечно мало по сравнению с Δx. Действительно, $|I_2| \leqslant \|g'(b)\|\ |r_1(\Delta x)|$, поэтому $I_2 = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Поскольку

$$|f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x)| \leqslant \|f'(a)\|\ |\Delta x| + |r_1(\Delta x)|,$$

то $f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x) = O(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Комбинируя это с соотношением $r_2(\Delta y) = o(\Delta y)$, приходим к равенству $I_3 = r_2(f'(a)\Delta x + r_1(\Delta x)) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Из проведённых рассуждений вытекает, что приращение $\Delta h = h(a+\Delta x) - h(a)$ отображения $h = g \circ f$ допускает представление

$$\Delta h = g'(b)f'(a)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \ \Delta x \to 0\ .$$

Это равенство означает, что отображение h дифференцируемо в точке a и $h'(a) = g'(b)f'(a)$. ▶

Следствие 1. *Справедливо матричное равенство*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}(b) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(a).$$

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 3 $n = m = k$, то*

$$\frac{D(h_1,\ldots,h_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(a) = \frac{D(g_1,\ldots,g_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}(b)\ \frac{D(f_1,\ldots,f_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(a);$$

(якобиан суперпозиции отображений g, f равен произведению якобианов отображений g и f).

Линейное отображение $v \to f'(a)v$ называют дифференциалом отображения f в точке a и обозначают символом df: переменную v иногда обозначают единым символом dx. В этих обозначениях $df = f'(a)\,dx$. Интересен вариант формулы (8) в дифференциалах:

$$dh = h'(a)\,dx = g'(b)f'(a)\,dx = g'(b)\,dy\,.$$

В этом равенстве $y = g(x)$, т.е. y – зависимое переменное. Вместе с тем дифферециал функции $z = g(y)$ имеет тот же вид, как если бы y был независимым переменным (свойство инвариантности первого дифференциала). Аналогичное замечание применимо, разумеется, и к скалярным функциям многих переменных (см. п. 1.1.5).

Упражнение 1. *Привести пример двух дифференцируемых (в смысле Гато) отображений, суперпозиция которых не дифференцируема по Гато.*

1.4.4 Производная обратного отображения

Пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ – открытые подмножества пространства $\mathbf{R}^n$. Биекцию $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ называют *гомеоморфизмом*, если отображения $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ и обратное к нему $g = f^{-1}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ непрерывны. Обратный к гомеомофизму f, дифференцируемому в точке a, может и не быть дифференцируемым в точке $b = f(a)$ (всюду в этом пункте подразумевается дифференцируемость по Фреше). Классический пример такого рода: $n = 1, \mathscr{U} = \mathscr{V} = (-1, 1), f(x) = x^3$. Отображение f непрерывно дифференцируемо, однако обратное отображение $g(y) = \sqrt[3]{y}$ недифференцируемо в точке 0.

Теорема 4. *Пусть гомеомофизм $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ дифференцируем в точке $a \in \mathscr{U}$. Для того чтобы отображение $g = f^{-1}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ было дифференцируемым в точке $b = f(a)$, необходимо и достаточно, чтобы линейное отображение $f'(a)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ было обратимым. Тогда*

$$g'(b) = (f'(a))^{-1}. \tag{4}$$

◀ Небходимость. Если отображение g дифференцируемо в точке $b = f(a)$, то согласно теореме 3 произведение отображений $g'(b)$ и $f'(a)$ равно оператору I тождественного преобразования: $g'(b)f'(a) = I$. Значит, $f'(a)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – обратимое отображение и $(f'(a))^{-1} = g'(b)$.

Достаточность. Пусть отображение $\Lambda = f'(a)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ обратимо, $k_1 = \|\Lambda\|$, $k_2 = \|\Lambda^{-1}\|$. Тогда $|\Lambda v| \leqslant k_1|v|\,\forall v \in \mathbf{R}^n$ и $|\Lambda^{-1}w| \leqslant k_2|w|\,\forall w \in \mathbf{R}^n$. Полагая $w = \Lambda v$, получаем неравенство $|\Lambda v| \geqslant \dfrac{|v|}{k_2}$ для всех v из $\mathbf{R}^n$.

Поскольку отображение $y = f(x)$ дифференцируемо в точке a, то его приращение $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ допускает представление

$$\Delta y = \Lambda\Delta x + \omega(\Delta x), \tag{5}$$

в котором $\omega(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. В частности, найдётся такое число $r_0 > 0$, что если $\Delta x| \leqslant r_0$, то $|\omega(\Delta x)| \leqslant \dfrac{|\Delta x|}{2k_2}$. Объединяя это неравенство с оценкой $|\Lambda v| \geqslant \dfrac{|v|}{k_2}$ $\forall v \in \mathbf{R}^n$, получаем последовательно

$$|\Delta y| \geqslant |\Lambda(\Delta x)| - |\omega(\Delta x)| \geqslant \frac{|\Delta x|}{k_2} - \frac{|\Delta x|}{2k_2} = \frac{|\Delta x|}{2k_2}.$$

С другой стороны, справедливы оценки сверху

$$|\Delta y| \leqslant |\Lambda(\Delta x)| + |\omega(\Delta x)| \leqslant k_1|\Delta x| + \frac{|\Delta x|}{2k_2}.$$

Таким образом, величины $\Delta x, \Delta y$ имеют одинаковый порядок малости.

Ввиду непрерывности отображения $x = g(y) = f^{-1}(y)$ малому приращению Δy аргумента y соответствует малое приращение $\Delta x = g(b + \Delta y) - g(b)$ отображения $g(y)$. В частности, можно подобрать положительное число δ_0 так, что если $|\Delta y| \leqslant \delta_0$, то $|\Delta x| = |g(b+\Delta y) - g(b)| \leqslant r_0$. Следовательно, $\Delta x = O(\Delta y)$ при $\Delta y \to 0$. Из (5) вытекает равенство

$$\Delta x = \Lambda^{-1}(\Delta y) - \Lambda^{-1}\omega(\Delta x). \tag{6}$$

Поскольку $\Delta x = O(\Delta y)$ и $\omega(\Delta y) = o(\Delta y)$ при $\Delta y \to 0$, то (6) влечёт за собой соотношения

$$\Lambda^{-1}\omega(\Delta x) = o(\Delta y) \quad \text{и} \quad \Delta x = \Lambda^{-1}\Delta y + o(\Delta y) \ \text{ при } \Delta y \to 0\,,$$

второе из которых эквивалентно дифференцируемости отображения $x = g(y)$ в точке $b = f(a)$ и равенству $g'(b) = \Lambda^{-1} = (f'(a))^{-1}$. ►

Отображение $f\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ называют *диффеоморфизмом* класса C^1 (или C^1-диффеоморфизмом), если f является биективным отображением, принадлежащим классу $C^1(\mathscr{U}, \mathbf{R}^n)$, и если обратное отображение $g = f^{-1}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ принадлежит классу $C^1(\mathscr{V}, \mathbf{R}^n)$. Через $GL(\mathbf{R}^n)$ далее обозначается множество линейных и обратимых операторов, действующих в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Теорема 5. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)^T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ – гомеоморфизм класса C^1. Для того чтобы отображение f было C^1-диффеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы якобиан этого отображения был отличен от нуля:*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(a) \neq 0 \quad \textit{для всех} \quad a \quad \textit{из} \quad \mathscr{U}\,. \tag{7}$$

◄ Условие (7) необходимо и достаточно для обратимости линейного отображения $f'(a)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ в любой точке a из $\mathscr{U}$. Поэтому (7) эквивалентно дифференцируемости отображения $x = g(y) = f^{-1}(y)$ в каждой точке y множества $\mathscr{V}$. В силу теоремы 4 справедливо равенство

$$g'(y) \ = \ (f'(x))^{-1}\ , \tag{8}$$

в котором $x = g(y) = f^{-1}(y)$. Поскольку отображения $y \to g(y)$ $(y \in \mathscr{V})$, $x \to f'(x)$ $(x \in \mathscr{U})$, $A \to A^{-1} (A \in GL(\mathbf{R}^n))$ непрерывны, то их суперпозиция $y \to g'(y)$ (см. равенство (8)) также непрерывна на множестве $\mathscr{V}$. Следовательно, $g = f^{-1} \in C^1(\mathscr{V}, \mathbf{R}^n)$. ►

1.4.5 Формула конечных приращений

Для числовых функций одного действительного переменного справедлива теорема Лагранжа, называемая формулой конечных приращений: *если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{9}$$

Ранее (см. п. 1.1.6) мы убедились в том, что формула (9) остаётся справедливой и для действительных функций многих переменных. Совсем не так обстоит дело для векторнозначных функций (см, например, [К 1, часть 2], где устанавливалось более слабое, чем (9), неравенство $|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)(b - a)|$. Покажем, что в этом виде аналог формулы конечных приращений распространяется на векторные функции векторного аргумента.

Теорема 6. (Формула конечных приращений) *Пусть открытое множество $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ содержит отрезок $[a, b]$. Если отображение $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо по Гато в каждой точке отрезка $[a, b]$, то найдётся такая точка c из (a, b), что*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(c)(b - a)|\,. \tag{10}$$

◀ Подберём вектор v единичной длины так, что $|f(b)-f(a)| = (f(b)-f(a), v)$. Введём в рассмотрение скалярную функцию φ скалярного переменного t, полагая

$$\varphi(t) = (f(a + t(b-a)), v) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Определённая таким образом функция $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ дифференцируема на отрезке [0,1], а потому и непрерывна на том же отрезке. В силу формулы конечных приращений (теоремы Лагранжа) найдётся такое θ из $(0,1)$, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$. Поскольку $\varphi(0) = (f(a), v), \varphi(1) = (f(b), v), \varphi'(\theta) = (f'(a + \theta(b-a))(b-a), v)$, то имеем последовательно

$$|f(b) - f(a)| = (f(b) - f(a), v) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) =$$
$$= (f'(a + \theta(b-a))(b-a), v) \leqslant |f'(a + \theta(b-a))(b-a)|\,.$$

Это и приводит к (10), если положить $c = a + \theta(b-a)$. ▶

Следствие 1. *В условиях теоремы 6 имеет место оценка*

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{c \in (a,b)} \|f'(c)\| \ |b-a| \ . \tag{11}$$

Иногда оценку (11) именуют *формулой среднего значения.*

Следствие 2. *Пусть отображение $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо по Гато в каждой точке области Ω и для каждого компакта $\mathfrak{K} \subset \Omega$ найдётся такая константа $L = L(\mathfrak{K})$, что $\|f'(x)\| \leqslant L\, \forall x \in \mathfrak{K}$. Тогда сужение отображения f на любой принадлежащий области Ω компакт K принадлежит Lip $(K, \mathbf{R}^m)$.*

◀ Пусть компакт K принадлежит области Ω. При любом положительном ρ множество

$$K_\rho := \bigcup_{x \in K} B(x, \rho),$$

называемое ρ-оболочкой множества K, есть компакт. Фиксируем положительное число δ так, что $K_\rho \subset \Omega$. В этом случае выполнено неравенство $\|f'(x)\| \leqslant L_1 < \infty\ \forall x \in K_\rho$.

Если $u, v \in K$ и $0 < |u - v| \leqslant \delta$, то отрезок $[u, v]$ принадлежит K_δ, поэтому

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \sup_{c \in (u,v)} \|f'(c)\| |u - v| \leqslant L_1 |u - v|.$$

Если же $u \in K, v \in K$, но $|u - v| > \delta$, то

$$\frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \ \leqslant \frac{1}{\delta} \sup_{u,v \in K} \ |f(u) - f(v)| \ \leqslant L_2 < \infty.$$

Из двух последних соотношений вытекает неравенство

$$\frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|} \leqslant \max\{L_1, L_2\} < \infty\,, \tag{12}$$

в котором u, v – произвольные и различные элементы из K. Неравенство (12) приводит к требуемому утверждению.▶

Отображение $f\colon E \to \mathbf{R}^m$ называют *строго дифференцируемым* в точке $a \in \overset{\circ}{E}$, если оно дифференцируемо по Гато в этой точке и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех u, v, принадлежащих множеству E и удовлетворяющих неравенствам $|u-a| < \delta, |v-a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(u) - f(v) - f'(a)(u-v)| \leqslant \varepsilon |u-v|\,. \tag{13}$$

Из (13) непосредственно вытекает, что строго дифференцируемое в точке a отображение дифференцируемо по Фреше в этой точке и удовлетворяет в некоторой её окрестности условию Липшица.

Следствие 3. *Пусть отображение $f\colon E \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо по Гато в каждой точке шара $B(a,R)$ $(R>0)$, содержащегося в множестве E. Если отображение $x \to f'(x)$ непрерывно в точке a, т.е.*

$$\lim_{x \to a} \|f'(x) - f'(a)\| = 0,$$

то отображение f строго дифференцируемо в этой точке.

◀ По заданному $\varepsilon > 0$ найдём положительное число $\delta < R$ так, чтобы из условия $|x-a| \leqslant \delta$ следовало соотношение $\|f'(x) - f'(a)\| < \varepsilon$. Если $u, v \in B(a,\delta)$, то в силу выпуклости шара $B(a,\delta)$ отрезок $[u,v]$ принадлежит $B(a,\delta)$. Отображение $g(x) = f(x) - f'(a)x$ дифференцируемо по Гато в шаре $B(a,\delta)$ и $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Применяя формулу среднего значения к отображению g, получаем

$$|f(u) - f(v) - f'(a)(u-v)| = |g(u) - g(v)| \leqslant \sup_{c \in [u,v]} \|g'(c)\|\ |u-v| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{c \in [u,v]} \|f'(c) - f'(a)\|\ |u-v|\ \leqslant\ \varepsilon |u-v|,$$

что и означает строгую дифференцируемость отображения f в точке a.▶

Следствие 4. *Пусть $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$. Условие $f \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m)$ достаточно для строгой дифференцируемости отображения f в каждой точке области Ω.*

Упражнение 2. *Показать, что функция одного переменного*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

дифференцируема в 0, но не является строго дифференцируемой в этой точке.

Отметим без доказательства следующее. Известен пример функции f одного переменного, имеющей в точке a строгую производную, несмотря на то что в каждой окрестности a существуют точки, в которых функция f недифференцируема. Вместе с тем если функция f всё-таки дифференцируема в каждой точке некоторой окрестности a, то производная f' в точке a строга тогда и только тогда, когда она непрерывна в a. Аналогичные результаты справедливы и для функций многих переменных.

1.5 Теоремы об обратном и неявном отображении

1.5.1 Принцип сжимающих отображений

Пусть $\mathscr{M}$ – непустое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{F}: \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ – преобразование множества $\mathscr{M}$ в себя. Элемент x_* называется *неподвижной точкой* отображения $\mathscr{F}$, если $x_* = \mathscr{F}(x_*)$. Одним из наиболее известных результатов о существовании и единственности неподвижной точки является принцип сжимающих отображений. Приведём используемый далее вариант этого принципа.

Отображение $\mathscr{F}: \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ назовём *сжимающим*, если

$$|\mathscr{F}(u) - \mathscr{F}(v)| \leqslant q|u - v| \quad \text{для всех} \quad u, v \ \text{из} \quad \mathscr{M}\,, \tag{1}$$

где $0 < q < 1$, константа сжатия q не зависит от u, v.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{M}$ – замкнутое подмножество $\mathbf{R}^n$, $\mathscr{F}: \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ – сжимающее отображение, q – константа сжатия. Тогда 1) отображение $\mathscr{F}$ имеет единственную неподвижную точку x_*; 2) последовательные приближения*

$$x^0 \in \mathscr{M}, x^1 = \mathscr{F}(x^0), \ldots, x^k = \mathscr{F}(x^{k-1}), \ldots \tag{2}$$

сходятся к x_* для любого начального приближения x^0;

$$3)\ |x^k - x_*| \leqslant \frac{q^k}{1-q}\ |x^1 - x^0|\,. \tag{3}$$

◀ Фиксируем элемент x^0 из $\mathscr{M}$ и образуем (по формуле (2)) последовательные приближения $x^1, \ldots, x^k, \ldots$. Очевидны соотношения

$$x^k \in \mathscr{M},\ |x^k - x^{k-1}| = |\mathscr{F}(x^{k-1}) - \mathscr{F}(x^{k-2})| \leqslant q|x^{k-1} - x^{k-2}|.$$

Отсюда получаем оценки

$$|x^k - x^{k-1}| \leqslant q^{k-1}|x^1 - x^0|\,(k \geqslant 1).$$

Из этих оценок вытекают неравенства

$$|x^{m+p} - x^m| \leqslant |x^{m+p} - x^{m+p-1}| + \cdots + |x^{m+1} - x^m| \leqslant$$

$$q^{m+p-1}|x^1 - x^0| + \cdots + q^m|x^1 - x^0| \leqslant \sum_{i=m}^{\infty} |x^1 - x^0| = \frac{q^m}{1-q}|x^1 - x^0|. \tag{4}$$

В частности, x^m – фундаментальная, а значит, и сходящаяся последовательность. Если x_* – её предел, то

$$x_* = \lim_{k\to\infty} x^k = \lim_{k\to\infty} \mathscr{F}(x^{k-1}) = \mathscr{F}(x_*).$$

Существование неподвижной точки отображения $\mathscr{F}$ доказано.

Если y_* – другая неподвижная точка отображения $\mathscr{F}$, то

$$|x_* - y_*| = |\mathscr{F}(x_*) - \mathscr{F}(y_*)| \leqslant q|x_* - y_*|\,,$$

а это возможно лишь если $x_* = y_*$. Следовательно, неподвижная точка единственна. Устремляя в (4) p к ∞, приходим к оценке $|x^m - x_*| \leqslant \dfrac{q^m}{1-q}$, совпадающей с (3). ►

Утверждение теоремы и её доказательство сохранятся при замене евклидовой нормы любой другой нормой. В частности, можно использовать нормы $\nu_p\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в пространстве $\mathbf{R}^n$. Это замечание полезно в связи с тем, что условие сжимаемости (1) удобно проверять для норм, отличных от евклидовой, например, для кубической ν_∞ или октаэдрической ν_1 нормы, определяемых равенствами

$$\nu_\infty(x) \;=\; \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, \quad \nu_1(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

1.5.2 Отображения, близкие к тождественному

Пусть Ω – открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, $\Phi\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ – отображение из Ω в $\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что Φ есть отображение класса $I(q)\,(0 < q < 1)$, если $\Phi(x) = x - h(x)$, где $h\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ и $|h(u) - h(v)| \leqslant q|u-v|$ для всех u, v из Ω. Отображения класса $I(q)$ по ряду свойств близки к оператору I тождественного преобразования.

Лемма 1. *Если $\Phi\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ – отображение класса $I(q)$ $(0 < q < 1)$, то 1) отображение $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega)$ обратимо; 2) отображения Φ и Φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица; 3) образ $\Phi(\mathscr{D})$ каждого открытого множества $\mathscr{D} \subset \Omega$ есть открытое множество.*

◄ Для любых u, v из Ω справедливы соотношения $\Phi(u) = u - h(u)$, $\Phi(v) = v - h(v)$, $\Phi(u) - \Phi(v) = u - v - (h(u) - h(v))$. В силу неравенства треугольника отсюда следуют оценки

$$(1-q)|u-v| \;\leqslant\; |\Phi(u) - \Phi(v)| \;\leqslant\; (1+q)|u-v|\,.$$

Поскольку $|u - v| \leqslant \dfrac{1}{1-q}\,|\Phi(u) - \Phi(v)|$, то Φ есть биекция множества Ω на множество $\Omega_1 := \Phi(\Omega)$. Поэтому существует обратное к отображению $\Phi\colon \Omega \to \Omega_1$ отображение $\Phi^{-1}\colon \Omega_1 \to \Omega$, причём

$$|\Phi^{-1}(z) - \Phi^{-1}(w)| \leqslant \frac{1}{1-q}\;|z - w|\,\forall z, w \in \Omega_1.$$

Таким образом, отображения Φ, Φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица с константами $1 + q$ и $\dfrac{1}{1-q}$ соответственно.

Пусть $\mathscr{D}$ – открытое подмножество Ω, $\mathscr{G} := \Phi(\mathscr{D})$. Установим открытость множества $\mathscr{G}$. Пусть $b = \Phi(a) \in \mathscr{G}$. Не нарушая общности, можно считать, что $a = b = \mathbf{0}$ (выполнения этого предположения можно добиться путём подходящих сдвигов). Поскольку $\mathscr{D}$ – открытое множество и $\mathbf{0} = a \in \mathscr{D}$, то $B(\mathbf{0}, R) \subset \mathscr{D}$ при некотором положительном R.

Докажем включение $B(\mathbf{0}, (1-q)R) \subset \mathscr{G}$, т.е. установим разрешимость уравнения $\Phi(x) = x - h(x) = y$ для любого y из $B(\mathbf{0}, (1-q)R)$. Отображение $\mathscr{F}(x) := y + h(x)$ сжимающее с константой сжатия q. Если $x \in B(\mathbf{0}, R)$, то

$$|\mathscr{F}(x)| \;\leqslant\; |\mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(0)| + |\mathscr{F}(0)|\; q|x| + |y| \;\leqslant qR + (1-q)R = R\,,$$

и, таким образом, $|\mathscr{F}(x)| \leqslant R$, если $|x| \leqslant R$. Поскольку $\mathscr{F}$ сжимающее отображение шара $B(\mathbf{0}, R)$ в себя, то существует единственная неподвижная точка x_* отображения $\mathscr{F}$, т.е. $x_* = \mathscr{F}(x_*) = h(x_*)+y$. Итак, для любого y из $B(\mathbf{0}, R(1-q))$ существует решение уравнения $\Phi(x) = x - h(x) = y$. Это и доказывает открытость множества $\mathscr{G} = \Phi(\mathscr{D})$. ▶

Лемма 1 влечёт за собой открытость множества $\Omega_1 = \Phi(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ *– отображение класса* $I(q)$ *и* $0 \leqslant q < \dfrac{1}{2}$. *Тогда обратное отображение* $\Phi^{-1}\colon \Omega_1 \to \Omega$ *принадлежит классу* I_{q_1}, *где* $q_1 = \dfrac{q}{1-q}$.

◀ Элемент $x = \Phi^{-1}(y)$ удовлетворяет уравнению $x - h(x) = y$. Следовательно, $x = h(x) + y = h(\Phi^{-1}(y)) + y = y - h_1(y)$, где $h_1(y) = -h(\Phi(y))$. Если z, w – элементы множества Ω_1, то

$$|h_1(z) - h_1(w)| \ = \ |h(\Phi^{-1}(z)) - h(\Phi^{-1}(w))| \ \leqslant$$
$$\leqslant q|\Phi^{-1}(z) - \Phi^{-1}(w)| \ \leqslant \frac{q}{1-q}|z-w| \ = \ q_1|z-w|.$$

Итак, $\Phi^{-1}(y) = y - h_1(y)$ и $\mathscr{N}(h_1) \leqslant q_1$. ▶

Достаточное условие принадлежности отображения классу $I(q)$ содержит

Лемма 3. *Пусть* W *– открытое подмножество* $\mathbf{R}^n$, *отображение* $\Phi\colon W \to \mathbf{R}^n$ *строго дифференцируемо в точке* $a \in W$ *и* $\Phi'(a) = I$. *Тогда для любого числа* q *из интервала* $(0,1)$ *найдётся такое* $R > 0$, *что сужение отображения* Φ *на открытую шаровую окрестность* $\mathring{B}(a, R)$ *принадлежит классу* $I(q)$.

◀ Отображение Φ строго дифференцируемо в точке a и $\Phi'(a) = I$. Поэтому существует такая функция $\gamma(\rho)$ $(0 < \rho < \rho_0)$, что $\gamma(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ и

$$|\Phi(u) - \Phi(v) - (u-v)| \leqslant \gamma(\rho)|u-v| \quad \forall u, v \in B(a, \rho). \tag{5}$$

Положим $h(x) = x - \Phi(x)$. Тогда $\Phi(x) = x - h(x)$ и отображение h удовлетворяет вытекающему из (5) неравенству $|h(u) - h(v)| \leqslant \gamma(\rho)|u-v|$. Теперь доказываемое утверждение очевидно.▶

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда существует такое положительное число* r, *что*

1) сужение отображения Φ *на открытую шаровую окрестность* $\mathring{B}(a, r)$ *есть биекция* $\mathring{B}(a, r)$ *на открытое множество* V*;*

2) преобразования $\Phi\colon \mathring{B}(a, r) \to V$, $\Phi^{-1}\colon V \to \mathring{B}(a, r)$ *липшицевы;*

3) отображение Φ^{-1} *строго дифференцируемо в точке* $b = \Phi(a)$ *и справедливо равенство* $(\Phi^{-1})'(b) = I$.

◀ Фиксируем число $r > 0$ так, что $2\gamma(\rho) < 1$ для всех $\rho \leqslant r$. Если $0 < \rho \leqslant r$, то сужение отображения Φ на $\mathring{B}(a, \rho)$ принадлежит классу $I(\gamma(\rho))$. В силу лемм 1, 2 отображение $\Phi\colon \mathring{B}(a, \rho) \to \Phi(\mathring{B}(a, r))$ есть биекция и отображение $\Phi^{-1}\colon \Phi(\mathring{B}(a, \rho)) \to \mathring{B}(a, \rho)$ принадлежит классу $I(\gamma_1(\rho))$, где $\gamma_1(\rho) = \dfrac{\gamma(\rho)}{1 - \gamma(\rho)}$. В частности, отображения Φ, Φ^{-1} липшицевы. Если $z, w \in \Phi(\mathring{B}(a, \rho))$, то

$$|\Phi^{-1}(z) - \Phi^{-1}(w) - (z-w)| \leqslant \gamma_1(\rho)|z-w|.$$

Это означает, что отображение Φ^{-1} строго дифференцируемо в точке $b = \Phi(a)$ и $(\Phi^{-1})'(b) = I$. ►

Замечание. Леммы 1– 4 и их доказательства сохраняются при замене евклидовой нормы произвольной нормой в пространстве $\mathbf{R}^n$. Во второй главе будут использоваться варианты этих лемм для кубической нормы.

