Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. С. Климов

Основы комплексного анализа

Учебное пособие

Рекомендовано Научно-методическим советом университета для студентов, обучающихся по специальности Прикладная математика и информатика

Ярославль 2010

УДК 517
ББК В16я73
К49

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
в качестве учебного издания. План 2010 года

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ;
Е. И. Смирнов, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ЯГПУ

К49 **Климов, В. С.** Основы комплексного анализа: Учебное пособие/ В. С. Климов; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова — Ярославль: ЯрГУ, 2010. — 96 с.
ISBN 978-5-8397-

Пособие «Основы комплексного анализа» содержит следующие разделы дисциплины «Математический анализ»: дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного; степенные ряды; ряды Лорана и теория вычетов; начала операционного исчисления; введение в теорию конформных отображений.

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по специальности 010501.65 Прикладная математика и информатика (дисциплина «Математический анализ», блок ОПД), очной формы обучения. Пособие может быть полезным и для студентов университетов, обучающихся по специальности 010100.65 Математика.

ISBN 978-5-8397-

УДК 517
ББК В16я73

Оглавление

Предисловие **5**

1 Производная и интеграл **7**
1.1 Предварительные сведения 7
1.2 Производные функций комплексного переменного 11
1.3 Интеграл по комплексной переменной 16
1.4 Формула Коши и её следствия 21

2 Степенные ряды **29**
2.1 Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций . . 29
2.2 Степенные ряды и ряд Тейлора 32
2.3 Продолжение аналитических функций 36

3 Ряды Лорана и теория вычетов **41**
3.1 Разложение функции в ряд Лорана 41
3.2 Изолированные особые точки 45
3.3 Вычет аналитической функции 49
3.4 Интегралы и вычеты 53

4 Начала операционного исчисления **63**
4.1 Преобразование Лапласа 63
4.2 Формула обращения 67
4.3 Приложения преобразования Лапласа 71

5 Конформные отображения **75**
5.1 Свойства конформных отображений 75
5.2 Дробно-линейная функция 79
5.3 Элементарные функции и конформные отображения . . . 84
5.4 Комплексный анализ (сводка формул) 90

Литература **95**

Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов математического анализа, изучаемых студентами третьего курса университетов специальности Прикладная математика и информатика.

Весь материал разбит на пять глав. Первая глава посвящена дифференцированию и интегрированию функций комплексного переменного. В последующих двух главах изучаются степенные ряды и ряды Лорана. Основное внимание в третьей главе уделено теории вычетов и её применениям к вычислению интегралов. В четвертой главе приводятся элементы операционного исчисления. Намечены пути приложения развитой теории к решению дифференциальных и интегральных уравнений. Замыкает пособие пятая глава, в которой излагаются начала теории конформных отображений и рассматриваются примеры иллюстративного характера.

Из сказанного выше следует, что по содержанию данное пособие представляет не слишком обширный фрагмент теории функций комплексного переменного – классической учебной дисциплины, по которой имеется богатая учебная литература. Существующие учебные руководства поражают современного студента обилием фактов, многими сотнями превосходно написанных страниц, рассчитанными на энтузиаста, готового отдать изучению комплексного анализа если не всю жизнь, то значительную её часть. Увы, реалии таковы, что в учебных планах студентов-прикладников отсутствует даже сама дисциплина: теория функций комплексного переменного. Элементы этой прекрасной науки составляют лишь часть программы по математическому анализу. Лектору приходится выкраивать часы на изложение теории аналитических функций, иногда в ущерб классическому анализу.

Автор счёл необходимым предпослать основному тексту вводный параграф, содержащий в сжатой форме перечень предварительных сведений о комплексных числах. Предполагается, что читатель уже знаком с понятием комплексного числа, поэтому здесь следует говорить скорее о фиксации терминологии, чем о разъяснении известных фактов.

Используются следующие обозначения:

$\varnothing$ – пустое множество;

$\forall$ – "для всех"или "для каждого";

$:=$ или $\stackrel{def}{=}$ – "равно по определению";

◀ – начало доказательства;

▶ – конец доказательства;

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, u_x – частная производная функции u по аргументу x;

$\int\limits_a^b \varphi(t)\,dt$ – интеграл от функции $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ по отрезку $[a,b]$;

$\iint\limits_{\Omega} \Phi(x,y)\,dx\,dy$ – двойной интеграл от функции Φ по области Ω;

$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ – криволинейный интеграл от дифференциальной формы $P\,dx + Q\,dy$ по замкнутой кривой Γ;

$Res[f,a]$ – вычет функции f в точке a; в литературе используются и другие обозначения, например, $\underset{a}{Res} f$;

$f(t) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \fallingdotseq f(t)$ – функция $F(p)$ есть преобразование Лапласа функции $f(t)$ или $f(t)$ – оригинал $F(p)$.

В пособии принята автономная (в пределах каждой главы своя) нумерация секций, разбитых на отдельные пункты. Формулы (теоремы, упражнения и т. п.) нумеруются в пределах каждой секции. При ссылках внутри секции указывается лишь номер соответствующей формулы (теоремы и т. п.); в противном случае приводится и номер секции. Например, формула 2.6(8) – это формула (8) из секции 2.6; лемма 1.5.3 – это лемма 3 из секции 1.5.

Многие разделы пособия обсуждались с коллегами из Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, а также с математиками других вузов. Приношу всем им самую искреннюю признательность. Буду благодарен за указания на возможные ошибки в тексте, ответственность за которые автор полностью берёт на себя.

Климов В. С., доктор физико-математических наук

Глава 1

Производная и интеграл

1.1 Предварительные сведения

1. Комплексные числа. Комплексное число — это пара $z = (x, y)$ действительных чисел x, y, обычно записываемая в виде $z = x + iy$. Здесь $i = \sqrt{-1}$– мнимая единица. Число x называется действительной частью числа $z = x+iy$ и обозначается символом $Re\ z$, число y – мнимой частью числа z, обозначение: $Im\ z$.

Операции сложения и умножения комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ определяются равенствами

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \quad z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел относительно определённых таким образом операций сложения и умножения образует поле. Это позволяет определить операции вычитания и деления как обратные к сложению и умножению соответственно. Например, равенство $z = z_1/z_2$ эквивалентно соотношению $z_1 = z_2 z$. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называют сопряжённым к числу $z = x + iy$; отметим равенство $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Комплексные числа z_1, z_2 равны, если $Re\ z_1 = Re\ z_2$ и $Im\ z_1 = Im\ z_2$. В поле комплексных чисел нельзя определить отношение порядка, согласованное с алгебраическими операциями, поэтому отношения типа $\leqslant, <$ применительно к комплексным числам не имеют смысла.

Комплексному числу $z = x + iy$ ставятся в соответствие точка M с координатами (x, y) и радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. При этом если числам z_1, z_2 соответствуют векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, то сумме z_1+z_2 соответствует вектор $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. В этом смысле соответствие между комплексными числами и векторами является линейным. Точку M, соответствующую числу

z, называют аффиксом z. Иногда поле комплексных чисел идентифицируют с плоскостью OXY, называемой комплексной плоскостью или плоскостью Гаусса.

2. Представление комплексных чисел в тригонометрической форме. Для определения положения аффикса M наряду с его декартовыми координатами x, y используют полярные координаты ρ и φ, где ρ — это расстояние от точки M до начала координат O, а φ – угол, который составляет радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси абсцисс. Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки. Поскольку $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, то $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Число ρ называют модулем комплексного числа z и обозначают символом $|z|$; очевидно, что $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Если $z \neq 0$, то $|z| > 0$; угол φ, называемый аргументом числа z, определяется неоднозначно, а с точностью до кратного 2π. В ряде случаев удобно через $argz$ обозначать значение аргумента, заключённое в пределах $\varphi_0 \leqslant \varphi < \varphi_0 + 2\pi$. Обычно берут $\varphi_0 = 0$, либо $\varphi_0 = -\pi$. Два отличных от нуля комплексных числа равны между собой, если равны их модули, а значения аргументов равны или отличаются на число, кратное 2π. Иногда используется показательная форма $z = \rho e^{i\varphi}$; толкование этой формулы приводится ниже. Справедливы неравенства треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между аффиксами этих чисел. Если

$$z_1 = \rho_(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$. Таким образом, произведение модулей чисел равно модулю их произведения, а сумма аргументов есть аргумент произведения. Это равенство очевидным образом распространяется на произведение любого количества комплексных чисел. В частности, имеет место равенство

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{1}$$

называемое формулой Муавра. Оно справедливо и при $\rho = 0$.

Формула (1) позволяет извлекать корень любой степени из комплексного числа. Пусть w– комплексное число, n– натуральное число и $n > 1$. Комплексное число z называют корнем степени n из числа w, если $z^n = w$. Очевидно, что если $w = 0$, то уравнение $z^n = 0$ имеет единственный (нулевой) корень. Покажем, что в случае $w \neq 0$ уравнение $z^n = w$

имеет n различных корней. В этом случае $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$, где $R = |w|$ – модуль числа w, а ψ – его аргумент. Если z– корень степени n из числа w и $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то равенство $w = z^n$ и формула (1) приводят к соотношению

$$R(\cos\psi + \sin\psi) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отсюда вытекают равенства $R = \rho^n$, $\psi + 2k\pi = n\varphi$, в которых k– произвольное натуральное число. Следовательно,

$$z = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\psi + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

Придавая числу k значения $0, 1, \ldots, n-1$, получим n различных корней $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Модули этих корней одинаковы и равны $\sqrt[n]{R}$, а аргументы отличаются на число, кратное $2\pi/n$. С геометрической точки зрения это означает, что корни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ располагаются на одной и той же окружности с центром в начале координат и делят эту окружность на n одинаковых частей. В качестве примера найдём кубические корни из числа $w = i$. В этом случае $w = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

3. Последовательности и ряды комплексных чисел. Комплексной последовательностью называют функцию натурального аргумента со значениями в поле комплексных чисел. Традиционно последовательность $z(n)$ обозначают символом z_n. Стандартным образом определяются сходящиеся и фундаментальные последовательности. Именно, последовательность z_n называют сходящейся к числу z и пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n_0, что $|z_n - z| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Последовательность z_n именуют фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что $|z_n - z_m| < \varepsilon$ при $m \geqslant n_0, n \geqslant n_0$.

Лемма 1. *Для сходимости (фундаментальности) последовательности $z_n = x_n + iy_n$ необходимо и достаточно, чтобы последовательности $x_n = Rez_n$, $y_n = Imz_n$ были сходящимися (фундаментальными).*

Из леммы 1 и результатов действительного анализа вытекает

Лемма 2.*(Критерий Коши). Каждая фундаментальная последовательность сходится; верно и обратное: всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Ниже будут рассматриваться ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad \sum_{k=m}^{\infty} c_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k. \tag{2}$$

Ряду первого вида сопоставляется последовательность его частичных сумм s_n, определяемая стандартным образом: $s_1 = c_1, \ldots, s_n = s_{n-1} + c_n$, $(n = 2, 3, \ldots)$. Ряд указанного вида называют сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится; в этом случае предел частичных сумм называют суммой ряда. Если же последовательность s_n расходится, то и порождающий её ряд также именуют расходящимся.

Ряды других видов сводятся к уже рассмотренному. Например, двусторонний ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$$

называют сходящимся, если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}.$$

Напомним некоторые признаки (достаточные условия) сходимости одностороннего ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{3}$$

с комплексными элементами c_k, $k = 1, 2, \ldots$. Ряд (3) называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |c_k|$, составленный из модулей элементов c_k.

Теорема 1 (Признак Коши). *Пусть*

$$\mathscr{K} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Тогда 1) если $\mathscr{K} < 1$, то ряд (3) сходится; 2) если $\mathscr{K} > 1$, то ряд (3) расходится; 3) существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\mathscr{K} = 1$.

Теорема 2 (Признак Даламбера). *Пусть $c_n \neq 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \stackrel{def}{=} \mathscr{D}.$$

Тогда 1) если $\mathscr{D} < 1$, то ряд (3) сходится; 2) если $\mathscr{D} > 1$, то ряд (3) расходится; 3) существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\mathscr{D} = 1$.

В условиях теорем 1, 2 из соотношений $\mathscr{K} < 1, \quad \mathscr{D} < 1$ вытекает абсолютная сходимость ряда (3). В ряде случаев оказывается полезной

Теорема 3 (Признак Раабе). *Пусть $c_n \neq 0$ и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right) \stackrel{def}{=} \mathscr{R}.$$

Тогда 1) если $\mathscr{R} > 1$, то ряд (3) сходится; 2) если $\mathscr{R} < 1$ и $c_n > 0$ при достаточно больших n, то ряд (3) расходится.

Приведём достаточно тонкий признак сходимости, относящийся к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Теорема 4 (Признак Абеля-Дирихле). *Пусть a_k – бесконечно малая последовательность и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k|$$

сходится. Пусть частные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

ограничены в совокупности. Тогда ряд (3) сходится.

Теорема 4 применима и к не абсолютно сходящимся рядам; подобные ряды называют условно сходящимися.

1.2 Производные функций комплексного переменного

1. Непрерывные функции комплексного переменного. Пусть E– некоторое непустое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функцией комплексного переменного, определённой на множестве E, называется закон, сопоставляющий каждому числу z из E некоторое число $f(z)$ из $\mathbb{C}$; используется запись $f : E \to \mathbb{C}$. Поскольку каждое комплексное число характеризуется парой действительных чисел, то задание комплексной функции $w = f(z)$ комплексной переменной z эквивалентно заданию двух действительных функций двух действительных переменных, что может быть записано в виде $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$: здесь

$z = x + iy, u = Ref-$ действительная часть, $v = Imf-$ мнимая часть функции f. Например, если $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, то $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

Точку a из $\mathbb{C}$ называют предельной для множества $E \subset \mathbb{C}$, если существует последовательность z_n, обладающая свойствами

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a,\ z_n \in E,\ z_n \neq a. \tag{1}$$

Это эквивалентно требованию

$$B(a, \delta) \cap E \setminus a \neq \varnothing\ \forall\delta > 0. \tag{2}$$

Пусть $f : E \to \mathbb{C}$– комплекснозначная функция на множестве $E \subset \mathbb{C}$, a – точка, предельная для множества E. Число b называют пределом функции f в точке a и пишут

$$\lim_{z\to a} f(z) = b,$$

если $f(z_n) \to b$ для всякой последовательности z_n, обладающей свойствами (1). Можно ввести определение предела на языке ε, δ : число b – предел функции f в точке a, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$|f(z) - b| < \varepsilon, \text{ если } 0 < |z - a| < \delta,\ \ z \in E.$$

Оба эти определения эквивалентны.

Теорема 1. *Пусть* $f : E \to \mathbb{C}$ – *комплекснозначная функция на множестве* $E \subset \mathbb{C}$, $u = Re\ f$, $v = Im\ f$– *действительная и мнимая части функции* f. *Пусть* $z_0 = x_0 + iy_0$– *предельная точка множества* E. *Тогда равенство*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$

эквивалентно соотношениям

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = Re\ w_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = Im\ w_0.$$

◀ Для доказательства достаточно воспользоваться определением предела функции в терминах последовательности и сослаться на лемму 1.1.1.▶

Если $z_0 \in E$ и

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функцию f называют непрерывной в точке z_0. Непрерывность функции f в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентна непрерывности её действительной и мнимой частей в точке (x_0, y_0).

2. Дифференцируемость функций комплексного переменного. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{C}$ и z_0– внутренняя точка множества E, т. е. некоторый круг $B(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant R\}$ положительного радиуса R с центром в точке z_0 принадлежит множеству E. Составим разностное отношение

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{где } 0 < |z - z_0| < R.$$

Если существует предел этого разностного отношения при $z \to z_0$, то функцию f называют дифференцируемой в точке z_0, а предел разностного отношения именуют производной функции f в точке z_0 и обозначают символом $f'(z_0)$ – обозначение Лагранжа; используются и другие обозначения: $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ – обозначение Лейбница или $Df(z_0)$ – обозначение Коши.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируемой в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) функции u, v дифференцируемы в точке $z_0 = (x_0, y_0)$;

2) справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0), \tag{3}$$

называемые условиями Коши–Римана.

◀ Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) = A + iB$. В этом случае справедливо равенство

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \gamma(\Delta z),$$

где $\gamma(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Это равенство эквивалентно следующему представлению приращения функции f в точке z_0:

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (A + iB)\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z.$$

Отделяя действительную и мнимую части в последнем равенстве, приходим к соотношениям

$$u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = A\Delta x - B\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta y,$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = A\Delta y + B\Delta x + \alpha\Delta y + \beta\Delta x,$$

в которых $\Delta x = Re\ \Delta z, \Delta y = Im\ \Delta z$, $\alpha = Re\ \gamma$, $\beta = Re\ \gamma$. Так как $|\alpha| \leqslant |\gamma|$, $|\beta| \leqslant |\gamma|$, то α, $\beta \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Следовательно, функции u, v дифференцируемы в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = A,\ \ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -B,\ \ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = B,\ \ \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) = A.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1, 2 теоремы 2. Положим $A = \dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0)$, $B = \dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$. Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -B$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0) = A$ в силу условий Коши–Римана. Функции u, v дифференцируемы в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, поэтому справедливы равенства

$$u(z_0 + \Delta z) - u(z_0) = A\Delta x - B\Delta y + \omega_1(\Delta z),$$

$$v(z_0 + \Delta z) - v(z_0) = B\Delta x + A\Delta y + \omega_2(\Delta z),$$

где $\omega_k(\Delta z) = o(\Delta z)$, $k = 1,\ 2$. Умножая второе равенство на i и складывая с первым, получаем соотношение

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (A + iB)\Delta z + \omega(\Delta z),$$

где $\omega(\Delta z) = \omega_1(\Delta z) + i\omega_2(\Delta z) = o(\Delta z)$. Отсюда следует дифференцируемость функции f в точке z_0 и равенство

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial x}(z_0). \tag{4}$$

Достаточность условий 1, 2 для дифференцируемости функции f в точке z_0 доказана.▶

Формула (4) имеет самостоятельное значение. Она позволяет находить производные функций комплексного переменного, основываясь на формулах действительного анализа. Пусть, например, $f(z) = e^z = e^{(x+iy)} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. В этом случае $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$, функции u, v удовлетворяют условию Коши–Римана в каждой точке z комплексной плоскости и $f'(z) = f(z) = e^z$. Если же $f(z) = Re\ z$, то $u(x, y) = x,\ v(x, y) = 0$ и условия Коши–Римана не выполняются ни в одной точке комплексной плоскости. Таким образом, весьма простая (всюду непрерывная) функция оказывается нигде не дифференцируемой! В действительном анализе подобные примеры конструируются существенно сложнее.