1.5.3 Теорема о локальном обращении

В п. 4.4 предполагалось, что отображение f есть гомеоморфизм. От этого априорного предположения можно избавиться, опираясь на результаты предшествующего пункта.

Теорема 2. *Пусть W – открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$, отображение $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ строго дифференцируемо в точке $a \in W$ и $f'(a)$ принадлежит $GL(\mathbf{R}^n)$. Тогда существует открытая шаровая окрестность $\mathscr{U}_1$ точки a ($\mathscr{U}_1 \subset W$) и открытая окрестность $\mathscr{V}_1$ точки $b = f(a)$, что f отображает гомеоморфно $\mathscr{U}_1$ на $\mathscr{V}_1$.*

◄ Если $f'(a) = I$, то теорема следует из леммы 4. Общий случай легко сводится к этому. Действительно, пусть $\Lambda = f'(a) \in GL(\mathbf{R}^n)$. Уравнение $f(x) = y$ эквивалентно уравнению $\Lambda^{-1}f(x) = \Lambda^{-1}y$. Введём новое переменное $v = \Lambda^{-1}(y)$. К уравнению $\Lambda^{-1}f(x) = v$ можно применить уже доказанный результат. Учитывая связь между неизвестными y и v, приходим к доказываемому утверждению.►

Имеет место следующее утверждение (теорема о локальном обращении – основной результат этого параграфа).

Теорема 3. *Пусть W – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, f – отображение класса $C^1(W, \mathbf{R}^n)$, $a \in W$ и $f'(a) \in GL(\mathbf{R}^n)$. Тогда существует открытая шаровая окрестность $\mathscr{U}$ точки a и открытая окрестность $\mathscr{V}$ точки $b = f(a)$, такие, что сужение f на $\mathscr{U}$ есть C^1 - диффеоморфизм $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$.*

◄ Так как $f \in C^1(W, \mathbf{R}^n)$, то отображение $f\colon W \to \mathbf{R}^n$ строго дифференцируемо в каждой точке множества W. В частности, f строго дифференцируемо в точке a. Мы находимся в условиях теоремы 2. Согласно этой теореме существует открытая шаровая окрестность $\mathscr{U}_1$ точки a ($\mathscr{U}_1 \subset W$) и открытая окрестность $\mathscr{V}_1$ точки $b = f(a)$, такие, что f отображает гомеоморфно $\mathscr{U}_1$ на $\mathscr{V}_1$. Переходя, если это необходимо, от $\mathscr{U}_1$ к меньшей шаровой окрестности $\mathscr{U}$ точки a, можно считать, что $f'(x) \in GL(\mathbf{R}^n$ для всех x из $\mathscr{U}$. (Действительно, функция $x \to \det f'(x)$ непрерывна, а так как $\det f'(a) \neq 0$, то $\det f'(x) \neq 0$ в некоторой шаровой окрестности $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_1$ точки a.) Теперь доказываемое утверждение вытекает из теоремы 1.4.5.►

Сформулируем теорему 3 в координатной форме. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – компоненты отображения $f\colon W \to \mathbf{R}^n$. Условие $f \in C^1(W, \mathbf{R}^n)$ означает, что все частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ функций f_i ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) определены и непрерывны на множестве W. Предположение $f'(a) \in GL(\mathbf{R}^n)$ эквивалентно неравенству

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a) \neq 0 \tag{6}$$

(якобиан отображения f в точке a отличен от нуля).

Теорема о локальном обращении утверждает, что если выполнено (6), то существует открытый шар $\mathscr{U} = \mathring{B}(a, r)$ положительного радиуса r с центром в точке a и открытое множество $\mathscr{V}$, содержащее точку $b = f(a)$, такие, что отображение f является C^1-диффеоморфизмом $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$. Обратное отображение $g = f^{-1} \colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ определяется n функциями $g_i(y_1, \dots, y_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ класса $C^1(\mathscr{V})$.

1.5.4 Функциональная зависимость

Пусть $f_1, \dots, f_m$ – система функций, определённых в окрестности $\mathscr{U}(a)$ точки $a \in \mathbf{R}^n$. Будем предполагать, что функции f_i, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ непрерывны в $\mathscr{U}(a)$.

Рассмотрим матрицу $f'(a) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$ размеров $m \times n$. Если ранг матрицы $f'(a)$ равен m, то он равен m и в некоторой окрестности точки a. В этом случае функции $f_1, \dots, f_m$ называют *независимыми*. Если ранг матрицы $f'(a)$ меньше m в некоторой окрестности точки a, то функции $f_1, \dots, f_m$ именуют *зависимыми*.

Пусть $m < n$ и система функций $f_1, \dots, f_m$ независима. Эту систему можно дополнить функциями $f_{m+1}, \dots, f_n$ до независимой системы. Действительно, так как $rang f'(a) = m$, то строки $f_1'(a), \dots, f_m'(a)$ можно дополнить постоянными строками до квадратой невырожденной матрицы. Добавленные строки можно считать производными линейных функций $f_{m+1}, \dots, f_n$.

Теорема 4. *Пусть система функций $f_1, \dots, f_m$ независима, а функция $w(x)$ такова, что система функций $f_1, \dots, f_m, w$ уже зависима. Тогда существует такая функция $\Psi(y_1, \dots, y_m)$ с непрерывными производными, что в некоторой окрестности точки a выполнено тождество*

$$w(x) = \Psi(f_1(x), \dots, f_m(x)),$$

иначе говоря, функция $w(x)$ выражается через функции $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

◀ Дополним независимую систему $f_1, \dots, f_m$ $\;n - m\;$ функциями $f_{m+1}, \dots, f_n$ до независимой системы. Положим $y_i = f_i(x)\,(i = 1, \dots, n)\,, y = f(x)$. Фиксируем открытые множества $\mathscr{U}, \mathscr{V}$, содержащие точки a и $b = f(a)$ соответственно, так что сужение f на $\mathscr{U}$ есть диффеоморфизм $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$. Положим $\Psi(y) = w(f^{-1}(y))$. Очевидно, что $\Psi(f(x)) = w(f^{-1}(f(x))) = w(x)$. Поэтому достаточно доказать, что функция Ψ не зависит от переменных $y_{m+1}, \dots, y_n$.

Пусть l – одно из чисел $m + 1, \dots, n$. Докажем, что $\dfrac{\partial \Psi}{\partial y_l} = 0$. Имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x)\frac{\partial x_j}{\partial y_l}(y)\,. \tag{7}$$

Если $i = 1, \dots, m$, то $\dfrac{\partial y_i}{\partial y_l} = 0$, с другой стороны,

$$0 = \frac{\partial y_i}{\partial y_l} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial x_i}{\partial y_l}(y)\,. \tag{8}$$

В силу зависимости системы функций $f_1, \dots f_m, w$ вектор-строка $w'(x)$ есть линейная комбинация вектор-строк $f_1'(x), \dots, f_m'(x)$, поэтому из (7), (8) следует равенство $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y_l} = 0$.►

1.5.5 Теорема о неявном отображении

В этом пункте k, s – натуральные числа, $n = k + s$. Пространство $\mathbf{R}^n$ будем рассматривать как прямое произведение пространств $\mathbf{R}^k$ и $\mathbf{R}^s : \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^s$; точку z из $\mathbf{R}^n$ будем записывать в виде $z = (x; y)$, где $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^s$. Пусть имеется s функций $F_1, \dots, F_s$ переменных $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s$, определенных и непрерывно дифференцируемых на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^n$. Пусть для некоторой точки $a = (\hat{x}; \hat{y}) \in W$ выполняются равенства

$$F_i(\hat{x}; \hat{y}) = 0 \qquad (i = 1, \dots, s). \tag{9}$$

Положим $F(x; y) = (F_1(x; y), \dots, F_s(x, y))^T$ и введём в рассмотрение матрицы

$$F_x(z) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(z)\right) \qquad (i = 1, \dots, s; j = 1, \dots, k),$$

$$F_y(z) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_l}(z)\right) \qquad (i = 1, \dots, s; l = 1, \dots, s).$$

Таким образом, $F_x(z)$ – прямоугольная матрица размеров $s \times k, F_y(z)$ – квадратная матрица размеров $s \times s$.

Теорема 5. *Пусть выполнены равенства (9) и матрица $F_y(a)$ обратима. Тогда существуют $\delta > 0$ и отображение $\varphi\colon \overset{\circ}{B}(\hat{x}, \delta) \to \mathbf{R}^s$ класса*
$C^1(\overset{\circ}{B}(x, \delta), \mathbf{R}^s)$ такие, что

$$F(x; \varphi(x)) = 0 \quad (x \in \overset{\circ}{B}(\hat{x}, \delta)); \quad \hat{y} = \varphi(\hat{x}).$$

◄ Определим отображение $f\colon W \to \mathbf{R}^n$, полагая для $z = (x; y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^s$

$$f(z) = f(x; y) = (x; F(x, y)).$$

Производная $f'(z)$ этого отображения в точке $z = (x; y)$ есть матрица размеров $n \times n$, имеющая вид

$$f'(z) = \begin{pmatrix} I_k & 0_{k\times s} \\ F_x(z) & F_y(z) \end{pmatrix},$$

где I_k – единичная матрица размеров $k \times k$, $0_{k\times s}$ – нулевая матрица размеров $k \times s$. Определитель этой матрицы в точке a равен $\det F_y(a) \neq 0$. К отображению f можно применить теорему 3. Согласно этой теореме существуют такие окрестности $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ точек $a = (\hat{x}; \hat{y})$ и $b = (\hat{x}; 0)$, что сужение f на $\mathscr{U}$ есть диффеоморфизм $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$. Отображение f задаётся соотношением (9). Обратное к f отображение $f^{-1}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ определяется равенством $f^{-1}(x; v) = (x; g(x, v)$, где отображение $g\colon \mathscr{V} \to \mathbf{R}^s$ непрерывно дифференцируемо. Поскольку f и f^{-1} – взаимно обратные отображения, то $f[f^{-1}(x; v)] = (x; v)$.

В частности, $F(x;g(x;v)) = v$. Отображение $\varphi(x) = g(x;0)$ является искомым. Действительно, $F(x;\varphi(x)) = 0, \hat{y} = \varphi(\hat{x})$. Непрерывная дифференцируемость отображения φ вытекает из непрерывной дифференцируемости отображения g. ▶

Отметим равенство

$$\varphi'(x) = -\left(F_y(x;\varphi(x))\right)^{-1} F_x(x;\varphi(x))$$

– правило дифференцирования неявного отображения. Оно вытекает из тождества $F(x;\varphi(x)) \equiv 0$ и является обобщением правила дифференцирования неявной функции, установленного в п. 1.1.7. Отметим без доказательства следующее: если в условиях теоремы 5 $F \in C^m(W, \mathbf{R}^s)$, то и неявная функция φ также m раз непрерывно дифференцируема в области определения.

Наметим приложения теоремы о неявном отображении к геометрическим и экстремальным задачам. Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$; $f_1, \ldots, f_m (m < n)$ – функции класса $C^1(\Omega)$ и в некоторой точке a из Ω выполнены соотношения

$$f_1(a) = \cdots = f_m(a) = 0, \quad rang \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \ldots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \ldots & D_n f_m(a) \end{pmatrix} = m\,.$$

Введём в рассмотрение множество

$$Q{:=}\{x \in \Omega, f_1(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}\,.$$

Очевидно, что $a \in Q$, поэтому $Q \neq \varnothing$. Обозначим через $T_Q(a)$ касательное к множеству Q в точке a множество (см п. 1.1).

Упражнение 1. *Доказать, что*

$$T_Q(a) = \{v \in \mathbf{R}^n,\, (\nabla f_i(a), v) = 0,\, i = 1, \ldots, m\}.$$

Упражнение 2.*Если a – локальное решение задачи*

$$f(x) \to \min, \quad x \in Q \tag{10}$$

и функция $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a, то $(\nabla f(a), v) = 0$ для всех v из $T_Q(a)$.

Упражнение 3.*Вывести из результата упражнения 2 равенство*

$$\nabla f(a) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(a) = 0 \tag{11}$$

в котором $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – некоторые действительные числа.

Соотношение (11) представляет правило множителей Лагранжа для задачи (10). Намеченный способ его доказательства более геометричен, чем изложенный в п. 1.3.4, но вряд ли короче.

Упражнение 4. *Доказать, что наибольшее и наименьшее значения функции*

$$f_0(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

на сфере

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

равны наибольшему и наименьшему собственному значению матрицы a_{ij}.

Упражнение 5.*Найти наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если:*

1) поверхность его равна S;

2) сумма длин ребер равна a.

Упражнение 6. *Определить наибольшую вместимость конической воронки, поверхность которой равна* S.

Упражнение 7. *Доказать неравенство Адамара: если* $A = (a_{ij}$ *– матрица размера* $n \times n$ *и* $\Delta = \det A$ *– ее определитель, то*

$$\Delta^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) .$$

Убедиться, что равенство имеет место лишь в том случае, если

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = 0 \quad \text{при всех} \;\; i, k = 1, \ldots, n, \; i \neq k \, .$$

Упражнение 8.*Доказать, что для треугольника со сторонами* a, b, c *и площадью* S *имеет место соотношение* $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}$.

Упражнение 9. *На плоскости задан треугольник* ABC. *Среди всех пирамид с основанием* ABC *и высотой данной длины найти ту, которая имеет наименьшую боковую поверхность.*

Упражнение 10. *Найти наименьшее значение суммы* $a^2 + b^2$, *где* a, b *– числа, при которых уравнение*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

имеет хотя бы один (действительный) корень.

Глава 2

Кратные интегралы

2.1 Интеграл по брусу

2.1.1 Брус и его разбиения

Брус в пространстве $\mathbf{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ – это прямое произведение n отрезков действительной прямой. Более подробно, пусть $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ – отрезки действительной прямой $\mathbb{R}$, при этом $a_k \leqslant b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Брус

$$A := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{x = (x_j),\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j,\ j = 1, \ldots, n\}.$$

При $n = 2$ брус – это прямоугольник на плоскости (x_1, x_2) со сторонами, параллельными осям координат, при $n = 3$ брус – это прямоугольный параллелепипед в пространстве (x_1, x_2, x_3) со сторонами, параллельными осям координат, и т.д.

Объёмом бруса $A = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ называют произведение длин его рёбер $b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n : V(A) = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n)$. В случае $n = 2$ число $V(A)$ совпадает с площадью прямоугольника A; при $n = 3$ – обычный объём параллелепипеда A; для произвольного n используется терминология, принятая в трёхмерном пространстве. Брус называют кубом, если длины всех его рёбер одинаковы. Особую роль далее играет стандартный куб $\Box_n := \{x = (x_j), 0 \leqslant x_j \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}$. Очевидно, что $V(\Box_n) = 1$.

Систему брусов $A_1, \ldots, A_N$ назовём *разбиением* бруса A, если

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \quad \text{и} \quad V(A_i \bigcap A_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j$$

(объединение брусов A_i совпадает с A и составляющие A брусы A_i почти не пересекаются). Иногда разбиение $\{A_1, \ldots, A_N\}$ будем обозначать символом τ.

Разбиение $\tau' = \{B_1, \ldots, B_M\}$ бруса A назовём *продолжением* разбиения $\tau = \{A_1, \ldots, A_N\}$, если каждый брус B_i, входящий в разбиение τ', составляет часть некоторого бруса A_j из разбиения τ. В этом случае пишем $\tau \prec \tau'$. Если $\tau_1 = \{A_1, \ldots, A_N\}$, $\tau_2 = \{B_1, \ldots, B_M\}$ – два разбиения бруса A, то разбиение

$$\tau = \tau_1 \cap \tau_2 := \{A_i \cap B_j, i = 1, \ldots, N; j = 1, \ldots, M\}$$

назовём произведением разбиений τ_1, τ_2. Аналогичным образом определяется произведение $\tau = \tau_1 \cap \tau_2 \cap \cdots \cap \tau_m$ любого числа разбиений $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$.

Каждое разбиение $P_k = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ отрезка $[a_k, b_k]$ порождает элементарное разбиение τ_k бруса A; $A_i = [a_1, b_1] \times \cdots \times [c_{i-1}, c_i] \times \ldots [a_n, b_n]$ (лишь k - ая сторона разбивается на части). Произведение элементарных разбиений $\tau_1, \ldots, \tau_n$ назовём *простым* разбиением. Для каждого разбиения τ бруса A существует его простое продолжение τ'.

Описанные выше конструкции выглядят особенно обозримыми в случае $n = 2$. При первом чтении можно ограничиться именно этим случаем. Разобравшись с функциями двух переменных, читатель поймёт, что при $n > 2$ всё аналогично (по крайней мере, в обсуждаемых далее ситуациях).

2.1.2 Определение интеграла по брусу

Пусть $f\colon A \to \mathbb{R}$ – ограниченная на брусе A функция, $\tau = \{A_1, \ldots, A_N\}$ – разбиение бруса. Функции f и разбиению τ сопоставим числа

$$M_i = \sup_{x \in A_i} f(x) \quad , \quad m_i = \inf_{x \in A_i} f(x) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

и суммы

$$\overline{S}_\tau(f) := \sum_{i=1}^{N} M_i V(A_i), \quad \underline{S}_\tau(f) := \sum_{i=1}^{N} m_i V(A_i),$$

называемые *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции f соответственно. Очевидно, что $\underline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_\tau(f)$. Стандартным образом устанавливаются следующие свойства сумм Дарбу.

1) Если $\tau \prec \tau'$, то $\overline{S}_{\tau'}(f) \leqslant \overline{S}_\tau(f)$, $\underline{S}_{\tau'}(f) \geqslant \underline{S}_\tau(f)$: при переходе от разбиения τ к его продолжению τ' верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя – не уменьшается.

2) Для любых двух разбиений τ_1, τ_2 бруса A справедливо неравенство

$$\overline{S}_{\tau_1}(f) \geqslant \underline{S}_{\tau_2}(f).$$

Совокупность сумм Дарбу $\overline{S}_\tau(f)$ ($\underline{S}_\tau(f)$), соответствующих всевозможным разбиениям τ бруса A, является ограниченным числовым множеством. Имеют смысл числа

$$J^*(f) = \inf_\tau \overline{S}_\tau(f), \quad J_*(f) = \sup_\tau \underline{S}_\tau(f),$$

называемые верхним и нижним интегралами функции f по брусу A. Из первого свойства сумм Дарбу вытекает, что числа $J^*(f), J_*(f)$ не изменятся, если в их определениях рассматривать лишь простые разбиения бруса A.

Функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ называется интегрируемой (в смысле Римана) по брусу A, если $J^*(f) = J_*(f)$. Общее значение $J^*(f)$ и $J_*(f)$ называют интегралом от функции f по брусу A и обозначают $J(f)$, а также

$$\int\limits_A f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int\limits_A \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n;$$

в частности, двойные и тройные интегралы от функции f по брусу A обозначают символами

$$\iint\limits_A f(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2, \qquad \iiint\limits_A f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3$$

соответственно. Совокупность интегрируемых по брусу A функций обозначают символом $\mathscr{R}(A)$. Справедлив

Критерий Римана интегрируемости. *Ограниченная на брусе A функция f интегрируема, если и только если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение τ бруса A, что $\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) < \varepsilon$.*

◀ Доказательство аналогично относящемуся к случаю $n = 1$, поэтому не приводится. ▶

В критерии Римана можно ограничиться простыми разбиениями бруса A.

2.1.3 Свойства интеграла Римана

Отметим ряд следствий критерия Римана.

Лемма 1. *Сумма (разность, произведение) интегрируемых по брусу функций есть интегрируемая по брусу функция.*

Лемма 2. *Если $f \in \mathscr{R}(A)$, функция $\varphi\colon f(A) \to \mathbb{R}$ липшицева, то их суперпозиция $\varphi \circ f$ принадлежит $\mathscr{R}(A)$.*

Лемма 3. *Если $f \in \mathscr{R}(A)$ и $\tau = \{A_1, \ldots, A_n\}$ – разбиение бруса A, то сужение f на A_i принадлежит $\mathscr{R}(A_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$; верно и обратное.*

Доказательства лемм 1 – 3 аналогичны проведённым для $n = 1$, поэтому опускаются. Если в условиях леммы 2 положить $\varphi(t) = |t|$, то получаем следующий результат: включение $f \in \mathscr{R}(A)$ влечёт включение $|f| \in \mathscr{R}(A)$. Комбинируя следствия 1, 2, приходим к выводу: если функции $f_1, \ldots, f_m$ принадлежат $\mathscr{R}(A)$, то любая их линейная комбинация $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$ $(\lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, m)$ также принадлежит $\mathscr{R}(A)$ (иначе говоря, класс $\mathscr{R}(A)$ есть линейное пространство над полем действительных чисел).

Сформулируем теперь свойства интеграла.

1°. $J(f+g) = J(f) + J(g) \quad \forall f, g \in \mathscr{R}(A)$;

2°. $J(\lambda f) = \lambda J(f) \quad (f \in \mathscr{R}(A), \lambda \in \mathbb{R})$.

Свойства 1°, 2° выражают линейность интеграла. Из 1°, 2° вытекает равенство

$$J\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J(f_i),$$

в котором $\lambda_i \in \mathbb{R},\ f_i \in \mathscr{R}(A)\,(i = 1, \ldots, m)$.

3°. Если $f \in \mathscr{R}(A),\ \tau = \{A_1, \ldots, A_N\}$ – разбиение бруса A, то

$$\int\limits_A f(x)\,dx \;=\; \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{A_i} f(x)\,dx$$

(свойство аддитивности интеграла).

4°. Если $f \in \mathscr{R}(A),\ g \in \mathscr{R}(A)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех x из A, то $J(f) \leqslant J(g)$ (монотонность интеграла).

Свойство монотонности интеграла влечёт за собой неравенства

$$|Jf| \leqslant J(|f|), \qquad J(|f+g|) \leqslant J(|f|) + J(|g|),$$

в которых f, g – произвольные функции из $\mathscr{R}(A)$.

5°.
$$\int\limits_A 1\,dx = V(A) \qquad \text{(нормировка интеграла).}$$

Доказательства свойств $1^\circ - 5^\circ$ опускаются, поскольку они идентичны их одномерным вариантам (недоверчивому читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно или познакомиться с книгой [16]; при её чтении следует помнить, что некоторые рассуждения и вычисления в ней проведены весьма сжато, а доказательства иногда опираются на результаты, приведённые лишь в задачах). В определённом смысле свойства $1^\circ - 5^\circ$ однозначно характеризуют интеграл.

2.1.4 Критерий Лебега интегрируемости по брусу

Наиболее удобный критерий интегрируемости функции установлен Лебегом. Для формулировки критерия введём понятия множества объёма нуль и меры нуль. Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ имеет (n - мерный) объём нуль, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие $\{A_1, \dots, A_m\}$ этого множества брусами $A_1, \dots, A_m$ такое, что $V(A_1) + \dots + V(A_m) < \varepsilon$. Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ имеет (n-мерную) меру 0, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая счётная система брусов $A_1, \dots, A_m, \dots$, что

$$X \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \qquad \text{и} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} V(A_m) < \varepsilon.$$

Пишут $V(X) = 0$ или $|X| = 0$ соответственно.

Счётные множества имеют нулевую меру. Легко привести пример несчётного (континуального) подмножества плоскости $\mathbf{R}^2$, имеющего нулевую меру. Например, если X – прямая на плоскости $\mathbf{R}^2$, то $|X| = 0$. Более общим образом, если X – гиперплоскость в $\mathbf{R}^n$, то её n - мерная мера равна 0.

Справедливы следующие утверждения (ср. с одномерным случаем, анализированным выше).

1°. Если $Y \subset X \subset \mathbf{R}^n$ и $|X| = 0$, то $|Y| = 0$.

2°. Объединение счётного числа множеств нулевой меры имеет нулевую меру.

Очевидно, что множество нулевого объёма имеет и нулевую меру. Обратное неверно: достаточно в качестве X взять множество $\mathbb{Q}^n$ – совокупность точек $x = (x_j)$ с рациональными координатами x_j. Вместе с тем справедливо свойство

3°. Ограниченное и замкнутое множество нулевой меры имеет и нулевой объём.

◀ Как и в одномерном случае, для доказательства достаточно воспользоваться теоремой Гейне–Бореля (в пространстве $\mathbf{R}^n$ ограниченное замкнутое множество есть бикомпакт).▶

Имеет место

Теорема 1 (Критерий Лебега). *Ограниченная на брусе A функция f интегрируема (в смысле Римана) в том и только в том случае, когда множество B её точек разрыва имеет нулевую меру: $f \in \mathscr{R}(A) \Leftrightarrow |B| = 0$.*

Аналогия с одномерным случаем полная, поэтому доказательство не приводится.

Из критерия Лебега легко следует интегрируемость суммы, разности и произведения двух интегрируемых на брусе функций. Частное двух интегрируемых на брусе функций интегрируемо в том и только в том случае, если оно определено и ограничено на этом брусе. Если справедливы включения $f_i \in \mathscr{R}(A)(i = 1, \ldots, m)$, а функция φ, определённая на множестве значений вектор-функции $f = (f_1, \ldots, f_m)^T \colon A \to \mathbf{R}^m$, ограничена и непрерывна, то $\varphi \circ f \in \mathscr{R}(A)$.