3. Примеры, замечания и дополнения. Для функций комплексного переменного сохраняются обычные правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного двух функций, выведенные в действительном анализе. Напомню эти правила:

$$(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2', \quad (f_1 - f_2)' = f_1' - f_2',$$

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2', \quad \left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{f_2^2}.$$

Суперпозиция дифференцируемых функций дифференцируема; справедливо цепное правило дифференцирования: $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$. Сохраняется правило дифференцирования обратной функции :

$$(f^{-1})'(w) = 1/f'(z),$$

где $w = f(z), z = f^{-1}(w)$. Имеют место следующие равенства

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)' = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$$

$$(e^z)' = e^z, \qquad (\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$ называется аналитической в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, если она дифференцируема в каждой точке этой области и производная f' непрерывна в этой области. Для аналитичности функции f в области Ω необходимо и достаточно, чтобы функции $u = Ref$, $v = Imf$ были непрерывно дифференцируемы в области Ω и выполнялись соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{всюду в области } \Omega.$$

Функция w называется гармонической в области Ω, если она имеет частные производные $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ и их сумма равняется нулю. Например, функция $u = x^2 - y^2$ определена и гармонична во всей плоскости OXY. Оказывается, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Докажем это, предполагая функции $u = Ref$, $v = Imf$ дважды дифференцируемыми функциями. В силу условий Коши–Римана имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

гармоничность функции u доказана. Гармоничность функции v устанавливается аналогичным образом.

Обратно, каждой паре гармонических функций u, v, связанных условиями Коши–Римана, соответствует аналитическая функция $f = u + iv$. Подобные функции u, v называют сопряжёнными. Зная одну из них, можно найти с точностью до постоянной ей сопряжённую. В этом смысле теория аналитических функций сводится к теории гармонических функций.

1.3 Интеграл по комплексной переменной

1. Определение интеграла и основные свойства. Пусть на плоскости OXY задана кусочно-гладкая кривая Γ и $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ – кусочно-гладкие на отрезке $[a, b]$ функции, реализующие параметрическое задание кривой Γ. Пусть на кривой Γ, рассматриваемой как подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определена комплексно-значная функция f. Положим $z(t) = x(t)+iy(t)$; тогда $z'(t) = x'(t)+iy'(t)$ всюду, за исключением конечного числа точек. Имеет смысл функция $g(t) = f[z(t)]z'(t)$, определённая всюду на отрезке $[a, b]$ (за исключением конечного числа точек $t_1, \ldots, t_n$; в точках $t_1, \ldots, t_n$ доопределяем функцию $g(t)$ произвольным способом). Если функция $g(t)$ интегрируема по отрезку $[a, b]$, то соответствующий интеграл назовём интегралом от функции f по кривой Γ : итак,

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz \stackrel{def}{=} \int\limits_{a}^{b} f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{1}$$

Интеграл от функции комплексного переменного по кривой Γ легко сводится к криволинейным интегралам второго рода по той же кривой. Действительно, пусть $f = u + iv$. Справедлива цепь соотношений

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f[z(t)]z'(t)dt = \int\limits_{a}^{b} \{u[z(t)] + iv[z(t)]\}\,(x'(t) + iy'(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} (u[z(t)]\ x'(t) - v[z(t)]\ y'(t))\ dt + i\int\limits_{a}^{b} (v[z(t)]\ x'(t) + u[z(t)]\ y'(t))\ dt =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} u\,dx\ -\ v\,dy\ +\ i\int\limits_{\Gamma} v\,dx\ +\ u\,dy.$$

Равенство

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; \int_{\Gamma} u\,dx \;-\; v\,dy \;+\; i\int_{\Gamma} v\,dx \;+\; u\,dy \tag{2}$$

можно было бы принять в качестве определения интеграла от функции f по кривой Γ; это замечание полезно для тех, кто помнит свойства криволинейного интеграла второго рода. Сформулируем несколько свойств введённого интеграла; комментарии к приводимым далее соотношениям $I - VI$ даются ниже.

$$\int_{\Gamma} (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_{\Gamma} f_1(z)\,dz \;+\; \int_{\Gamma} f_2(z)\,dz. \tag{I}$$

$$\int_{\Gamma} \lambda f(z)\,dz \;=\; \lambda\int_{\Gamma} f(z)\,dz. \tag{II}$$

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,dz \;=\; \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \;+\; \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz. \tag{III}$$

$$\int_{-\Gamma} f(z)\,dz \;=\; -\int_{\Gamma} f(z)\,dz. \tag{IV}$$

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \;\leqslant\; \int_{\Gamma} |f(z)|\,ds. \tag{V}$$

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \;\leqslant \sup_{\Gamma} |f|\; l(\Gamma). \tag{VI}$$

Комментарий к соотношениям $(I) - (VI)$. Равенства $(I), (II)$ выражают свойство линейности интеграла, равенство (III) означает аддитивность интеграла: интеграл по объединению двух кривых равен сумме интегралов по соответствующим кривым. В равенстве (IV) через $-\Gamma$ обозначается та же кривая Γ, но проходимая в противоположном направлении, иначе говоря, интеграл по кривой зависит от направления обхода этой кривой и при изменении направления обхода интеграл меняется на противоположное число. С подобной ситуацей читатель встречался при изучении криволинейных интегралов второго рода. Приведём доказательство соотношения (V); остальные соотношения устанавливаются аналогично. Используя равенство (1) и определение криволинейного интеграла первого рода, получаем последовательно

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f[z(t)]z'(t)|\,dt = \int\limits_{\Gamma} |f(z)|\,ds,$$

что и приводит к требуемому результату. В соотношении (VI) $l(\Gamma)$ – длина кривой Γ; оценка (VI) вытекает из свойства монотонности криволинейного интеграла первого рода.

В предшествующих определениях не исключается случай замкнутой кривой $z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$, возникающий, если $z(a) = z(b)$. Интеграл от функции f по замкнутой кривой Γ иногда обозначают символом

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz.$$

В качестве примера вычислим интеграл

$$\oint\limits_{C(z_0,R)} \frac{dz}{z - z_0}\ ;$$

здесь $C(z_0, R)$– окружность радиуса $R > 0$, проходимая в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки. Окружность $C(z_0, R)$ может быть задана параметрическим уравнением $z = z_0 + R\,e^{it} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Имеем теперь $z'(t) = Rie^{it}$, следовательно,

$$\oint\limits_{C(z_0,R)} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = 2\pi i. \qquad (3)$$

2. Теорема Коши. Кусочно-гладкую замкнутую кривую, не имеющую точек самопересечения, будем называть замкнутым контуром. Если комплекснозначная функция $z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$ задаёт замкнутый контур Γ, то $z(t_1) \neq z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ за исключением случая, когда $t_1 = a, t_2 = b$. Замкнутый контур можно рассматривать как границу некоторой ограниченной плоской области Ω, называемой внутренней относительно контура. В качестве положительного направления обхода контура условимся принимать направление, при котором внутренняя область остаётся слева от направления движения. Ниже будет использоваться следующий вариант формулы Грина: если функции P, Q непрерывны в замкнутой

области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, а их частные производные непрерывны в Ω, то

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx \;+\; Q\,dy \;=\; \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \;-\; \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

Теорема 1 (Теорема Коши). *Пусть функция f аналитична в области Ω, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, и непрерывна в $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Тогда интеграл от функции f по контуру Γ равен нулю:*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{5}$$

◀ Согласно формуле (2)

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz \;=\; \oint\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy \;+\; i\oint\limits_{\Gamma} v\,dx + u\,dy.$$

Применим формулу Грина (4) к обоим криволинейным интегралам, находящимся в правой части. С учётом соотношений Коши–Римана имеем

$$\oint\limits_{\Gamma} u\,dx - v\,dy = \iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy = 0,$$

$$\oint\limits_{\Gamma} v\,dx \;+\; u\,dy \;=\; \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Отсюда и вытекает требуемый результат.▶

Теорема 1 применима, в частности, если $\overline{\Omega} \subset \mathscr{D}$, где $\mathscr{D}$– область аналитичности функции f. Приведём обобщение теоремы 1 на случай многосвязной области Ω. В этом случае граница области Ω состоит из внешнего контура Γ_0 и внутренних контуров $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Полная граница Γ области Ω ориентируется таким образом, что область Ω при обходе контура Γ остаётся слева: $\Gamma = \Gamma_0 - \Gamma_1 - \cdots - \Gamma_n$.

Теорема 2. *Пусть функция f является аналитической в многосвязной области Ω, ограниченной извне контуром Γ_0, а изнутри – контурами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. Пусть функция f непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Тогда справедливо равенство (3).*

◀**Доказательство** сохраняется, поскольку формула Грина верна и для многосвязных областей.▶

Замечание. Известны прямые доказательства теорем 1, 2, не опирающиеся на формулу Грина (по этому поводу см., например, [3], [5]).

3. Интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема 3. *Пусть функция f определена и непрерывна в некоторой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}$, а интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру Γ, целиком лежащему в данной области, равен нулю. Тогда функция*

$$\Phi(z) = \int_a^z f(\zeta)\, d\zeta \stackrel{def}{=} \int_{L_{(a,z)}} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (6)$$

(a – фиксированная точка области Ω, $L_{(a,z)}$ – путь, соединяющий точки a, z из области Ω и не выходящий за пределы этой области) является аналитической в области Ω и $\Phi'(z) = f(z) \forall z \in \Omega$.

Доказательство. Сразу же отметим, что интеграл в правой части (6) зависит лишь от a и z; это вытекает из того, что интеграл от функции f по любому содержащемуся в области Ω замкнутому контуру равен нулю. Фиксируем точку z из Ω и число $R > 0$ так, что замкнутый круг $B(z, R)$ радиуса R с центром в точке z принадлежит области Ω. Пусть $0 < |\Delta z| < R$. Тогда $z + \Delta z \in \Omega$ и справедливо равенство

$$\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} \left(f(\zeta) - f(z)\right) d\zeta.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\left| \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leqslant \max_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|.$$

В силу непрерывности функции f в точке z для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое значение $\delta > 0$, что $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$, если $|\zeta - z| < \delta$. Объединяя установленные выше соотношения, приходим к равенству

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = f(z),$$

означающему дифференцируемость функции Φ, при этом $\Phi'(z) = f(z)$ для любой точки z из Ω. Поскольку производная функции Φ всюду существует и непрерывна, то всё доказано.▶

1.4 Формула Коши и её следствия

1. Вывод формулы Коши. Пусть функция f аналитична в области $\Omega \in \mathbb{C}$, ограниченной кусочно-гладким контуром $\Gamma = \partial\Omega$, и непрерывна на замыкании $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ этой области. Фиксируем точку z_0 из области Ω. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) \ = \ \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Функция φ аналитична в области Ω за исключением точки z_0. Выберем число $\rho > 0$ настолько малым, что круг $B(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant \rho\}$ принадлежит области Ω. Обозначим через C_ρ границу круга $B(z_0, \rho)$, проходимую в положительном направлении. Функция φ аналитична в области Ω^*, заключённой между контурами Γ и C_ρ, и непрерывна на её замыкании. Согласно теореме Коши интеграл от функции φ по границе Γ^* области Ω^* равен нулю. Но $\Gamma^* = \Gamma - C_\rho$, следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \ = \ \oint\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\,. \tag{1}$$

Положим $z = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Преобразуем правую часть равенства (1). Имеем

$$\oint\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = i \int\limits_0^{2} \pi\, f(z_0 + \rho e^{it})\, dt = 2\pi i f(z_0) +$$

$$+ i \int\limits_0^{2\pi} \left\{ f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0) \right\}\, dt.$$

В силу непрерывности функции f интеграл в правой части последнего равенства стремится к нулю при $\rho \to 0$. Следовательно,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \ \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{2}$$

Интеграл в правой части (2) выражает значение аналитической функции в точке z_0 через её значения на контуре Γ, содержащем точку z_0 внутри себя. Этот интеграл называют интегралом Коши. Аналог формулы (2) справедлив и для многосвязной области Ω, граница которой представляет объединение конечного числа кусочно-гладких контуров.

2. Формула среднего значения. Пусть функция f аналитична в области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Возьмём окружность C_R с центром в точке z_0, содержащуюся в области Ω вместе с ограничиваемым ею кругом. Согласно формуле Коши

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Сделаем замену переменных $z = z_0 + Re^{it}$ $\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Отсюда вытекает равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, R\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(z)\, ds \tag{3}$$

Формула (3) носит название формулы среднего значения и выражает значение аналитической функции в центре окружности как среднее из её граничных значений.

3. Принцип максимума модуля.

Теорема 1. *Пусть функция f аналитична в ограниченной области Ω и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Тогда или функция $f(z)$ постоянна, или максимальное значение функции $|f(z)|$ достигается только на границе области.*

◀ Действительная функция $|f(z)) = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)}$ двух действительных переменных x, y непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\overline{\Omega}$. Поэтому она достигает максимального значения M в некоторой точке $z_0 = x_0 + iy_0$ данного множества $\overline{\Omega}$. Если $M = 0$, то функция f постоянна, и всё доказано. Пусть $M > 0$. Предположим, что $|f(z_0)| = M$ для некоторой точки z_0 из области Ω. Построим круг $K_0 = B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant R\}$ положительного радиуса R с центром в точке z_0, $K_0 \subset \Omega$, $C_R = \partial B(z_0, R)$= граница круга K_0. Из формулы (3) вытекает оценка

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi R} \left| \int\limits_{C_R} f(z)\, dz \right| \leqslant \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} |f(z)|\, ds \leqslant M.$$

Поскольку $|f(z_0)| = M$, то справедливо соотношение

$$\int\limits_{C_R} |f(z)|\, ds \ = \ 2\pi R M.$$

Из этого соотношения следует, что $|f(z)| = M$ на всей окружности C_R. Действительно, $|f(z)|$ не может быть больше M ни в одной точке C_R. Если предположить, что в какой-нибудь точке z_1 из C_R модуль $|f(z_1)| < M$, то в силу непрерывности функции $|f(z)|$ имеем, что $|f(z)| < M$ в некоторой окрестности точки z_1; в частности, можно указать такую дугу L окружности C_R, что $|f(z)| < M - \varepsilon$ для всех z из L и длина l дуги L положительна; здесь ε – некоторое положительное число. Тогда

$$\int\limits_{C_R} |f(z)|\,ds \;=\; \int\limits_{L} |f(z)|\,ds \;+ \int\limits_{C_R\setminus L} |f(z)|\,ds \;\leqslant$$

$$\leqslant (M-\varepsilon)l + (2\pi R - l)M < 2\pi R\; M.$$

Полученное противоречие и доказывает постоянство функции $|f(z)|$ на C_R. То же будет иметь место на любой окружности меньшего радиуса с центром в точке z_0, а, следовательно, и во всём круге K_0. Теперь легко показать, что это же значение функция $|f(z)|$ имеет в любой другой внутренней точке z^* из Ω. Для этого соединим точки z_0 и z^* цепью кругов $K_0, K_1, \ldots, K_n$ так, чтобы центр каждого круга K_m принадлежал внутренности предшествующего круга. На каждом из этих кругов функция $|f(z)|$ принимает постоянное значение M, в частности, $|f(z)| = M$. Ввиду произвольности выбора точки z^* из Ω функция $|f(z)|$ постоянна на всей области Ω.

Покажем, что не только модуль функции f постоянен, но и сама она постоянна. Действительно, поскольку $u^2(x,y) + v^2(x,y) = M^2\;\forall (x,y) \in \Omega$, то

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0.$$

Рассматривая полученные соотношения как систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$, получаем, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$. В силу условий Коши–Римана отсюда вытекает, что частные производные функций u, v по переменной y также равны 0. Следовательно, функции u, v, f постоянны в области Ω. ►

Теорема 2 (Принцип максимума). *Пусть в условиях теоремы 1 функция f не равна постоянной. Тогда*

$$|f(z)| < \max_{\partial\Omega} |f| \quad \textit{для всех } z \textit{ из области } \Omega.$$

Теорема 2 есть очевидное следствие теоремы 1.

4. Правило Лейбница. Пусть Ω – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, L – кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}$, взаимное расположение Ω и L может

быть произвольным. Пусть на $\Omega \times L$ определена функция $\varphi(z,\zeta) = u(x,y,\xi,\eta) + iv(x,y,\xi,\eta)$, обладающая свойствами:

1) при любом $\zeta = \xi + i\eta$ из L функция $\varphi(\cdot,\zeta) : \Omega \to \mathbb{C}$ аналитична в области Ω;

2) функция $\varphi(z,\zeta)$ и её производная ${\varphi_z}'(z,\zeta)$ непрерывны по (z,ζ). Введём в рассмотрение интеграл

$$F(z) \ = \int\limits_L \varphi(z,\zeta)\,d\zeta = U(x,y) + iV(x,y), \tag{1}$$

зависящий от параметра z и представляющий функцию, определенную в области Ω.

Теорема 1 (Правило Лейбница). *Функция $F(z)$ аналитична в области Ω и*

$$F'(z) = \int\limits_L {\varphi_z}'(z,\zeta)\,d\zeta. \tag{2}$$

◀ Справедливо равенство

$$U(x,y) = \int\limits_L u(x,y,\xi,\eta)\,d\xi - v(x,y,\xi,\eta)\,d\eta\,.$$

Поскольку функции u и v обладают частными производными, непрерывными по совокупности переменных, то частные производные функции $U(x,y)$ по переменным x, y можно вычислить при помощи известного из действительного анализа правила Лейбница:

$$U_x{}'(x,y) = \int\limits_L u_x{}'\,d\xi - v_x{}'\,d\eta\,,$$

$$U_y{}'(x,y) = \int\limits_L u_y{}'\,d\xi - v_y{}'\,d\eta.$$

Функции U'_x, U'_y непрерывны в области Ω. Аналогичным образом устанавливаются равенства

$$V_x{}'(x,y) = \int\limits_L v_x{}'\,d\xi + u_x{}'\,d\eta,$$

$$V_y{}'(x,y) = \int\limits_L v_y{}'\,d\xi + u_y{}'\,d\eta.$$

Используя условия Коши–Римана для функций $u(\cdot,\zeta)$, $v(\cdot,\zeta)$ и последние равенства, можно убедиться в том, что и для функций U, V выполнены условия Коши–Римана. Это доказывает аналитичность функции $F = U + iV$ в области Ω.