2.1.5 Кубируемые множества

Пусть E – ограниченное подмножество пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда существует брус A, содержащий множество E (разумеется, число подобных брусов бесконечно). Введём в рассмотрение функцию $1_E \colon A \to \mathbb{R}$, полагая

$$1_E(x) \ = \ \begin{cases} 1 & , x \in E, \\ 0 & , x \in A \setminus E. \end{cases}$$

Функцию 1_E называют *индикатором* множества E. Эта функция характеризует множество E (по этой причине иногда 1_E именуют *характеристической* функцией множества E). Если E_1, E_2 – подмножества бруса A, то

$$1_{E_1 \cap E_2} = 1_{E_1} 1_{E_2}, \quad 1_{E_1 \cup E_2} = 1 - (1 - 1_{E_1})(1 - 1_{E_2}). \tag{1}$$

Аналогичные факты справедливы для любого конечного числа подмножеств бруса A. Например, верны равенства

$$1_{E_1 \cap \cdots \cap E_m} = 1_{E_1} \ldots 1_{E_m}, \qquad 1_{E_1 \cup \cdots \cup E_m} = 1 - (1 - 1_{E_1}) \ldots (1 - 1_{E_m}) \,. \tag{2}$$

Если $E \subset A$, $CE = A \setminus E$ – дополнение к E до A, то $1_{CE} = 1 - 1_E$.

Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ назовём *кубируемым* (*измеримым по Жордану*), если его индикатор $1_E \colon A \to \mathbb{R}$ есть интегрируемая на брусе $A \supset E$ функция. Интегрируемость 1_E не зависит от выбора бруса, содержащего множество E. Отметим свойства кубируемых множеств.

1°. *Если E – кубируемое подмножество бруса A, то и дополнение к нему $CE = A \setminus E$ также кубируемо.*

◀ Действительно, обе функции 1_E и 1_{CE} одновременно интегрируемы (неинтегрируемы) по брусу A. ▶

2°. *Пересечение и объединение кубируемых множеств также кубируемо.*

◀ Свойство 2° вытекает из равенства (1).▶

Напомним, что *границей ∂M* множества $M \subset \mathbf{R}^n$ называют множество точек, предельных как для множества M, так и для множества $CM := \mathbf{R}^n \setminus M$: $\partial M = \overline{M} \cap \overline{CM}$. Граница ∂M произвольного множества M есть замкнутое множество. Границей шара $B(a, R)$ является сфера $\partial B(a, R) = \{x \in \mathbf{R}^n, |x - a| = R\}$, границей множества $\mathbb{Q}^n$ – всё пространство $\mathbf{R}^n$.

Лемма 1. *Множество точек разрыва функции $1_E \colon A \to \mathbb{R}$ совпадает с границей ∂E множества $E \subset A$.*

◀ Действительно, a есть точка разрыва функции $1_E \colon A \to \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки a есть элементы из E и $CE = A \setminus E$. ▶

Теорема 2 (критерий кубируемости множества). *Множество E кубируемо в том и только в том случае, если граница ∂E множества E имеет нулевой объём.*

◀ Следует из леммы 1 и критерия Лебега интегрируемости функции. В рассматриваемом случае множество ∂E есть компакт, поэтому равенства $V(\partial E) = 0$ и $|\partial E| = 0$ эквивалентны.▶

В случае $n = 2$ измеримые по Жордану множества называют *квадрируемыми*. Плоское множество $E = \{(x, y)^T \in \mathbf{R}^2, a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$ квадрируемо, если функции $\varphi(x), \psi(x)$ интегрируемы (в смысле Римана) по отрезку $[a, b]$. Более общие примеры, относяшиеся к пространствам $\mathbf{R}^n$ произвольной размерности, рассматриваются ниже.

2.2 Интеграл по кубируемому множеству

2.2.1 Объём кубируемого множества

Пусть E– подмножество бруса $A \subset \mathbf{R}^n$, 1_E – индикатор множества E. Поскольку 1_E – ограниченная функция, то каждому разбиению $\tau = \{A_1, \ldots, A_N\}$ бруса A можно сопоставить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу $\overline{S}_\tau(1_E)$ и $\underline{S}_\tau(1_E)$. Как нетрудно видеть,

$$\overline{S}_\tau(1_E) = \sum_{A_i \cap E \neq \varnothing} V(A_i), \qquad \underline{S}_\tau(1_E) = \sum_{A_i \subset E} V(A_i)\,.$$

Таким образом, $\overline{S}_\tau(1_E)$ – сумма объёмов брусов A_i, пересекающихся с множеством E, а $\underline{S}_\tau(1_E)$– сумма объёмов брусов A_i, содержащихся в множестве E. Верхний интеграл $J^*(1_E)$ называют *внешним объёмом* множества E и обозначают символом $V^*(E)$, нижний интеграл $J_*(1_E)$ именуют *внутренним объёмом* множества E и обозначают символом $V_*(E)$. Для любых двух множеств E_1, E_2 верно неравенство

$$V^*(E_1 \cup E_2) \leqslant V^*(E_1) + V^*(E_2)$$

– субаддитивность внешнего объёма.

Из определения $V^*(E)$ вытекает равенство

$$V^*(E) = \inf_{E \subset \cup A_i} \sum_i V(A_i)\,; \tag{1}$$

иначе говоря, внешний объём множества E есть точная нижняя грань сумм объёмов брусов A_i, образующих в совокупности покрытие множества E. Для каждого бруса B и любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует система кубов $\Box^j (j = 1, \ldots, k)$, обладающая свойствами

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{k} \Box^j, \quad \sum_{j=1}^{k} V(\Box^j) < V(B) + \varepsilon, \quad V(\Box^j) < \delta^n\,. \tag{2}$$

Таким образом, объединение кубов $\Box^j (j = 1, \ldots, k)$ образует достаточно экономное покрытие бруса B, при этом ребро каждого куба $\Box^j$ меньше δ. Объединяя (1), (2), приходим к соотношению

$$V^*(E) = \inf_{E \subset \cup\ \Box^l} \sum V(\Box^l) \qquad (V(\Box^l) < \delta^n)\,. \tag{3}$$

Оно означает, что в (1) можно ограничиться случаем, когда в качестве брусов A_i берутся кубы со сколь угодно малыми рёбрами.

Если E – кубируемое множество, то $V^*(E) = V_*(E)$. Общее значение внешнего и внутреннего объёмов множества E называют *объёмом* этого множества и обозначают символом $V(E)$. Перечислим основные свойства объёма.

1°. Объём V неотрицателен, т.е. объём $V(E)$ любой кубируемой фигуры E является неотрицательным числом.

2°. Объём аддитивен: для любых кубируемых фигур E_1, E_2 имеет место равенство

$$V(E_1 \cup E_2) = V(E_1) + V(E_2) - V(E_1 \cap E_2). \tag{4}$$

3°. Объём V инвариантен относительно параллельных переносов, т.е. если E' – фигура, полученная из кубируемой фигуры E с помощью параллельного переноса, то фигура E' также кубируема и $V(E') = V(E)$.

4°. Стандартный куб $\square_n := \{x = (x_j), 0 \leqslant x_j \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}$ является кубируемой фигурой и $V(\square_n) = 1$ (свойство нормировки объёма).

◀ Свойства $1^\circ, 4^\circ$ очевидны. Равенство (4) получается в результате интегрирования по содержащему фигуры E_1, E_2 брусу A равенства

$$1_{E_1 \cup E_2} \; = \; 1_{E_1} + 1_{E_2} - 1_{E_1 E_2}$$

(см. формулу (6.1)). Инвариантность объёма относительно сдвига вытекает из того, что сдвигом бруса является брус тех же размеров.▶

Чаще всего свойство аддитивности (4) формулируют применительно к случаю $V(E_1 \cap E_2) = 0$ (множества E_1, E_2 почти не пересекаются). В этой ситуации

$$V(E_1 \cup E_2) = V(E_1) + V(E_2)\,. \tag{5}$$

Общий случай легко сводится к данному случаю.

Упражнение 1. Доказать вариант формул (4), (5) для m кубируемых фигур $E_1, \ldots, E_m$:

$$V(\bigcup_{i=1}^{m} E_i) = \sum_i V(A_i) - \sum_{i<j} V(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{m-1} V(A_1 \cap \cdots \cap A_m) \tag{6}$$

– формула включения и исключения.

2.2.2 Изменение объёма при аффинном отображении

Отображение $\Phi \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ назовём *аффинным*, если

$$\Phi(x) = \Lambda x + b\,; \tag{7}$$

здесь Λ – матрица размеров $n \times n$, $b \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, аффинное отображение Φ есть суперпозиция линейного отображения $x \to \Lambda x$ и сдвига $y \to y + b$. Число $\det \Lambda$ именуем определителем отображения Φ; обозначение $\det \Phi = \det \Lambda$.

Теорема 1. *Пусть E – кубируемая фигура в $\mathbf{R}^n$, $\Phi \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – аффинное отображение. Тогда $\Phi(E)$ – кубируемое подмножество $\mathbf{R}^n$ и*

$$V(\Phi(E)) \; = \; |\det \Phi| \; V(E). \tag{8}$$

◀ Если $\det \Phi = \det \Lambda = 0$, то (8) очевидно. Действительно, в этом случае множество $\Phi(E)$ составляет ограниченную часть некоторой гиперплоскости, поэтому

$$V(\Phi(E)) = 0 = |\det \Phi|\ V(E).$$

Не нарушая общности, можно считать $b = 0$ (объём инвариантен относительно сдвига), $\det \Lambda \neq 0$.

На первом этапе расссмотрим случай диагональной матрицы Λ.
Пусть $\Lambda = (s_i \delta_{ij})$, $s_i (i = 1, \ldots, n)$ – положительные числа. Равенство $y = \Lambda x$ эквивалентно n покомпонентным равенствам $y_i = s_i x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Отображение $\Phi(x) = \Lambda x$ переводит брус $P = [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_n, d_n]$ в брус $\Phi(P) = [s_1 a_1, s_1 b_1] \times \cdots \times [s_n a_n, s_n b_n]$, при этом $V(\Phi(P)) = s_1 \ldots s_n V(P) = \det \Lambda V(P)$. Если система брусов $P_j (j = 1, \ldots, N)$ покрывает фигуру E, то система брусов $\Phi(P_j)(j = 1, \ldots, N)$ образует покрытие фигуры $\Phi(E)$. Если брус P содержится в множестве E, то брус $\Phi(P)$ принадлежит множеству $\Phi(E)$. Отсюда вытекают равенства

$$V^*(\Phi(E)) = \det \Lambda V^*(E), \qquad V_*(\Phi(E)) = \det \Lambda V_*(E)\,,$$

влекущие за собой равенство $V(\Phi(E)) = |\det \Phi|\ V(E)$ для любой кубируемой фигуры E.

Второй этап. Пусть Λ – ортогональная матрица. В этом случае отображение $\Phi(x) = \Lambda x$ есть движение в пространстве $\mathbf{R}^n$, т.е. преобразование, сохраняющее евклидово расстояние в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\|x\|$ кубическую норму элемента $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$:

$$\|x\| \;=\; \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|\,.$$

Очевидны неравенства $\|x\| \leqslant |x| \leqslant \sqrt{n}\|x\|$, из которых вытекает, что движение $\Phi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица относительно нормы $\|\cdot\|$, а именно

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant |\Phi(x-y)| = |x-y| \leqslant \sqrt{n}\|x-y\|\,.$$

Куб $\Box(a, R) {:=} \{x \in \mathbf{R}^n,\ \|x - a\| \leqslant R\}$ с центром в точке a и ребром $2R$ движение Φ преобразует в часть куба $\Box(\Phi(a), \sqrt{n}R)$; действительно, неравенство $\|x-a\| \leqslant R$ влечёт за собой неравенство $\|\Phi(x) - \Phi(a)\| \leqslant \sqrt{n}\|x-a\| \leqslant \sqrt{n}R$. Если

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Box(a_i, R_i)\,,$$

то

$$\Phi(M) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Phi(\Box(a_i, R_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Box(\Phi(a_i), \sqrt{n}R_i)\,.$$

Объединяя это неравенство с соотношением (3), приходим к оценке

$$V^*(\Phi(M)) \leqslant (\sqrt{n})^n V^*(M) \tag{9}$$

для любого ограниченного множества $M \subset \mathbf{R}^n$.

Если E – кубируемая фигура, ∂E – граница E, то ∂E есть компакт и $V(\partial E) = 0$. В силу (9) отсюда вытекает равенство $V^*(\Phi(\partial E)) = 0$. Но $\Phi(\partial E)$ есть граница множества $\Phi(E)$, поэтому движение сохраняет кубируемость: $\Phi(E)$ – кубируемая фигура.

В частности, образ $\Phi(\square_n)$ стандартного куба $\square_n$ есть кубируемая фигура. Положим $k_0 = V(\Phi(\square_n))$ и покажем, что $k_0 = 1$. Для любого куба $\square = a + \delta\square_n$ с ребром δ его образ $\Phi(\square) = \Phi(a + \delta\square_n) = \Phi(a) + \delta\Phi(\square_n)$, поэтому

$$V(\Phi(\square)) = V(\Phi(a) + \delta\Phi(\square_n)) = \delta^n V(\Phi(\square_n)) = k_o V(\square).$$

В силу (3) отсюда вытекает равенство $V(\Phi(E)) = k_0 V(E)$ для любого кубируемого множества $E \subset \mathbf{R}^n$. Если B – евклидов шар с центром в 0, то $\Phi(B) = B$. Отсюда следует равенство $k_0 = 1$. Таким образом, $V(\Phi(E)) = V(E)$ для любой кубируемой фигуры E, т.е. объём инвариантен относительно движений.

Третий этап. Произвольная невырожденная матрица Λ размеров $n \times n$ допускает [12] представление $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3$, где Λ_1, Λ_3 – ортогональные матрицы, $\Lambda_2 = (s_i\delta_{ij})$ – диагональная матрица с положительными диагональными элементами $s_1, \dots s_n$. Из доказанного выше следует, что отображение $\Phi(x) = (\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)x$ переводит каждую кубируемую фигуру E в кубируемую фигуру $\Phi(E)$; при этом $V(\Phi(E)) = s_1 \dots s_n V(E)$. Но

$$|\det(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)| = |\det\Lambda| = |\det\Lambda_1|\,|\det\Lambda_2|\,|\det\Lambda_3| = |\det\Lambda_2| = s_1 s_2 \dots s_n.$$

Это и приводит к требуемому результату.▶

Более общее, чем теорема 1, утверждение устанавливается ниже. Далее нам потребуется вариант оценки (9) для произвольных липшицевых отображений.

Лемма 1. *Пусть W – открытое подмножество $\mathbf{R}^n$, $\Psi\colon W \to \mathbf{R}^n$ – отображение, удовлетворяющее условию Липшица*

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\| \leqslant L\|u - v\| \quad \text{для всех} \quad u, v \quad \text{из} \quad W. \tag{10}$$

Если M – ограниченная фигура, замыкание $\overline{M}$ которой принадлежит W, то

$$V^*(\Psi(M)) \leqslant L^n V^*(M)\,. \tag{11}$$

◀ Так как $\overline{M}$ – ограниченное и замкнутое множество, содержащееся в открытом множестве W, то при некотором положительном r множество

$$\bigcup_{x\in\overline{M}} \square(x, r)$$

принадлежит множеству W. Фиксируем положительное число ε и конечную систему кубов $\square(a_j, \delta)$, $(j = 1, \dots, N)$, обладающую свойствами

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{N} \square(a_j, \delta) \subset W, \quad \sum_{j=1}^{N} V(\square(a_j, \delta)) < V^*(M) + \varepsilon, \quad 0 < \delta < r\,. \tag{12}$$

Существование подобной системы кубов вытекает из результатов, отмеченных в предшествующем пункте. Из неравенства (10) следует оценка

$$V^*(\Psi(\square(a_j, \delta))) \leqslant L^n V(\square(a_j, \delta))\,(j = 1, \dots, N).$$

Поскольку

$$\Psi(M) \subset \bigcup_{j=1}^{N} \Psi(\Box(a_j, \delta)),$$

то

$$V^*(\Psi(M)) \leqslant \sum_{j=1}^{N} V^*(\Psi(\Box(a_j, \delta))) \leqslant L^n \sum_{j=1}^{N} V(\Box(a_j, \delta)) \leqslant L^n (V^*(M) + \varepsilon)\,.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство влечёт за собой (11).▶

При $L = 1$ оценка (11) имеет прозрачный геометрический смысл: нерастягивающее отображение не увеличивает внешний объём.

2.2.3 Определение интеграла по кубируемому множеству

Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – функция, определённая на кубируемом множестве $E \subset \mathbf{R}^n$. Фиксируем брус A, содержащий множество E. Обозначим через $\tilde{f}$ нулевое продолжение функции f на брус A. Таким образом,

$$\tilde{f}(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in E \\ 0, & \text{если} \quad x \in A \setminus E. \end{cases}$$

Функцию f назовём *интегрируемой* (в смысле Римана) на множестве E, если $\tilde{f} \in \mathscr{R}(A)$. Положим

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \int\limits_A \tilde{f}(x)\,dx\,. \tag{13}$$

Правая часть (13) на самом деле не зависит от выбора бруса A, содержащего множество E. Это легко выводится из свойства аддитивности интеграла по брусу. Совокупность интегрируемых (в смысле Римана) по множеству E функций будем обозначать символом $\mathscr{R}(E)$.

Теорема 2. (Критерий Лебега интегрируемости в смысле Римана). *Ограниченная на кубируемом множестве E функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ интегрируема, если и только если множество E_0 её точек разрыва имеет меру нуль.*

◀ Нулевое продолжение $\tilde{f}$ функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ на брус $A \supset E$ имеет дополнительные точки разрыва лишь на границе ∂E множества E. Поскольку E – кубируемое множество, то $|\partial E| = 0$. Поэтому равенство $|E_0| = 0$ эквивалентно тому, что множество B точек разрыва функции $\tilde{f}$ имеет нулевую меру: $|E_0| = 0 \Leftrightarrow |B| = 0$. ▶

Следствие. *Непрерывная на кубируемом компакте функция интегрируема в смысле Римана.*

Отметим некоторые свойства класса $\mathscr{R}(E)$.

1°. Сумма (разность, произведение) интегрируемых в смысле Римана функций есть интегрируемая в смысле Римана функция.

2°. Если $f \in \mathscr{R}(E), \varphi\colon \mathscr{K} \to \mathbb{R}$ – непрерывная на замкнутом множестве $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}$ функция и $f(E) \subset \mathscr{K}$, то $\varphi \circ f \in \mathscr{R}(E)$. В частности, если $f \in \mathscr{R}(E)$, то и $|f| \in \mathscr{R}(E)$.

2.2.4 Свойства интеграла по кубируемому множеству

Отмеченные выше свойства интеграла по брусу без труда обобщаются на интегралы по кубируемому множеству. Необходимо лишь в соответствующих соотношениях заменить брус кубируемым множеством.

1°. Линейность интеграла. Если $f_i \in \mathscr{R}(E), \lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$, то

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i \int\limits_E f_i(x)\,dx\,.$$

2°. Аддитивность интеграла. Пусть $E_1, \ldots, E_N$ – кубируемые подмножества кубируемого множества E. Система множеств $\tau = \{E_1, \ldots, E_N\}$ образует кубируемое разбиение множества E, если

$$E = \bigcup_{i=1}^N E_i \quad \text{и} \quad V(E_i \cap E_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j\,.$$

Тогда включение $f \in \mathscr{R}(E)$ эквивалентно тому, что сужение функции f на каждое из множеств E_i принадлежит $\mathscr{R}(E_i)$; при этом справедливо равенство

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;=\; \sum_{i=1}^N \int\limits_{E_i} f(x)\,dx.$$

3°. Монотонность интеграла. Если f, g – функции класса $\mathscr{R}(E)$ и $f(x) \leqslant g(x)\;\forall x \in E$, то

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;\leqslant\; \int\limits_E g(x)\,dx\,.$$

4°. Нормировка интеграла.

$$\int\limits_E 1\,dx \;=\; V(E).$$

Ограничимся кратким комментарием к перечисленным свойствам. Если $\tilde{f}_i$ – нулевое продолжение функции $f_i\,(1 = 1, \ldots, m)$ на брус A, то $\lambda_1 \tilde{f}_1 + \cdots + \lambda_m \tilde{f}_m$ – нулевое продолжение функции $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$ на тот же брус. Поэтому

$$\int\limits_E \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)\,dx = \int\limits_A \widetilde{\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i\right)}(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_A \sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{f}_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i \int\limits_A \tilde{f}_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \lambda_i \int\limits_E f_i(x)\,dx.$$

Столь же просто проверяются и свойства $2^\circ - 4^\circ$. Из монотонности интеграла вытекают оценки

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |f(x)|\,dx \leqslant \sup_E |f|\; V(E) -$$

свойство ограниченности интеграла.

Свойства линейности, аддитивности, монотонности и нормировки являются характеристическими. Они однозначно определяют интеграл и могут быть положены в основу аксиоматического определения этого понятия.

2.2.5 Интеграл и суммы Дарбу для кубируемого множества

Пусть E – кубируемое подмножество $\mathbf{R}^n$, $f \in \mathscr{R}(E)$, $\tau = \{E_1, \ldots, E_N\}$ – разбиение множества E на кубируемые части. Положим

$$M_i = \sup_{x \in E_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in E_i} f(x), \quad (i = 1, \ldots, N)\,.$$

Числа

$$\overline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{N} M_i V(E_i), \quad \underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{N} m_i V(E_i)$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу функции f, соответствующими разбиению $\tau = \{E_1, \ldots, E_N\}$ множества E. Из монотонности интеграла вытекают оценки

$$\underline{S}_\tau(f) \leqslant \int\limits_E f(x)\,dx \leqslant \overline{S}_\tau(f).$$

Оказывается, что

$$\sup_\tau \underline{S}_\tau(f) \;=\; \int\limits_E f(x)\,dx \;=\; \inf_\tau \overline{S}_\tau(f). \tag{14}$$

Для доказательства (14) фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f \in \mathscr{R}(E)$, то её нулевое продолжение $\tilde{f}$ на брус A, содержащий множество E, принадлежит $\mathscr{R}(A)$. Подберём такое разбиение $\tau_1 = \{A_1, \ldots, A_N\}$ бруса A, для которого

$$\overline{S}_{\tau_1}(f) - \underline{S}_{\tau_1}(f) < \varepsilon\,.$$

Положим $E_i = A_i \cap E\,(i = 1, \ldots, N)$. Очевидно, что $\tau = \{E_1, \ldots, E_N\}$ есть разбиение множества E и

$$\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_{\tau_1}(f) - \underline{S}_{\tau_1}(f) < \varepsilon\,,$$

в частности,

$$\left|\underline{S}_\tau(f) - \int\limits_E f(x)\,dx\right| < \varepsilon, \qquad \left|\overline{S}_\tau(f) - \int\limits_E f(x)\,dx\right| < \varepsilon\,.$$

Это и доказывает равенства (14).

Данные равенства могут быть положены в основу определения интеграла от функции $f\colon E \to \mathbb{R}$. Реализация подобного подхода требует развития теории объёма, не зависимой от интеграла [1], [3 – 5]. Иногда идут ещё дальше - сам интеграл определяют как объём некоторого множества. Этот подход особенно удобен для двойных интегралов – соответствующие множества можно рассматривать как фигуры в пространстве $\mathbf{R}^3$.

2.3 Кратный и повторный интегралы

2.3.1 Теорема Фубини для прямоугольника

Пусть $A = [a,b] \times [c,d]$ – прямоугольник в плоскости Oxy ($-\infty < a < b < \infty$, $-\infty < c < d < \infty$), $f \in \mathscr{R}(A)$. Если при любом x из отрезка $[a,b]$ существует интеграл

$$\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$$

по переменной y, то возникает функция $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$. Интеграл от неё $\int\limits_a^b \Phi(x)\,dx$ (коль скоро он существует) называют *повторным интегралом* от функции f по прямоугольнику A и обозначают символом

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Теорема Фубини[6] утверждает, что двойной и повторный интегралы от функции f по прямоугольнику A совпадают:

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{1}$$

Вначале будет установлен более общий факт.

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathscr{R}(A)$, $\overline{\Phi}(x)$ и $\underline{\Phi}(x)$ – верхний и нижний интегралы функции $f(x,\cdot)\colon [c,d] \to \mathbb{R}$:*

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{\int\limits_c^d} f(x,y)\,dy, \qquad \underline{\Phi}(x) = \underline{\int\limits_c^d} f(x,y)\,dy\,.$$

Тогда функции $\overline{\Phi}$, $\underline{\Phi}$: $[a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируемы (в смысле Римана) по отрезку $[a,b]$ и

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \overline{\Phi}(x)\,dx = \int\limits_a^b \underline{\Phi}(x)\,dx. \tag{2}$$

[6]Фубини Гвидо (*Fubini Guido*) (1879 – 1943) – итальянский математик.

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём такое разбиение τ прямоугольника A, что $\overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) < \varepsilon$. Не нарушая общности, можно считать, что τ – простое разбиение A, т.е. $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, где $\tau_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, $\tau_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$ – разбиение отрезка $[c, d]$. Прямоугольники

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,(i = 1, \ldots, p\ ; j = 1, \ldots, q)$$

образуют простое разбиение τ прямоугольника A. Положим

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,(i = 1, \ldots, p), \qquad \Delta y_j = y_j - y_{j-1},\,(j = 1, \ldots, q),$$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in A_{ij}} f(x, y), \quad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in A_{ij}} f(x, y) \quad (i = 1, \ldots, p\,; j = 1, \ldots, q).$$

Для любого x из отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij}\Delta y_j \leqslant \overline{\Phi}(x) \leqslant \sum_{j=1}^{q} M_{ij}\Delta y_j\,. \tag{3}$$

Если

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \overline{\Phi}(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \overline{\Phi}(x)\,,$$

то из (3) вытекают оценки

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij}\Delta y_j \ \leqslant\ m_i \leqslant M_i \ \leqslant\ \sum_{j=1}^{q} M_{ij}\Delta y_j\,.$$

Умножая эти оценки на Δx_i и суммируя по i от 1 до p, приходим к соотношениям

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \ \leqslant\ \sum_{i=1}^{p} m_i\Delta x_i \ \leqslant\ \sum_{i=1}^{p} M_i\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

Двойные суммы в левой и правой частях последнего неравенства находятся в промежутке $(J(f) - \varepsilon, J(f) + \varepsilon)$ (за счёт выбора разбиения τ прямоугольника A), средние суммы – в том же промежутке. Отсюда вытекает интегрируемость функции $\overline{\Phi}$ по отрезку $[a, b]$ и равенство

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \overline{\Phi}(x)\,dx\,.$$

Для функции $\underline{\Phi}(x)$ всё аналогично. ▶

Следствие 1. *Если $\overline{\Phi}(x) = \underline{\Phi}(x) = \Phi(x)$ для всех x из $[a, b]$, то двойной и повторный интегралы совпадают (теорема Фубини).*

Меняя местами переменные x, y, приходим к равенству

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx\,, \tag{4}$$

верному, если для всех y из $[c,d]$ существует интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. Равенства (1), (4) справедливы, например, если f – непрерывная на прямоугольнике A функция.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 справедливо равенство* $\overline{\Phi}(x) = \underline{\Phi}(x)$ *п.в. (почти всюду).*

◀ Действительно, $\overline{\Phi}(x) \geqslant \underline{\Phi}(x)$ для всех x из отрезка $[a,b]$. Функция $\overline{\Phi}(x) - \underline{\Phi}(x)$ всюду неотрицательна и интеграл от неё равен 0. Отсюда и вытекает равенство $\overline{\Phi}(x) = \underline{\Phi}(x)$ п.в. ▶

Иногда равенство (1) понимают в расширенном смысле. Именно, интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ понимается как верхний (или нижний) интеграл. Тогда равенство (1) справедливо для любой функции f из $\mathscr{R}(A)$.

2.3.2 Случай произвольной квадрируемой фигуры

Пусть плоская квадрируемая фигура E задаётся соотношением

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,\ a \leqslant x \leqslant b, \quad c(x) \leqslant y \leqslant d(x) \right\},$$

в котором $c(x), d(x)$ интегрируемые по отрезку $[a,b]$ функции. Каждая прямая $x = x_0$, $a \leqslant x_0 \leqslant b$, параллельная оси Oy, пересекает множество E по отрезку. Такого рода фигуры называют *выпуклыми* относительно вертикальной оси Oy. Всякая выпуклая замкнутая фигура на плоскости выпукла относительно оси Oy; обратное неверно.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathscr{R}(E)$ *и*

$$\Phi(x) = \int\limits_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \quad \forall x \in [a,b] \tag{5}$$

(интеграл в правой части (5) понимается как верхний). Тогда функция Φ *интегрируема по отрезку* $[a,b]$ $(\Phi \in \mathscr{R}[a,b])$ *и*

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Phi(x)\,dx := \int\limits_a^b dx \int\limits_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,. \tag{6}$$

◀ Заключим множество E в прямоугольник $A = [a_1,b_1] \times [c_1,d_1]$, где

$$a_1 < a, \quad b_1 > b, \quad c_1 < \inf_{x\in[a,b]} c(x), \quad d_1 > \sup_{x\in[a,b]} d(x)\,.$$

Продолжим функцию f на прямоугольник A, полагая её равной 0 на $A \setminus E$; продолженную таким образом функцию обозначим символом $\tilde{f}$. Функция $\tilde{f}$ интегрируема по прямоугольнику A. Имеют место соотношения

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_A \tilde{f}(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{c_1}^{d_1} \tilde{f}(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy;$$

последовательно используются определение интеграла по множеству E, теорема Фубини для прямоугольника A и равенство $\tilde{f}(x,y) = 0$, если $(x,y)^T \in A \backslash E$. Это и доказывает формулу (6).►

Если фигура E выпукла относительно оси Ox, то она задаётся соотношением

$$E = \left\{ \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) \in \mathbf{R}^2,\ c \leqslant y \leqslant d, \quad a(y) \leqslant x \leqslant b(y) \right\},$$

в котором $a(y), b(y)$ – интегрируемые по отрезку $[c,d]$ функции. При соответствующих предположениях верен следующий аналог формулы (6)

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx. \tag{7}$$

Равенства (6), (7) позволяют вычислять двойные интегралы по областям, выпуклым относительно одной из координатных осей. Если область интегрирования невыпукла по каждому из переменных x, y, то её представляют в виде объединения выпуклых по одному из переменных областей. Далее используют свойство аддитивности интеграла:

$$\iint\limits_{E_1 \cup E_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{E_1} f(x,y)\,dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{E_2} f(x,y)\,dxdy - \iint\limits_{E_1 \cap E_2} f(x,y)\,dxdy\,. \tag{8}$$

Анаоги равенства (8) справедливы, разумеется, и для областей интегрирования, представляющих объединение любого конечного числа квадрируемых фигур.

В качестве первого примера вычислим интеграл

$$J_1 = \iint\limits_E y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\,dxdy\,,$$

где E – круг радиуса R с центром в начале координат. Искомый интеграл J_1 равен повторному

$$J_1 = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\,dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл

$$\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2}\,dy = 2\sqrt{R^2 - x^2} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy = \frac{2}{3}(R^2 - x^2)^2.$$

Затем (снова с учётом чётности)

$$J_1 = \frac{2}{3}\int\limits_{-R}^{R}(R^2-x^2)^2\,dx = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{R}(R^2-x^2)^2\,dx = \frac{32}{45}R^5\,.$$

Теперь вычислим интеграл

$$J_2 = \iint\limits_E (x^2+y)\,dx\,dy\,,$$

где E – плоская фигура, заключённая между параболами $y = x^2$, $x = y^2$. Область E выпукла, она может быть задана соотношением

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y} \right\}\,.$$

Поэтому

$$J_2 = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3}\sqrt{y^3} - \frac{y^6}{3} - y^3 \right)\,dy = \frac{33}{140}.$$

В приведённых примерах вычисление двойного интеграла сводилось к вычислению двух однократных интегралов.

2.3.3 Многомерный вариант теоремы Фубини

Пусть $A = [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ – брус в пространстве $\mathbf{R}^n$; I_1, I_2 – разбиение множества $\{1,\ldots,n\}$ на две непересекающиеся и непустые части, $n_1(n_2)$ – число элементов множества $I_1(I_2)$. В этом случае $n_1 \geqslant 1, n_2 \geqslant 1, n_1+n_2 = n$. Введём в рассмотрение брусы A', A'' в пространствах $\mathbf{R}^{n_1}, \mathbf{R}^{n_2}$, полагая

$$A' = \prod_{i\in I_1}[a_i,b_i], \qquad A'' = \prod_{i\in I_2}[a_i,b_i].$$

Очевидно, $A = A'\times A''$, т.е. каждый элемент x можно записать в виде
$x = (x';x'')$, где $x'\in A'\subset\mathbf{R}^{n_1}, x''\in A''\subset\mathbf{R}^{n_2}$.

Теорема 2. *Пусть $f\in\mathscr{R}(A)$. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_A f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{A'} dx' \int\limits_{A''} f(x';x'')\,dx''\,, \tag{9}$$

где внутренний интеграл в правой части понимается как верхний интеграл от функции $f(x';\cdot)\colon A''\to\mathbb{R}$ по переменной x''.

◀ Доказательство проводится по той же схеме, что и в рассмотренном выше случае $n_1 = n_2 = 1$ (см. п. 2.3.1). ▶

Замечание 1. В правой части (9) внутренний интеграл от функции $f(x';\cdot)$ можно понимать и как нижний интеграл от функции $f(x';\cdot)$.

Замечание 2. Почти при всех x' из A' функция $f(x';\cdot)\colon A'' \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана; для многих интересных случаев функция $f(x';\cdot)$ интегрируема при всех x' из A'; например, это так для непрерывных на брусе A функций.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{D}$ – кубируемая фигура в $\mathbf{R}^{n-1}$; $\varphi_1, \varphi_2\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ – интегрируемые по множеству $\mathscr{D}$ функции, причём $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)\,\forall x \in \mathscr{D}$; $E = \{(x;y) \in \mathbf{R}^n,$ $x \in \mathscr{D},\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$. Если $f \in \mathscr{R}(E)$, то*

$$\iint\limits_E f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathscr{D}} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{10}$$

◀ Достаточно воспользоваться конструкцией, связанной с нулевым продолжением функции f на содержащий множество E брус A (см. п. 2.3.2). ▶

Следствие 2. *Если в равенстве (10) положить $f(x;y) = 1$, то*

$$\iint\limits_E 1\,dx\,dy = V(E), \qquad \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1\,dy = \varphi_2(x) - \varphi_1(x),$$

поэтому из (10) вытекает формула для вычисления объёма $V(E)$ фигуры E:

$$V(E) = \int\limits_{\mathscr{D}} [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx.$$

В частности, объём криволинейного цилиндра в $\mathbf{R}^3$, определяемого равенством

$$E_h = \{(x,y,z)^T \in \mathbf{R}^3, \quad (x,y)^T \in \mathscr{D}, \quad 0 \leqslant z \leqslant h(x,y)\},$$

$\mathscr{D}$ – квадрируемая фигура в плоскости $\mathbf{R}^2, h\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ – неотрицательная функция класса $\mathscr{R}(\mathscr{D})$, находится по формуле

$$V(E_h) = \iint\limits_{\mathscr{D}} h(x,y)\,dx\,dy. \tag{11}$$

Равенство (11) позволяет дать наглядную интерпретацию двойного интеграла от неотрицательной функции двух переменных.

Аналогичное (11) равенство справедливо для функций любого числа переменных. Именно, $(n+1)$-мерный объём криволинейного цилиндра в $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbb{R}$, определяемого равенством

$$E_h = \{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})^T \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathscr{D},\ 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant h(x_1,\ldots,x_n)\},$$

$\mathscr{D}$ – кубируемая фигура в $\mathbf{R}^n, h\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ – неотрицательная функция класса $\mathscr{R}(\mathscr{D})$, находится по формуле

$$V(E_h) \ = \ \int\limits_{\mathscr{D}} \cdots \int h(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots\,dx_n\,.$$

2.3.4 Формула Кавальери

Пусть E – кубируемая фигура в $\mathbf{R}^n$, принадлежащая брусу

$$A=[a_1,b_1]\times\ldots[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n].$$

Брус A можно представить как прямое произведение отрезка $A'=[a_n,b_n]$ и бруса $A''=[a_1,b_1]\times\ldots[a_{n-1},b_{n-1}]\subset\mathbf{R}^{n-1}$. Поскольку E – кубируемая фигура, то $1_E\in\mathscr{R}(A)$. Применяя равенство (9) в случае $f(x)=1_E(x)$, приходим к соотношению

$$\int\limits_A 1_E(x)\,dx \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n \int\limits_{A''} 1_E(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\,dx_1\ldots\,dx_{n-1}\,. \tag{12}$$

Левая часть (12) – это по определению объём фигуры E. Внутренний интеграл в правой части (12) при $x_n=t$ понимается как верхний интеграл по множеству A'' от функции, совпадающей с $1_E(x',t)$. Поэтому внутренний интеграл совпадает с внешним $(n-1)$-мерным объёмом множества

$$E(t){:=}\left\{\begin{pmatrix} x' \\ t\end{pmatrix}\in E\right\}-$$

пересечения фигуры E с гиперплоскостью $x_n=t$.

С учётом сказанного имеем равенство

$$V(E) \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} V^*_{n-1}(E_t)\,dt\,. \tag{13}$$

Почти при всех t фигура E_t кубируема в $\mathbf{R}^{n-1}: V_{n-1}(E_t)=V^*_{n-1}(E_t)$. В равенстве (13) верхний объём $V^*_{n-1}(E_t)$ можно заменить любым числом $\nu(t)$, расположенным между верхним и нижним объёмами фигуры $E(t)$. Если при любом t из $[a_n,b_n]$ фигура $E(t)$ кубируема, то

$$V(E) \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} V_{n-1}(E(t))\,dt\,. \tag{14}$$

Равенство (14) принято называть формулой Кавальери[7]. Итак, если фигура E и её поперечные сечения $E(t)$ кубируемы, то объём фигуры E равен интегралу от $(n-1)$ - мерного объёма её поперечных сечений. Из формулы (14) вытекает

Принцип Кавальери. *Пусть E и F – две кубируемые фигуры в $\mathbf{R}^n$. Если при любом действительном t фигуры*

$$E(t)=\left\{\begin{pmatrix} x' \\ t\end{pmatrix}\in E\right\},\qquad F(t)=\left\{\begin{pmatrix} x' \\ t\end{pmatrix}\in F\right\}$$

кубируемы и их $(n-1)$ - мерные объёмы одинаковы, то фигуры E,F имеют равные объёмы: $V(E)=V(F)$.

[7]Кавальери Бонавентура (*Cavalieri Bonaventura*) (1598 – 1647) – итальянский математик.

2.3.5 Объём n-мерного шара

Найдём объём W_n n-мерного шара радиуса R. Если a_n – объём шара $B = \{x \in \mathbf{R}^n, |x| \leqslant 1\}$ единичного радиуса, то $W_n = a_n R^n$. Рассмотрим сечение шара B гиперплоскостью $x_n = t$. Если $t \in [-1, 1]$, то это сечение есть шар размерности $n-1$, радиус которого равен $\sqrt{1-t^2}$. Используя формулу (14), можно записать

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} a_{n-1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt = a_{n-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi \, d\varphi \, .$$

(При переходе к последнему равенству была сделана замена переменной
$t = \sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$) .

Постоянную a_n можно найти в явном виде. Воспользуемся тем, что при $m \geqslant 2$

$$I_m = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \, d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2}(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi = I_{m-2} +$$

$$+ \frac{1}{m-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d \cos^{m-1}\varphi = I_{m-2} - \frac{1}{m-1} I_m \, ,$$

т.е. имеет место рекуррентное соотношение

$$I_m = \frac{m-1}{m}\, I_{m-2} \, . \tag{15}$$

Постоянные I_1, I_2 легко находятся непосредственно: $I_1 = 2, I_2 = \frac{\pi}{2}$. Учитывая эти значения, из рекуррентной формулы (15) находим, что

$$I_{2k+1} = 2\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \qquad I_{2k} = \pi \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \, .$$

Теперь получаем

$$a_{2k+1} = a_{2k} 2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \cdots = a_1 \frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \, ,$$

$$a_{2k} = a_{2k-1}\pi\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \cdots = 2a_2\frac{(2\pi)^{k-1}}{(2k)!!}\,.$$

Окончательные формулы для объёма

$$W_{2k+1} = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!}R^{2k+1}, \quad W_{2k} = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!}R^{2k}\,.$$

В следующей главе будут установлены более общие варианты этих формул.

Упржнение 1. *Пусть*

$$\Delta(w_1,\dots,w_n) = \left\{x \in \mathbf{R}^n, \quad x = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k w_k, \quad 0 \leqslant \alpha_k, \quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1\right\}$$

– симплекс, натянутый на векторы $w_1,\dots,w_n$ *из* $\mathbf{R}^n$*. Доказать кубируемость симплекса* $\Delta(w_1,\dots,w_n)$ *и равенство*

$$V(\Delta(w_1,\dots,w_n)) = \frac{1}{n!}\,|\det(w_1,\dots,w_n)|\,.$$

Упражнение 2. *Пусть*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2} & , \quad \text{если} \quad 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2} & , \quad \text{если} \quad 0 < y < x < 1, \\ 0 & \quad \text{в остальных точках квадрата } \square_2\,. \end{cases}$$

Доказать различие повторных интегралов

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy, \qquad \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx.$$

Упражнение 3. *Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле*

$$\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{2\sin x} f(x,y)\,dy\,.$$

2.4 Аддитивные функции и интегралы

2.4.1 Плотность аддитивной функции

Пусть $\mathscr{E}$ – кубируемая фигура в $\mathbf{R}^n$, $\sum(\mathscr{E})$ – совокупность кубируемых подмножеств фигуры $\mathscr{E}$. Функцию $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ называют аддитивной, если для любых двух почти непересекающихся множеств E_1, E_2 из $\sum(\mathscr{E})$ верно равенство

$$\mu(E_1 \cup E_2) \;=\; \mu(E_1) + \mu(E_2)\,. \tag{1}$$

Если $E \in \sum(\mathscr{E})$ и $V(E) = 0$, то из (1) вытекает соотношение $\mu(E) = 2\mu(E)$, поэтому $\mu(E) = 0$.

Аддитивные функции возникают во многих приложениях: например, масса вещества, количество электрического заряда являются аддитивными функциями. Если $f \in \mathscr{R}(\mathscr{E})$, то функция

$$\mu(E) \;=\; \int\limits_E f(x)\,dx \tag{2}$$

аддитивна на множестве $\sum(\mathscr{E})$.

Если $V(E) > 0$, то частное $\dfrac{\mu(E)}{V(E)}$ называют средним значением функции μ на множестве E класса $\sum(\mathscr{E})$. Будем говорить, что последовательность множеств $E_i (i = 1, 2, \dots)$ стягивается к точке a, если $a \in E_i$ и любой шар $B(a, R)$,
$(R > 0)$ содержит множества E_i при $i > i_0(R)$. Будем записывать это следующим образом: $E_i \to a$.

Если последовательность средних $\dfrac{\mu(E_i)}{V(E_i)}$ имеет предел, не зависящий от выбора последовательности E_i, обладающей свойствами $E_i \to a, V(E_i) > 0$, то этот предел $\rho(a)$ называется *плотностью* аддитивной функции μ в точке a. Используется обозначение $\rho(a) = \dfrac{d\mu}{dV}(a)$.

Пусть, например, аддитивная функция μ определена равенством (2). Если функция $f\colon \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, то функция μ имеет плотность в точке a и $\rho(a) = \dfrac{d\mu}{dV}(a) = f(a)$. Действительно,

$$\inf_{x \in E_i} f(x) \;\leqslant\; \frac{\mu(E_i)}{V(E_i)} \;\leqslant\; \sup_{x \in E_i} f(x)\,.$$

Поскольку $E_i \to a$ и функция f непрерывна в точке a, то последовательности $\inf\limits_{E_i} f$ и $\sup\limits_{E_i} f$ стремятся к $f(a)$ при $i \to \infty$. Отсюда и следует требуемое. Отметим неравенство

$$|\mu(E)| \;\leqslant\; MV(E), \tag{3}$$

в котором $M = \sup\{|f(x)|, x \in \mathscr{E}\}$.

В общем случае аддитивную функцию $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ назовём *ограниченной*, если найдётся такая константа M, что для любого множества E из $\sum(\mathscr{E})$ верно неравенство (3). В достаточно общих предположениях ограниченная аддитивная функция μ сводится к интегралу от своей плотности $\rho = \dfrac{d\mu}{dV}$.

2.4.2 Леммы об аддитивных функциях

Лемма 1. *Если аддитивные функции μ_1, μ_2 имеют в точке a плотности $\rho_1(a)$ и $\rho_2(a)$, то при любых действительных α_1 и α_2 функция $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ имеет в точке a плотность $\alpha_1\rho_1(a) + \alpha_2\rho_2(a)$.*

◀ Достаточно в равенстве

$$\frac{\mu(E_i)}{V(E_i)} = \alpha_1 \frac{\mu_1(E_i)}{V(E_i)} + \alpha_2 \frac{\mu_2(E_i)}{V(E_i)}$$

$(E_i \to a, V(E_i) > 0)$ перейти к пределу при $i \to \infty$.▶

Лемма 2. *Пусть* $\{E_1, \dots, E_p\}$ *– разбиение множества* E *и* $V(E_i) > 0$ $(i = 1, \dots, p)$. *Тогда*

$$\frac{\mu(E)}{V(E)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{V(E_i)}{V(E)} \frac{\mu(E_i)}{V(E_i)}. \tag{4}$$

В частности, если $\dfrac{\mu(E_i)}{V(E_i)} < \gamma$ *для всех* i, *то* $\dfrac{\mu(E)}{V(E)} < \gamma$.

◀ Равенство (4) эквивалентно очевидному равенству $\mu(E) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_p)$, вытекающему из аддитивности функции $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$. Второе утверждение леммы следует из (4). ▶

Лемма 3. *Пусть плотность* ρ *аддитивной функции* $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ *тождественно равна 0. Тогда* $\mu(E) = 0$ *для каждого кубируемого компакта* $E \subset \mathscr{E}$.

◀ В предположении противного найдётся кубируемый компакт $E \subset \mathscr{E}$, для которого $\mu(E) \neq 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\mu(E) > 0$. В целях наглядности пусть $n = 2$. Тогда $\gamma := \dfrac{\mu(E)}{V(E)} > 0$; множество E содержится в прямоугольнике $A = [a, b] \times [c, d]$. Разделим A на четыре замкнутых и равных прямоугольника A_1, A_2, A_3, A_4; нумерация принята так, что

$$V(E \cap A_j) > 0 \quad (j = 1, \dots, N), \quad V\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} A_j\right) = 0.$$

В силу леммы 2 среднее значение функции μ на одном из множеств $E \cap A_j$, $(j = 1, \dots, N)$ больше или равно γ. Обозначим выделенную часть через E_1.

Продолжим начатый процесс далее. В итоге получим последовательность кубируемых компактов $E_1, \dots, E_i, \dots$, вложенных один в другой: $E_{i+1} \subset E_i$. При этом $\dfrac{\mu(E_i)}{V(E_i)} \geqslant \gamma$, $diam E_i \to 0$. Последовательность вложенных компактов E_i стягивается к одной точке $a : E_i \to a$. Плотность функции μ в точке a больше или равна $\gamma > 0$. Это противоречит условиям леммы 3. ▶

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 функция* $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ *ограничена, то* $\mu(E) = 0 \, \forall E \in \sum(\mathscr{E})$.

◀ Пусть $E \in \sum(\mathscr{E})$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует система брусов A_i $(i = 1, \dots, N)$, обладающая свойствами

$$\mathscr{A} := \bigcup_{i=1}^{N} A_i \subset E, \quad V(A_i \cap A_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad v(E \setminus \mathscr{A}) < \varepsilon.$$

В силу ограниченности аддитивной функции μ имеем

$$|\mu(E) - \mu(\mathscr{A})| = |\mu(E \setminus \mathscr{A})| \leqslant MV(E \setminus \mathscr{A}) < M\varepsilon.$$

Так как согласно лемме 3 $\mu(\mathscr{A}) = 0$, то $|\mu(E)| < M\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует равенство $\mu(E) = 0 \, \forall E \in \sum(\mathscr{E})$.▶

2.4.3 Вариант формулы Ньютона–Лейбница

Теорема 1. *Пусть аддитивная функция* $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ *в каждой точке* a *имеет плотность* $\rho(a)$ *и функция* $\rho\colon \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ *непрерывна. Тогда для любого компакта* E *класса* $\sum(\mathscr{E})$ *справедливо равенство*

$$\mu(E) = \int\limits_E \rho(x)\,dx\,. \tag{5}$$

◀ Рассмотрим новую аддитивную функцию

$$\nu(E) = \int\limits_E \rho(x)\,dx\,.$$

Эта функция аддитивна и её плотность в точке a равна $\rho(a)$. Разность $\mu(E)-\nu(E)$ есть снова аддитивная функция и её плотность равна 0. Согласно лемме 3 $\mu(E)-\nu(E)=0$ для каждого кубируемого компакта $E \subset \mathscr{E}$. ▶

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и аддитивная функция* $\mu\colon \sum(\mathscr{E}) \to \mathbb{R}$ *ограничена. Тогда равенство (5) справедливо для любого множества* E *из* $\sum(\mathscr{E})$.

◀ Теорема 2 доказывается так же, как и теорема 1. Нужно лишь вместо леммы 3 использовать лемму 4. ▶

Упомянем о приложениях кратных интегралов к геометрии масс. Если ρ – плотность массы, распределённой по фигуре $G \subset \mathbf{R}^3$, то вся масса

$$M = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Центром масс фигуры G с плотностью $\rho(x,y,z)$ называют точку C с координатами

$$x_C = \frac{1}{M}\iiint\limits_G x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad y_C = \frac{1}{M}\iiint\limits_G y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$z_c = \frac{1}{M}\iiint\limits_G z\rho(x,y,z)\,dz\,dy\,dz;$$

моментом инерции фигуры G *относительно прямой* $l \subset \mathbf{R}^3$ – величину

$$I_l := \iiint\limits_G d_l^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,,$$

где $d_l(x,y,z)$ – расстояние от точки $(x,y,z)^T$ до прямой l; *моментом инерции фигуры* G *относительно точки* $P(x_0,y_0,z_0)$ – число

$$I_P := \iiint\limits_G \left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Упражнение 1. *Доказать равенство*

$$I_P = I_C + M|PC|^2\,,$$

называемое рядом авторов формулой Лагранжа.

Упражнение 2. *Найти центр масс однородного* ($\rho \equiv 1$) *неконцентрического шарового слоя*

$$G := \{(x,y,z)^T \in \mathbf{R}^3, \quad 2rx \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\, 2r<R\}\,.$$

2.4.4 Объёмы и диффеоморфизмы

Напомним некоторые сведения о диффеоморфизмах (см. 1.4.4). Пусть $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ – открытые подмножества пространства $\mathbf{R}^n$. Биекцию $\psi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ называют диффеоморфизмом $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$, если ψ принадлежит $C^1(\mathscr{U}, \mathbf{R}^n)$, а обратное отображение $\psi^{-1}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ принадлежит $C^1(\mathscr{V}, \mathbf{R}^n)$. В этом случае компоненты $\psi_1, \ldots, \psi_n$ отображения ψ непрерывно дифференцируемы в области $\mathscr{U}$, а якобиан отображения ψ

$$\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}(x) \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}$$

есть непрерывная скалярная функция, всюду в области $\mathscr{U}$ отличная от нуля. Диффеоморфизм ψ обладает свойством открытости: если Ω – открытое множество и Ω принадлежит $\mathscr{U}$, то его образ $\psi(\Omega)$ также есть открытое множество в $\mathbf{R}^n$; при этом $\partial\psi(\Omega) = \psi(\partial\Omega)$.