Имеем далее

$$F'(z) = U_x{}'(x,y) + iV_x{}'(x,y) = \int\limits_L u_x{}'\, d\xi - v_x{}'\, d\eta +$$

$$+ i\int\limits_L v_x{}'\, d\xi + u_x{}'\, d\eta = \int\limits_L \varphi_z{}'(z,\zeta)\, d\zeta,$$

что и приводит к равенству (2).▶

5. Производные аналитической функции. Пусть комплексная функция f аналитична в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \times\Gamma$. Согласно формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3}$$

Функция φ, определяемая на $\Omega \times \Gamma$ равенством $\varphi(z,\zeta) = f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$, удовлетворяет предположениям теоремы 1 (с заменой L на Γ). Применяя правило Лейбница, приходим к равенству

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta. \tag{4}$$

К интегралу (4) можно снова применить правило Лейбница. В итоге возникает аналогичное интегральное представление второй производной

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta.$$

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет указанным в начале пункта предположениям. Тогда f бесконечно дифференцируема в области Ω и для любого натурального числа n справедлива формула*

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{5}$$

◀ Для доказательства достаточно n раз применить правило Лейбница к интегралу (3).▶

6. Теоремы Морера и Лиувилля. Рассмотрим ещё два следствия формулы Коши.

Теорема 3 (Теорема Морера). *Пусть функция f непрерывна в односвязной области Ω и интеграл от неё по любому замкнутому контуру, целиком принадлежащему Ω, равен 0. Тогда функция f аналитична в области Ω.*

◀ Выше было установлено, что в условиях теоремы функция

$$\Phi(z) = \int\limits_a^z f(\zeta)\, d\zeta$$

аналитична в области Ω и $\Phi'(z) = f(z)$. Как было только что доказано, производная аналитической функции также является аналитической функцией, т. е. существует непрерывная производная функции $\Phi'(z)$, а именно функция $\Phi''(z) = f'(z)$, что и приводит к нужному результату. ▶

Теорема 4 (Теорема Лиувилля). *Ограниченная и аналитическая во всей комплексной плоскости функция постоянна.*

◀ Пусть функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ аналитична и $|f(z)| \leqslant M\, \forall z \in \mathbb{C}$. Из формулы (4) вытекает равенство

$$f'(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Поэтому

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|\zeta - z| = R} \frac{|f(\zeta)|}{R^2}\, ds \;\leqslant\; \frac{M}{R}.$$

Так как радиус R можно выбрать сколь угодно большим, а $|f'(z)|$ не зависит от R, то $f'(z) \equiv 0$. Отсюда следует постоянство функции f.▶

Следствие (основная теоремы алгебры). *Всякий многочлен степени $n \geqslant 1$ имеет хотя бы один корень.*

◀ Если $P(z)$ – многочлен степени $n \geqslant 1$, то

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{P(z)} = 0.$$

Предположение $P(z) \neq 0\, \forall z \in \mathbb{C}$ означало бы, что функция $1/P(z)$ аналитична и ограничена на всей комплексной плоскости. В силу теоремы Лиувилля эта функция постоянна. Противоречие. ▶

Упражнение 1. *Определить семейство линий в z-плоскости, заданных соотношениями*

$$1)\ Re\,\frac{1}{z} = C; \quad 2)\ Im\,\frac{1}{z} = C; \quad 3)\ Rez^2 = C;$$

$$4)\ Imz^2 = C \quad (-\infty < C < \infty).$$

Упражнение 2. *Найти области, в которых функция*

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

будет аналитической.

Упражнение 3. *Найти аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если её действительная часть*

$$a)\ u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x + u - \frac{y}{x^2+y^2}; \quad b)\ u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2};$$

$$c)\ u(x,y) = arctg\frac{y}{x} \quad (x > 0)\,.$$

Упражнение 4. *Вычислить интеграл*

$$\int\limits_C |z|\bar{z}\,dz\,,$$

где C – замкнутый контур, состоящий из верхней полуокружности $|z| = 1$ и отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1, y = 0$.

Упражнение 5. *Найти длину кривой, на которую с помощью функции e^z отображается отрезок $y = x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.*

Упражнение 6. *Для функции $w = \frac{1}{z}$ найти образы следующих линий:*

1) семейства окружностей $x^2 + y^2 = ax$;
2) семейства окружностей $x^2 + y^2 = by$;
3) пучка параллельных прямых $y = x + b$;
4) пучка прямых $y = kx$;
5) пучка прямых, проходящих через заданную точку $z_0 \neq 0$;
6) параболы $y = x^2$.

В упражнениях 7 – 10 Г означает кусочно-гладкий замкнутый контур.

Упражнение 7. *Вычислить интеграл*

$$\oint\limits_\Gamma \frac{dz}{z^2+9}\,dz\,,$$

если

1) точка $3i$ *лежит внутри контура* Γ*, а точка* $-3i$ *вне его;*

2) точка $-3i$ *лежит внутри контура* Γ*, а точка* $3i$ *вне его;*

3) точки $\pm 3i$ *лежат внутри контура* Γ*.*

Упражнение 8. *Какое число различных значений может принимать интеграл*

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{P(z)},$$

где $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) \quad (z_k \neq z_l)$ *и контур* Γ *не проходит ни через одну из точек* z_k *?*

Упражнение 9. *Вычислить интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z\,dz}{z^2 + a^2},$$

если контур Γ *содержит внутри себя круг* $|z| \leqslant a$*.*

Упражнение 10. *Вычислить интеграл*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{e^z\,dz}{z(1 - z)^3}\,,$$

если

1) точка 0 лежит внутри, а точка 1 вне контура Γ*;*

2) точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура Γ*;*

3) точки 0 и 1 обе лежат внутри контура Γ*.*

Глава 2

Степенные ряды

2.1 Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций

1. Равномерная сходимость функциональных рядов. Пусть на множестве $E \subset \mathbb{C}$ определена бесконечная последовательность функций $w_n(z)$. Выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z) \tag{1}$$

называют функциональным рядом. Ряд (1) поточечно сходится на множестве E, если при любом z_0 из E сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(z_0).$$

Особую роль играет понятие равномерной сходимости функционального ряда. Напомним соответствующее определение и два признака равномерной сходимости. Ряд (1) называют равномерно сходящимся на множестве E к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что

$$|f(z) - \sum_{k=0}^{n} w_k(z)| < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant n_0$ и z из множества E. Справедлив

Критерий Коши. *Необходимым и достаточным условием равномерной сходимости ряда (1) на множестве E является существование* *для любого $\varepsilon > 0$ такого натурального числа $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что*

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} w_k(z)\right| \ < \ \varepsilon$$

для всех z из E и $n \geqslant n_0$, $p = 1, 2, \ldots$.

Функциональный ряд (1) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,, \tag{2}$$

если

$$|w_n(z)| \leqslant c_n \quad \text{для всех} \quad z \quad \text{из} \quad E \quad \text{и} \quad n \gg 1.$$

Признак Вейерштрасса. *Если функциональный ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом (2), то ряд (1) равномерно сходится на множестве E.*

2. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Теорема 1. *Если функции $w_n(z)$ непрерывны на множестве E, а ряд (1) равномерно сходится на E к функции $f(z)$, то функция $f(z)$ также непрерывна на множестве E.*

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберём число n_0 так, чтобы

$$\left|f(z) - \sum_{k=0}^{n_0} w_k(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\,\forall z \in E.$$

Пусть $z_0 \in E$. Функция

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n_0} w_k(z)$$

непрерывна в точке z_0. Поэтому найдётся такое $\delta > 0$, что если $|z - z_0| < \delta$ и $z \in E$, то $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно,

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant |f(z) - g(z)| + |g(z) - g(z_0)| + |g(z_0) - f(z_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В силу произвольности z_0 из E и $\varepsilon > 0$ функция f непрерывна на множестве E.▶

Теорема 2. *Пусть функции $w_k(z)$ $k = 0, 1, \ldots$ определены и непрерывны на кусочно-гладком контуре $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Если ряд (1) равномерно сходится на контуре Γ к функции $f(z)$, то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\Gamma} w_k(z)\,dz.$$

◀ Положим $f_n(z) = w_0(z) + w_1(z) + \cdots + w_n(z)$, обозначим через l длину контура Γ. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{l} \quad (n > n_0,\, z \in \Gamma)\,.$$

Следовательно,

$$\left|\int\limits_\Gamma f(z)\,dz - \int\limits_\Gamma f_n(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_\Gamma |f(z) - f_n(z)|\,ds < \frac{\varepsilon}{l}\,l \;=\; \varepsilon$$

при $n > n_0$. ▶

3. Теоремы Вейерштрасса.

Теорема 3. (Первая теорема Вейерштрасса). *Пусть функции* $w_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots$ *аналитичны в некоторой области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *и ряд (1) сходится равномерно на любом замкнутом и ограниченном множестве* $E \subset \mathbb{C}$ *к функции* $f(z)$. *Тогда*

1) функция f *аналитична в области* Ω*;*

2) для любого натурального числа m *справедливо равенство*

$$f^{(m)}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(m)}(z), \tag{3}$$

означающее, что ряд (1) можно почленно дифференцировать.

◀ 1. Предположим вначале, что Ω – односвязная область. Возьмём любой замкнутый кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset \Omega$. Очевидно, что Γ – замкнутое ограниченное подмножество области Ω, поэтому ряд (1) равномерно сходится на контуре Γ. В силу теорем 1, 2 ряд (1) можно почленно проинтегрировать по контуру Γ. Следовательно,

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_\Gamma w_k(z)\,dz \;=\; 0.$$

В силу теоремы Морера функция f аналитична в области Ω. В случае неодносвязной области Ω достаточно доказать аналитичность в любом круге, содержащемся в области Ω.

2. Фиксируем произвольную точку z_0 из области Ω. Пусть $B(z_0, R)$– замкнутый круг радиуса $R > 0$, целиком содержащийся в области Ω, C_R– граница круга $B(z_0, R)$. Справедливо равенство

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k(z)}{(z - z_0)^{m+1}}\;. \tag{4}$$

Ряд в правой части (4) сходится равномерно на окружности C_R. Почленное интегрирование ряда (4) влечёт за собой равенство

$$f^{(m)}(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(m)} z_0)$$

для произвольной точки z_0 из области Ω. ▶

Теорема 4. (Вторая теорема Вейерштрасса). *Пусть функции* $w_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots$ *аналитичны в ограниченной области* Ω, *непрерывны на* $\overline{\Omega}$ *и ряд (1) равномерно сходится на границе* Γ *области* Ω. *Тогда ряд (1) равномерно сходится в* $\overline{\Omega}$.

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем натуральное число n_0 так, чтобы

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z) \right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n \geqslant n_0,\ p = 1, 2, \ldots,\ z \in \Gamma.$$

В силу принципа максимума имеем

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z) \right| = \max_{z \in \Gamma} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z) \right| < \varepsilon$$

при любом $n \geqslant n_0$. Теорема вытекает из критерия Коши, применённого в процессе доказательства дважды: вначале как необходимое условие равномерной сходимости ряда (1) на Γ, затем как достаточное условие равномерной сходимости ряда (1) на $\overline{\Omega}$.▶

2.2 Степенные ряды и ряд Тейлора

1. Степенные ряды. Степенным рядом называют функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$

где z_0, c_k – фиксированные комплексные числа, при этом z_0 именуют центром разложения степенного ряда (1), числа c_k – коэффициентами разложения. Ряд (1), очевидно, сходится при $z = z_0$. Бывают степенные ряды, для которых z_0 – единственная точка сходимости. Введём в рассмотрение числа

$$l = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{c_n}, \quad R = \frac{1}{l}, \quad \text{считая, что } \frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty. \tag{2}$$

Роль числа R, называемого радиусом сходимости степенного ряда (1), выясняет

Теорема 1 (Теорема Абеля – Адамара). *Область сходимости ряда (1) содержится в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant R$ и содержит открытый круг $|z - z_0| < R$; в любом круге $|z - z_0| \leqslant \rho < R$ степенной ряд сходится равномерно.*

Теорема доказывалась ранее. В круге $|z - z_0| < R$ ряд (1) сходится к аналитической функции. Действительно, элементы ряда (1) $w_k(z) = c_k(z - z_0)^k$ представляют собой аналитические на всей комплексной плоскости функции. Ряд (1) равномерно сходится на любом замкнутом и ограниченном подмножестве круга $|z - z_0| < R$. Следовательно, согласно первой теореме Вейерштрасса сумма ряда есть аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз, причём радиусы сходимости возникающих степенных рядов одинаковы и равны радиусу сходимости исходного ряда.

Коэффициенты c_k степенного ряда (1) выражаются через значения его суммы $f(z)$ и производные функции f по формулам

$$c_0 = f(z_0), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{3}$$

Действительно, положив $z = z_0$ в равенстве

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k\,, \tag{4}$$

получаем $c_0 = f(z_0)$. Продифференцировав равенство (4) n раз и положив $z = z_0$, получим $f^{(n)}(z_0) = c_n n!$. Таким образом, равенство (4) может быть записано в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n\,. \tag{5}$$

Это означает, что разложение функции в степенной ряд по степеням $z - z_0$ обязательно совпадает с её разложением в ряд Тейлора.

2. Теорема Тейлора. Итак, степенной ряд внутри круга сходимости определяет некоторую аналитическую функцию. Возникает естественный вопрос: можно ли функцию, аналитическую внутри некоторого круга, разложить в степенной ряд, сходящийся в этом круге к данной функции.

Теорема 2 (Теорема Тейлора). *Функция f, аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$, может быть представлена в этом круге сходящимся степенным рядом по степеням $z - z_0$.*

◀ Доказательство проведём в случае $z_0 = 0$. Выберем произвольную точку z внутри круга $|\ \zeta\ | < R$ и построим окружность C_r с центром в точке 0 радиуса $r < R$, $r > |z|$. Так как точка z есть внутренняя точка круга $|z| \leqslant r$, в котором функция f аналитична, то в силу формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6}$$

Воспользуемся следующим вариантом формулы для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{1}{1 - \dfrac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\zeta^k}\,. \tag{7}$$

На окружности C_r ряд (7) сходится равномерно по ζ, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{r^k}.$$

Подставляя (7) в (6) и интегрируя почленно, получаем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta\ z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\ ,$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta. \tag{8}$$

Имеем, следовательно,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{9}$$

В формуле (8) окружность C_r можно заменить любым кусочно-гладким замкнутым контуром Γ, лежащим в круге $|z| < R$ и содержащим точку 0 внутри себя. Так как z – произвольная точка круга $|z| < R$, то равенство

(9) справедливо во всём этом круге, т. е. искомое разложение функции f в степенной ряд найдено. В рассматриваемой ситуации

$$c_0 = f(0),\ c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и, таким образом, коэффициенты c_n определяются однозначно.

В случае $z_0 = 0$ теорема доказана; общий случай сводится к рассмотренному путём сдвига. ▶

3. Примеры и замечания. Теорема 2 означает эквивалентность понятий аналитической функции как функции непрерывно дифференцируемой в области Ω и функции, допускающей разложение в степенной ряд в окрестности каждой своей точки. Этот факт находит широкое применение при решении многочисленных прикладных вопросов.

Отметим, что если функция f аналитична в области Ω, то радиус сходимости ряда Тейлора (5) этой функции не меньше, чем расстояние от точки z_0 до границы области Ω. Это позволяет достаточно просто находить радиус сходимости рядов Тейлора; в частности, можно не искать коэффициенты c_n, прибегая затем к формуле Коши–Адамара (2).

Если функция f аналитична во всей комплексной плоскости, то для любой точки z_0 из $\mathbb{C}$ функция f разлагается в ряд по степеням $z-z_0$ и радиус сходимости соответствующего степенного ряда равен ∞. Например, так обстоит дело с функциями $e^z, \cos z, \sin z$. Поскольку

$$(e^z)^{(n)} \ = \ e^z, \quad (\cos z)^{(n)} \ = \ \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\sin z)^{(n)} \ = \ \sin\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

то соответствующие разложения имеют вид

$$e^z \ = \ e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}, \quad \cos z \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(z_0 + \frac{n\pi}{2}\right)\ \frac{(z-z_0)^n}{n!},$$

$$\sin z \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\ \sin\left(z_0 + \frac{n\pi}{2}\right)\ \frac{(z-z_0)^n}{n!}.$$

В качестве примера иного рода рассмотрим функцию

$$tgz \ \stackrel{def}{=} \ \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Эта функция определена и аналитична в области $\Omega \ := \ \{z \in \mathbb{C},\ z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Если $z_0 \in \Omega$, то функция tgz аналитична в круге $|z - z_0| < R$, где

$$R \ = \ min\{\left|z_0 - \frac{\pi}{2} - n\pi\right|,\ n = 0,\ \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Определённое таким образом число R совпадает с радиусом сходимости ряда Тейлора функции tgz с центром в точке z_0:

$$tgz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tg)^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{10}$$

Действительно, число R – это расстояние от точки z_0 до границы области Ω, поэтому радиус сходимости ряда (10) не меньше R. Но больше чем R радиус сходимости ряда (10) быть не может, поскольку функция f не аналитична (и даже не определена!) в точках $\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Например, для $z_0 = 0$ соответствующее число $R = \pi/2$; если же $z_0 = i$, то $R = \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

2.3 Продолжение аналитических функций

1. Кратность нуля аналитической функции. Пусть f– аналитическая в области $G \subset \mathbb{C}$ функция, $a \in G$. Тогда в некоторой окрестности U точки a справедливо равенство

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n. \tag{1}$$

Число a назовем нулём функции f, если $f(a) = 0$. Может случиться, что не только $f(a)$, но и производные $f'(a), ..., f^{(k-1)}(a)$ равны 0, однако $f^k(a) \neq 0$.Число k называют кратностью нуля a функции f. Из (1) вытекает равенство

$$f(z) = (z - a)^k \varphi(z), \tag{2}$$

в котором $\varphi(z)$ –аналитическая в окрестности точки a функция, причём $\varphi(a) \neq 0$. Функция $\varphi(z)$ определяется равенством

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}(z - a)^n.$$

Равенство (2) может быть положено в основу определения кратности нуля аналитической функции. Именно, число k есть кратность нуля a функции f, если имеет место равенство (2), в котором φ – аналитическая функция и $\varphi(a) \neq 0$. Оба определения кратности нуля (аналитическое и алгебраическое) эквивалентны, т. е. приводят к одному и тому же результату.

2. Теорема единственности. Для доказательства основного результата этого раздела нам потребуется

Теорема 1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области G и обращается в 0 в различных точках $z_n \in G$. Если последовательность z_n сходится к пределу a, принадлежащему той же области, то функция $f(z)$ тождественно равна нулю в области G.*

◀ Ряд (1) сходится в некотором круге с центром в точке a. Предположим, что a– нуль кратности n функции f. Тогда имеет место равенство (2). Поскольку $\varphi(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a имеем $\varphi(z) \neq 0$. Следовательно, в некоторой выколотой окрестности точки a функция f не обращается в 0. Но это противоречит условиям теоремы. Итак, все производные функции f в точке a равны 0, поэтому функция f тождественно равна 0 в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R_0\}$, содержащемся в области G.