Если $\mathscr{E}$ – компактное подмножество $\mathscr{U}$, то образ $\psi(\mathscr{E})$ – компактное подмножество $\mathscr{V}$. Сужение диффеоморфизма ψ на множество $\mathscr{E}$ липшицево (см. п. 1.5). В частности, существует такая постоянная L, что для всех u, w из $\mathscr{U}$ верно неравенство

$$\|\psi(u) - \psi(w)\| \;\leqslant L\;\|u-w\|\,. \tag{6}$$

Пусть $\mathscr{E}$ компактное кубируемое подмножество $\mathscr{U}$; $\sum(\mathscr{E})$ – совокупность кубируемых подмножеств $\mathscr{E}$.

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения:* 1° *образ* $\psi(E)$ *каждого кубируемого множества* $E \subset \mathscr{E}$ *есть кубируемое множество;* 2° *функция* $\mu(E){:=}v(\psi(E))$ *аддитивна и ограничена;* 3° *в каждой точке* a *из* $\mathscr{E}$ *функция* μ *имеет плотность и*

$$\frac{d\mu}{dV}(a) \;=\; \left|\frac{D(\psi_1,\ldots,\psi_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\,(a)\right|\,. \tag{7}$$

◀ Если $M \subset \mathscr{E}$, то в силу леммы 7.1 верна оценка

$$V^*(\psi(M)) \;\leqslant L^n V^*(M)\,. \tag{8}$$

Применим неравенство (8) к случаю, когда M совпадает с границей ∂E кубируемого множества $E \subset \mathscr{E}$. В этом случае $V(\partial E) = 0$, поэтому $V^*(\psi(\partial E)) = 0$, а поскольку $\partial(\psi(E)) \subset \psi(\partial E)$, то справедливо равенство $V^*(\partial(\psi(E)) = 0$, означающее кубируемость множества $\psi(E)$. Аддитивность функции $\mu(E) = V(\psi(E))$ следует из аддитивности объёма, ограниченность функции $\mu(E)$ вытекает из оценки (8).

Докажем теперь равенство (7). Вначале рассмотрим случай, когда $\psi'(a)$ есть оператор тождественного преобразования: $\psi'(a) = I$. Применим вариант леммы 1.5.3, относящийся к случаю кубической нормы в $\mathbf{R}^n$. Согласно результатам 1.5 для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое положительное число δ, что сужение отображения ψ на куб $\square(a, \delta)$ принадлежит $I(\delta)$. Это означает следующее: $\psi(x) = x - h(x) \quad (x \in \square(a, \delta))$, где отображение $h\colon \square(a, \delta) \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет оценке

$$\|h(u) - h(v)\| \ \leqslant\ \varepsilon\|u - v\| \quad (u, v \in \square(a, \delta))\,. \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что отображение ψ на кубе $\square(a, \delta)$ удовлетворяет двустороннему условию Липшица

$$(1-\varepsilon)\|u - v\| \ \leqslant\ \|\psi(u) - \psi(v)\| \ \leqslant\ (1+\varepsilon)\|u - v\|\,. \tag{10}$$

Если $E \subset \square(a, \delta)$, то из (10) следуют неравенства

$$V(\psi(E)) \leqslant (1+\varepsilon)^n V(E), \qquad V(E) = V(\psi^{-1}(\psi(E))) \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon)^n} V(\psi(E))\,,$$

и, таким образом,

$$(1-\varepsilon)^n V(E) \ \leqslant\ V(\psi(E)) \ \leqslant\ (1+\varepsilon)^n V(E)\,.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, приходим к равенству

$$\frac{d\mu}{dV}(a) = 1 = \det \psi'(a)\,.$$

Это и доказывает третье утверждение в случае $\psi'(a) = I$.

Пусть теперь $\Lambda = \psi'(a) \in GL(\mathbf{R}^n)$. Тогда доказанную часть леммы можно применить к отображению $\varphi = \Lambda^{-1}\psi$. Если последовательность кубируемых множеств E_i обладает свойствами: $E_i \to a, V(E_i) > 0$, то

$$\lim_{i\to\infty} \frac{V(\varphi(E_i))}{V(E_i)} = 1\,.$$

Но $V(\varphi(E_i)) = V(\Lambda^{-1}(\psi(E_i))) = |\det \Lambda^{-1}| V(\psi(E_i)) = \dfrac{V(\psi(E_i))}{|\det \Lambda|}$, следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{V(\psi(E_i))}{V(E_i)} = |\det \Lambda| = |\det f'(a)|\,.$$

Лемма 5 полностью доказана.▶

Равенство (7) позволяет интерпретировать модуль якобиана отображения ψ в точке как коэффициент локального искажения объёма. Из теоремы 2 и леммы 5 вытекает

Теорема 3. *Пусть $\psi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ – диффеоморфизм открытого множества $\mathscr{U} \subset \mathbf{R}^n$ на открытое множество $\mathscr{V} \subset \mathbf{R}^n$, E – кубируемое множество и $\overline{E} \subset \mathscr{U}$. Тогда $\psi(E)$ – кубируемое подмножество $\mathscr{V}$ и*

$$V(\psi(E)) = \int\limits_E |\det \psi'(x)|\, dx\,. \tag{11}$$

Преобразование $y = \psi(x)$ в координатной форме записывается следующим образом

$$y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{12}$$

С помощью преобразования (12) мы переходим от координат $y_1, \ldots, y_n$ к координатам $x_1, \ldots, x_n$. Величину

$$|\det \psi'(x)|\, dx = \left|\frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right| d\,x_1 \ldots dx_n$$

называют *элементом объёма* в системе координат $x_1, \ldots, x_n$.

2.5 Замена переменных в кратных интегралах

2.5.1 Формулировка правила замены переменных

В одномерном анализе метод замены переменных в интеграле Римана играл важную роль. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы установить формулу замены переменных для кратных интегралов.

Пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ – открытые множества в $\mathbf{R}^n$, $\psi\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ – диффеоморфизм $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$. В этом случае якобиан отображения ψ отличен от нуля в области $\mathscr{U}$:

$$\det \psi'(x) = \frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}(x) \neq 0\,.$$

Справедливо следующее утверждение (правило замены переменных в кратном интеграле).

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{D}$ – кубируемое и компактное подмножество $\mathscr{V}$. Пусть функция $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ интегрируема (в смысле Римана) по множеству $\mathscr{D}$ ($f \in \mathscr{R}(\mathscr{D})$). Тогда функция $f[\psi(x)]|\det \psi'(x)|$ интегрируема по множеству $E = \psi^{-1}(\mathscr{D})$ и имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathscr{D}} f(y)\, dy \;=\; \int\limits_E f[\psi(x)]|\det \psi'(x)|\, dx\,. \tag{1}$$

Доказательство теоремы 1 приводится в следующем пункте. Сейчас же отметим, что множество E кубируемо и компктно (как образ $\mathscr{D}$ при диффеоморфизме $\psi^{-1}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{U}$). Если $\mathscr{D}_0$ – множество точек разрыва функции $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, то оно имеет нулевую меру. Отсюда следует, что и множество $E_0 = \psi^{-1}(\mathscr{D}_0)$ точек разрыва функции $f \circ \psi$ также имеет нулевую меру, поэтому функция $f[\psi(x)]$, а вместе с ней и функция $f[\psi(x)]|\det \psi'(x)|$ интегрируемы (в смысле Римана) по множеству E.

2.5.2 Доказательство правила замены переменных

Пусть $\tau = \{\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_N\}$ – разбиение кубируемого множества $\mathscr{D}$, так что $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_N$ – кубируемые множества и

$$\bigcup_{i=1}^{N} \mathscr{D}_i = \mathscr{D}, \qquad V(\mathscr{D}_i \cap \mathscr{D}_j) = 0 \quad \text{при} \;\; i \neq j\,.$$

Положим

$$m_i = \inf_{y \in \mathscr{D}_i} f(y), \quad M_i = \sup_{y \in \mathscr{D}_i} f(y), \quad E_i = \psi^{-1}(\mathscr{D}_i) \quad (i = 1, \ldots, N)\,.$$

Тогда множества $E_1, \ldots, E_N$ образуют разбиение множества E. Если $x \in E_i$, то $\psi(x) \in \mathscr{D}_i$, поэтому

$$m_i \;\leqslant\; f[\psi(x)] \;\leqslant\; M_i\,.$$

Умножая данное неравенство на положительную функцию $|\det \psi'(x)|$ и интегрируя по множеству E_i, приходим к неравенствам

$$m_i \int\limits_{E_i} |\det \psi'(x)|\, dx \leqslant \int\limits_{E_i} f[\psi(x)] |\det \psi'(x)|\, dx \leqslant M_i \int\limits_{E_i} |\det \psi'(x)|\, dx\,.$$

В силу формулы (9) п. 2.4.4

$$\int\limits_{E_i} |\det \psi'(x)|\, dx = V(\psi(E_i)) = V(\mathscr{D}_i),$$

следовательно,

$$m_i V(\mathscr{D}_i) \;\leqslant\; \int\limits_{E_i} f[\psi(x)] |\det \psi'(x)|\, dx \;\leqslant\; M_i V(\mathscr{D}_i)\,.$$

Суммируя данные неравенства по всем i от 1 до N, приходим к оценкам

$$\underline{S}_\tau(f) \;\leqslant\; \int\limits_{E} f[\psi(x)] |\det \psi'(x)|\, dx \;\leqslant\; \overline{S}_\tau(f)\,, \tag{2}$$

в которых $\underline{S}_\tau(f)$ и $\overline{S}_\tau(f)$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу функции f, соответствующие разбиению $\tau = \{\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_N\}$. Поскольку функция f интегрируема по множеству $\mathscr{D}$, то число, расположенное между каждыми верхней и нижней суммами Дарбу, единственно и совпадает с интегралом от функции f по множеству $\mathscr{D}$. Это замечание вместе с (2) влечёт за собой равенство (1). ▶

Равенству (1) можно придать следующий вид

$$\int\limits_{\psi(E)} f(y)\, dy \;=\; \int\limits_{E} f[\psi(x)] |\det \psi'(x)|\, dx\,. \tag{3}$$

Этот вариант формулы замены переменных более предпочтителен, чем исходный. Например, он открывает возможности для обобщения формулы (3) на случай, когда функция f, множество E и отображение ψ удовлетворяют менее жёстким, чем в теореме 1, ограничениям. Не претендуя на подробное обсуждение возникающих здесь вопросов (см., например, [1], [3]– [10], [14] – [20]), ограничимся далее рассмотрением некоторых частных случаев.

2.5.3 Замена переменных в двойных интегралах

Замену переменных в кратных интегралах используют как для упрощения подынтегральной функции, так и для упрощения вида области интегрирования. Например, если функция f двух переменных x, y зависит от $\sqrt{x^2+y^2}$, а область интегрирования $\mathscr{D}$ просто задаётся в полярных координатах r, φ, то переход от декартовых координат точки к полярным представляется оправданным. Напомним, связь между декартовыми и полярными координатами точки задаётся равенствами

$$x \;=\; r\cos\varphi, \quad y \;=\; r\sin\varphi\,.$$

Якобиан перехода

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} \;=\; \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

отличен от нуля в любой области, не содержащей начало координат. Формула замены переменных в рассматриваемом случае имеет вид

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint\limits_{E} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi\,. \tag{4}$$

С помощью предельного перехода формулу (4) легко распространить на область $\mathscr{D}$, содержащую начало координат.

В качестве примера вычислим интеграл

$$J_1 = \iint\limits_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy$$

по фигуре $\mathscr{D}$, определяемой соотношениями

$$\mathscr{D} \;=\; \{(x,y)^T \in \mathbf{R}^2,\ 2x \;\leqslant x^2+y^2 \;\leqslant\; 6x,\ -\sqrt{3}x \;\leqslant\; y \leqslant x\}\,.$$

Фигура $\mathscr{D}$ не является выпуклой относительно координатных осей; переход к повторному интегралу требует разбиения $\mathscr{D}$ на несколько выпуклых относительно осей координат частей. Введение полярных координат упрощает вид области, а именно

$$E \;=\; \{(r,\varphi),\ -\frac{\pi}{3} \;\leqslant\; \frac{\pi}{4}, \qquad 2\cos\varphi \;\leqslant\; r \;\leqslant\; 6\cos\varphi\}\,.$$

Используя формулу (4), получаем

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} x\,dx\,dy = \int\limits_{E} r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} r^2\,dr =$$

$$= \frac{208}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{52}{3} + \frac{91}{6}(\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Для вычисления ряда двойных интегралов удобен несколько иной вид обобщенных полярных координат

$$x = ar\cos^\alpha \varphi, \qquad y = br\sin^\alpha \varphi\,.$$

Нетрудно убедиться, что для этих координат якобиан переход

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \alpha ab \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi\,.$$

Остановимся ещё на одном подходе к выбору системы криволинейных координат, который оказывается полезным при вычислении площади криволинейного четырёхугольника. Поясним этот приём на примере. Пусть требуется найти площадь $S(\mathscr{D})$ фигуры $\mathscr{D}$, ограниченной кривыми

$$y^2 = px, \quad y^2 = qx, \quad x^2 = ay, \quad x^2 = by,$$

где $0 < p < q$ и $0 < a < b$. Введём переменные u, v так, что

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \frac{x^2}{y} \quad (p \leqslant u \leqslant q,\ a \leqslant v \leqslant b)\,.$$

Легко проверяются равенства

$$x = \sqrt[3]{uv^2}, \quad y = \sqrt[3]{u^2 v}, \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3}.$$

Отсюда получаем

$$S(\mathscr{D}) = \iint\limits_{\mathscr{D}} 1\, dx\, dy = \int\limits_a^b dv \int\limits_p^q \left| -\frac{1}{3} \right| du = \frac{(q-p)(b-a)}{3}\,.$$

2.5.4 Цилиндрические и сферические координаты

Обсудим переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим координатам. Для цилиндрических координат в $\mathbf{R}^3$ искомая связь имеет вид

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z\,;$$

якобиан перехода

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,.$$

Элемент объёма в цилиндрических координатах равен $r\,dr\,d\varphi\,dz$.

Для сферических координат (в трёхмерном пространстве)

$$x = r\cos\varphi\sin\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\theta\,,$$

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

якобиан имеет вид

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ r\cos\varphi\cos\theta & r\sin\varphi\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta\,.$$

Элемент объёма в сферических координатах равен $r^2\sin\theta$.

В качестве примера найдём объём $v(\mathscr{D})$ фигуры $\mathscr{D}$, ограниченной поверхностью

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z \qquad (a>0)\,. \tag{5}$$

Определяемая равенством (5) фигура $\mathscr{D}$ симметрична относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz и расположена вверх от плоскости Oxy. Поэтому достаточно вычислить объём четверти фигуры, лежащей в первом октанте. Переходя к сферическим координатам, приведём уравнение (5) к виду $r = a\sqrt[3]{\cos\theta}$. Так как первый октант характеризуется неравенствами

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то искомый объём равен

$$V(\mathscr{D}) = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta\,dr = \frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{\pi a^3}{3}\,.$$

В n-мерном пространстве сферические координаты определяются равенствами

$$x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\,,$$

$$x_m = r\cos\theta_{m-1}\prod_{k=m}^{n-1}\sin\theta_k \quad \text{при} \quad m = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$x_n = r\cos\theta_{n-1}\,,$$

в которых сферический радиус r и сферические углы $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}$ изменяются в пределах $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi, 0 \leqslant \theta_m \leqslant \pi$ при $m = 2,3,\ldots,n-1$.

Эти формулы определяют однозначные функции

$$r = r(x),\ \theta_1 = \theta_1(x),\ldots,\ \theta_{n-1} = \theta_{n-1}(x),$$

если потребовать выполнения условий: $0 < r < \infty, 0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_m < \pi$ при $m = 2,3,\ldots,n-1$. Подсчёты показывают, что

$$\frac{D(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{D(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}} = r^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k\,.$$

2.5.5 Формула Каталана

Представляют интерес способы сведения кратных интегралов к одномерным. В этом пункте устанавливаются некоторые результаты в данном направлении.

Пусть E – кубируемое подмножество $\mathbf{R}^n$, функция $g\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

1) $a \leqslant g(x) \leqslant b$ для всех x из E;

2) при любых α, β из отрезка $[a, b] \quad (\alpha \leqslant \beta)$ множество

$$E(\alpha, \beta) := \{x \in E,\ \alpha \leqslant g(x) \leqslant \beta\}$$

кубируемо;

3) существует такая интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция $\varphi(t)$, что

$$V(E(\alpha, \beta)) \ = \ \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, dt \tag{6}$$

для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b] \quad (\alpha \leqslant \beta)$.

Теорема 2. *Пусть функция $g\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1)-3), а функция $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по отрезку $[a, b]$. Тогда функция $f = h \circ g$ интегрируема (в смысле Римана) по множеству E и справедлива формула Каталана* [8]

$$\int\limits_{E} f(x)\, dx \ = \int\limits_{a \leqslant g(x) \leqslant b} h[g(x)]\, dx \ = \ \int\limits_{a}^{b} h(t)\varphi(t)\, dt\,. \tag{7}$$

◀ Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$ так, что

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b.$$

Положим $E_i = E(t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Множества $E_1, E_2, \ldots, E_N$ образуют разбиение τ множества E. Очевидно, что

$$m_i = \inf_{x \in E_i} f(x) = \inf_{t \in [\,t_{i-1}, t_i]} h(t), \quad M_i = \sup_{x \in E_i} f(x) = \sup_{t \in [\,t_{i-1}, t_i]} h(t)\,. \tag{8}$$

Так как в силу (6)

$$V(E_i) \ = \ \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\, dt\,,$$

то нижняя и верхняя суммы Дарбу $\underline{S}_\tau(f)$ и $\overline{S}_\tau(f)$ функции f находятся по формулам

$$\underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{N} m_i V(E_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\, dt\,,$$

[8] Каталан Эжен Шарль (*Catalan Euge′ne Charles*) (1814 – 1894) – бельгийский математик.

$$\overline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{N} M_i V(E_i) = \sum_{i=1}^{N} M_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\,dt\,.$$

Обозначим через ω_i колебание функции $h(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$:

$$\omega_i = \sup\{|h(t') - h(t'')|, \quad t', t'' \in [t_{i-1}, t_i]\} \quad (i = 1, 2, \ldots, N)\,,$$

положим $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Справедлива оценка

$$\left|\underline{S}_\tau(f) - \int\limits_a^b h(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |h(t) - m_i| \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| \quad \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta t_i \tag{9}$$

и аналогичная ей оценка для верхней суммы

$$\left|\overline{S}_\tau(f) - \int_a^b h(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \sup_{t\in[\,t_{i-1},t_i]} \varphi(t) \quad \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta t_i\,. \tag{10}$$

Поскольку функция h интегрируема по отрезку $[a, b]$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i \Delta t_i < \varepsilon\,. \tag{11}$$

Если разбиение T удовлетворяет соотношению (11), то из (9) – (11) вытекают неравенства

$$\left|\underline{S}_\tau(f) - \int\limits_a^b h(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \sup_{t\in[\,a,b]} |\varphi(t)|\,;$$

$$\left|\overline{S}_\tau(f) - \int\limits_a^b h(t)\varphi(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \sup_{t\in[\,a,b]} |\varphi(t)|\,.$$

Теперь формула (8) следует из определения интеграла Римана.▶

Следствие 1. *Пусть функция $\mu(t) = v(E(a, t))$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, а производная $\mu'(t)$ интегрируема по отрезку $[a, b]$. Тогда*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{a\leqslant g(x)\leqslant b} h[g(x)]\,dx = \int\limits_a^b h(t)\mu'(t)\,dt\,. \tag{12}$$

◀ Для доказательства достаточно положить в равенстве (7) $\varphi(t) = \mu'(t)$. ▶

Следствие 2. *Пусть функция $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана по отрезку $[a,b]$ $(0 \leqslant a \leqslant b < \infty)$. Тогда функция $f(x) = h(|x|)$ интегрируема по шаровому слою $E = \{x \in \mathbf{R}^n,\ a \leqslant |x| \leqslant b\}$ и*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{a\leqslant|x|\leqslant b} h(|x|)\,dx = na_n \int\limits_a^b h(t)t^{n-1}\,dt\,, \tag{13}$$

где a_n– объём шара $|x| \leqslant 1$.

◀ Достаточно воспользоваться формулой (12) в случае $g(x) = |x|$. ▶

Следствие 3. *Справедливы равенства*

$$\iint\limits_{x_1^2+x_2^2\leqslant b^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)}\,dx_1\,dx_2 \ = \ 2\pi \int\limits_0^b e^{-t^2}t\,dt = -\pi\, e^{-t^2}\Big|_0^b = \pi(1-e^{-b^2})\,, \tag{14}$$

$$\int\limits_{a\leqslant|x|\leqslant b} \frac{1}{|x|^p}\,dx = na_n \int\limits_a^b t^{n-1-p}\,dt\,. \tag{15}$$

В формуле (15) $0 < a < b < \infty, n$ – произвольное натуральное число.

Условия справедливости равенства (6) приведены в [18 – 20]; там же указаны способы нахождения функции φ в достаточно общих ситуациях.

2.6 Кратные несобственные интегралы

2.6.1 Определение кратного несобственного интеграла

Пусть $\mathscr{D}$ – непустое открытое подмножество пространства $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\mathscr{K}(\mathscr{D})$ совокупность компактных и кубируемых подмножеств множества $\mathscr{D}$. Последовательность E_i $(i = 1, 2, \dots)$ множеств класса $\mathscr{K}(\mathscr{D})$ назовём исчерпывающей множество $\mathscr{D}$, если $E_i \subset E_{i+1}$ и для любого множества E класса $\mathscr{K}(\mathscr{D})$ при достаточно больших i справедливо включение $E \subset E_i$; в этом случае будем писать $E_i \uparrow \mathscr{D}$.

Лемма 1. *Для любого открытого множества $\mathscr{D}$ существует исчерпываюшая его последовательность $E_i (i = 1, 2, \dots)$ множеств класса $\mathscr{K}(\mathscr{D})$.*

◀ Кубом ранга $k = 0, 1, 2, \dots$ назовём куб вида

$$\square := \left\{ x = (x_j) \quad , \frac{m_j}{10^k} \leqslant x_j \leqslant \frac{m_j+1}{10^k},\ j = 1, 2, \dots, n \right\}\,,$$

где m_j при $j = 1, 2, \dots, n$ пробегают независимо друг от друга множество всех целых чисел. Очевидно, что объединение конечного числа кубов ранга k есть кубируемое и компактное множество.

Определим множество E_i как объединение кубов ранга i, содержащихся в пересечении множества $\mathscr{D}$ с кубом $\|x\| \leqslant i$. Последовательность E_i является искомой. Действительно, каждое множество E_i кубируемо и компактно как объединение конечного числа кубов. Так как множество всех кубов ранга i образует покрытие всего пространства $\mathbf{R}^n$, то любой компакт E принадлежит множеству E_i при достаточно большом i. В самом деле, пусть число i настолько велико, что выполняются соотношения

$$\max_{x\in E}\|x\| \leqslant i-1, \qquad \frac{1}{10^i} < \min\{\|x-y\|,\ x\in E,\ y\notin \mathscr{D}\}.$$

Поэтому если $\square$ – куб ранга i и $x\in\square\cap E$, то весь куб $\square$ принадлежит множеству $\mathscr{D}$. Таким образом, $E\subset E_i$ при достаточно большом i. Включение $E_i\subset E_{i+1}$ очевидно. Следовательно, $E_i\uparrow\mathscr{D}$. ▶

Разумеется, построенная в процессе доказательства леммы 1 исчерпывающая $\mathscr{D}$ последовательность множеств E_i классса $\mathscr{K}(\mathscr{D})$ не является единственной. Следствием проведённых рассуждений является полезная для дальнейшего

Лемма 2. *Каждое непустое открытое множество $\mathscr{D}$ может быть представлено в виде объединения счётного числа замкнутых кубов, не имеющих попарно общих внутренних точек.*

Функцию $f\colon\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ назовём допустимой, если она интегрируема на каждом множестве E класса $\mathscr{K}(\mathscr{D})$. Например, каждая непрерывная на множестве $\mathscr{D}$ функция допустима. В силу критерия Лебега функция f допустима, если она почти всюду непрерывна и её сужение на каждый компакт, принадлежащий множеству $\mathscr{D}$, ограничено.

Допустимую функцию $f\colon\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ называют *интегрируемой в несобственном смысле* на открытом множестве $\mathscr{D}$, если для любой последовательности $E_i\uparrow\mathscr{D}$ существует предел

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{E_i} f(x)\,dx\,, \tag{1}$$

не зависящий от выбора последовательности $E_i\uparrow\mathscr{D}$. Этот предел называют *несобственным интегралом* от функции f по открытому множеству $\mathscr{D}$ и обозначают символом

$$\int\limits_{\mathscr{D}} f(x)\,dx \quad \text{или} \quad \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\mathscr{D}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n\,. \tag{2}$$

При этом несобственный интеграл (2) именуют *сходящимся.* Иногда символ (2) используют и в случае, когда предел (1) не существует. В этом случае интеграл (2) называют *расходящимся.*

Введённое в этом пункте понятие несобственного интеграла будет применяться только в случае $n\geqslant 2$. Для функций одного переменного сохраним прежнее определение несобственного интеграла. Это связано с тем, что в случае $n=1$ в качестве последовательности множеств, исчерпывающей конечный или бесконечный интервал $\mathscr{D}$, брались лишь отрезки.

2.6.2 Интегралы от неотрицательных функций

Теорема 1. *Пусть $f\colon\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ – неотрицательная допустимая функция. Тогда для любой последовательности E_i, исчерпывающей множество $\mathscr{D}$, предел (1), конечный или бесконечный, всегда существует и не зависит от выбора указанной последовательности.*

◀ Пусть E_i, E_i' – две последовательности, исчерпывающие множество $\mathscr{D}$. Тогда последовательности

$$c_i = \int\limits_{E_i} f(x)\,dx, \qquad c_i' = \int\limits_{E_i'} f(x)\,dx$$

возрастают и имеют конечные или бесконечные пределы c и c' соответственно. Поскольку $E_i \uparrow \mathscr{D}$, то для любого индекса k найдётся такой индекс $i(k)$, что $E_k' \subset E_i$ при $i \geqslant i(k)$. Отсюда вытекают неравенства

$$c_k' \leqslant c_i \quad (i \geqslant i(k)), \quad c_k' \leqslant c\,.$$

Ввиду произвольности k отсюда получаем неравенство $c' \leqslant c$. Меняя местами последовательности E_i, E_i', приходим к противоположному неравенству $c \leqslant c'$. Следовательно, $c = c'$. ▶

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть

$$\mathscr{D}:=\{x \in \mathbf{R}^n,\, 0 < |x-a| < R_0\},\ f(x) = \frac{1}{|x-a|^p} \quad (x \in \mathscr{D}).$$

Исчерпывающую множество $\mathscr{D}$ последовательность кубируемых множеств E_i можно определить равенством

$$E_i \;=\; \left\{x \in \mathbf{R}^n, \quad \frac{1}{i} \leqslant |x-a| \leqslant R_0 - \frac{1}{i}\right\} \qquad (i = 1, \ldots,)$$

Согласно формуле 2.5(15)

$$c_i = \int\limits_{E_i} \frac{1}{|x-a|^p}\,dx \;=\; na_n \int\limits_{\frac{1}{i}}^{R_0-\frac{1}{i}} t^{n-1-p}\,dt\,.$$

Последовательность c_i сходится в том и только в том случае, если $p < n$. Справедливы равенства

$$\int\limits_{0<|x-a|<R_0} \frac{dx}{(x-a|^p} \;=\; \frac{na_n}{n-p} R_0^{n-p} \quad (p < n), \tag{3}$$

$$\int\limits_{0<|x-a|<R_0} \frac{dx}{|x-a|^p} = \infty \quad (p \geqslant n)\,. \tag{4}$$

Пример 2. Пусть $\mathscr{D} = \{x \in \mathbf{R}^n,\, |x| > R_0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x|^p}$, $(x \in \mathscr{D})$. Исчерпывающую множество $\mathscr{D}$ последовательность E_i можно определить равенством

$$E_i:=\{x \in \mathbf{R}^n, R_0 + \frac{1}{i} \leqslant |x| < R_0 + i\}.$$

Повторяя рассуждения, проведённые при выводе формул (3), (4), получаем

$$\int\limits_{|x|>R_0} \frac{dx}{|x|^p} = \frac{n a_n}{p-n} R_0^{p-n} \qquad (p>n), \quad \int\limits_{|x|>R_0} \frac{dx}{|x|^p} = \infty \quad (p \leqslant n)\,.$$

Пример 3. Пусть $\mathscr{D} = \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

Определим две исчерпывающие плоскость $\mathscr{D}$ последовательности кубируемых компактов:

$$E_i{:=}\{(x,y)^T, x^2+y^2 \leqslant i^2\}, \quad E_i' := \{(x,y)^T,\, |x| \leqslant i, |y| \leqslant i\}\,.$$

В силу формулы 2.5(16)

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant i^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;=\; \pi\left(1 - e^{-i^2}\right),$$

поэтому

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \;=\; \pi\,.$$

С другой стороны,

$$\iint\limits_{E_i'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int\limits_{-i}^{i} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{-i}^{i} e^{-y^2}\, dy \;=\; \left(\int\limits_{-i}^{i} e^{-x^2}\, dx\right)^2 .$$

Из проведённых рассуждений вытекает равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\pi}\,; \tag{5}$$

левую часть (5) называют интегралом Пуассона [9]. Простая замена переменной в (5) приводит к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\, dx \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \qquad (\lambda > 0). \tag{6}$$

Упражнение 1. *Доказать многомерный вариант равенства (6)*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}\!\!\cdots\!\int e^{-\lambda_1 x_1^2 - \cdots - \lambda_n x_n^2}\, dx_1 \ldots dx_n \;=\; \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \ldots \lambda_n}} \quad (\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0). \tag{7}$$

Упражнение 2. *Опираясь на (7), установить равенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}\!\!\cdots\!\int e^{-(Ax,x)}\, dx_1 \ldots dx_n \;=\; \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,, \tag{8}$$

в котором A – положительно определённая симметричная матрица размеров $n \times n$.

[9] Пуассон Симеон Дени (*Poisson Sime′on Denis*) (1781 – 1840) – французский механик, физик, математик.

2.6.3 Признаки сравнения

Теорема 2. *Пусть f, $g\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ – допустимые функции и $|f(x)| \leqslant g(x)$ для всех x из $\mathscr{D}$. Тогда из сходимости интеграла*

$$\int\limits_{\mathscr{D}} g(x)\,dx$$

вытекает сходимость интегралов

$$\int\limits_{\mathscr{D}} |f(x)|\,dx, \qquad \int\limits_{\mathscr{D}} f(x)\,dx\,. \tag{9}$$

◀ Пусть E_i – последовательность кубируемых компактов, исчерпывающая множество $\mathscr{D}$ ($E_i \uparrow \mathscr{D}$). Положим

$$b_i \;=\; \int\limits_{E_i} g(x)\,dx, \qquad c_i \;=\; \int\limits_{E_i} |f(x)|\,dx\,.$$

Из очевидного неравенства $0 \leqslant c_i \leqslant b_i$ следует ограниченность, а значит, и сходимость возрастающей последовательности c_i. Отсюда и из теоремы 1 вытекает сходимость левого из интегралов (9).

Если

$$f_1(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

то

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant |f(x)|,\; 0 \leqslant f_2(x) \leqslant |f(x)|,$$

поэтому последовательности

$$\alpha_i = \int\limits_{E_i} f_1(x)\,dx, \qquad \beta_i = \int\limits_{E_i} f_2(x)\,dx$$

ограничены. Поскольку E_i – возрастающая последовательность, то и последовательности α_i, β_i также возрастают, а следовательно, сходятся к числам

$$\int\limits_{\mathscr{D}} f_1(x)\,dx, \qquad \int\limits_{\mathscr{D}} f_2(x)\,dx\,.$$

Отсюда вытекают равенства

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f(x)\,dx = \lim_{i\to\infty} \alpha_i - \lim_{i\to\infty} \beta_i = \int\limits_{\mathscr{D}} f_1(x)\,dx - \int\limits_{\mathscr{D}} f_2(x)\,dx\,.$$

Предел в правой части не зависит от выбора последовательности $E_i \uparrow \mathscr{D}$. Это и приводит к требуемому результату.▶

Чаще всего в качестве эталонной функции сравнения используется функция $g(x) = |x - a|^{-p}$. Приведём два следствия теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть* $\mathscr{D}:=\{x \in \mathbf{R}^n, 0 < |x - a| < R\}, f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *– допустимая функция. Если*

$$|f(x)| \leqslant \frac{L}{|x-a|^p} \quad (x \in \mathscr{D}, L < \infty, p < n),$$

то интеграл (2) сходится.

Следствие 2. *Пусть* $\mathscr{D}:=\{x \in \mathbf{R}^n, |x| > R\}, f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *– допустимая функция. Если*

$$|f(x)| \leqslant \frac{L}{|x|^p} \quad (x \in \mathscr{D}, L < \infty, p > n),$$

то интеграл (2) сходится.

2.6.4 Замена переменной в несобственном интеграле

Теорема 3. *Пусть* $x = \psi(u)$ *– диффеоморфизм открытого множества* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *на открытое множество* $\mathscr{D} \subset \mathbf{R}^n$*. Тогда для любой допустимой функции* $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *имеет место равенство*

$$\int\limits_{\mathscr{D}} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{\Omega} f[\psi(u)]|\det\psi'(u)|\,du\,, \tag{10}$$

причём интегралы в левой и правой частях равенства (10) сходятся или расходятся одновременно.

◀ Если последовательность E_i исчерпывает множество Ω, то последовательность $E_i' = \psi(E_i)$ исчерпывает множество $\mathscr{D}$; верно и обратное. В силу правила замены переменных в интеграле Римана верно равенство

$$\int\limits_{E_i'} f(x)\,dx = \int\limits_{E_i} f[\psi(u)]|\det\psi'(u)|\,du\,. \tag{11}$$

Поэтому сходимость одного из интегралов в равенстве (10) влечёт сходимость и второго интеграла. Переходя в (11) к пределу, получаем равенство (10).▶

В ряде случаев рамки изложенной в этом параграфе теории несобственных интегралов становятся слишком узкими. Упомянем о возможных обобщениях: главные значения несобственных интегралов, интегралы Лебега, Стилтьеса[10] и т.п.

Упражнение 3. *Пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *– положительные числа,*

$$\mathscr{E} = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leqslant 1\} \;-$$

n-мерный эллипсоид. Доказать, что его объём

$$V(\mathscr{E}) = \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_1 \ldots \lambda_n}}\,,$$

[10]Стилтьес Томас Иоаннес (*Stielties ThomasJoannes*) (1856 – 1894) – нидерландский математик.

где a_n – объём единичного шара $|x| \leqslant 1$.

Упражнение 4. *Пусть $A = (a_{ij})$ – симметричная положительно определенная матрица размеров $n \times n$. Доказать, что объём V эллипсоида, определяемого соотношением*

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \leqslant 1\,,$$

вычисляется по формуле

$$V = \frac{a_n}{\sqrt{\det A}}\,.$$

Упражнение 5. *Найти объём n-мерного цилиндра*

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant R^2, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant H\,.$$

Упражнение 6. *Найти объём n-мерного конуса*

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leqslant a^2 x_n^2, \quad 0 \leqslant x_n \leqslant H\,.$$

Упражнение 7. *Найти объём тел, ограниченных поверхностями (можно воспользоваться цилиндрическими координатами)*

1)$(x^2+y^2)^2 = 2xy,\ z = x+y,\ z = 0, (x > 0)\,.$

2)$x^2+y^2 = 1, z = e^{-(x^2+y^2)}, z = 0\,.$

3)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}, \quad c > 0\,.$

Упражнение 8. *Найти координаты центра масс плоской однородной $(\rho = 1)$ фигуры:*

1)$\dfrac{y^2}{a} \leqslant x \leqslant 2a - y, \quad a > 0.$

2)$x^2+y^2 \leqslant a^2, \quad |y| \leqslant x tg\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\,.$

Упражнение 9. *Найти момент инерции шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ с плотностью $\rho = \rho_0(x^2+y^2+z^2)$ относительно его центра.*

Упражнение 10. *Пусть начало координат O совпадает с центром масс тела G, ось l проходит через точку O и составляет с осями координат углы α, β и γ. Доказать, что момент инерции I_l тела G относительно оси l равен*

$$I_l = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma -$$

$$-2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha\,,$$

где I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно,

$$I_{xy} = \iiint\limits_G xy\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz\,,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_G yz\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz\,,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_G zx\rho(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

– *центробежные моменты инерции тела.*

Глава 3

Интегралы, зависящие от параметра

3.1 Собственные интегралы с параметром

3.1.1 Непрерывность и интегрируемость по параметру

Пусть $f(x,t)$ – функция, определённая и непрерывная на прямоугольнике

$$A = [a,b] \times [c,d].$$

При каждом t из отрезка $[c,d]$ функция $x \to f(x,t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, в частности, $f(\cdot,t) \in \mathscr{R}\,[a,b]$. Поэтому на отрезке $[c,d]$ определена функция

$$I(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx\,,$$

называемая *интегралом, зависящим от параметра* t.

Теорема 1. *Если функция* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* A*, то и функция* $I\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ *также непрерывна на* $[c,d]$.

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Непрерывная на прямоугольнике A функция f равномерно непрерывна на A. Следовательно, найдётся такое $\delta > 0$, что из соотношений

$$|x' - x''| + |t' - t''| < \delta$$

вытекает неравенство

$$|f(x',t') - f(x'',t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

В частности, если $|t' - t''| < \delta$, то $|f(x,t') - f(x,t'')| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ для всех x из $[a,b]$. Справедливы оценки

$$|I(t') - I(t'')| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,t') - f(x,t'')|\,dx < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon,$$

влекущие за собой непрерывность функции $I(t)$ на отрезке $[c,d]$.▶

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 функция $I(t)$ интегрируема (в смысле Римана) по отрезку $[c,d]$ и*

$$\int\limits_c^d I(t)\,dt \;=\; \iint\limits_A f(x,t)\,dx\,dt\,. \tag{1}$$

◀ Интегрируемость функции $I(t)$ по отрезку $[c,d]$ вытекает из её непрерывности на этом отрезке. Равенство (1) следует из теоремы Фубини (для непрерывной на прямоугольнике A функции f двойной и повторный интегралы совпадают).▶

Требование непрерывности функции f по совокупности переменных можно ослабить. Например, в теореме 1 достаточно потребовать, чтобы при любом t из $[c,d]$ функция $f(\cdot,t)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ была интегрируемой по $[a,b]$, а функция $f(x,\cdot)\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ – непрерывной по t равномерно относительно x из $[a,b]$. Многомерные версии теорем 1, 2 обсуждаются в п. 3.1.5.

3.1.2 Дифференцируемость по параметру

Усиливая предположения относительно функции $f\colon A \to \mathbb{R}$, можно гарантировать дифференцируемость функции $I(t)$ на отрезке $[c,d]$.

Теорема 3. (Правило Лейбница). *Пусть функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ и её частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ определены и непрерывны на прямоугольнике $A = [a,b]\times[c,d]$. Тогда функция $I(t)$ дифференцируема по параметру t и*

$$\frac{dI}{dt}(t) \;=\; \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx\,. \tag{2}$$

◀ При любом x из $[a,b]$ функция $t \to f(x,t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c,d]$. Если t_0, $t_0+\Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ – числа, принадлежащие отрезку $[c,d]$, то

$$f(x,t_0+\Delta t) - f(x,t_0) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial f}{\partial t} f(x,t)\,dt = \Delta t \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0+s\Delta t)\,ds\,.$$

Интегрируя это равенство по отрезку $[a,b]$, приходим к соотношению

$$I(t_0+\Delta t) - I(t_0) \;=\; \Delta t \int\limits_a^b \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0+s\Delta t)\,ds \right) dx\,.$$

Разделив это соотношение на Δt, получаем

$$\frac{I(t_0+\Delta t) - I(t_0)}{\Delta t} \;=\; \iint\limits_{[a,b]\times[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0+s\Delta t)\,ds\,dx\,. \tag{3}$$

При $\Delta t \to 0$ подынтегральное выражение в (3) равномерно на $[a, b] \times [0, 1]$ стремится к $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$. Более подробно, это означает следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что если $|\Delta t| < \delta$, то

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0 + s\Delta t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| \; < \; \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]\,, s \in [0, 1].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t_0 + \Delta) - I(t_0)}{\Delta t} \; = \iint\limits_{[a,b]\times[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, dx\, dt \; = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, dx\,,$$

что и приводит к (2).►

Применим правило Лейбница к вычислению производной по параметру t интеграла

$$I(t) \; = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t^2 - \sin^2 x)\, dx \qquad (t > 1).$$

Легко проверить, что условия теоремы 3 выполнены на любом отрезке $[c, d]$, $(1 < c < d < \infty)$. Имеем

$$I'(t) \; = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t}{t^2 - \sin^2 x}\, dx \; = \; \frac{\pi}{\sqrt{t^2 - 1}} \qquad \text{(проверить самостоятельно)}.$$

Зная производную функции $I(t)$, с помощью интегрирования получаем

$$I(t) \; = \; \pi \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \; + \; C_1\,.$$

Для нахождения постоянной C_1 представим функцию $I(t)$ в виде

$$I(t) \; = \; \pi \ln t + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2} \right)\, dx\,.$$

Приравнивая два последних выражения для $I(t)$, приходим к соотношению

$$C_1 \; = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(1 - \frac{\sin^2 x}{t^2} \right)\, dx - \pi \ln \frac{t + \sqrt{1 + t^2}}{t}\,,$$

верному при любом $t > 1$. Устремляя t к ∞, имеем $C_1 = -\pi \ln 2$. Следовательно,

$$I(t) = \pi \ln(t + \sqrt{1+t^2}) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{t + \sqrt{t^2+1}}{2}.$$

Итак, дифференцирование по правилу Лейбница позволило найти в явном виде функцию $I(t)$. Этот метод часто приводит к цели.

Упражнение 1. *Вычислить интеграл*

$$I(t) = \int\limits_0^\pi \ln(1 - 2t\cos x + t^2)\, dx \qquad (|t| < 1).$$

Если функция $f(x,t)$ в условиях теоремы 3 дважды непрерывно дифференцируема по t, то к равенству (2) можно применить правило Лейбница ещё раз. Сформулируем общий результат такого рода.

Следствие из правила Лейбница. *Пусть функция $f\colon A \to \mathbb{R}$ и её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \ldots, \dfrac{\partial^m f}{\partial t^m}$ до порядка m включительно определены и непрерывны на прямоугольнике $A = [a,b] \times [c,d]$. Тогда функция $I(t)$ m раз непрерывно дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и*

$$\frac{d^k I}{dt^k}(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t)\, dx \quad (k = 1, \ldots, m). \tag{4}$$

3.1.3 Интеграл по отрезку, зависящему от параметра

В этом пункте изучается интеграл

$$I(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\, dx, \tag{5}$$

в котором промежуток интегрирования $[a(t), b(t)]$ зависит от t. Обозначим через E криволинейную трапецию, определяемую соотношением

$$E := \left\{ (x,t)^T \in \mathbf{R}^2, \quad c \leqslant t \leqslant d, \quad a(t) \leqslant x \leqslant b(t) \right\}.$$

Будем считать, что функции $a(t), b(t)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$ и $a(t) \leqslant b(t)$ для всех t из $[c,d]$, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных. В этой ситуации функция $I(t)$ определена и непрерывна на отрезке $[c,d]$. Действительно, введём в рассмотрение функцию трёх переменных

$$J(t,u,v) = \int\limits_u^v f(x,t)\, dx, \tag{6}$$

определённую при $c \leqslant t \leqslant d, a(t) \leqslant u, v \leqslant b(t)$. Очевидно соотношение $I(t) = J(t, a(t), b(t)$, т.е. функция $I(t)$ есть суперпозиция непрерывных функций, поэтому $I(t)$ также непрерывная в области определения функция. Из теоремы Фубини вытекает равенство

$$\int\limits_c^d I(t)\,dt = \iint\limits_E f(x,t)\,dx\,dt\,.$$

Предположим (простоты ради), что функция f определена и непрерывна вместе с частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ на открытом множестве $\mathscr{G} = (A, B) \times (C, D)$, содержащем множество E. В этом случае определяемая равенством (6) функция $J(t, u, v)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве $\mathscr{G}_1 = (C, D) \times (A, B) \times (A, B)$ и справедливы равенства

$$\frac{\partial J}{\partial t} \;=\; \int\limits_u^v \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx \qquad \text{(правило Лейбница)}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial J}{\partial v} = f(v,t), \qquad \frac{\partial J}{\partial u} = -f(u,t)\,. \tag{8}$$

Равенства (8) вытекают из правила дифференцирования интегралов с переменным верхним (нижним) пределом. В указанных относительно функции f предположениях справедлива

Теорема 4. *Пусть функции $a(t), b(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[c, d]$. Тогда функция $I(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[c, d]$ и справедливо равенство*

$$\frac{dI}{dt}(t) \;=\; \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) \tag{9}$$

(правило дифференцирования интеграла с переменными пределами интегрирования).

◀ В предположениях теоремы функция $I(t) = J(t, a(t), b(t))$ непрерывно дифференцируема как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций. Верны равенства

$$\frac{dI}{dt}(t) \;=\; \frac{\partial J}{\partial t}(t, a(t), b(t)) + \frac{\partial J}{\partial v}(t, a(t), b(t))\frac{db(t)}{dt} + \frac{\partial J}{\partial u}(t, a(t), b(t))\frac{da(t)}{dt} =$$

$$= \int\limits_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \;+\; f(b(t),t)b'(t) \;-\; f(a(t),t)a'(t)\,;$$

при доказательстве используются правило дифференцирования суперпозиции функций и соотношения (7), (8).▶

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & \text{если } s \geqslant t, \\ s(1-t), & \text{если } s \leqslant t \end{cases}$$

и пусть $\varphi(t)$ – непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция. Докажем, что функция

$$u(t) \;=\; \int\limits_0^1 K(t,s)\varphi(s)\,ds$$

дважды дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и $u''(t) = -\varphi(t)$. Действительно, введём в рассмотрение функции

$$I_1(t) = \int\limits_0^t s(1-t)\,ds, \qquad I_2(t) = \int\limits_t^1 t(1-s)\varphi(s)\,ds\,.$$

Тогда $u(t) \;=\; I_1(t) + I_2(t)$,

$$I_1'(t) = -\int\limits_0^t s\varphi(s)\,ds + t(1-t)\varphi(t), \quad I_2'(t) = \int\limits_t^1 (1-s)\varphi(s)\,ds - t(1-t)\varphi(t),$$

$$u'(t) = -\int\limits_0^t s\varphi(s)\,ds + \int\limits_t^1 (1-s)\varphi(s)\,ds,\; u''(t) = -t\varphi(t) - (1-t)\varphi(t) = -\varphi(t)\,.$$

3.1.4 Лемма Лапласа для собственных интегралов

Две функции $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, определённые при $t \geqslant t_0$, называются *эквивалентными* на ∞, если найдётся такая функция $\rho(t)$, что

$$\Phi(t) \;=\; \rho(t)\;\Psi(t) \qquad \text{и} \qquad \lim_{t\to\infty} \rho(t) = 1\,.$$

В этом случае пишут $\Phi(t) \sim \Psi(t)$ при $t \to \infty$.

Лемма 1. *Пусть δ, k – положительные числа, функция $\Phi(t)$ определена равенством*

$$\Phi(t) \;=\; \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-ktx^2}\,dx\,.$$

Тогда $\Phi(t) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{kt}}$ *при* $t \to \infty$.

◀ Введём переменную $z = x\sqrt{kt}$. Тогда

$$\Phi(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{kt}} \int\limits_{-\delta\sqrt{kt}}^{\delta\sqrt{kt}} e^{-z^2}\,dz\,.$$

Если $t \to \infty$, то $\delta\sqrt{kt} \to \infty$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\delta\sqrt{kt}}^{\delta\sqrt{kt}} e^{-z^2}\,dz \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz + o(1) \;=\; \sqrt{\pi} + o(1) \quad \text{при}\, t \to \infty.$$

Отсюда и вытекает требуемое.▶

Лемма Лапласа [11] (основной результат этого пункта) позволяет найти асимптотику на ∞ интегралов вида

$$I(t) \;=\; \int\limits_a^b e^{-th(x)}\,dx\,. \tag{10}$$

Лемма 2 (Лемма Лапласа). *Пусть* $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *– дважды дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция, причём 1) функция* h *достигает абсолютного минимума на отрезке* $[a,b]$ *в единственной точке* $c \in (a,b)$, $\quad 2) h''(c) > 0$.

Тогда

$$I(t) \;\sim\; e^{-th(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{th''(c)}} \qquad \textit{при}\;\; t \to \infty\,. \tag{11}$$

◀ Предположим вначале, что $c = h(c) = 0$. В этом случае $a < 0 < b$, $h''(0) > 0$. Так как $h(0) = h'(0) = 0$, то согласно формуле Тейлора с остатком в форме Пеано имеет место равенство

$$h(x) \;=\; \frac{h''(0)}{2}x^2 + o(x^2)\,.$$

Фиксируем ε из интервала $\left(0, \dfrac{h''(0)}{4}\right)$ и подберём $\delta > 0$ так, чтобы при $|x| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство

$$\left|h(x) - \frac{h''(0)}{2}x^2\right| < \varepsilon x^2\,. \tag{12}$$

Вне отрезка $[-\delta,\delta]$ функция $h(x)$ удовлетворяет оценке $h(x) \geqslant \eta$, где $\eta = \eta(\delta) > 0$. Имеем далее

$$I(t) \;=\; \int\limits_a^b e^{-th(x)}\,dx \;=\; \int\limits_a^{-\delta} e^{-th(x)}\,dx \;+\; \int\limits_\delta^b e^{-th(x)}\,dx + \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-th(x)}\,dx\,.$$

Обозначим через $I_1(t)$ сумму двух первых слагаемых в правой части последнего равенства. При $t \gg 1$ справедливы соотношения

$$I_1(t) \;=\; \int\limits_a^{-\delta} e^{-h(x)}e^{-(t-1)h(x)}\,dx + \int\limits_\delta^b e^{-h(x)}e^{-(t-1)h(x)}\,dx \leqslant$$

[11] Лаплас Пьер Симон (*Laplace Pierre Simon*) (1749 – 1827) – французский астроном, математик и физик.

$$\leqslant \int\limits_a^{-\delta} e^{-h(x)} e^{-(t-1)\eta}\,dx + \int\limits_\delta^b e^{-h(x)} e^{-(t-1)\eta}\,dx \leqslant e^{-(t-1)\eta} \int\limits_a^b e^{-h(x)}\,dx\,. \tag{13}$$

Теперь оценим $I(t) - I_1(t)$ – интеграл от $-\delta$ до δ. Из (12) вытекают оценки

$$\frac{h''(0) + 2\varepsilon}{2} x^2 \ \leqslant\ h(x)\ \leqslant\ \frac{h''(0) + 2\varepsilon}{2} x^2 \qquad (-\delta \leqslant x \leqslant \delta)\,,$$

поэтому

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-tx^2 \frac{h''(0)+2\varepsilon}{2}}\,dx \ \leqslant\ \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-th(x)}\,dx \ \leqslant\ \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-tx^2 \frac{h''(0)-2\varepsilon}{2}}\,dx\,. \tag{14}$$

В силу леммы 1 справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-tx^2 \frac{h''(0)\pm 2\varepsilon}{2}}\,dx \ =\ \frac{1}{\sqrt{t(h''(0) \pm 2\varepsilon)}}(\sqrt{2\pi}\ +\ \omega_\pm(t))\,, \tag{15}$$

в котором $\omega_\pm(t) = o(1)$ при $t \to \infty$. В силу (13) $I_1(t) = O(e^{-\eta t})$ при $t \to \infty$. Поэтому, объединяя (13), (6), приходим к оценке

$$\sqrt{\frac{2\pi}{t(h''(0) + 3\varepsilon)}}\ \leqslant\ I(t)\ \leqslant\ \sqrt{\frac{2\pi}{t(h''(0) - 3\varepsilon)}} \quad (t \gg 1)\,.$$

Так как в качестве ε можно взять любое положительное число, то приходим к (11) в случае $c = h(c) = 0$.