Докажем теперь, что $f(z) = 0\,\forall z \in G$. Предположим, что $f(b) \neq 0$ для некоторого $b \in G$. Соединим точки a, b ломаной линией L, целиком содержащейся в G и отстоящей от её границы на расстояние $d > 0$. Выбрав в качестве нового центра разложения в ряд Тейлора последнюю точку a_1 пересечения кривой L с окружностью $|z-a| = R_0$, получим, что $f(z) \equiv 0$ внутри круга $|z-a_1| < R_1$, где $R_1 \geq d$. Продолжая аналогичным образом, покроем всю кривую L конечным числом кругов, радиусов не меньших d, внутри которых $f(z) = 0$. При этом точка b попадает внутрь последнего круга, тем самым $f(b) = 0$. Поскольку b – произвольная точка области G, отсюда следует, что $f(z) = 0\,\forall z \in G$. ▶

Следствие 1. *Отличная от тождественного нуля и аналитическая в области G функция имеет в каждом замкнутом ограниченном подмножестве области G лишь конечное число нулей.*

Функция комплексного переменного, аналитическая во всей плоскости, называется целой.

Следствие 2. *Целая функция в любой ограниченной области имеет лишь конечное число нулей.*

Теорема 2. *Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ аналитичны в области G. Если в G существует сходящаяся к некоторой точке $a \in G$ последовательность различных точек, в которых функции f, g совпадают, то $f(z) \equiv g(z)$.*

◀ Достаточно рассмотреть функцию $\varphi(z) = f(z) - g(z)$.▶

Теорема означает, что в области G может существовать лишь единственная аналитическая функция, принимающая заданные значения в последовательности различных точек z_n, сходящейся к точке $a \in G$. Эту теорему называют теоремой единственности.

Следствие 1. *Если функции f, h, аналитические в области G, сов-*

падают на некоторой кривой L, принадлежащей данной области, то они тождественно равны в области G.

Следствие 2. *Если функции f_1, f_2, аналитические соответственно в областях G_1, G_2, имеющих общую подобласть G, совпадают в G, то существует единственная аналитическая функция F такая, что $F(z) = f_k(z) \forall z \in G_k, k = 1, 2$.*

3. Продолжение с действительной оси. Если на отрезке $[a, b] (a < b)$ действительной оси x, содержащемся в некоторой области G комплексной плоскости, задана непрерывная функция $f(x)$, то может существовать лишь одна аналитическая функция $f(z)$, принимающая значения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Функцию $f(z)$ называют аналитическим продолжением функции $f(x)$ в комплексную область G. Примеры такого рода, относящиеся к функциям $\exp x, \cos x, \sin x$, рассматривались выше.

Наряду с продолжением в виде рядов используют интегральные представления. В качестве примера рассмотрим функцию lnx. Как известно,

$$\ln x = \int\limits_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

Определим для комплексного z функцию

$$f(z) = \int\limits_1^z \frac{1}{\zeta}\, d\zeta.$$

Подынтегральная функция аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z = 0$. Поэтому выражение имеет смысл при условии, что контур интегрирования не проходит через точку 0. При этом в любой односвязной области G комплексной плоскости, не содержащей нулевую точку, функция f является аналитической. В качестве такой области рассмотрим комплексную плоскость, разрезанную вдоль действительной оси, т. е. область $G = \{z : -\pi < arg z < \pi\}$. Функция f аналитична и $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Изучим некоторые элементарные функции комплексного переменного. Начнем с определения комплексного логарифма. Пусть дано комплексное число $z \neq 0$. Найдём комплексное число w такое, что $e^w = z$. Представим z в тригонометрической форме, а w в алгебраической форме: $z = \rho(\cos\varphi + \imath \sin\varphi), w = u + \imath v$. Отсюда

$$e^u(\cos v + \imath \sin v) = \rho(\cos\varphi + \imath \sin\varphi), u = \ln\rho, v = \varphi + 2\pi k.$$

Множество определяемых таким образом чисел w называют комплексным логарифмом числа z и обозначают символом $\operatorname{Ln} z$. Следовательно,

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + \imath(\arg z + 2\pi k)$.

Непрерывная функция $f(z)$ комплексного переменного z, определённая в области D, не содержащей точки $z = 0$, называется непрерывной ветвью логарифма, если $e^{f(z)} = z$ в любой точке $z \in D$. Вопрос о существовании непрерывных ветвей логарифма фактически уже рассматривался. Пусть, например, G – односвязная область, содержащая положительную полуось и не содержащая 0. Функция

$$f(z) = \int\limits_0^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

есть непрерывная ветвь логарифма. Действительно, $e^{f(z)} = z$ при положительных z. Отсюда (в силу теоремы единственности) следует аналогичное равенство во всей области G.

Теорема 1. *Пусть в области G существует непрерывная ветвъ $f(z)$ логарифма. Тогда все другие непрерывные ветви имеют вид $f(z)+2k\pi\imath$; обратно, для любого целого k функция $f(z)+2k\pi\imath$ является непрерывной ветвъю логарифма вместе с $f(z)$.*

◀ Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – две непрерывные ветви $\operatorname{Ln} z$. Разность $h(z) = \frac{f(z)-g(z)}{2\pi\imath}$ является функцией, непрерывной в области G и принимающей только целые значения. Так как G связна, такая функция может быть только постоянной. ▶

Главной ветвью логарифма, определенного в области D, определенной в области D, содержащей положительную полуось, называется функция, совпадающая с обычным логарифмом на положительной оси. В круге $|z-1| < 1$ она может быть определена равенством

$$\ln z = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

Обсудим теперь определение степенной функции. Пусть $z \neq 0, \alpha$ – комплексное число. Положим $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$. Функция z^α многозначна. Если $\alpha = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь, то $z^{\frac{p}{q}}$ есть q – значная функция. Действительно,

$$z^\alpha = |z|^{\frac{p}{q}} \left[\cos\frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi) + \imath \sin\frac{p}{q}(\varphi + 2k\pi)\right].$$

Придавая k значения $0, 1, ...q-1$, исчерпаем все значения z^α. В общем случае функция z^α бесконечнозначна:

$$z^\alpha = e^{\alpha Lnz} = e^{\alpha \ln r \imath \alpha(\varphi + 2k\pi)}.$$

Например, $\imath^\imath = e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$.

Для степенной функции можно ввести понятие непрерывной ветви. Каждая непрерывная ветвь логарифма определяет непрерывную ветвь степенной функции. При $|z-1| < 1$ главная ветвь степенной функции z^α может быть определена равенством

$$z^\alpha = 1 + \alpha(z-1) + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}(z-1)^n + ...$$

Упражнение 1. *Найти радиусы сходимости следующих рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n; \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+a^n)z^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n!}}{n^2}\,.$$

Упражнение 2. *При* $|z| < 1$ *найти сумму ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1}\,; \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}.$$

Упражнение 3. *Исследовать поведение степенного ряда на границе круга сходимости*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{pn}}{n}\,(p \in \mathbb{N}); \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}z^{3n-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}\,.$$

Упражнение 4. *Разложить указанные функции в степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *и найти радиус сходимости*

$$\sin^2 z; \quad \frac{1}{az+b}\,(b \neq 0); \quad \frac{z}{z^2-4z+13}.$$

Упражнение 5. *Доказать, что коффициенты* c_n *разложения*

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

удовлетворяют соотношению $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}\,(n \geqslant 2)$. Найти c_n и радиус сходимости ряда[1].

Упражнение 6. *Найти порядок нуля* $z = 0$ *для функций*:

$$z^2\left(e^{z^2}-1\right); \quad 6\sin z^3 + z^3(z^6-6); \quad e^{\sin z} - e^{tgz}\,.$$

[1]Числа c_n называются *числами Фибоначчи.*

Глава 3

Ряды Лорана и теория вычетов

3.1 Разложение функции в ряд Лорана

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

называется рядом Лорана[2]. Представим этот ряд в виде суммы двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}. \tag{2}$$

Область сходимости первого ряда есть круг $|z-a| < R_1$, где

$$R_1 = \frac{1}{l}, \qquad l = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Внутри круга сходимости этот ряд сходится к некоторой аналитической функции

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad\qquad (|z-a| < R_1).$$

Для определения области сходимости второго ряда сделаем замену $\zeta = \dfrac{1}{z-a}$. Тогда ряд примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \zeta^n.$$

[2]Лоран Пьер Альфонс (Laurent Pierre Alfonse) (1813 – 1854) – французский математик.

Он представляет обычный степенной ряд, сходящийся к некоторой аналитической функции $\varphi(\zeta)$ внутри круга сходимости. Обозначим радиус сходимости полученного степенного ряда через $\dfrac{1}{R_2}$. Тогда

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n, \qquad |\zeta| < \frac{1}{R_2}.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n}$$

сходится при $|z-a| > R_2$ к функции

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{-n} = \varphi\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Отсюда следует, что областью сходимости ряда по отрицательным степеням является внешность окружности $|z-a| = R_2$.

Итак, каждый из рядов (2) сходится в своей области сходимости к соответствующей аналитической функции. Если $R_2 < R_1$, то существует общая область сходимости этих рядов – круговое кольцо $R_2 < |z-a| < R_1$, в котором ряд (1) сходится к аналитической функции

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Если $R_2 > R_1$, то ряды общей области сходимости не имеют.

2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.

Теорема 1. *Функция $f(z)$, аналитическая в круговом кольце $R_2 < |z-a| < R_1$, однозначно представляется в этом кольце рядом Лорана.*

◀ Пусть $a = 0$. Фиксируем точку z внутри кольца $R_2 < |z| < R_1$ и построим окружности C_r, C_R с центром в 0, радиусы которых r, R удовлетворяют условиям $R_2 < r < |z| < R < R_1$. Согласно формуле Коши для многосвязной области справедливо соотношение

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

На окружности C_R выполняется неравенство $\left|\frac{z}{\zeta}\right| = \frac{|z|}{R} < 1$. Поэтому представив дробь $\frac{1}{\zeta - z}$ в виде

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

и проводя почленное интегрирование, что возможно в силу равномерной сходимости ряда на окружности C_R, получаем

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \geqslant 0.$$

Так как на C_r выполняется неравенство $\left|\frac{\zeta}{z}\right| = \frac{r}{|z|} < 1$, то аналогично предыдущему имеем

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z}\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}.$$

В результате почленного интегрирования этого ряда получим

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{-C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=1} \frac{c_{-n}}{z^n},$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{-n+1}}\,d\zeta.$$

Формулы для коэффициентов c_n можно записать в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta,$$

где C – любой контур, содержащий точку 0 внутри себя и лежащий в кольце $R_2 < |z| < R_1$. Имеем, следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Так как z – произвольная точка кольца $R_2 < |z| < R_1$, то отсюда следует, что ряд сходится к функции $f(z)$ всюду внутри данного кольца, причём сходимость равномерна на каждом компакте, содержащемся в этом кольце.

Докажем единственность разложения в ряд Лорана. Пусть имеет место равенство (1). Умножим это равенство на функцию $(z-a)^{-m-1}$, где m – целое число. Интегрируя полученное соотношение по окружности $C_R = \{z : |z-a| = R\}$ $(R_2 < R < R_1)$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{C_R} f(z)(z-a)^{-m-1}\, dz = 2\pi\imath c_m,$$

откуда и следует единственность коэффициента c_m. ▶

3. Примеры. В качестве первого примера найдем разложение в ряд Лорана функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

в кольце $1 < |z| < 2$. Очевидно, что $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$. Справедливы равенства

$$\frac{1}{z-2} = -2\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Объединяя полученные равенства, приходим к искомому результату

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \qquad (1 < |z| < 2).$$

Разложим в ряд Лорана в окрестности точки $z = 2$ функцию $g(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^3}$. Поскольку

$$e^z = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n!},$$

то

$$g(z) = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^{n-3}}{n!}.$$

В качестве последнего примера разложим в ряд Лорана функцию $h(z) = \cos \dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$ в окрестности точки $z = 1$. Воспользуемся соотношениями

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(1+\frac{n\pi}{2})}{n!}(t-1)^n, \frac{z^2-2z}{(z-1)^2} = 1 - \frac{1}{(z-1)^2},$$

непосредственным следствием которых является равенство

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(1+\frac{n\pi}{2})}{n!} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{2n}}.$$

3.2 Изолированные особые точки

1. Устранимая особая точка. Точка a называется изолированной особой точкой функции f, если f – однозначна и аналитична в круговом кольце $0 < |z-a| < R_1$, а точка a является особой точкой функции f. Как было установлено выше, функция f разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

сходящийся в кольце $0 < |z-a| < R_1$. Главной частью ряда (1) называют ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n. \tag{2}$$

Ряд (2) играет определяющую роль при исследовании поведения функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Изолированная особая точка a функции f называется:

1) устранимой точкой, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to a} f(z) = b;$$

2) полюсом, если

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty;$$

3) существенно особой точкой, если f не имеет предела в точке a.

Теорема 1. *Изолированная особая точка a функции f является устранимой в том и только в том случае, если разложение f в окрестности a не содержит главной части.*

◀Необходимость. Пусть a – устранимая особая точка. Тогда функция f имеет конечный предел в точке a, следовательно, функция f ограничена в некоторой выколотой окрестности точки a. Пусть, например, $|f(z) \leqslant M$, если $0 < |z-a| < r$. Воспользуемся равенством

$$c_n = \int\limits_{C_\rho} \frac{f(z)}{2\pi\imath(z-a)^{n+1}}\,dz,$$

в котором $0 < \rho < r, C_\rho := \{z : |z-a| = \rho\}$. Отсюда вытекает неравенство $c_n \leqslant \dfrac{M}{\rho^n}$. При $n < 0$ правая часть этого неравенства стремится к 0, если $\rho \to 0$, левая же часть от ρ не зависит. Следовательно, $c_n = 0\ \forall n < 0$ и главная часть ряда Лорана отсутствует.

Достаточность. Пусть в проколотой окрестности точки a функция f представляется разложением Лорана без главной части. Это разложение является тейлоровским и, следовательно, существует и конечен предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$. ▶

Продолжив функцию f в её устранимую особую точку по непрерывности, получим функцию, аналитическую в точке a. Этим и оправдывается термин "устранимая особая точка".

2. Полюс и существенно особая точка.

Теорема 2. *Изолированная особая точка a функции f является полюсом в том и только в том случае, если главная часть лорановского разложения f в окрестности точки a содержит лишь конечное число отличных от нуля членов.*

◀ Необходимость. Пусть a – полюс. Так как $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, то существует проколотая окрестность точки a, в которой функция f аналитична и отлична от 0. В этой окрестности функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ аналитична, причём $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = 0$. Следовательно, a является устранимой особой точкой (нулём) функции φ и в окрестности точки a справедливо разложение

$$\varphi(z) = \sum_{n=p}^{\infty} b_n(z-a)^n,$$

в котором $b_p \neq 0$. Но тогда

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{h(z)}{(z-a)^p}. \tag{3}$$

Здесь $h(z)$ – аналитическая в окрестности точки a функция, причём $h(a) \neq 0$; справедливо разложение;

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Подставляя это разложение в формулу (1), получаем

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причём $c_{-p} \neq 0$. Тогда $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^p}$, где

$$h(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^{n+p}.$$

Отсюда видно, что $\lim\limits_{z\to a} h(z) = c_{-p} \neq 0$. Но тогда

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty,$$

а это означает, что a – полюс функции f. ►

Порядком полюса a называется наибольшее из тех натуральных чисел n, для которых $c_{-n} \neq 0$. Из доказательства теоремы 2 видно, что порядок полюса a функции f совпадает с порядком нуля a функции $\dfrac{1}{f}$.

Теорема 3. *Изолированная особая точка a функции f является существенно особой в том и только в том случае, если главная часть лорановского разложения f в окрестности точки a содержит бесконечно много отличных от нуля членов.*

◄Теорема содержится в теоремах 1, 2. Действительно, если главная часть лорановского разложения содержит бесконечное число членов, то a не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом. Обратно, если a – существенно особая точка, то главная часть содержит бесконечно много отличных от нуля членов. ►

3. Изолированная бесконечно удалённая особая точка. Бесконечно удалённая точка ∞ называется изолированной особой точкой аналитической функции f, если можно указать такое r, что функция f аналитична в области $G_r := \{z : |z| > r\}$. Терминологию, введенную выше для конечных особых точек, сохраним и в случае $a = \infty$. Обозначим $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$. Тогда

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 0} \varphi(z).$$

Поэтому функция φ имеет в 0 ту же особенность, что и функция f в бесконечности. В области G_r функция f разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n. \tag{4}$$

В бесконечности отрицательные степени стремятся к нулю, поэтому особенность определяется совокупностью положительных степеней в разложении (4). Выясним, например, когда ∞ есть полюс для функции f. В этом случае 0 есть полюс функции φ, поэтому

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=-p}^{\infty} b_n \zeta^n.$$

Заменяя здесь $\zeta = \dfrac{1}{z}$, получаем разложение функции f в кольце G_r :

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

Его главная часть содержит конечное число членов. Аналогично рассматривается случай устранимой и существенно особой точек.

В заключение рассмотрим несколько примеров.

1) Функция $f(z) = \dfrac{\sin z}{z} + \dfrac{2}{(z-3)^4} + \cos\dfrac{1}{z-2} + e^z$ имеет особые точки всех видов. Для неё 0 — устранимая особая точка, 3 есть полюс четвёртого порядка, 2 и ∞ — существенно особые точки.

2) Функция $g(z) = \dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{z}$. Особые точки — числа вида $2k\pi\imath, k \in \mathbb{Z}$.

3) Многочлен $h(z)$ степени k. Единственная особая точка : ∞ — полюс порядка k.

3.3 Вычет аналитической функции

1. Основная теорема. Пусть точка a является изолированной особой точкой аналитической функции f. Тогда в некоторой выколотой окрестности точки a справедливо разложение функции f в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz. \tag{1}$$

В формуле (1) γ – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a. В частности,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz\,. \tag{2}$$

Вычетом функции f в точке a называется коэффициент c_{-1} ряда Лорана, представляющего функцию f в выколотой окрестности точки a. Обозначение вычета

$$Res[f,a] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz.$$

Если a является устранимой особой точкой функции f, то $Res[f,a] = 0$. В ряде случаев для вычисления вычетов можно использовать разложение функции в ряд Лорана. Используя разложения

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}, \qquad \frac{\sin z}{z^6} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-5}}{(2n+1)!},$$

$$z\cos\frac{1}{z+1} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z+1)^{2n}},$$

приходим к равенствам

$$Res[e^{\frac{1}{z}},0] = 1,\ Res[\frac{\sin z}{z^6},0] = \frac{1}{120},\ Res[z\cos\frac{1}{z+1},-1] = -\frac{1}{2}.$$

Обычно разложение в ряд Лорана используют для вычисления вычета $Res[f,a]$ функции f в существенно особой точке a.