Общий случай $c \in (a, b)$, h – произвольная функция, удовлетворяющая условиям (1), (2) сводится к предшествующему путём замены аргумента и функции. Достаточно положить

$$x_1\ =\ x + c, \qquad h_1(x_1) = h(x_1 + c) - h(c)\,. \ \blacktriangleright$$

В качестве примера найдём асимптотику последовательности

$$v_n\ =\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\,.$$

Фиксируем число τ из интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Очевидны равенства

$$v_n\ =\ \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ =\ \frac{1}{2} \int\limits_{|x| \leqslant \tau} \cos^n x\,dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\tau < |x| \leqslant \frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\ =\ z_n + w_n\,.$$

Имеем далее

$$z_n \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\leqslant\tau} \cos^n x\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\leqslant\tau} e^{-nh(x)}\,dx\,,$$

где $h(x) \;=\; -\ln\cos x$. Функция $h(x)$ на отрезке $[-\tau,\tau]$ удовлетворяет условиям леммы 2. При этом $c=0$, $h(c)=0$, $h''(c)=1$. Поэтому

$$z_n \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,.$$

Поскольку

$$0 \;\leqslant\; w_n \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\tau<|x|\leqslant\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\cos^n\tau\,,$$

то

$$v_n \;\sim\; z_n \;\sim\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,.$$

Упражнение 2. *Пусть функция* $h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям леммы 2, а функция* $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ *и* $g(c)\neq 0$. *Доказать асимптотическую формулу*

$$\int\limits_a^b g(x)e^{-th(x)}\,dx \;\sim\; \sqrt{\frac{2\pi}{th''(c)}}\;g(c)\;e^{-th(c)}\,.$$

3.1.5 Кратные интегралы с параметром

Предшествующие результаты переносятся на случай, когда отрезок $[a,b]$ заменён произвольным кубируемым и компактным подмножеством E пространства $\mathbf{R}^n$. Сформулируем для интегралов вида

$$I(t) \;=\; \int\limits_E f(x,t)\,dx$$

варианты теорем 1 – 3. Положим $\mathscr{A} \;=\; E\times[c,d]$.

Теорема 5. *Если функция* $f\colon\mathscr{A}\to\mathbb{R}$ *непрерывна на* $\mathscr{A}$, *то и функция* $I\colon[c,d]\to\mathbb{R}$ *также непрерывна.*

Теорема 6. *В предположениях теоремы 4 функция* $I(t)$ *интегрируема (в смысле Римана) по отрезку* $[c,d]$ *и*

$$\int\limits_c^d I(t)\,dt \;=\; \iint\limits_{\mathscr{A}} f(x,t)\,dx\,dt\,.$$

Теорема 7. (Правило Лейбница) *Пусть функция* $f\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ *и её частная производная* $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ *определены и непрерывны на множестве* $\mathscr{A}$. *Тогда функция* $I(t)$ *дифференцируема по параметру* t *и*

$$\frac{dI}{dt}(t) \;=\; \int\limits_E \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx\,.$$

Параметр t в теоремах 4 – 5 также может быть многомерным. Читателю предлагается самостоятельно сформулировать и доказать соответствующие обобщения.

Многомерный вариант леммы Лапласа составляет

Упражнение 3. *Пусть* E *– кубируемый компакт в* $\mathbb{R}^n$, $h\colon E \to \mathbb{R}$*– непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:*

1) функция h *достигает абсолютного минимума на компакте* E *в единственной точке* c *из* $\overset{\circ}{E}$;

2) функция h *дважды дифференцируема в точке* c *и* $h''(c) \gg 0$.

Тогда

$$\int\limits_E e^{-th(x)}\,dx \;\sim\; e^{-th(c)}\sqrt{\frac{(2\pi)^n}{t^n \det h''(c)}} \qquad \text{при } t \to \infty\,.$$

Указание. Применить формулу 2.6(8) для многомерного интеграла Пуассона.

3.1.6 Теорема Лиувилля

Известны аналоги правила Лейбница для кратных интегралов по переменной области интегрирования. Остановимся лишь на одном варианте этого правила, имеющем важное значение в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (предполагается знакомство читателя с основами этой теории [13]).

Пусть $\mathscr{U}$ – открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$,

$$v(x,t) = (v_1(x,t), \ldots, v_n(x,t))^T$$

– векторная функция, определённая и непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных на $\mathscr{U} \times (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$. Обозначим через $\psi(t;\xi)$ решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} \;=\; v(x,t), \qquad x(t_0) = \xi\,. \tag{16}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \psi(t;\xi)}{\partial t} = v(\psi(t;\xi),t), \qquad \psi(t_0;\xi) = \xi\,.$$

Вектор-функции $v(x,t) = (v_1(x,t), \ldots, v_n(x,t))^T$ сопоставим скалярную функцию

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x,t)\,,$$

называемую *дивергенцией* v и обозначаемую символом $div\ v$. Очевидно, что функция $div\ v(x,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных на $\mathscr{U}\times(t_0-\delta_0,t_0+\delta_0)$.

Лемма 3. *Пусть M – компактное подмножество области $\mathscr{U}$. Тогда*

1° *найдётся такое $\delta>0$ и такая окрестность $\mathscr{W}$ множества M, что $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ и при любом ξ из $\mathscr{W}$ задача Коши (16) имеет решение $x=\psi(t;\xi)$, определённое на отрезке $[t_0-\delta,t_0+\delta]$;*

2° *для каждого t из $[t_0-\delta,t_0+\delta]$ отображение $\xi\to\psi(t;\xi)$ есть диффеоморфизм $\mathscr{W}$ на $\psi(t;\mathscr{W})$;*

3° *якобиан $J(t,\xi)$ отображения $\xi\to\psi(t;\xi)$ удовлетворяет соотношениям*

$$J(t_0,\xi)=1, \qquad \frac{\partial J}{\partial t}(t,\xi)=a(t,\xi)J(t,\xi)\,, \tag{17}$$

где

$$a(t,\xi)\ =\ div\ v(\psi(t;\xi),t)\ =\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\psi(t;\xi))\,;$$

4° *если E – кубируемый компакт и $E\subset M$, то и множество*

$$E(t)=\psi(t,E) \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_0+\delta)$$

также кубируемый компакт.

◀ Утверждения $1^\circ-3^\circ$ вытекают из стандартных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [13]). Соотношения (17) эквивалентны равенству

$$J(t,\xi)\ =\ exp\left(\int\limits_{t_o}^{t}a(s,\xi)\,ds\right),$$

называемому формулой Лиувилля. Четвёртое утверждение леммы следует из теоремы 2.5.1.▶

Пусть $f\colon\mathscr{U}\times[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]\colon\mathbb{R}$ – скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных. Ниже

$$\frac{df}{dt}(x,t){:=}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)+\sum_{i=1}^{n}v_i(x,t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)- \tag{18}$$

производная функции f в силу системы дифференциальных уравнений (16). Из леммы 3 вытекает, что для любого кубируемого компакта $E\subset\mathscr{U}$ найдётся такое число $\delta>0$, что для всех t из $[t_0-\delta_0,t_0+\delta_0]$ множество $\psi(t,E)=E(t)$ есть кубируемый компакт. В частности, имеет смысл интеграл

$$I(t)\ =\ \int\limits_{E(t)}f(x,t)\,dx\,. \tag{19}$$

Равенство (19) определяет некоторую функцию $I(t)$ – интеграл, зависяший от параметра t из $[t_0-\delta,t_0+\delta]$. В указанных выше относительно функций f,v предположениях справедлива

Теорема 8 (Теорема Лиувилля). *Функция $I(t)$ дифференцируема по t и*

$$\frac{dI}{dt}(t) \ = \int\limits_{E(t)} \left(\frac{df}{dt}(x,t) + f(x,t)\ div\ v(x,t)\right) dx\,. \tag{20}$$

◀ Замена переменных в (19) приводит к следующему равенству

$$I(t) \ = \int\limits_{E} f[\psi(t;\xi),t]J(t,\xi)\,d\xi\,. \tag{21}$$

К интегралу (21) (по постоянному множеству E) применима теорема 7. Поэтому функция $I(t)$ дифференцируема на отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ и

$$\frac{dI}{dt}(t) \ = \int\limits_{E} \frac{\partial}{\partial t}\left(f[\psi(t;\xi),t]J(t,\xi)\right) d\xi\,. \tag{22}$$

Вычислим теперь частную производную по t, фигурирующую в равенстве (22). Имеем последовательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f[\psi(t;\xi),t]J(t,\xi)\right) = J(t,\xi)\frac{\partial}{\partial t}f[\psi(t;\xi),t] + f[\psi(t;\xi),t]\frac{\partial J}{\partial t}(t,\xi)\,, \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f[\psi(t;\xi),t] = \frac{df}{dt}(x,t)\,; \tag{24}$$

функция $\dfrac{df}{dt}$ определена равенством (18), $x=\psi(t;\xi)$. Объединяя (23), (24) с (17), приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}(f[\psi(t;\xi),t]J(t,\xi)) = \frac{df}{dt}(x,t) + f(x,t)\ div\ v(x,t), \tag{25}$$

в котором $x = \psi(t;\xi)$. Подставим в (22) вместо $\dfrac{\partial}{\partial t}(f([\psi(t;\xi),t]J(t,\xi))$ его выражение согласно (25). Возвращаясь к старому переменному x, получаем равенство (20), представляющее искомое правило дифференцирования интеграла (19) по параметру t.▶

Следствие 1. *Если скалярная функция f и векторная функция v таковы, что*

$$\frac{df}{dt} + f div\ v \equiv 0 \tag{26}$$

в $\mathscr{U}\times[t_0-\delta,t_0+\delta]$, то интеграл $I(t)$ постоянен: $I(t)=I(t_0)$.

Следствие 2. *Пусть вектор-функция v не зависит от t и*

$$div\ v(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \equiv 0\,. \tag{27}$$

Тогда отображение $\xi \to \psi(t,\xi)$ сохраняет объём: $V(E_t) \ = \ V(E_{t_0})$.

Несложно показать, что соотношения (26), (27) не только достаточны, но и необходимы для постоянства функций $I(t)$ и $V(E_t)$ соответственно. С полезной физической интерпретацией соотношения (26) можно познакомиться в [6] (уравнение неразрывности).

3.2 Несобственные интегралы с параметром

3.2.1 Определение равномерной сходимости несобственных интегралов

Пусть (α, ω) – открытый (не обязательно ограниченный) промежуток на действительной прямой $\mathbb{R}$ $(-\infty \leqslant \alpha < \omega \leqslant \infty)$. Функцию $\varphi\colon (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}$ назовём *интегрируемой (в несобственном смысле)*, если сужение функции φ на любой принадлежащий (α, ω) отрезок $[a, b]$ принадлежит $\mathscr{R}[a, b]$ и существует конечный предел

$$\lim_{\substack{a \to \alpha \\ b \to \omega}} \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx\,,$$

обозначаемый стандартным символом

$$\int\limits_\alpha^\omega \varphi(x)\, dx\,.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_\alpha^\omega \varphi(x)\, dx \;=\; \lim_{n \to \infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} \varphi(x)\, dx\,; \tag{1}$$

в равенстве (1) a_n, b_n – произвольные последовательности из (α, ω), сходящиеся к α и ω соответственно. Отметим, что если предел в правой части (1) существует для произвольных последовательностей a_n, b_n, сходящихся к α и ω соответственно, то функция φ интегрируема по промежутку (α, ω).

Ниже $\Pi := (\alpha, \omega) \times [c, d]$ – полоса в $\mathbf{R}^2$. Пусть в этой полосе задана функция $f(x, t)$, интегрируемая по x на промежутке (α, ω) (хотя бы в несобственном смысле) при любом фиксированном t из отрезка $[c, d]$. В этом случае на отрезке $[c, d]$ определена функция

$$I(t) \;=\; \int\limits_\alpha^\omega f(x, t)\, dx\,, \tag{2}$$

называемая несобственным интегралом, зависящим от параметра t. Интеграл (2) называют равномерно сходящимся на отрезке $[c, d]$, если он сходится при всех t из $[c, d]$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой отрезок $[a_0, b_0] \subset (\alpha, \omega)$, что для каждого отрезка $[a, b]$, удовлетворяющего включениям

$$[a_0, b_0] \subset [a, b] \subset (\alpha, \omega)$$

справедливо неравенство

$$\left| I(t) - \int\limits_a^b f(x, t)\, dx \right| < \varepsilon \qquad \forall t \in [c, d]\,. \tag{3}$$

Лемма 1. *Для того чтобы интеграл (2) равномерно сходился на отрезке* $[c,d]$, *необходимо и достаточно, чтобы для произвольных числовых последовательностей* a_n, b_n, *принадлежащих промежутку* (α,ω) *и сходящихся к* α *и* ω *соответственно, функциональная последовательность*

$$I_n(t) \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x,t)\,dx \tag{4}$$

равномерно сходилась на отрезке $[c,d]$.

◀ Для доказательства достаточно воспользоваться эквивалентностью определений предела функции по Коши и Гейне. ▶

3.2.2 Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов

Каждый признак сходимости несобственного интеграла имеет свой аналог для интегралов, зависящих от параметра. Проследим эту аналогию на примере наиболее известных признаков сходимости.

Теорема 1 (Признак Вейерштрасса). *Пусть* $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ *для всех* (x,t) *из* Π *и интеграл*

$$\int\limits_{\alpha}^{\omega} g(x)\,dx \tag{5}$$

сходится. Тогда интеграл (2) равномерно сходится.

◀ Пусть $\alpha < a < b < \omega$. Тогда справедливы соотношения

$$\left| I(t) - \int\limits_{a}^{b} f(x,t)\,dx \right| = \left| \int\limits_{\alpha}^{a} f(x,t)\,dx + \int\limits_{b}^{\omega} f(x,t)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\alpha}^{a} |f(x,t)|\,dx + \int\limits_{b}^{\omega} |f(x,t)|\,dx \leqslant \int\limits_{\alpha}^{a} g(x)\,dx + \int\limits_{b}^{\omega} g(x)\,dx\,.$$

Поскольку интеграл (5) сходится, то правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $a \to \alpha$, $b \to \omega$. Отсюда и следует требуемый результат.▶

При любом ξ из (α,ω)

$$I(t) = \int\limits_{\alpha}^{\omega} f(x,t)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\xi} f(x,t)\,dx + \int\limits_{\xi}^{\omega} f(x,t)\,dx. \tag{6}$$

Для равномерной сходимости интеграла $I(t)$ достаточно, чтобы равномерно сходился каждый из интегралов в правой части (6). Оба интеграла исследуются по одинаковой схеме, поэтому проведём исследование равномерной сходимости второго интеграла.

Теорема 2 (Критерий Коши). *Для того чтобы интеграл*

$$\int\limits_{\xi}^{\omega} f(x,t)\,dx \tag{7}$$

равномерно сходился на отрезке $[c,d]$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* b_0 *из* (ξ,ω), *что*

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon \tag{8}$$

для всех $b_1 \geqslant b_0$, $b_2 \geqslant b_0$, $t \in [c,d]$.

◀ Теорема 2 следует из леммы 1 и критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности. ▶

Для оценки интеграла в левой части (8) можно использовать, например, неравенство Абеля (см. К 1, часть 2). Приведём один из вариантов признака Абеля – Дирихле.

Теорема 3. *Пусть* $f(x,t) = g(x,t)h(x,t)$, *причём функция* $g(x,t)$ *монотонно убывает по* x *и равномерно относительно* t *стремится к 0 при* $x \to \omega$, *а функция* h *удовлетворяет условию Абеля*

$$\left|\int\limits_{\xi}^{b} h(x,t)\,dx\right| \leqslant L \quad \forall b \in (\xi,\omega),\, t \in [c,d]\,. \tag{9}$$

Тогда интеграл (7) равномерно сходится на отрезке $[c,d]$.

◀ В силу неравенства Абеля (см. К. 1, часть 2) при $\xi < b_1 < b_2 < \omega$ справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x,t)h(x,t)\,dx\right| \leqslant Lg(b_1,t)\,. \tag{10}$$

Так как функция $g(x,t)$ при $x \to \omega$ равномерно относительно t стремится к 0, то при достаточно большом $b_0 = b_0(\varepsilon)$ из соотношения $b_1 \leqslant b_0$ вытекает оценка $Lg(b_1,t) < \varepsilon$. В соединении с (10) это влечёт неравенство (8), из которого в силу критерия Коши и вытекает требуемое утверждение.▶

Применим теорему 3 к интегралу

$$I_1(t) = \int\limits_{\pi}^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\,, \quad t \in [0,d],$$

полагая $g(x,t) = \dfrac{1}{x}$, $h(x,t) = e^{-tx}\sin x$. Очевидно, функция g равномерно относительно t стремится к 0 при $x \to \infty$. Далее

$$\left|\int\limits_{\pi}^{b} h(x,t)\,dx\right| = \left|\int\limits_{\pi}^{b} e^{-tx}\sin x\,dx\right| = \left|\frac{e^{-tx}(t\sin x + \cos x)}{1+t^2}\Bigg|_{\pi}^{b}\right| < 2\,,$$

т.е. функция $h(x,t)$ удовлетворяет условию Абеля (9). Поэтому интеграл $I_1(t)$ равномерно сходится на каждом отрезке $[0,d]$.

3.2.3 Функциональные свойства несобственных интегралов

Теорема 4. *Пусть функция $f\colon \Pi \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных, а интеграл (2) равномерно сходится на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(t)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$*

◀ Рассмотрим функциональную последовательность $I_n(t)$, определяемую равенством (4). Каждая из функций $I_n(t)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$ (см. теорему 3.1.1). Из равномерной сходимости интеграла (2) следует равномерная на отрезке $[c,d]$ сходимость $I_n \to I$. Остаётся вспомнить, что равномерный предел последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция.▶

Теорема 5. *В условиях теоремы 4*

$$\int\limits_c^d I(t)\,dt = \int\limits_c^d dt \int\limits_\alpha^\omega f(x,t)\,dx = \int\limits_\alpha^\omega dx \int\limits_c^d f(x,t)\,dt\,. \tag{11}$$

◀ Справедливы соотношения (комментарий приводится ниже)

$$\int\limits_c^d I(t)\,dt \overset{(I)}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_c^d I_n(t)\,dt \overset{(II)}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_c^d dt\int\limits_{a_n}^{b_n} f(x,t)\,dx =$$

$$\overset{(III)}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_{a_n}^{b_n} dx\int\limits_c^d f(x,t)\,dt \overset{(IV)}{=} \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,t)\,dt\,.$$

Комментарий к соотношениям $(I)-(IV)$: равенство (I) следует из равномерной сходимости на отрезке $[c,d]$ последовательности $I_n(t)$ к $I(t)$, (II) представляет определение последовательности $I_n(t)$, (III) вытекает из теоремы Фубини, (IV) есть следствие определения несобственного интеграла от функции

$$\int\limits_c^d f(x,t)\,dt$$

по промежутку (α,ω). ▶

Теорема 6. *Пусть функции f, $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ определены и непрерывны в полосе Π. Пусть $I(t_0) < \infty$ для некоторого t_0 из отрезка $[c,d]$ и интеграл $\int\limits_\alpha^\omega \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ равномерно сходится. Тогда*

$$I'(t) = \int\limits_\alpha^\omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad \textit{(правило Лейбница).}$$

◀ В условиях теоремы последовательность $I_n(t_0) \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x,t_0)\,dx$ сходится к $I(t_0)$, а последовательность

$$I_n'(t) \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

равномерно на отрезке $[c,d]$ сходится к

$$\int\limits_{\alpha}^{\omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\,.$$

В этих предположениях имеют место соотношения

$$I'(t) \;\overset{(I)}{=}\; \Bigl(\lim_{n\to\infty} I_n(t)\Bigr)' \;\overset{(II)}{=}\; \lim_{n\to\infty} I_n'(t) \;=$$

$$\overset{(III)}{=}\; \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \;\overset{(IV)}{=}\; \int\limits_{\alpha}^{\omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\,.$$

Соотношение (I) очевидно, поскольку последовательность $I_n(t)$ сходится к $I(t)$. Нетривиален переход (II) – перестановочность операции дифференцирования и предельного перехода. Он вытекает из результатов, изложенных в К 1, часть 2. Соотношение (III) есть правило Лейбница для собственного интеграла

$$I_n(t) \;=\; \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x,t)\,dx\,.$$

Наконец, (IV) вытекает из условия равномерной сходимости интеграла

$$\int\limits_{\alpha}^{\omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\,. \;\blacktriangleright$$

3.2.4 Примеры на применение правила Лейбница

Рассмотрим несколько примеров, в которых правило Лейбница позволяет вычислить некоторые интегралы.

Пример 1. Интеграл Дирихле. Рассмотрим интеграл

$$I(t) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \qquad (t \geqslant 0)\,.$$

Положим

$$I_1(t) \;=\; \int\limits_{\pi}^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad I_2(t) \;=\; \int\limits_{0}^{\pi} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Интеграл $I_1(t)$ равномерно относительно t из отрезка $[0,d]$ сходится (см. п. 2), поэтому $I_1(t)$ непрерывная при $t \geqslant 0$ функция. Непрерывность функции $I_2(t)$ на луче $t \geqslant 0$ следует из теоремы 3.1.1. Таким образом, $I(t)$ непрерывная функция на $[0,\infty)$.

Функция $I(t)$ дифференцируема при $t > 0$. Её производную найдём по правилу Лейбница

$$\frac{dI}{dt}(t) \;=\; -\int\limits_{0}^{\infty} e^{-tx}\sin x\,dx \;=\; \left.\frac{e^{-tx}(t\sin x+\cos x)}{1+t^2}\right|_0^{\infty} \;=\; -\frac{1}{1+t^2}\,.$$

Соответствующий интеграл равномерно сходится на луче $[t_0,\infty)\,(t_0 > 0)$, поскольку $|e^{-tx}\sin x| \leqslant e^{-t_0x}$. Мы находимся в условиях применимости признака Вейерштрасса.

Так как $\dfrac{dI}{dt} \;=\; -\dfrac{1}{1+t^2}$ $\;(t > 0)$ и функция $I(t)$ непрерывна на луче $[0,\infty)$, то $I(t) = C - arctgt$. Для определения константы C найдём предел функции $I(t)$ на ∞. Поскольку $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$, то

$$I(t) \;\leqslant\; \int\limits_{0}^{\infty} e^{-tx}\,dx \;=\; \frac{1}{t}\,.$$

Таким образом, $I(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$\lim_{t\to\infty}(C - arctgt) \;=\; C - \frac{\pi}{2} \;=\; 0\,,$$

т.е. $C \;=\; \dfrac{\pi}{2}$. Итак,

$$I(t) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2} - arctgt\,.$$

Функция $I(t)$ непрерывна в 0, следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \text{(интеграл Дирихле).}$$

Отсюда легко выводится равенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\;sgn\;\alpha\,; \tag{11}$$

в этом случае говорят о разрывном множителе Дирихле.

Пример 2. Вычислим интеграл

$$I(t) = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx \, dx \, .$$

Формальное применение правила Лейбница приводит к равенству

$$I'(t) = -\int\limits_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \, dx \, .$$

Возникающие интегралы равномерно относительно t сходятся; это вытекает из признака Вейерштрасса и оценок

$$\left| e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx \right| \leqslant e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \left| x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \right| \leqslant x e^{-\frac{x^2}{2}} .$$

Интегрирование по частям влечёт за собой соотношения

$$I'(t) = -\int\limits_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \, dx = \int\limits_0^\infty \sin tx d e^{-\frac{x^2}{2}} =$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx \Bigg|_0^\infty - \int\limits_0^\infty t \cos tx e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = -tI(t) \, .$$

Следовательно, рассматриваемая функция $I(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I'(t) = -tI(t)$. Отсюда вытекает равенство $I(t) = I(0)e^{-\frac{t^2}{2}}$. Имеем далее

$$I(0) = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, ,$$

поэтому $I(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \, e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Пример 3. При любом $t > 0$ справедливы равенства

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad \int\limits_0^\infty \frac{dx}{t + x^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{t}}, \quad \int\limits_0^1 x^{t-1} \, dx = \frac{1}{t} \, . \tag{12}$$

После n-кратного дифференцирования по t этих равенств приходим к соотношениям

$$\int\limits_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n}\, dx \;=\; \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}t^n}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,, \tag{13}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(t+x^2)^{n+1}} \;=\; \frac{(2n-1)!!\pi}{2t^n(2n)!!\sqrt{t}}\,, \tag{14}$$

$$\int\limits_0^1 x^{t-1}(\ln x)^n\, dx \;=\; (-1)^n\frac{n!}{t^{n+1}}\,. \tag{15}$$

Доказательства соотношений (13) – (15) основаны на применении правила Лейбница к равенствам (12). Получающиеся при этом интегралы равномерно сходятся. Это следует из признака Вейерштрасса.