Сформулируем и докажем основную теорему о вычетах.

Теорема 1. *Пусть G – ограниченная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей Γ, ориентированной положительно относительно области G. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ аналитична в области G за исключением конечного числа особых точек $a_1, ..., a_k$ из G и непрерывна на Γ. Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi\imath \sum_{l=1}^{k} Res[f, a_l]\,. \tag{3}$$

◀ Пусть $\gamma_l\,(l = 1, ..., k)$ – окружность достаточно малого радиуса с центром в точке a_l, ориентированная против часовой стрелки. В силу интегральной теоремы Коши имеем

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{l=1}^{k} \oint\limits_{\gamma_l} f(z)\,dz\,.$$

Отсюда и получаем требуемое утверждение. ▶

Согласно формуле (3) вычисление интеграла от функции f сводится к нахождению вычетов в особых точках этой функции, расположенных внутри контура интегрирования.

2. Вычисление вычета в полюсе. Если a – простой полюс функции f, то ряд Лорана этой функции имеет вид

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\,.$$

Отсюда находим, $c_{-1} = \lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)$. Таким образом, для вычисления вычета первого порядка справедлива формула

$$Res[f, a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,. \tag{4}$$

В частности, если $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где функции φ, ψ аналитичны в окрестности точки a, причём $\varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$, то точка a является простым полюсом функции f. Применяя формулу (4), находим

$$Res[f, a] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\,. \tag{5}$$

Если a – полюс порядка m для функции f, то функция f допускает представление

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}\,, \tag{6}$$

в котором h – аналитическая в окрестности точки a функция, причём $h(a) \neq 0$. Из (6) вытекают соотношения

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-m}\,,$$

в силу которых

$$Res[f,a] = \frac{h^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}\,. \tag{7}$$

Поскольку $h(z) = f(z)(z-a)^m$, то (7) эквивалентно равенству

$$Res[f,a] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right)\,. \tag{8}$$

Функция

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

имеет две особые точки: простой полюс $a_1 = 1$ и полюс кратности 2 $a_2 = 2$. В силу (4) имеем

$$Res[f,1] = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-2)^2} = 1\,.$$

Для вычисления вычета $Res[f,2]$ можно использовать формулу (7) с $h(z) = z(z-1)^{-1}, h'(z) = (z-1)^{-2}$. Следовательно, $Res[f,2] = -1$.

3. Вычет в бесконечно удалённой точке. Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности ∞ : $R < |z| < \infty$. Тогда функция f представляется в этой окрестности рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\,. \tag{9}$$

Вычетом функции f в точке ∞ называется число $Res[f,\infty] = -c_{-1}$. Определение в интегральных терминах:

$$Res[f,\infty] = \frac{1}{2\pi\imath}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz\,,$$

где $\gamma = \{z \in \mathbb{C},\, |z| = \rho\}$ – окружность радиуса $\rho > R$, ориентированная по часовой стрелке (при таком обходе бесконечно удалённая точка остаётся слева от контура γ).

Теорема 2. *Пусть функция f аналитична на комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, ..., a_{n-1}, a_n = \infty$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} Res[f, a_k] = 0 \ .$$

◀ Действительно, рассмотрим фиксированный замкнутый кусочно-гладкий контур Γ, содержащий внутри себя все конечные особые точки $a_1, ..., a_{n-1}$ функции f (в качестве Γ можно, например, взять окружность с центром в точке 0 достаточно большого радиуса). По теореме 1

$$\frac{1}{2\pi\imath}\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} Res[f, a_k]\,. \tag{10}$$

Левая часть (10) совпадает с числом $-Res[f, \infty]$, что и приводит к требуемому результату. ▶

Вычисление вычета в ∞ упрощается, когда ∞ устранимая особая точка или полюс функции f. Если ∞ устранимая особая точка для функции f, то в разложении (9) $c_n = 0\,\forall n > 0$. Имеет место следующая формула

$$Res[f, \infty] = -\lim_{z\to\infty} z(f(z) - c_0)\,. \tag{11}$$

Если же ∞ – полюс порядка k функции f, то

$$Res[f, \infty] = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\lim_{z\to\infty}\left\{z^{k+2} f^{(k+1)}(z)\right\}\ . \tag{12}$$

Формулы (11), (12) предлагается доказать самостоятельно.

Применим результаты этого пункта к вычислению интеграла

$$I = \oint\limits_{|z+1|=1,5} \frac{dz}{(z^4-1)(z+2)}\,.$$

Подынтегральная функция f имеет внутри контура $|z+1| = 1,5$ четыре особые точки $-2, -1, \imath, -\imath$, а во внешности контура – только одну, именно 1. Сумма вычетов в особых точках внутри контура, в силу теоремы 2, отличается лишь знаком от суммы вычетов во внешности окружности $|z+1| = 1,5$. Следовательно, $I = -2\pi\imath(Res[f, 1] + Res[f, \infty])$. Точка $z = 1$ – простой полюс, поэтому $Res[f, 1] = \dfrac{1}{12}$. Так как f имеет в ∞ нуль порядка 5, то $Res[f, \infty] = 0$. Получаем $I = -\dfrac{2\pi\imath}{12} = -\dfrac{\pi\imath}{6}$.

3.4 Интегралы и вычеты

1. Интегралы от тригонометрической функции. Начнём с приложений теории вычетов к вычислению интегралов вида

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt\,. \tag{1}$$

Пусть $R(u,v)$ – рациональная функция переменных u, v, определённая и непрерывная на окружности $u^2+v^2=1$. В силу формул Эйлера

$$\cos t = \frac{e^{\imath t}+e^{-\imath t}}{2},\ \sin t = \frac{e^{\imath t}-e^{-\imath t}}{2\imath}\ .$$

Положим $z=e^{\imath t}$. Очевидно, $|z|=1$ и при возрастании t от 0 до 2π точка $z=e^{\imath t}$ опишет один раз окружность $|z|=1$ против часовой стрелки. Справедливы равенства

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \sin t = \frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ dz = \imath e^{\imath t}\, dt,$$

откуда $dt = \dfrac{dz}{\imath z}$. Поэтому

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \widetilde{R}(z)\, dz\,,$$

где

$$\widetilde{R}(z) = \frac{1}{\imath z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\ .$$

Функция $\widetilde{R}(z)$ рациональна и имеет внутри контура $|z|=1$ конечное число полюсов $a_1, ..., a_l$. Следовательно,

$$I = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{l} Res[\widetilde{R}, a_k]\,.$$

В качестве примера вычислим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2}\,.$$

Полагая $z = e^{\imath t}$, получаем

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{2}{\imath(z^2 - 4z + 1)}\, dz$$

В рассматриваемом случае подынтегральная функция $\widetilde{R}(z)$ имеет два простых полюса : $a_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $a_2 = 2 + \sqrt{3}$; из них только один a_1 находится внутри контура $|z| = 1$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2}\, dt = 2\pi\imath Res[\widetilde{R}, a_1] = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

2. Интеграл от рациональной функции. Изучим интегралы вида

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx\,. \tag{2}$$

В пределах этого пункта $R = \dfrac{P}{Q}$ – рациональная функция без действительных полюсов. Предположим, что интеграл (2) существует; для этого необходимо и достаточно, чтобы степень многочлена P, находящегося в числителе, была на две единицы меньше степени многочлена Q. Для вычисления интеграла (2) проинтегрируем функцию $R(z)$ комплексного переменного z по границе полукруга $D_N = \{z \in \mathbb{C},\, |z| < N,\, Imz > 0\}$. Его граница Γ_N является объединением отрезка $[-N, N]$ действительной оси и полуокружности $L_N = \{z \in \mathbb{C},\, |z| = N,\, Imz > 0\}$. При достаточно больших N контур Γ_N содержит внутри себя все особые точки $a_1, ..., a_m$ функции $R(z)$, расположенные в верхней полуплоскости $Imz > 0$. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_N} R(z)\, dz = \int\limits_{-N}^{N} R(z)\, dz + \int\limits_{L_N} R(z)\, dz = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{m} Res[R, a_k]\,. \tag{3}$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{L_N} R(z)\, dz = 0\,.$$

◀Положим $M(N) = \max\{|zR(z)|, |z| = N\}$. Очевидно, функция $zR(z)$ есть правильная дробь. Ввиду этого $M(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Поскольку

$$\left|\int\limits_{L_N} R(z)\, dz\right| = \left|\int\limits_{C_N} \frac{zR(z)}{z}\, dz\right| \le \frac{M(N)}{N}\pi N = \pi M(N)\,,$$

то требуемое утверждение доказано.▶

Теорема 1. *В указанных выше предположениях имеет место равенство*

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx \;=\; 2\pi\imath \sum_{k=1}^{m} Res[R, a_k]\,. \tag{4}$$

◀ Достаточно в равенстве (3) перейти к пределу при $N \to \infty$.▶

Например, функция $f(z) = (z^2+1)^{-2}$ не имеет полюсов на действительной оси, а в верхней полуплоскости обладает единственным полюсом второго порядка $a_1 = \imath$. Согласно формуле (4)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}\, dx = 2\pi\imath Res[\frac{1}{(z^2+1)^2}, \imath]\,.$$

Так как

$$Res[\frac{1}{(z^2+1)^2} = \left(\frac{1}{(z+\imath)^2}\right)'(\imath) = \frac{1}{4\imath}\,,$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

3. Лемма Жордана и её приложения. В этом пункте рассматриваются интегралы вида

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\imath x}\, dx\,. \tag{5}$$

Здесь $R(z)$ – правильная рациональная дробь, не имеющая полюсов на действительной оси, символы D_N, Γ_N, L_N имеют тот же смысл, что и в предшествующем пункте.

Лемма 2. (Лемма Жордана). *Имеет место равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{L_N} R(z)\, e^{\imath z}\, dz = 0\,.$$

◀ Пусть $K(N)=\max\{|R(z)|,\ |z|=N\}$; в наших предположениях $K(N)$ стремится к 0 при $N\to\infty$. Полуокружность L_N задаётся уравнением $z=Ne^{it}=N(\cos t+\imath\sin t)$ $(0\le t\le\pi)$. Отсюда вытекает соотношение

$$\int\limits_{L_N} R(z)e^{\imath z}\,dz=\imath N\int\limits_0^\pi R(Ne^{\imath t})e^{-N\sin t+\imath(N\cos t+t)}\,dt,$$

влекущее за собой оценку

$$\left|\int\limits_{L_N} R(z)e^{\imath z}\,dz\right|\le NK(N)\int\limits_0^\pi e^{-N\sin t}\,dt=2NK(N)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-N\sin t}\,dt\,.$$

Так как функция $\sin t$ вогнута на отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$, то $\sin t\ \geqslant\ \frac{2t}{\pi}\,\forall\,t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Следовательно,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-N\sin t}\,dt\leqslant\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Nt}{\pi}}\,dt=\frac{1-e^{-N}}{2N}\pi<\frac{\pi}{2N}\,.$$

Объединяя проведённые выше выкладки, получаем неравенство

$$\left|\int\limits_{L_N} R(z)\,dz\right|\leqslant K(N)\pi\,.$$

Поскольку $K(N)\to 0$ при $N\to\infty$, то лемма доказана.▶

Теорема 2 . *Пусть R – правильная рациональная дробь без действительных полюсов; $a_1,...,a_m$ – полюсы функции $R(z)$, расположенные в верхней полуплоскости $Rez>0$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N} R(x)e^{\imath x}\,dx\ =\ 2\pi\imath\sum_{k=1}^{m} Res[R(z)e^{\imath z}\,,\,a_k]\,. \tag{6}$$

◀ Пусть N настолько велико, что контур Γ_N содержит внутри себя все особые точки $a_1,...,a_m$ функции $R(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости. Согласно основной теореме вычетов

$$\oint\limits_{\Gamma_N} R(z)e^{\imath z}\,dz=\int\limits_{-N}^{N} R(x)e^{\imath x}\,dx+\int\limits_{L_N} R(z)e^{\imath z}\,dz=$$

$$= 2\pi\imath \sum_{k=1}^{m} Res[R(z)e^{\imath z}, a_k]\,. \tag{7}$$

Переходя к пределу в равенстве (7) при $N \to \infty$ и используя лемму 2, получаем требуемый результат.►

В качестве иллюстративного примера вычислим интеграл

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath x}}{x^2+1}\,dx\right).$$

Значение интеграла, находящегося в правой части, найдём, применяя равенство (6) в случае $R(z) = (z^2+1)^{-1}$. Функция $R(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственую особую точку : полюс $a_1 = \imath$. Как нетрудно видеть, $Res[R(z)e^{\imath z}, \imath] = (2e\imath)^{-1}$. Следовательно, $J = 2\pi\imath \cdot \frac{1}{2}(2e\imath)^{-1} = \pi(2e)^{-1}$.

Результаты этого пункта полезны при нахождении преобразования Фурье рациональных функций. Отметим, что требования к рациональной функции R в теореме 2 менее жёстки, чем в теореме 1.

4. Интеграл от логарифмической производной. В этом пункте рассматривается интеграл вида

$$J = \oint_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\,. \tag{8}$$

Лемма 3.*Пусть функция φ определена и аналитична в окрестности точки $c \neq \infty$, а функция f допускает представление*

$$f(z) = (z-c)^k h(z) \quad (0 < |z-c| < \rho)\,, \tag{9}$$

где k – целое число, h – аналитическая в окрестности точки c функция, причём $k\varphi(c)h(c) \neq 0$. Тогда c – простой полюс функции $F(z) = \varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ и $Res[F, c] = k\varphi(c)$.

◄ В силу (9)

$$f'(z) = k(z-c)^{k-1}h(z) + (z-c)^k h'(z)\,,$$

поэтому

$$F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\psi(z)}{z-c}\,,$$

где функция

$$\psi(z) = \varphi(z)\,\frac{kh(z) - (z-c)h'(z)}{h(z)}$$

аналитична в окрестности точки c, причём $\psi(c) = k\varphi(c) \neq 0$. Следовательно, c – простой полюс функции F и $Res[F, c] = \psi(c) = k\varphi(c)$.▶

Следствие 1. *Если c – корень кратности n функции f, то в условиях леммы $Res[F, c] = n\varphi(c)$.*

Следствие 2.*Если c – полюс кратности p функции f, то $Res[F, c] = -p\varphi(c)$.*

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая внутри кусочно-гладкого замкнутого контура Γ и на самом этом контуре, исключая, быть может, конечное число полюсов, расположенных внутри Γ. Предположим ещё, что $f(z) \neq 0 \, \forall z \in \Gamma$. Обозначим через $a_1, ..., a_p$ нули функции f внутри контура Γ, а через $\alpha_1, ..., \alpha_p$ – кратности этих нулей; через $b_1, ..., b_q$ и $\beta_1, ..., \beta_q$ соответственно полюсы f внутри Γ и порядки этих полюсов.

Теорема 3. *Пусть функция φ непрерывна на контуре* Γ *и аналитична внутри* Γ. *Тогда имеет место формула*

$$\oint\limits_{\Gamma} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi\imath\left(\sum_{s=1}^{p}\alpha_s\varphi(a_s) - \sum_{t=1}^{q}\beta_t\varphi(b_t)\right). \qquad (10)$$

◀Для доказательства формулы (10) применим к интегралу J основную теорему о вычетах. Особые точки функции $F(z) = \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ находятся либо в нулях, либо в полюсах функции f. В силу следствий 1, 2 имеем

$$Res[F, a_s] = \alpha_s\varphi(a_s), \;\; Res[F, b_t] = -\beta_t\varphi(b_t)\,.$$

Таким образом, сумма вычетов функции F относительно всех её особых точек равна

$$\sum_{s=1}^{p}\alpha_s\varphi(a_s) - \sum_{t=1}^{q}\beta_t\varphi(b_t)\,,$$

что и приводит к формуле (10).▶

5. Логарифмический вычет. Отметим некоторые частные случаи формулы (10). Если $\varphi(z) = 1$, то (10) влечёт за собой равенство

$$\frac{1}{2\pi\imath}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{s=1}^{p}\alpha_s - \sum_{t=1}^{q}\beta_t\,. \qquad (11)$$

Числа

$$N = \sum_{s=1}^{p}\alpha_s\,,\; P = \sum_{t=1}^{q}\beta_t$$

представляют число нулей (полюсов) внутри контура Γ (при этом каждый нуль или полюс засчитывается столько раз, какова его кратность).

Левую часть (11) именуют логарифмическим вычетом функции f относительно контура Γ. Название связано с тем, что частное $f'(z)/f(z)$ совпадает с производной $(\ln(f(z))'$. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Логарифмический вычет функции f относительно замкнутого контура Γ равен разности между числом нулей и числом полюсов f внутри Γ, причём каждый нуль и каждый полюс засчитывается столько раз, какова его кратность.*

Полагая $\varphi(z) = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$, приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\Gamma} z^n \, \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = \sum_{s=1}^{p} \alpha_s a_s^n - \sum_{t=1}^{q} \beta_t b_t^n \, ,$$

позволяющему найти разность между суммами степеней нулей и полюсов функции f, лежащих внутри Γ.

6. Число нулей аналитической функции. Пусть функция f аналитична внутри контура Γ. В этом случае она не имеет полюсов внутри Γ. Из теоремы 4 вытекает

Теорема 5. *Логарифмический вычет функции f относительно замкнутого контура Γ равен числу нулей f, лежащих внутри Γ:*

$$N = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz \, ; \tag{12}$$

каждый нуль засчитывается столько раз, какова его кратность.

В ряде случаев оказывается полезной

Теорема 6. (Теорема Руше). *Пусть функции g, h аналитичны в замкнутой ограниченной области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, причём на границе $\partial\Omega = \Gamma$ имеет место неравенство $|g(z)| > |h(z)| \, \forall \, z \in \Gamma$. Тогда полное число нулей функции $f = g + h$ равно полному числу нулей функции g.*

◀ Определим на отрезке [0,1] функцию

$$N(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint\limits_{\Gamma} \frac{g'(z) + th'(z)}{f(z) + th(z)} \, dz \, .$$

Поскольку $|g(z)| > |h(z)|$ на Γ, то $|g(z) + th(z)| \geqslant |g(z)| - |h(z)| > 0$ на Γ. Знаменатель подынтегрального выражения отличен от нуля, поэтому функция $N(t)$ непрерывна на [0,1]. Очевидно, $N(t)$ есть полное число нулей функции $g + th$ в области Ω. Следовательно, в каждой точке t из [0,1] число $N(t)$ является целым. Целочисленная и непрерывная на отрезке [0,1] функция постоянна. В частности, $N(1) = N(0)$.▶

Рассмотрим несколько иллюстрирующих примеров.

1°. Применим теорему Руше к нахождению числа нулей функции $f(z) = 6z^5 + 2z^2 - 3$ внутри круга $|z| < 1$. В рассматриваемом случае $\Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Положим $g(z) = 6z^5, h(z) = 2z^2 - 3$. Для z из Γ имеем $|g(z)| = |6z^5| = 6, |h(z)| \leq 2|z|^2 + 3 = 5$, т. е. $|g(z)| > |h(z)|$; условия теоремы Руше выполняются. Функция $g(z)$ обладает в круге $|z| < 1$ пятью нулями ($z = 0$ – нуль кратности 5). Следовательно, в круге $|z| < 1$ функция $f(z) = 6z^5 + 2z^2 - 3$ имеет пять нулей (а вне данного круга – ни одного).

2°. Пусть $f(z) = e^z - 1 + 2z^2, \Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Положим $g(z) = 2z^2, h(z) = e^z - 1$. Тогда на окружности Γ справедливы соотношения

$$|h(z)| = |e^z - 1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 < 2 < |g(z)| = 2\,.$$

Функция $g(z)$ имеет в круге $|z| < 1$ два нуля, следовательно, число нулей функции $f(z)$ в том же круге равно 2.

Докажем, что любой многочлен $f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + ... + p_n$ степени n имеет ровно n корней. Фиксируем положительное число R, для которого

$$R^n > \sum_{k=1}^{n} p_k R^{n-k}$$

(почему такое R существует ?) и положим

$$g(z) = z^n,\ h(z) = \sum_{k=1}^{n} p_k z^{n-k},\ \Gamma = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\ \}.$$

Из определения числа R вытекает оценка $|h(z)| < |g(z)\, \forall z \in \Gamma$. Поэтому число корней многочлена f внутри окружности Γ равно n – числу корней многочлена g.

Упражнение 1. *Найти особые точки функций и выяснить их характер*

$$\frac{1}{z - z^3}; \quad \frac{z^2 + 1}{e^z}; \quad \frac{1}{z^3(2 - \cos z)}; \quad \frac{1}{\cos z + \sin z};$$

$$e^{z - \frac{1}{z}}; \quad tg^2 z; \quad \sin\left(\frac{1}{\cos\dfrac{1}{z}}\right); \quad \sin\frac{1}{z}\ + \frac{1}{z^3}.$$

Упражнение 2. *Разложить в ряд Лорана функцию*

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (0 < |a| < |b|)$$

в окрестности точек $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$ и в кольце $|a| < |z| < |b|$.

Упражнение 3. *Разложить в ряд Лорана* $\sin z \sin \dfrac{1}{z}$ *в области* $0 < |z| < \infty$.

Упражнение 4. *Найти вычеты функций относительно всех изолированных особых точек*

$$\frac{z^2}{(z^2+1)^2}; \quad \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}; \quad ctg^2 z; \quad z^3 \cos\frac{1}{z-2}; \quad \frac{1}{z(1-e^{-hz})}\,(h \neq 0),$$

$$\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}; \quad tg^3 z; \quad \frac{e^{\pi z}}{z-1}.$$

Упражнение 5. *Вычислить интегралы*

$$\oint\limits_{x^2+y^2=2x} \frac{dz}{z^4+1}\,; \quad \oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)}; \quad \oint\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}\,dz\,,$$

$$\oint\limits_{|z-3|=3} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)(z^2-4)}\,dz, \quad \oint\limits_{x^2+y^2=2x+2y} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}\,.$$

Упражнение 6. *Вычислить интеграл*

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^3(z-b)^5}$$

в следующих случаях:

$$a)|a| < |b| < 1; \quad b)|a| < 1 < |b|; \quad c)1 < |a| < |b|\,.$$

Упражнение 7. *Найти определенные интегралы*

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}\,(a>1); \quad \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos^2\varphi)^2}\,(a>0, b>0)\,.$$

Упражнение 8. *Вычислить интегралы с бесконечными пределами*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}\,; \quad \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx\,; \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Упражнение 9. *Пользуясь леммой Жордана, вычислить интегралы*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}\,;$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+b^2}\,dx\;(a>0, b>0).$$

Упражнение 10. *Пользуясь теоремой Руше, найти количество лежащих внутри круга* $|z|<1$ *корней уравнения* $z^9-2z^6+z^2-8z-2=0$.

Упражнение 11. *Сколько корней уравнения* $z^4-5z+1=0$ *находится в круге* $|z|<1$? *в кольце* $1<|z|<2$?

Глава 4

Начала операционного исчисления

4.1 Преобразование Лапласа

1. Определение преобразования Лапласа. Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ назовём оригиналом, если

1) функция f локально интегрируема;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) существуют такие постоянные M и α, что

$$|f(t)| \leqslant M\, e^{\alpha t} \;\forall t \geqslant 0\,. \tag{1}$$

Например, оригиналом является функция Хевисайда $\theta(t) = 1_{[0,\infty)}(t)$, а также функции $\theta(t)\cos\omega t$, $\theta(t)\sin\omega t$ и т. п. Символ θ будет, как правило, опускаться.

Изображением функции f по Лапласу называют функцию комплексного переменного $p = s + \imath\,\sigma$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt\,. \tag{2}$$

Используется также запись $f(t) \risingdotseq F(p)$ или $F(p) \risingdotseq f(t)$. Например, преобразование Лапласа функции Хевисайда равно

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}\,.$$

Функция F определена в области $Re\, p > 0$. Следовательно,

$$\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}\ . \tag{3}$$

В качестве второго примера найдём изображение функции $e^{\lambda t}$, где λ комплексная постоянная. Интеграл

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-(p-\lambda)t}\, dt$$

сходится в области $Re\, p > Re\, \lambda$ и $F(p) = (p-\lambda)^{-1}$. Следовательно,

$$e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p-\lambda}\ . \tag{4}$$

Теорема 1. *Для всякого оригинала f изображение F определено в полуплоскости $Re\, p > \alpha$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.*

◀ Фиксируем $\beta > \alpha$, Если $s = Re\, p \geqslant \beta$, то

$$|f(t)e^{-pt}| \leqslant M|e^{\alpha t}e^{-st}| \leq Me^{-(\beta-\alpha)t}\,,$$

поэтому функция $F(p)$ представима в виде равномерно сходящегося ряда аналитических функций

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\, dt = \sum_{k=0}^\infty \int\limits_k^{k+1} f(t)e^{-pt}\, dt\,. \tag{5}$$

Равномерная сходимость ряда (5) следует из того, что его элементы

$$v_k(p) = \int\limits_k^{k+1} f(t)e^{-pt}\, dt$$

допускают оценку

$$|v_k(p)| \leqslant \int\limits_k^{k+1} Me^{-(\beta-\alpha)t}\, dt\,,$$

а числовой ряд

$$\sum_{k=0}^\infty \int\limits_k^{k+1} Me^{-(\beta-\alpha)t}\, dt$$

сходится. Функции $v_k(p)$ аналитичны, следовательно, F – аналитическая функция.▶

При $s = Re\,p \geqslant \beta$ справедлива оценка

$$|F(p)| \leqslant \int\limits_0^\infty Me^{-(\beta-\alpha)t}\,dt = \frac{M}{\beta-\alpha}\,,$$

из которой следует равенство

$$\lim_{\beta\to\infty}\sup_{Re\,p\geqslant\beta}|F(p)| = 0\,. \tag{6}$$

2. Свойства преобразования Лапласа. Далее f, g – оригиналы, F, G – их изображения.

I). Свойство линейности. Для любых комплексных чисел α, β

$$\alpha f + \beta g \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

В частности, справедливы вытекающие из равенства (4) соотношения

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,,\ \cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}\,,\ sh\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}\,,\ ch\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\omega^2}\ .$$

II). Теорема подобия. Для любого $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\ .$$

Следует из определения преобразования Лапласа и формулы замены переменной в интеграле.

III). Дифференцирование оригинала. Если не только функция f, но и её производные до порядка n включительно являются оригиналами, то

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,,$$

в частности, $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$ при $n = 1$. Действительно, требуемый результат получается в результате интегрирования по частям

$$\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \left(f(t)e^{-pt}\right)\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\,,$$

что и доказывает формулу при $n = 1$. При $n > 1$ необходимо интегрировать по частям n раз. Если $f(0) = 0$, то $f'(t) \risingdotseq pF(p)$ и дифференцирование оригинала сводится к умножению на p его изображения.

IV). Дифференцирование изображения. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, $Re\, p > \alpha$. Тогда

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t), \quad Re\, p > \alpha\,.$$

Для доказательства достаточно применить правило Лейбница дифференцирования интегралов, зависящих от параметра. Многократное последовательное дифференцирование влечёт более общий результат

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t)\,.$$

В частности, для любого натурального числа n имеют место соотношения

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}\,, \quad t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}\,.$$

3. Теорема умножения. Свёрткой функций $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию $\varphi(t)$, определяемую соотношением

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Иногда свёртку функций f, g обозначают символом $f * g$. Нетрудно проверить коммутативность свёртки : $f * g = g * f$; свёртка двух оригиналов есть оригинал. Сформулируем и докажем более сложное утверждение.

Теорема 2 (Теорема Бореля). *Изображение свёртки равно произведению изображений.*

◀ Пусть, как и ранее, $f(t) \risingdotseq F(p), g(t) \risingdotseq G(p)$. Установим равенство

$$(f * g)(t) \risingdotseq F(p)G(p)\,. \tag{7}$$

Справедливы соотношения

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} \left(\int\limits_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right)\, dt \;=\; \int\limits_0^\tau f(\tau)\, d\tau \int\limits_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau}\, d\tau \int\limits_0^\infty g(t_1) e^{-pt_1}\, dt_1 = F(p)G(p)\,.$$

Последовательно используются определения свёртки и преобразования Лапласа, совпадение двойного и повторного интегралов и снова определение преобразования Лапласа.▶

Следствие. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{p} F(p)\,.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $\varphi = f * \theta$ и формулами (3),(7).

4.2 Формула обращения

1. Вспомогательные утверждения. По известному изображению $F(p)$ можно восстановить оригинал $f(t)$. Именно, при некоторых предположениях справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{pt} F(p)\, dp\,, \tag{1}$$

называемое формулой обращения. Интеграл в правой части (1) понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\int\limits_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} e^{pt} F(p)\, dp = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} e^{pt} F(p)\, dp\,.$$

Доказательство формулы (1) будет проведено в следующем пункте. Оно основано на двух леммах.

Лемма 1. Справедливо равенство

$$J_N(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} e^{pt} F(p)\, dp = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t+\xi) e^{-a\xi}\, \frac{\sin N\xi}{\xi}\, d\xi\,.$$

◀ Имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} e^{pt} F(p)\, dp = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} e^{pt} \left\{ \int\limits_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau}\, d\tau \right\} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_0^{\infty} f(\tau)\, d\tau \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} e^{p(t-\tau)}\, dp = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} f(\tau) e^{a(t-\tau)} \frac{\sin N(t-\tau)}{t-\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin N(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(t+\xi)e^{-a\xi}\;\frac{\sin N\xi}{\xi}\,d\xi\,.$$

Последовательно используются определение преобразования Лапласа, перемена порядка интегрирования, формула Эйлера, замена переменных $t-\tau=-\xi$. Проверить законность проведённых операций предоставляется старательному читателю.►

Лемма 2. *Если функция φ абсолютно интегрируема на некотором отрезке $[\xi_1,\xi_2]$, то*

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\varphi(\xi)\sin N\xi\,d\xi = 0\,.$$

Лемма 2 доказывалась ранее (лемма Римана).

2. Формула обращения. Говорят, что функция g удовлетворяет условию Гёльдера в точке t, если $|g(t+h)-g(t)| \leqslant L|h|^{\alpha}$ $(|h|<\delta, 0<\alpha\leqslant 1)$.

Теорема 1. *Если функция-оригинал f удовлетворяет в точке t условию Гёльдера, то справедливо равенство (1).*

◄Воспользуемся вытекающими из интеграла Дирихле соотношениями

$$\pi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin N\xi}{\xi}\,d\xi\,, f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin N\xi}{\xi}\,d\xi\,.$$

Объединяя эти равенства с леммой 1, получаем

$$f_N(t)-f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f(t+\xi)e^{-a\xi}-f(t)\right]\frac{\sin N\xi}{\xi}\,d\xi\,.$$

Покажем, что интеграл в правой части последнего равенства стремится к 0 при $N\to\infty$. Представим его в виде суммы двух слагаемых :$J=J_1+J_2$, где

$$J_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\xi|>R}\frac{f(t+\xi)e^{-a\xi}-f(t)}{\xi}\sin N\xi\,d\xi\,,$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\xi|\le R}\frac{f(t+\xi)e^{-a\xi}-f(t)}{\xi}\sin N\xi\,d\xi\,.$$

Первое слагаемое представляет собой сходящийся интеграл. Для каждого $\varepsilon>0$ найдётся такое R, что $|J_1|<\varepsilon$. Второе слагаемое J_2 (при фиксированном R) стремится к 0, когда $N \to \infty$ (в силу леммы 2 и условия Гёльдера функция

$$\xi \to \frac{f(t+\xi)e^{-a\xi} - f(t)}{\xi}$$

абсолютно интегрируема на отрезке $[-R, R]$). В частности, $|J_2| < \varepsilon$ при больших N. Следовательно, $|J_1+J_2| < 2\varepsilon$ при больших N. Это и приводит к требуемому утверждению. ►

3. Теоремы разложения. Иногда равенство (1) называют формулой Меллина. Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Оригинал $f(t)$ однозначно оределяется по его изображению $F(p)$ во всех точках дифференцируемости функции $f(t)$.*

В ряде случаев оказывается полезной

Теорема 2. *Пусть $F(p)$ – аналитическая в окрестности ∞ функция, представимая рядом Лорана*

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}\,. \tag{2}$$

Тогда функция $F(p)$ есть изображение Лапласа функции

$$f(t) = \theta(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}\,. \tag{3}$$

◄ Пусть функция F аналитична в области $|p| > R_0$. Если $R > R_0$, то ряд (2) сходится при $z = R$. В частности, последовательность $c_n R^{-n}$ ограничена. Отсюда вытекает оценка

$$|c_n| \leqslant MR^n \tag{4}$$

с некоторой постоянной M. Из этих оценок следует, что ряд в правой части (3) сходится при всех комплексных t, поэтому представляет целую функцию. Далее

$$|f(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} MR^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = MRe^{|t|R}.$$

Функция $f(t)$ действительно является оригиналом.

Умножим равенство (3) на e^{-pt} и проинтегрируем почленно от 0 до ∞. Используя соотношения $t^n \risingdotseq n!p^{-n-1}$ и линейность преобразования Лапласа, получаем

$$\theta(t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} \risingdotseq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k} = F(p)\,. \text{ ►}$$

Иногда только что доказанную теорему называют *первой теоремой разложения*. Справедливо обратное утверждение: если $f(t) = \theta(t)g(t)$ – оригинал, причём $g(t)$ – целая функция и $|g(t)| \leqslant Me^{\lambda t}$ при некоторых M, λ и произвольных t, то его изображение $F(p)$ есть функция, аналитическая в окрестности ∞.

Теорема 3. *Пусть $F(p)$ – правильная рациональная дробь. Тогда её оригинал при $t \geqslant 0$ определяется равенством*

$$f(t) = \sum_{p_k} Res[F(p)e^{pt}, p_k]\,,$$

где суммирование ведётся по всем полюсам функции $F(p)$.

◀ В силу формулы обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int\limits_{a-\imath\infty}^{a+\imath\infty} F(p)e^{pt}\,dp\,,$$

где $a \gg 0$ ($a > Rep_k\ \forall k$). Рассмотрим замкнутый контур Γ_N, состоящий из отрезка $[a-\imath N, a+\imath N]$ и полуокружности $L_N = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| = N,\ Rez < a\}$. При больших N контур Γ_N содержит все особые точки p_k, $(k = 1, ..., l)$ функции $F(p)e^{pt}$. В силу основной теоремы вычетов справедливо равенство

$$\oint\limits_{\Gamma_N} F(p)e^{pt}\,dp = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{l} Res[F(p)e^{pt}, p_k]\,.$$

Свойство аддитивности интеграла влечёт соотношение

$$\oint\limits_{\Gamma_N} F(p)e^{pt}\,dp = \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} F(p)e^{pt}\,dp + \int\limits_{L_N} F(p)e^{pt}\,dp\,.$$

Из леммы Жордана вытекает, что второе слагаемое в правой части последнего равенства стремится к 0 при $N \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{a-\imath N}^{a+\imath N} F(p)e^{pt}\,dp = 2\pi\imath \sum_{k=1}^{l} Res[F(p)e^{pt}, p_k]\,,$$

что эквивалентно доказываемому утверждению.▶

Следствие. *Если* $F(p) = A(p)/B(p)$ $(A(p), B(p)$ *– многочлены степеней* n, m *соответственно,* $n < m$ *и многочлены* A, B *не имеют общих нулей* $)$, *то*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(m_k-1)!}\,\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left\{F(p)e^{pt}(p-p_k)^{m_k}\right\}\bigg|_{p=p_k},$$

где $p_1, ..., p_l$ *– различные нули многочлена* $B(p)$, *а* m_k *– кратность* p_k.

Для доказательства достаточно воспользоваться правилом вычисления вычета в полюсе кратности m_k. В частности, если все нули многочлена $B(p)$ простые, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}.$$

В качестве примера найдём оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p) = (p^2+1)^{-3}$. Функция $F(p)$ имеет полюсы третьего порядка $p_1 = \imath; p_2 = -\imath$. Используя теорему 3 и правило вычисления вычета в кратном полюсе, получаем

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{pt}}{(p+\imath)^3}\right]''_{p=\imath} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{pt}}{(p-\imath)^3}\right]''_{p=-\imath},$$

откуда находим

$$f(t) = \frac{3}{8}\sin t - \frac{3}{8} t\cos t - \frac{1}{8} t^2 \sin t.$$

4.3 Приложения преобразования Лапласа

1. Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,,\ x(0) = x_0\,. \tag{1}$$

Здесь A – квадратная матрица размеров $n \times n$, не зависящая от времени t, x_0 – фиксированный вектор из $\mathbb{C}^n$. Решение задачи Коши (1) даётся формулой

$$x(t) = (exp\ At)x_0\ ,(t \geq 0) \tag{2}$$

где $exp\ At$ – матричная функция, конструируемая специальным образом. Один из способов построения матричной экспоненты основан на операционном исчислении. Если

$$X(p) = \int\limits_0^\infty x(t) e^{-pt}\, dt$$

– преобразование Лапласа решения задачи Коши (1), то

$$\frac{dx}{dt} \risingdotseq pX(p) - x_0, Ax \risingdotseq AX(p)\,.$$

Равенства приводят к соотношениям

$$pX(p) - x_0 = AX(p), \quad (pE - A)X(p) = x_0\,, \quad X(p) = (pE - A)^{-1} x_0\,,$$

в которых E – единичная матрица подходящих размеров. Искомое решение находится с помощью обратного преобразования Лапласа. Необходимо заметить, что компоненты вектор-функции $X(p)$ представляют правильные рациональные дроби, поэтому вычисление обратного преобразования Лапласа существенно упрощается (см. предшествующий параграф).