3.2.5 Интегралы Фруллани

В этом пункте мы познакомимся с неожиданно простым способом вычисления интегралов вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx \qquad (0<a<b)\,, \tag{16}$$

называемых *интегралами Фруллани.* По определению несобственного интеграла имеем

$$\int\limits_o^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx \;=\; \lim_{(\delta,N)\to(0,\infty)}\int\limits_\delta^N \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx\,. \tag{17}$$

Линейная замена переменных приводит к равенствам

$$\int\limits_\delta^N \frac{f(ax)}{x}\, dx \;=\; \int\limits_{a\delta}^{aN} \frac{f(z)}{z}\, dz, \quad \int\limits_\delta^N \frac{f(bx)}{x}\, dx \;=\; \int\limits_{b\delta}^{bN} \frac{f(z)}{z}\, dz\,.$$

Поэтому верно соотношение

$$\int\limits_\delta^N \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\, dx \;=\; \int\limits_{aN}^{bN} \frac{f(z)}{z}\, dz - \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\, dz\,. \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть* $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ *непрерывная функция и при некотором* $A>0$ *существует интеграл*

$$\int\limits_A^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx\,. \tag{$*$}$$

Тогда интеграл Фруллани равен $f(0)\ln\dfrac{a}{b}$.

◀ Поскольку интеграл (*) существует, то

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{aN}^{bN}\frac{f(z)}{z}\,dz \;=\; 0\,.$$

В силу теоремы о среднем найдётся такое число c, что $\delta a \leqslant c \leqslant \delta b$ и

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz \;=\; f(c)\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{1}{z}\,dz \;=\; f(c)\ln\frac{b}{a}\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\to0}\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz \;=\; f(0)\ln\frac{b}{a}\,.$$

Таким образом,

$$\lim_{(\delta,N)\to(0,\infty)}\int\limits_{\delta}^{N}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx \;=\; 0-f(0)\ln\frac{b}{a} \;=\; f(0)\ln\frac{a}{b}\,. \blacktriangleright$$

Лемма 2. *Пусть* $f\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *непрерывная функция и существует конечный предел* $f(+\infty) \;=\; \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. *Тогда интеграл Фруллани равен числу* $(f(0)-f(+\infty))\ln\dfrac{a}{b}$.

◀ Согласно теореме о среднем

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(z)}{z}\,dz \;=\; f(c)\ln\frac{b}{a}, \qquad \int\limits_{aN}^{bN}\frac{f(z)}{z}\,dz \;=\; f(d)\ln\frac{b}{a}\,,$$

где $c\in(a\delta,b\delta)$, $d\in(aN,bN)$. Следовательно,

$$\lim_{(\delta,N)\to(0,\infty)}\int\limits_{\delta}^{N}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx \;=\; \lim_{(c,d)\to(0,\infty)}[f(d)-f(c)]\ln\frac{b}{a} \;=$$

$$=[f(+\infty)-f(0)]\ln\frac{b}{a} \;=\; (f(0)-f(\infty))\ln\frac{a}{b}\,. \blacktriangleright$$

В частности, верны равенства

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx \;=\; \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x}\,dx \;=\; \ln\frac{a}{b}\,.$$

Многочисленные примеры на вычисление интегралов Фруллани приведены в [18]. Там же содержатся утверждения общего характера, дополняющие леммы 1, 2. В частности, удаётся отказаться от требования непрерывности функции f при $x = 0$. Впрочем, этот случай сводится к рассмотренному в лемме 2 подстановкой $x = \dfrac{1}{t}$.

3.2.6 Лемма Лапласа для несобственных интегралов

Установим аналог леммы 12.2 для несобственного интеграла вида

$$I(t) \;=\; \int\limits_{\alpha}^{\omega} e^{-th(x)}\,dx\,. \tag{19}$$

Лемма 3. (Лемма Лапласа). *Пусть $h\colon (\alpha,\omega) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируемая на промежутке (α,ω) функция, причём*

1) функция h достигает своего абсолютного минимума на промежутке (α,ω) в единственной точке c и

$$\inf_{x\notin(c-\delta,c+\delta)} h(x) > h(c) \tag{20}$$

при некотором $\delta > 0$;

$$2) \quad h''(c) > 0;$$

3) интеграл (19) существует при $t = 1$.

Тогда интеграл (19) имеет смысл при всех $t \geqslant 1$ и

$$I(t) \;=\; e^{-th(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{th''(c)}} \qquad \textit{при}\;\; t \to \infty. \tag{21}$$

◀ Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 12.2. Всё сводится к нахождению асимптотики для интеграла

$$\int\limits_{(c-\delta,c+\delta)} e^{-th(x)}\,dx\,,$$

отличающегося от интеграла (19) слагаемым порядка $O(e^{-\eta t})$ при некотором $\eta > 0$. ►.

В условиях леммы Лапласа интеграл $I(t)$ имеет ту же асимптотику на ∞, что и интеграл

$$\int\limits_{\alpha}^{\omega} e^{-t(h(c)+\frac{h''(c)}{2}(x-c)^2)}\,dx\,,$$

возникающий при замене функции $h(x)$ её приближением Тейлора второго порядка

$$h(c) + \frac{h''(c)}{2}(x-c)^2\,.$$

3.3 Эйлеровы интегралы

3.3.1 Определение и дифференцируемость Г-функции

Гамма– функция при $t > 0$ определяется равенством

$$\Gamma(t) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx\,. \qquad (*)$$

Формальное применение правила Лейбница приводит к равенствам

$$\Gamma'(t) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\ln x\,dx, \ldots, \Gamma^{(k)}(t) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k\,dx\;(k=1,2,\ldots).$$

Для обоснования правила Лейбница потребуется

Лемма 1. *Пусть $0 < c < d$, k – неотрицательное целое число. Тогда существует такая неотрицательная и интегрируемая (в несобственном смысле) функция $\varphi(x)\,(0 < x < \infty)$, что для t из $[c,d]$ выполняется неравенство*

$$|\; e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k| \;\leqslant\; \varphi(x) \qquad \textit{для всех } x \quad \textit{из } (0,\infty)\,.$$

◀ Функцию $\varphi(x)$ определим вначале на промежутке $(0,1]$. Справедливы оценки

$$e^{-x}\leqslant 1, \quad 0 < x^{t-1}\leqslant x^{c-1}, \quad |\ln x|^k \;\leqslant\; A_\varepsilon x^{-\varepsilon}\,; \qquad (1)$$

здесь $0 < x \leqslant 1, \varepsilon$ – любое положительное число, A_ε – положительная константа, зависящая от ε. Существование подобной константы A_ε вытекает из того, что $x^\varepsilon|\ln x|^k\to 0$ при $x\to 0$. Поэтому

$$|e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k| \;\leqslant A_\varepsilon x^{c-1-\varepsilon} \quad \text{для всех } x \quad \text{из } (0,1]\,. \qquad (2)$$

При малых $\varepsilon > 0$ правая часть (2) интегрируема (в несобственном смысле) по $(0,1]$

Пусть $x\geqslant 1$. Тогда имеют место неравенства

$$x^{t-1}\leqslant x^d, \quad |\ln x|^k\leqslant B_\varepsilon x^\varepsilon\,,$$

в которых ε – произвольное положительное число, B_ε – положительная константа, зависящая от ε. Следовательно, справедлива оценка

$$|\; e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k| \;\leqslant\; e^{-x}x^dB_\varepsilon x^\varepsilon \;\leqslant C_\varepsilon e^{-\frac{x}{2}}\,, \qquad (3)$$

постоянная C_ε не зависит от x из $[1,\infty)$. Правая часть (3) интегрируема в несобственном смысле на $[1,\infty)$. Функция

$$\varphi(x) \;=\; \begin{cases} A_\varepsilon x^{c-1-\varepsilon}, & \text{если } 0 < x\leqslant 1,\\ C_\varepsilon e^{-\frac{x}{2}}, & \text{если } 1 < x < \infty\,,\end{cases}$$

является искомой. ▶

Следствие 1. Γ-*функция имеет на* $(0,\infty)$ *производные всех порядков, причём*

$$\Gamma^{(k)}(t) \ = \ \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k\,dx\,. \tag{4}$$

◀ Интегралы, определяющие $\Gamma^{(k)}(t)$, сходятся равномерно на каждом сегменте $[c,d]\subset(0,\infty)$. Это следует из леммы 1 и признака Вейерштрасса. Теперь (4) вытекает из правила Лейбница.▶

Следствие 2. Γ-*функция и все её производные чётного порядка положительны на* $(0,\infty)$*:*

$$\Gamma(t)>0,\quad \Gamma''(t)>0,\quad \ldots\quad \Gamma^{(2m)}(t)>0\qquad \forall t>0\,.$$

Через Γ-функцию выражаются интегралы вида

$$I \ = \ \int\limits_0^\infty x^m e^{-bx^n}\,dx\,,$$

где $b>0$, $n>0$, $m>-1$. Действительно, положим $bx^n=y$, что влечёт за собой равенства

$$x \ = \ \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\qquad dx=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}-1}\,dy\,.$$

Следовательно,

$$I \ = \ \frac{1}{n}b^{-\frac{m+1}{n}}\int\limits_0^\infty e^{-y}y^{\frac{m+1}{n}-1}\,dy \ = \ \frac{1}{n}b^{-\frac{m+1}{n}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\,.$$

В частности,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \ = \ \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx \ = \ \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,,$$

т.е.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \ = \ \sqrt{\pi}\,.$$

Имеются достаточно обширные таблицы, содержащие значения Γ-функции.

3.3.2 Свойства Γ-функции

а) Формула понижения. Формулой понижения называют равенство

$$\Gamma(t+1) \ = \ t\Gamma(t)\,.$$

Оно вытекает из соотношений (комментарии приводятся ниже)

$$\Gamma(t+1) \overset{(I)}{=} \int\limits_0^\infty x^t e^{-x}\,dx \overset{(II)}{=} -\,e^{-x}x^t\big|_0^\infty + t\int\limits_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx \overset{III}{=} t\Gamma(t).$$

Комментарии: (I) следует из определения гамма-функции, (II) – результат применения правила интегрирования по частям, наконец, (III) опять основано на определении Г-функции.

Поскольку

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(1) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx \;=\; 1\,,$$

то из формулы понижения следуют равенства

$$\Gamma(n+1) \;=\; n\Gamma(n) \;=\; n(n-1)\Gamma(n-1) \;=\ldots\;=\; n!\,,$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \;=\; \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \;=\;\ldots\;=\; \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}\,,$$

в которых n – произвольное натуральное число. Формула понижения показывает, что достаточно уметь вычислять значения Г-функции для чисел t из отрезка $[1,2]$. Если $n<t<n+1$, то $1<t-n+1<2$ и

$$\Gamma(t) \;=\; (t-1)\ldots(t-n+1)\Gamma(t-n+1)\,. \tag{5}$$

Из равенства (5) следует, что Г-функция растёт на ∞ быстрее чем какой-либо многочлен. Более точную асимптотику Г-функции на ∞ даёт формула Стирлинга (см. п. 3.3.3).

б) Если $t \to +0$, то $\Gamma(1+t) \to \Gamma(1) = 1$, а поскольку $\Gamma(t) = \dfrac{\Gamma(1+t)}{t}$, то $\Gamma(t) = \dfrac{1+\alpha(t)}{t}$, где $\alpha(t) = o(1)$ при $t\to 0$. Следовательно, $\Gamma(t)\to\infty$ при $t\to+0$.

в) Как указывалось выше, $\Gamma''(t) > 0\,\forall t>0$. Поэтому Г-функция строго выпукла, а её производная $\Gamma'(t)$ строго возрастает на $(0,\infty)$. Поскольку $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$, то, по теореме Ролля, существует такое число c из интервала $(1,2)$, что $\Gamma'(c)=0$. При $0<t<c$ производная $\Gamma'(t)<0$ и функция Γ строго убывает на $(0,c]$. При $t>c$ имеем $\Gamma'(t)>0$ и функция $\Gamma(t)$ строго возрастает на $[c,\infty)$.

Отметим без доказательства ещё два свойства Г-функции:

г) функция $t\to\ln\Gamma(t)$ строго выпукла на $(0,\infty)$;

д) справедлива формула дополнения

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) \;=\; \frac{\pi}{\sin\pi t} \quad \forall t\in(0,1)\,.$$

Доказательства этих свойств можно найти, например, в [3], [18].

3.3.3 Формула Стирлинга

Из определения Γ-функции следует равенство

$$\Gamma(t+1) \;=\; \int\limits_0^{\infty} e^{-u}u^t\,du \quad (t>0).$$

После замены $u = t(1+x)$ имеем

$$\Gamma(t+1) \;=\; \int\limits_{-1}^{\infty} e^{-t(1+x)}(t(1+x))^t\,dx \;=\; e^{-t}t^{t+1}\int\limits_{-1}^{\infty}\{e^{-x}(1+x)\}^t\,dx\,.$$

Положим $h_0(x) = x - \ln(1+x)\,(x > -1)$. При таком определении функции h_0 приходим к равенству

$$\Gamma(t+1) \;=\; e^{-t}t^{t+1}\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-th_0(x)}\,dx\,. \qquad (6).$$

Без труда проверяются следующие свойства функции h_0:
1° функция $h_0\colon (1,\infty)\to\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема и

$$h_0'(x) \;=\; \frac{x}{1+x}, \quad h_0''(x) \;=\; \frac{1}{(1+x)^2}\,;$$

2° функция h_0 достигает абсолютного минимума в единственной точке $c = 0$, при этом $h_0(0) = 0, h_0'(0) = 0, h_0''(0) = 1$ и если $0 < \delta < 1$, то

$$\inf\{h_0(x), \quad -1 < x < \infty, \quad |x| \geqslant \delta\} > 0 = h_0(0)\,.$$

Из отмеченных свойств функции $h_0\colon (-1,\infty)\to\mathbb{R}$ вытекает, что интеграл

$$\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-th_0(x)}\,dx$$

удовлетворяет условиям леммы Лапласа для несобственных интегралов. Следовательно,

$$I_0(t) \;\sim\; e^{-th_0(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{th_0''(c)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \qquad \text{при} \quad t\to\infty\,.$$

Объединяя последнее соотношение с равенством (6), приходим к формуле Стирлинга[12]

$$\Gamma(t+1) \;\sim\; e^{-t}t^t\sqrt{2\pi t} \qquad \text{при} \quad t\to\infty, \qquad (7)$$

[12]Стирлинг Джеймс (*Stirling James*) (1692 – 1770) – шотландский математик.

означающей, что

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\Gamma(t+1)e^t}{t^t\sqrt{2\pi t}} \;=\; 1\,. \tag{8}$$

Частным случаем (8) является равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} \;=\; 1\,, \tag{9}$$

которое также называют формулой Стирлинга.

3.3.4 Бета-функция

Важную роль в ряде разделов математики играет бета-функция двух положительных переменных p, q, определяемая равенством

$$B(p,q) \;=\; \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\,. \tag{10}$$

Если $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, то подынтегральная функция в (10) непрерывна и интеграл (10) существует как собственный (интеграл Римана). В общем случае интеграл (10) понимается как несобственный интеграл второго рода. Если $0 < p < 1$, то при $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ справедлива оценка $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant \max\left\{1, \left(\dfrac{1}{2}\right)^{q-1}\right\} x^{p-1}$, поэтому интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

существует как несобственный; особенность в 0 интегрируема. Аналогичным образом рассматривается особенность в точке 1. Определение бета-функции корректно при всех положительных p, q; справедливы соотношения $0 < B(p,q) = B(q,p) < \infty$. Симметричность бета-функции легко выводится с помощью замены переменной $x \;=\; 1-y$.

Выразим через бета-функцию интеграл

$$J(a,b) \;=\; \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\theta\,\sin^b\theta\,d\theta\,.$$

Положим $x = \cos^2\theta$. Тогда $1 - x = \sin^2\theta$, $dx = -2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$ и

$$J(a,b) \;=\; \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\theta \sin^b\theta\, d\theta \;=\; -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\theta \sin^{b-1}\theta(2\sin\theta\cos\theta)\, d\theta \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^{\frac{a-1}{2}}(1-x)^{\frac{b-1}{2}}\, dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right). \tag{11}$$

Опираясь на (11), установим равенство

$$B(p,q) \;=\; \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (p > 0,\; q > 0)\,. \tag{12}$$

Воспользуемся соотношениями

$$\Gamma(p) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\, dx \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}(\xi^2)^{p-1}2\xi\, d\xi\,,$$

$$\Gamma(q) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-y}y^{q-1}\, dy \;=\; \int\limits_0^\infty e^{-\eta^2}(\eta^2)^{q-1}2\eta\, d\eta\,,$$

вытекающими из определения Γ-функции и замены переменных $x = \xi^2$, $y = \eta^2$. Отсюда получаем последовательно

$$\Gamma(p)\Gamma(q) \;=\; 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2-\eta^2}(\xi^2)^{p-\frac{1}{2}}(\eta^2)^{q-\frac{1}{2}}\, d\xi\, d\eta\,. \tag{13}$$

Перейдём в (13) к полярным координатам, полагая $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$. Имеем далее соотношения

$$\Gamma(p)\Gamma(q) \;=\; 4\int\limits_0^\infty e^{-r^2}(r^2)^{p+q-1}r\, dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\varphi)^{p-\frac{1}{2}}(\sin^2\varphi)^{q-\frac{1}{2}}\, d\varphi \;=$$

$$=\; 2\Gamma(p+q)\frac{1}{2}B(p,q) \;=\; \Gamma(p+q)B(p,q)\,. \tag{14}$$

Проведённые выкладки носили формальный характер; каждый шаг нуждается в обосновании. Например, для доказательства (13) достаточно воспользоваться теоремой Фубини для квадрата

$$\mathscr{A}_n := \left\{(\xi,\eta)^T \in \mathbf{R}^2, 0 \leqslant \xi \leqslant n, 0 \leqslant \eta \leqslant n\right\},$$

в силу которой

$$4 \iint\limits_{\mathscr{A}_n} e^{-\xi^2-\eta^2} (\xi^2)^{p-\frac{1}{2}} (\eta^2)^{q-\frac{1}{2}}\, d\xi\, d\eta \ =$$

$$= \int\limits_0^n e^{-\xi^2} (\xi^2)^{p-1} 2\xi\, d\xi \quad \int\limits_0^n e^{-\eta^2} (\eta^2)^{q-1} 2\eta\, d\eta\,.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем (13).

Аналогично, переход к полярным координатам следует производить вначале для четверти круга

$$\mathscr{D}_n := \left\{ (\xi, \eta)^T \in \mathbf{R}^2, \quad \xi^2 + \eta^2 \leqslant n^2, \quad \xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0 \right\},$$

а затем устремлять n к ∞. Это и даёт возможность обосновать замену переменных $\xi = r\cos\varphi, \eta = r\sin\varphi$ для вычисления интеграла по квадранту $\xi \geqslant 0, \eta \geqslant 0$. Так как

$$2 \int\limits_0^\infty e^{-r^2} (r^2)^{p+q-1} r\, dr \ = \ \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{p+q-1}\, dz \ = \ \Gamma(p+q)$$

(замена переменной $z = r^2$), а

$$2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^{2p-1} (\sin\varphi)^{2q-1}\, d\varphi \ = \ B(p,q)$$

(в силу формулы (11)), то (14) доказано. Очевидно, что равенства (12), (14) эквивалентны между собой. Тем самым равенство (12) обосновано.

Все свойства бета-функции вытекают из (12) и свойств Г-функции. В частности, имеют место формулы понижения

$$B(p+1,q) \ = \ \frac{p}{p+q} B(p,q), \qquad B(p,q+1) \ = \ \frac{q}{p+q} B(p,q).$$

3.3.5 Примеры

Приведём примеры вычисления обычных и несобственных интегралов путём сведения их к эйлеровым интегралам.

1. Из (11), (12) вытекают равенства

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a\theta\, d\theta \ = \ \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \ = \ \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)} \ = \ \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}.$$

Если a_n – объём шара $|x| \leqslant 1$ в пространстве $\mathbf{R}^n$, то в силу результатов 3.3.2

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \;=\; 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\varphi\, d\varphi \;=\; \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,. \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Поскольку $a_1 \;=\; 2$, то простое вычисление даёт

$$a_n \;=\; \frac{\pi^{\dfrac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}\,.$$

Объём W_n n-мерного шара $|x| \leqslant R$ находится по формуле $W_n \;=\; a_n R^n$.

2. Сделаем в интеграле (10) замену переменной, полагая $x \;=\; \dfrac{z}{1+z}$. В результате получим следующее равенство

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\, dz \;=\; \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx \;=\; B(p,q)\,,$$

справедливое для любых положительных чисел p, q.

3. Пусть $p_1 > 0, p_2 > 0$, Ω – плоская фигура, определяемая соотношением

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2,\ |x_1|^{p_1} + |x_2|^{p_2} \leqslant 1\right\}.$$

Тогда Ω – квадрируемая фигура, составленная из четырёх кусков, конгруентных криволинейной трапеции

$$\Omega_1 = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbf{R}^2, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant (1 - x_1^{p_1})^{\frac{1}{p_2}}\right\}.$$

Следовательно, площадь $S(\Omega)$ фигуры Ω равна

$$S(\Omega) \;=\; 4S(\Omega_1) \;=\; 4\int\limits_0^1 (1 - x_1^{p_1})^{\frac{1}{p_2}}\, dx_1 \;=\; 4\int\limits_0^1 (1-z)^{\frac{1}{p_2}}\frac{1}{p_1} z^{\frac{1}{p_1}-1}\, dz \;=$$

$$=\; \frac{4}{p_1} B\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}+1\right) \;=\; \frac{4}{p_1 p_2}\frac{\Gamma(\frac{1}{p_1})\ \Gamma(\frac{1}{p_2})}{\Gamma(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+1)}\,.$$

4. Напрашивается n-мерный вариант предшествующего примера. Пусть

$$p_1 > 0, \dots, p_n > 0,$$

Ω – фигура в $\mathbf{R}^n$, определяемая соотношением

$$\Omega \;=\; \left\{ (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{p_i} \leqslant 1 \right\}.$$

Тогда объём $V(\Omega)$ фигуры Ω вычисляется по формуле

$$V(\Omega) \;=\; \frac{2^n}{p_1 \ldots p_n} \frac{\Gamma(\frac{1}{p_1}) \ldots \Gamma(\frac{1}{p_n})}{\Gamma(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} + 1)}.$$

Этот и более общие результаты аналогичного характера установлены Дирихле (см., например, [18]).

5. Сделав в интеграле $(*)$ замену переменной $x \;=\; \ln \dfrac{1}{u}$, придём к новому интегральному представлению функции Γ:

$$\Gamma(t) \;=\; \int\limits_0^1 \ln^{t-1} \left(\frac{1}{u} \right) du\,. \qquad (**)$$

Объединение (**) с легко доказываемым равенством

$$\int\limits_0^1 \ln^{t-1} \left(\frac{1}{u} \right) du = \lim_{n \to \infty} n^{t-1} \int\limits_0^1 \left(1 - u^{1/n} \right)^{t-1} du \quad (t \geqslant 1)$$

влечёт за собой формулу Эйлера – Гаусса

$$\Gamma(t) = \lim_{n \to \infty} n^t \frac{(n-1)!}{t(t+1) \ldots (t+n-1)} \quad \forall t > 0.$$

Упражнение 1. *Выразить через значения Γ-функции интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha}\, dx, \quad \alpha > \frac{1}{2}\,.$$

Упражнение 2. *Выразить через значения бета-функции интеграл*

$$\int\limits_0^\pi \frac{\sin^\alpha x}{1 + \cos x}\, dx, \quad \alpha > 1\,.$$

Упражнение 3. *Пусть $0 < p < 1, q = 1 - p$,*

$$\mathscr{B}(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}\, (k = 0, 1, \ldots, n), \quad x_{n,\,k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\,,$$

число k может зависеть от n, однако последовательность $x_{n,k}$ ограничена: $|x_{n,k}| \leqslant c$. Используя формулу Стирлинга, доказать соотношение

$$\mathscr{B}(n,k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x_{n,k}^2\right\} \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,.$$

Комментарий: в теории вероятностей последнее соотношение называют *локальной предельной теоремой.*

Литература

I. Основные учебники по математическому анализу

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. I. Изд. 4-е, перераб. и доп. 1982; Ч. II. Изд. 2-е, стереотип. 1980. М.: Наука.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. I–III. М.: Высшая школа, 1981.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. I, II. М.: Наука, 1990.

II. Дополнительная литература

6. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.
7. Булдырев В.С., Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных. Ленинград: Изд. ЛГУ, 1985.
8. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
9. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.
10. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Фазис, 1997; Ч. II. М.: Наука, 1990.
11. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
12. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра, М.: Физматлит, 2004.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.
14. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
15. Соболев В.И., Покорный В.В., Аносов В.И. Краткий курс математического анализа. Ч. I. Воронеж, 1983; Ч. II. Воронеж, 1984.
16. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.
17. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.
18. Фихтенгольц Г.М. Курс математического анализа. Т. I–III., М.: Физматгиз, 1962.
19. Шварц Л. Анализ. Т. I, II. М.: Мир, 1972.
20. Шилов Г.Е. Математический анализ, функции одного переменного. М.: Наука, 1969; Он же. Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.

Учебное издание

Климов Владимир Степанович

Многомерный математический анализ
Часть I.

Учебное пособие

Редактор, корректор М.В. Никулина
Компьютерная верстка А. Ю. Ухалова
Подписано в печать 27.01.2009. Формат 60 х 84/16.
Бумага тип. Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 8,0.
Тираж 150 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет.
150044 Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37,
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.