Пусть $e_k, k = 1, ..., n$ – координатные орты в $\mathbb{C}^n$, $\Phi^k(t)$ – решение задачи Коши (1) при $x_0 = e_k$. Тогда

$$expAt = (\Phi^1(t)...\Phi^n(t)) = \Phi(t)\,,$$

т. е. $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $x' = Ax$. Решение задачи Коши для неоднородной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

даётся равенством

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int\limits_0^t \Phi(t-s) f(s)\, ds =$$

$$= \sum_{k=1}^n x_0^k \Phi^k(t) + \sum_{k=1}^n \int\limits_0^t \Phi^k(t-s) f_k(s)\, ds\,,$$

в котором $(x_0^k) = x_0, (f_k) = f$. Если f является оригиналом, то преобразование Лапласа можно применить и для решения системы (3).

2. Дифференциальные уравнения произвольного порядка. Пусть дано диференциальное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + ... + a_n x = 0 \tag{4}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, ..., a_n$ и начальные условия

$$x(0) = x_1, ..., x^{(n-1)}(0) = x_n\,. \tag{5}$$

Решение $x(t)$ задачи Коши (4),(5) является оригиналом, это вытекает из теории линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Положим $X(p) \risingdotseq x(t)$. Из (4),(5) и свойств преобразования Лапласа следует равенство

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n) X(p) = A(p)\,, \tag{6}$$

где $A(p)$ – многочлен степени $< n$, зависящий от $x_1, ..., x_n$ и легко ими определяемый. Решив уравнение (6) относительно $X(p)$, получаем равенство $X(p) = A(p)/L(p)$, в котором $L(p)$ – характеристический многочлен уравнения (4). Решение $x(t)$ задачи Коши (4),(5) находится по известному его образу $X(p)$ однозначно. Для отыскания соответствующего оригинала снова достаточно использовать теорему 3 предшествующего раздела.

Обозначим через ψ решение задачи Коши (4),(5) при условии $x_k = \delta_k^n$; здесь δ_k^n – символ Кронекера. Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + ... + a_n x = f(t)\,. \tag{7}$$

Решение $y(t)$ задачи Коши (5),(7) даётся формулой $y(t) = x(t) + \widehat{x}(t)$, где $x(t)$ – решение задачи Коши (4),(5), $\widehat{x}(t)$ – решение уравнения (7), удовлетворяющее нулевым граничным условиям

$$x^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, ..., n-1).$$

Как известно,

$$\widehat{x}(t) = \int\limits_0^t \psi(t-\tau) f(\tau)\, d\tau\,.$$

3. Интегральные уравнения. Рассмотрим линейное уравнение Вольтерра

$$x(t) = f(t) + \int\limits_0^t k(t-s) x(s)\, ds\,, \tag{8}$$

где $k(t), f(t)$ – известные функции, $x(t)$ – искомая функция. Пусть

$$k(t) \risingdotseq K(p), \quad f(t) \risingdotseq F(p), \quad x(t) \risingdotseq X(p)\,.$$

Переходя в уравнении (8) к изображениям и используя изображение свёртки, получаем $X(p) = F(p) + K(p)X(p)$, откуда

$$X(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}\,.$$

Оригинал для $X(p)$ есть искомое решение уравнения (8).

В качестве примера предлагается рассмотреть интегральное уравнение

$$x(t) = \sin t + \int\limits_0^t (t-s)x(s)\,ds\,.$$

В расматриваемом случае имеем

$$f(t) = \sin t, k(t) = t, X(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1}\right), x(t) = \frac{1}{2}(\sin t + sht)\,.$$

Заслуживают упоминания важные приложения операционного исчисления к задачам математической физики.

Таблица оригиналов и их изображений

$$t^a\;(a > -1) \risingdotseq \frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \tag{I}$$

$$e^{-\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{p+\lambda} \tag{II}$$

$$e^{-\lambda t}t^a \risingdotseq \frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}} \tag{III}$$

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \tag{IV}$$

$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2} \tag{V}$$

$$t^n\sin\omega t \risingdotseq n!\frac{Im(p+\imath\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}} \tag{VI}$$

$$t^n\cos\omega t \risingdotseq n!\frac{Re(p+\imath\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1)}} \tag{VII}$$

$$e^{-\lambda t}\sin(\omega t+\alpha) \risingdotseq \frac{\omega\cos\alpha + (p+\lambda)\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \tag{VIII}$$

$$e^{-\lambda t}\cos(\omega t+\alpha) \risingdotseq \frac{(p+\lambda)\cos\alpha - \omega\sin\alpha}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \tag{IX}$$

Глава 5

Конформные отображения

5.1 Свойства конформных отображений

1. Определение конформного отображения. Выясним геометрический смысл модуля и аргумента производной. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в области Ω, $z_0 \in \Omega$, $\quad f(z_0) = w_0$, $\quad f'(z_0) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ $(r > 0)$. Проведём через точку z_0 гладкую кривую γ. При отображении $w = f(z)$ кривая γ перейдёт в некоторую кривую Γ, проходящую через точку w_0. Будем брать Δz таким, что точка $z_0 + \Delta z$ лежит на кривой γ. Соответствующая ей точка $w_0 + \Delta w$ лежит на кривой Γ. Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ и Γ соответственно. Числа $arg\Delta z$ и $arg\Delta w$ равны углам между векторами Δz и Δw с положительными напрвлениями осей x и u, а $|\Delta z|$ и $|\Delta w|$ представляют длины этих векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих переходят в векторы касательных к соответствующим кривым. Из равенства

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad = \quad \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

следует, что

$$\alpha = arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} (arg\Delta w - arg\Delta z) = \Phi - \varphi\,,$$

т. е. аргумент α производной имеет геометрический смысл разности угла Φ вектора касательной к кривой Γ в точке w_0 с осью u и угла φ вектора касательной к кривой γ в точке z_0 с осью x. Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от способа предельного перехода, то эта разность будет той же самой и для любой другой кривой, проходящей через точку z_0. Отсюда следует, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией $w = f(z)$, удовлетворяющей условию $f'(z_0) \neq 0$, угол $\varphi_2 - \varphi_1$

между кривыми γ_1, γ_2, пересекающимися в точке z_0, равен углу между их образами (кривыми Γ_1 и Γ_2, пересекающимися в точке $w_0 = f(z_0)$). При этом сохраняется не только абсолютная величина, но и направление углов. Описанное свойство носит название свойства сохранения углов.

Аналогично получаем

$$r = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}.$$

С точностью до величин более высокого порядка имеет место равенство $|\Delta w| = r|\Delta z|$. Геометрический смысл этого соотношения в том, что при отображении, осуществляемом аналитической функцией, бесконечно малые элементы преобразуются подобным образом, причём $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент преобразования подобия – свойство постоянства растяжения.

Отображение области G комплексной плоскости z на область D комплексной плоскости w называется конформным, если оно взаимно однозначно и во всех точках z обладает свойством сохранения углов и постоянства растяжения. Функция f называется однолистной в области G, если в различных точках этой области она принимает разные значения.

Теорема 1. *Пусть f есть однозначная аналитическая и однолистная в области G функция и $f'(z) \neq 0 \, \forall z \in G$. Тогда функция f производит конформное отображение области G на область D значений функции f на G.*

◀ В силу условия $f'(z) \neq 0 \, (z \in G)$ отображение, осуществляемое функцией f, сохраняет углы и обладает свойством постоянства растяжений. ▶

Оказывается, верно и обратное. В естественных условиях функция, осуществляющая конформное отображение, является однолистной и аналитической в области G, причём $f'(z) \neq 0$. Таким образом, конформные отображения осуществляются только однолистными аналитическими функциями с производной, отличной от нуля во всех точках области.

Основная задача теории конформных отображений: заданы области D и G; требуется построить функцию, осуществляющую конформное отображение одной из этих областей на другую.

Остановимся на вопросе существования конформного отображения. Для некоторых пар областей подобного отображения не существует. Это так, например, если D – круг $|z| < 1$, G – кольцо $1 < |z| < 2$.

Теорема Римана. *Каковы бы ни были односвязные области D и G (с границами, состоящими более чем из одной точки) существует конформное отображение $w = f(z)$ области G на область D.*

Доказательство теоремы Римана можно найти, например, в [12].

2. Принцип взаимно однозначного соответветствия.

Теорема 2. *Пусть функция f аналитична в области G и осуществляет взаимно однозначное отображение области G на область D комплексной плоскости w. Тогда это отображение является конформным.*

◀ В предположении противного существует точка z_0, для которой $f'(z_0) = 0$. Так как функция f аналитична в области G, то в силу сделанного предположения её разложение в степенной ряд имеет вид

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + \cdots + ,$$

причём $k \geqslant 2$ и $a_k \neq 0$. Поскольку функция $f'(z)$ не равна тождественно нулю, то z_0 не может быть предельной точкой нулей $f'(z)$. Положим

$$\psi(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \cdots .$$

Выберем $\delta > 0$ таким малым, чтобы

$$f'(z) \neq 0 \quad (0 < |z - z_0| < \delta), \quad \psi(z) \neq 0 \quad (|z - z_0| \leqslant \delta).$$

В силу непрерывности функции $\psi(z)$ справедливо соотношение

$$m := \min\{|z - z_0|^k |\psi(z)| : |z - z_0| = \delta\} > 0 .$$

Выберем комплексное число c, для которого $|c| < m$. Согласно теореме Руше аналитическая функция $\varphi(z) = (z-z_0)^k\psi(z)-c$ имеет внутри круга $|z-z_0| \leqslant \delta$ столько же нулей, сколько и функция $(z-z_0)^k\psi(z)$. Последняя в силу условия $|c| < m$ имеет в этом круге k нулей (с учётом кратности). Тогда уравнение

$$f(z) = a_0 + c \tag{1}$$

имеет k корней в круге $|z-z_0| < \delta$, причём все эти корни простые, так как точка z_0 не является корнем уравнения (1) и $f'(z) \neq 0$ в остальных точках этого круга. Но это противоречит условию взаимной однозначности отображения $w = f(z)$ области G на область D.▶

3. Принцип соответствия границ. При решении задачи конформного отображения области G на область D обычно следят за тем, чтобы искомая функция производила отображение границы ∂G области G на границу ∂D области D, не рассматривая специально внутреннних точек. Это можно сделать в силу принципа соответствия границ. Предварительно заметим следующее. Пусть в области G задана однозначная непрерывная функция $w = f(z)$. Очевидно, эта функция переводит любую замкнутую кривую γ, целиком лежащую в области G, в замкнутую кривую на плоскости w. Будем говорить, что при отображении кривой γ,

осуществляемом функцией $f(z)$, сохраняется направление обхода, если при непрерывном движении точки в положительном направлении вдоль кривой γ соответсвующая ей точка обходит кривую $\Gamma = f(\gamma)$ также в положительном направлении.

Теорема 3. *Пусть функция f однозначна и аналитична в области G и непрерывна на $\overline{G} = G \cup \partial G$. Пусть f осуществляет взаимнооднозначное отображение контура ∂G на некоторый контур Γ, ограничивающий область D. Если при этом отображении сохраняется направление обхода, то функция f осуществляет конформное отображение области G на область D.*

◀ Пусть $w_0 \in G, F(z) = f(z) - w_0$. Число нулей функции F в области G равно

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz\,.$$

Сделаем замену переменной $w = f(z)$. Тогда

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w - w_0} = 1,$$

т. е. функция f в области G принимает каждое своё значение лишь в одной точке. ▶

4. Конформные отображения и задача Дирихле. В ряде вопросов математической физики возникает задача Дирихле. Приведём её постановку и обсудим связь с конформными отображениями. Пусть на границе Γ плоской ограниченной области D задана непрерывная функция $u_0(x, y)$, а в области D – непрерывная функция $F(x, y)$. Требуется найти непрерывную в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и дважды дифференцируемую в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Пуассона

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y), \quad (x, y) \in D \tag{2}$$

и краевому условию

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma\,. \tag{3}$$

При достаточно широких предположениях относительно границы Γ и функций u_0, F задача (2), (3) имеет единственное решение. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть D – ограниченная односвязная плоская область. Пусть функция $w = w(z; \zeta)$, $\quad z \in D$, $\quad \zeta \in D$ при каждом ζ из D конформно отображает область D на круг $|w| < 1$ так, что точка ζ переходит в точку 0 ($w(\zeta; \zeta) = 0$). Пусть функция $G(x, y; \xi, \eta)$ определена* *на $D \times D$ равенством*

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln |w(x + iy; \xi + i\eta)|.$$

Тогда решение задачи (2), (3) имеет вид

$$u(x, y) = \iint\limits_D G(x, y); \xi, \eta) F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \oint\limits_\Gamma \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} u_0(\xi, \eta) ds, \quad (4)$$

где символ $\dfrac{\partial}{\partial n}$ *означает дифференцирование по направлению внешней нормали к границе* Γ *области* D *функции* $(\xi, \eta) \to G(x, y; \xi, \eta)$.

Доказательство формулы (4) можно найти например в учебнике: Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. Большое число примеров и всестороннее обсуждение затронутых в этом пункте вопросов содержится в [1], [4]–[7]. В частности, имеет место следующее утверждение: *задача конформного отображения области на единичный круг и задача Дирихле для той же области эквивалентны; они сводятся друг к другу с помощью операций дифференцирования и интегрирования.*

5.2 Дробно-линейная функция

1. Группа дробно-линейных отображений. Функцию

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

и соответствующее ей отображение комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя называют дробно-линейными. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что функция w и соответствующее ей отображение непостоянны. Предполагается, что если $c \neq 0$, то $w(\infty) = \frac{a}{c}$, и если $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. Таким образом, дробно-линейная функция определена во всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Теорема 1. *Совокупность дробно-линейных отображений образует группу, т. е. 1) суперпозиция (произведение) дробно-линейных отображений является дробно линейным отображением; 2) отображение, обратное к дробно-линейному, также является дробно-линейным.*

◀ Установим свойство 1). Пусть

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d} \quad (a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0), \quad w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2} \qquad (a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0)\,.$$

Отсюда путём подстановки, получаем $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, причём $ad - bc = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) \neq 0$, т. е. суперпозиция дробно-линейных отображений есть дробно-линейное отображение.

Доказательство свойства 2). Решая уравнение $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ относительно z, находим $z = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ $(ad - bc \neq 0)$, т. е. обратное отображение также дробно-линейно.▶

Замечание 1. Группа дробно-линейных отображений некоммутативна. Например, если $w(z) = \dfrac{1}{z}, \zeta(z) = z + 1$, то

$$w(\zeta(z)) = \frac{1}{z+1} \neq \zeta(w(z)) = 1 + \frac{1}{z}\,.$$

Замечание 2. Часть рассматриваемой группы, состоящая из линейных отображений $w = az + b \quad (a \neq 0)$, образует коммутативную подгруппу.

Производная $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ дробно-линейной функции отлична от нуля, поэтому дробно-линейное отображение конформно. Оно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Верно обратное утверждение: если функция $w = f(z)$ конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, то эта функция дробно-линейна (без доказательства).

2. Круговое свойство. Будем считать, что прямая в плоскости $\mathbb{C}$ есть окружность бесконечного радиуса.

Теорема 2. (Круговое свойство). *При дробно-линейном отображении образом любой окружности является окружность.*

◀ Сначала рассмотрим линейное отображение $w = az + b \quad (a = re^{i\varphi}, r > 0)$. Это отображение есть суперпозиция трёх отображений: $\zeta = e^{i\varphi}z$ (поворот), $\zeta_1 = r\zeta$ (гомотетия), $w = \zeta_1 + b$ (сдвиг). Следовательно, линейное отображение переводит обычные окружности (прямые) в обычные окружности (прямые).

Установим круговое свойство для отображения $w = \dfrac{1}{z}$. Если $u = Re w$, $v = Im w$, $x = Re z$, $y = Im z$, то $x + i\,y = \dfrac{1}{u+iv}$, т. е.

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2+v^2}\,. \tag{1}$$

Уравнение любой окружности Λ (обычной или обобщённой) имеет вид

$$\alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \tag{2}$$

(если $\alpha = 0$, то перед нами уравнение прямой). Подставляя в (2) вместо x, y их выражения через u, v в соответствии с (1), получаем уравнение образа окружности в координатах u, v:

$$\frac{\alpha}{u^2+v^2} + \frac{\beta u}{u^2+v^2} - \frac{\gamma v}{u^2+v^2} + \delta = 0\,,$$

или в эквивалентном виде

$$\delta(u^2+v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha = 0\,. \tag{3}$$

Соотношение (3) есть уравнение окружности (возможно, обобщённой). Тем самым доказано круговое свойство для отображения $w = \dfrac{1}{z}$.

В случае, когда дробно линейная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ не является линейной ($c \neq 0$), она представима в виде

$$w = A + \frac{B}{z - z_0}\,.$$

Соответствующее ей дробно-линейное отображение сводится к последовательному выполнению трёх преобразований

$$\zeta = z - z_0, \quad \zeta_1 = \frac{1}{\zeta}, \quad w = A + B\zeta_1\,,$$

каждое из которых в силу уже доказанного обладает круговым свойством. Отсюда и вытекает теорема 2. ▶

Если образ $w(\Lambda)$ обобщённой окружности Λ при дробно линейном отображении w есть ограниченное множество, то $w(\Lambda)$ есть обычная окружность; в противном случае $w(\Lambda)$ есть прямая.

Читателю хорошо известно понятие симметрии точек относительно прямой. В элементарной геометрии вводится понятие симметрии относительно окружности. Именно, пусть Γ – окружность радиуса R с центром в точке O. Точки M и M^* называются *симметричными относительно окружности* Γ, если они лежат на одном луче, выходящем из точки O и $OM \cdot OM^* = R^2$.

Дробно-линейное отображение обладает следующим свойством *сохранения симметрии.*

Теорема. *При дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.*

Доказательство теоремы заинтересованный читатель может найти в [1], [4]–[7]. Здесь же отметим, что в сформулированной теореме окружность может быть и прямой.

3. Дробно-линейное отображение, переводящее три различные точки в три различные точки.

Теорема 3. *Существует единственное дробно-линейное отображение, при котором три различные точки* z_1, z_2, z_3 *переходят в три различные точки* w_1, w_2, w_3. *Это отображение определяется формулой*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \tag{4}$$

◀ Из теоремы 2 следует, что функция w является дробно-линейной. Ясно также, что $w_k = f(z_k) \quad (k = 1, 2, 3)$, так как при $z = z_k$ правая часть (4) принимает значения $0, \infty, 1$, а левая часть (4) принимает те же значения при $w = w_k \quad (k = 1, 2, 3)$.

Докажем единственность. Пусть $w = f_1(z)$ – дробно-линейная функция, удовлетворяющая тем же условиям, что и функция $w = f(z)$, а именно $f_1(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, 3)$. Пусть ψ – функция, обратная к функции f. Тогда суперпозиция $\psi \circ f_1$ есть дробно-линейная функция, поэтому $\psi(f_1(z)) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ и $\psi(f_1(z_k)) = z_k$, т. е.

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Отсюда получаем равенства $cz_k^2 + (d - a)z_k - b = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$, т. е. квадратное уравнение $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ имеет три различных корня. Следовательно, $c = 0, d = a, b = 0$ и $\psi(f_1(z)) \equiv z$, откуда вытекает равенство $f_1(z) = f(z)$. ▶

Следствие. *Функция* $w = f(z)$, *определяемая равенством (4), конформно отображает круг, граница которого проходит через точки* z_k, *на круг, граница которого проходит чере точки* $w_k \quad (k = 1, 2, 3)$.

Здесь и далее « круг » – внутренность окружности, или внешность окружности, или полуплоскость.

Отличное от тождественного дробно-линейное отображение может иметь не более двух неподвижных точек. Дробно-линейное отображение, имеющее две неподвижные точки z_1, z_2, определяется формулой

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = A\frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad A \in \mathbb{C}.$$

4. Примеры и замечания.

Пример 1. Всякое дробно-линейное отображение, переводящее точку z_1 в точку $w = 0$, а точку z_2 – в точку $w = \infty$, имеет вид

$$w = A\frac{z - z_1}{z - z_2}\,, \tag{5}$$

где A – некоторое комплексное число.

Пример 2. Дробно-линейное отображение полуплоскости $Imz > 0$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}e^{i\alpha} \tag{6}$$

где $Imz_0 > 0, \alpha$ – действительное число.

◀ Пусть дробно-линейная $w = w(z)$ отображает полуплоскость $Imz > 0$ на круг $|w| < 1$ так, что $w(z_0) = 0 \quad (Imz_0 > 0)$. Тогда в силу свойства симметрии $w(\overline{z_0}) = \infty$ и по формуле (5)

$$w = A\frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}\,. \tag{7}$$

Покажем, что $|A| = 1$. Так как точки действительной оси переходят в точки единичной окружности, т. е. $|w| = 1$ при действительных x. В частности,

$$1 = \left|A\frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0}\right| = |A|\,.$$

Следовательно, $A = e^{i\alpha}$ и из (7) получаем формулу (6).▶

Пример 3. Дробно-линейное отображение круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z}_0}e^{i\alpha},$$

где $|z_0| < 1, \alpha$ – действительное число (предлагается доказать самостоятельно; этот пример разобран во всех учебниках по комплексному анализу).

В ряде вопросов математики и её приложений встречается следующая задача. Задана область $D \subset \mathbb{C}$ и ищутся условия на коэффициенты c_k многочлена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k\,, (c_n \neq 0),$$

при выполнении которых все корни многочлена f принадлежат области D.

Простейшими областями являются полуплоскости. Обозначим через $\mathbf{H}_0$ левую полуплоскость, состоящую из точек $z = x + iy$, для которых

$x < 0$. Многочлен $f(z)$ называют устойчивым, если все его корни лежат в левой полуплоскости $\mathbf{H}_0$, т. е. если все их вещественные части отрицательны. Известны простые условия устойчивости многочлена (критерий Рауса-Гурвица и др.); обзор результатов в этом направлении можно найти в [9].

В ряде случаев из критериев устойчивости многочлена вытекают полезные следствия, относящиеся к областям D, отличающимся от полуплоскости $\mathbf{H}_0$.

Упражнение 1. a) Показать, что для любой полуплоскости $\mathbf{H}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ существует линейное отображение $w = az + b$, преобразующее полуплоскость $\mathbf{H}_0$ в полуплоскость $\mathbf{H}$; b) Докажите, что все корни многочлена f тогда и только тогда принадлежат полуплоскости $\mathbf{H}$, когда устойчив многочлен

$$g(z) = f(az + b) = \sum_{k=0}^{n} c_k (az + b)^k \,.$$

Упражнение 2. a) Покажите, что для любого круга $\mathbf{K}$ комплексной плоскости существует дробно-линейное отображение $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, преобразующее полуплоскость $\mathbf{H}_0$ в круг $\mathbf{K}$; b) Докажите, что все корни многочлена f тогда и только тогда лежат в круге $\mathbf{K}$, когда устойчив многочлен

$$h(z) = (cz + d)^n f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \sum_{k=0}^{n} (az + b)^k (cz + d)^{n-k} \,;$$

c) Если $\mathbf{K}$ – круг радиуса 1 с центром в точке 0, то можно положить

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = -1 \,.$$

Упражнение 3. a) Рассмотреть случай, когда D есть произвольное выпуклое многоугольное множество, т. е. пересечение конечного числа полуплоскостей; b) Как модифицировать рассуждения в случае произвольной выпуклой области D?

5.3 Элементарные функции и конформные отображения

1. Степенная функция. Функция

$$w = z^n, \tag{1}$$

где n – натуральное число, имеет производную $\dfrac{dw}{dz} = nz^{n-1}$, отличную от нуля в каждой точке $z \neq 0$. Если $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\psi}$, то

$$\rho = r^n, \qquad \psi = n\varphi. \tag{2}$$

Равенство (2) показывает, что осуществляемое степенной функцией (1) отображение увеличивает в n раз углы с вершиной в точке $z = 0$, поэтому при $n > 1$ не конформно в этой точке.

Из соотношений (2) следует, что любые две точки z_1 и z_2 с одинаковыми модулями и с аргументами, отличающимися на целое кратное $2\pi/n$:

$$|z_1| = |z_2|, \quad arg z_1 = arg z_2 + k\frac{2\pi}{n} \tag{3}$$

(и только такие точки), при отображении (1) переходят в одну точку. Для однолистности отображения $w = z^n$ в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никаких двух различных точек z_1 и z_2, связанных соотношениями (3).

Примером области, в которой отображение однолистно, может служить сектор

$$D = \left\{0 < arg z < \frac{2\pi}{n}\right\}.$$

Этот сектор гомеоморфно преобразуется в плоскость w с выброшенной положительной полуосью. Функция (1) позволяет конформно отобразить сектор $D_1 = \left\{0 < arg z < \frac{\pi}{n}\right\}$ на верхнюю полуплоскость.

Упражнение 1. Доказать, что функция

$$w = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

отображает полукруг $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1, Im z > 0\}$ в верхнюю полуплоскость $\{z \in \mathbb{C}, Im z > 0\}$.

Упражнение 2. Показать,что функция

$$w = \left(\frac{z^n+1}{z^n-1}\right)^2$$

отображает на верхнюю полуплоскость сектор с углом, равным $\frac{\pi}{n}$, радиуса 1.

Упражнение 3. Пусть G – луночка, т. е. область заключенная между двумя окружностями, пересекающимися в точках a, b и образующими угол $\dfrac{\pi}{n}$. Установить, что отображение

$$w = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n$$

переводит G в верхнюю полуплоскость.

2. Показательная функция. Напомним определение и некоторые свойства показательной функции. Функция e^z определяется равенством

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}) \ ,$$

ряд в правой части всюду сходится. Его сумма аналитична, имеет место обычное правило дифференцирования $(e^z)' = e^z$. Сохраняется теорема сложения

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \, ,$$

непосредственным следствием которой является формула Эйлера

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \, . \tag{4}$$

В частности, $|e^z| = e^{Re\, z} > 0$; поэтому $(e^z)' \neq 0$ и отображение $w = e^z$ конформно в каждой точке комплексной плоскости.

Функция e^z периодическая с мнимым периодом $2\pi i$. Из равенства $e^{z_1} = e^{z_2}$ следует, что $z_1 - z_2 = 2n\pi i$, n – целое число. Это свойство означает, что для однолистности отображения $w = e^z$ в какой-либо области D необходимо и достаточно, чтобы эта область не содержала ни одной пары точек z_1, z_2, связанных соотношением

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i \qquad (n \in \mathbb{Z}) \, .$$

Примером области, удовлетворяющей этому условию, является полоса $\{0 < Imz < 2\pi\}$. Если $z = x + iy, w = \rho e^{i\psi}$ и $w = e^z$, то согласно (4)

$$\rho = e^x, \quad \psi = y \, .$$

Отсюда видно, что отображение $w = e^z$ преобразует прямые $y = y_0$ в лучи $\psi = y_0$, а промежутки $\{x = x_0, 0 < y < 2\pi\}$ – в окружности с выколотой точкой $\{\rho = e^{x_0}, \quad 0 < \psi < 2\pi\}$. Полоса $\{0 < y < 2\pi\}$ преобразуется, следовательно, в плоскость w с выброшенной положительной полуосью. Вдвое более узкая полоса $\Pi = \{0 < y < \pi\}$ преобразуется при этом в верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.

Если нам дана полоса какой угодно ширины и как-либо расположенная на плоскости z, то применяя линейное отображение $w = az + b$, мы можем преобразовать её в полосу Π, а затем отобразить на верхнюю полуплоскость. Таким образом, мы видим, как любую полосу можно отобразить на верхнюю полуплоскость.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть область G определяется соотношением

$$G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \quad |z-1| > 1\}.$$

Таким образом, G – это часть комлексной плоскости, заключенная между двумя окружностями, имеющими внутреннее соприкосновение в точке $z_1 = 2$. При помощи дробно-линейной функции $w = \dfrac{z}{z-2}$ мы можем отобразить наши окружности на параллельные прямые, а область G – на некоторую полосу. Теперь ясно, как область G можно отобразить на верхнюю полуплоскость.

Упражнение 4 Показать, что функция $w = e^z$ конформно отображает прямоугольник $c_1 < Rez < c_2$, $a < Imz < b$, где $-\infty \leqslant c_1 < c_2 \leqslant \infty$, $b - a \leqslant 2\pi$, на кольцевой сектор $e^{c_1} < |w| < e^{c_2}, \quad a < \arg w < b$.

3. Функция Жуковского и конформные отображения. Функция Жуковского определяется равенством

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{5}$$

Она дифференцируема в естественной области определения. Если $z_1 \neq z_2, f(z_1) = f(z_2)$, то $z_1 - z_2 = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$, поэтому $z_1 z_2 = 1$. Отсюда вытекает, что если область G не содержит двух точек z_1, z_2, связанных соотношением $z_1 z_2 = 1$, то функция Жуковского осуществляет взаимнооднозначное отображение области G. Найдём образ окружности $|z| = r$. Положим $z = r(\cos t + \imath \sin t)$. Тогда $w = f(z) = u + \imath v$, где

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t, v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t.$$

Из этих соотношений следует, что функция Жуковского отображает окружности $|z| = r, 0 < r < \infty, r \neq 1$ в эллипсы. Фокусы подобных эллипсов находятся в одних и тех же точках действительной оси. Если $r < 1$, то положительному направлению обхода окружности $|z| = r$ соответствует отрицательное направление обхода эллипса, если $r > 1$, то положительному направлению обхода окружности $|z| = r$ соответствует положительное направление обхода эллипса. При $r \to 1$ эллипс вырождается в отрезок $[0,1]$ действительной оси, проходимый дважды. При $r \to 0$ эллипс переходит в окружность бесконечно большого радиуса. Тем самым функция Жуковского отображает область внутри единичного круга на плоскость w, разрезанную вдоль отрезка $[-1,1]$. Следовательно, функция Жуковского отображает плоскость z на плоскость w дважды.

Производная функции Жуковского

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

отлична от нуля всюду, кроме точек ± 1. Отсюда видно, что отображение (5) конформно в каждой конечной точке $z \neq 0, \pm 1$. Для однолистности функции Жуковского в какой-либо области G необходимо и достаточно, чтобы область G не содержала двух точек z_1, z_2, связанных соотношением $z_1 z_2 = 1$. Функция Жуковского отображает окружности $|z| = r, \quad 0 < r < \infty, \quad r \neq 1$ в эллипсы. Если $r > 1$, то положительному направлению обхода окружности $|z| = r$ соответствует положительное направление обхода эллипса. Легко показать, что функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга на внешность отрезка $[-1,1]$ действительной оси.

Гиперболические функции могут быть определены равенствами

$$chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Функция $w = chz = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ является суперпозицией двух функций

$$\zeta = e^z, \quad w = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\,.$$

Отображение $\zeta = e^z$ переводит полуполосу $\Pi_1 := \{z \in \mathbb{C},\ 0 < Imz < \pi,\ Rez > 0\}$ в область $D = \{\zeta, |\zeta| > 1, Im\zeta > 0\}$, а функция Жуковского $w = w(\zeta)$ отображает область D на полуплоскость $Imw > 0$. Следовательно, функция $w = chz$ конформно отображает полуполосу Π_1 в верхнюю полуплоскость $Imw > 0$.

Покажем, что функция $w = \cos z$ конформно отображает полуполосу $\Pi_2 := \{z \in \mathbb{C}, \quad -\pi < Rez < 0, \quad Imz > 0\}$ на полуплоскость $Imw > 0$. Для доказательства воспользуемся равенством $\cos z = chiz$. Требуемое утверждение получим, выполняя сначала отображение $\zeta = -iz$ (поворот вокруг точки $z = 0$ на угол $-\pi/2$), а затем отображение $w = ch\zeta$.

Установим,что функция $w = \sin z$ конформно отображает полуполосу $\Pi_3 := \{z \in \mathbb{C}, \quad -\pi/2 < Rez < \pi/2, Imz > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $Imw > 0$. Действительно, поскольку $\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$, то выполняя сначала отображение $\zeta = z - \frac{\pi}{2}$ (сдвиг), а затем отображение $w = \cos\zeta$, получаем требуемый результат.

В качестве ещё одного примера докажем, что функция $w = tgz$ конформно отображает полосу $-\pi/4 < Rez < \pi/4$ на единичный круг $|w| < 1$. Действительно, так как

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = (-i)\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

то отображение $w = tgz$ можно рассматривать как суперпозицию трех отображений:

$$\zeta = 2iz, \qquad \eta = e^{\zeta}, \quad w = (-i)\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Выполняя последовательно эти отображения, получаем отображение

$$w = tgz.$$

Рассмотренные примеры показывают, что отображения гиперболическими и тригонометрическими функциями сводятся к последовательному выполнению изученных выше отображений.

4. Задачи

1. Отобразить на вертикальную полосу $0 < Rew < 1$ полуплоскость $Rez > 0$ с выкинутым кругом $|z - R| < R \quad (0 < R < \infty$.

2. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $-1, 0, 1$ соответственно в точки $1, i, -1$, и выяснить, во что при этом переходит верхняя полуплоскость.

3. При помощи функции $w = z^2$ и ей обратной найти конформное отображение следующих областей:

a) внутренности правой ветви равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ на верхнюю полуплоскость;

b) внешности параболы $y^2 = 2px$ на верхнюю полуплоскость.

4. Найти область, на которую отображается круг $|z| < 1$ при помощи функции $w = R(z + mz^2), \quad R > 0, 0 \leqslant 2m \leqslant 1$.

5. Отобразить на верхнюю полуплоскость следующие круговые луночки:

$$I)|z| < 1,\ |z - i| < 1; II)|z| < 1,\ |z - i| > 1;$$

$$III)|z| > 1,\ |z - i| < 1; IV)|z| > 1, |z - i| > 1.$$

6. Найти преобразование полярной сетки $|z| = R, argz = \alpha$ с помощью функкции Жуковского $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

7. Представив функцию Жуковского в виде

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 ,$$

найти образ окружности Г, проходящей через точки $z = \pm 1$ под углом $\alpha \quad (-\pi < \alpha < \pi)$ к действительной оси в точке 1, и область, на которую отображается внешность такой окружности.

8. Найти область, получаемую при отображении $w = \dfrac{z}{z^2+1}$ круга $|z| < 1$.

9. Выяснить, во что преобразуются при отображении $w = e^z$

a) прямые $y = kx + b$;

b) полуполоса $x > 0, 0 < y < \alpha \leqslant 2\pi$.

10. Выяснить, во что преобразуется при отображении $w = \cos z$

a) прямоугольная сетка $x = C, \quad y = C$;

b) полуполоса $0 < x < \pi$, $y < 0$;

c) полуполоса $0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad y > 0$;

d) прямоугольник $0 < x < \pi, \quad -h < y < h \quad (h > 0)$.

5.4 Комплексный анализ (сводка формул)

1. Условия дифференцируемости функции $f = u + iv$ (условия Коши–Римана)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} .$$

2. Интеграл от функции f по кривой Г, определяемой равенством $z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b)$, вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{f}(\mathbf{z})\, \mathbf{dz} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}[\mathbf{z}(\mathbf{t})]\mathbf{z}'(\mathbf{t})\, \mathbf{dt} .$$

3. Формулы Коши

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi i}} \oint\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \frac{\mathbf{f}(\zeta)}{\zeta - \mathbf{z}}\, \mathbf{d}\zeta, \quad \mathbf{f}^{(\mathbf{n})}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{2\pi i}} \oint\limits_{\boldsymbol{\Gamma}} \frac{\mathbf{f}(\zeta)}{(\zeta - \mathbf{z})^{\mathbf{n+1}}}\, \mathbf{d}\zeta .$$

4. Ряд Тейлора функции f с центром разложения в точке a

$$\mathbf{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n}.$$

5. Разложения в ряды Маклорена элементарных функций

$$\mathbf{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} \ .$$

6. Ряд Лорана для функции f, аналитической в кольце $R_1 < |z-a| < R_2$, имеет вид

$$\mathbf{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n}, \text{ где } \mathbf{c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz}.$$

7. Определение вычета функции f в конечной точке a:

$$\mathbf{Res\,[f,a] = \operatorname*{Res}_{a} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=r} f(z)\, dz} \quad (\mathbf{r > 0} \text{ и мало}).$$

8. Вычет функции f в простом полюсе a

$$\mathbf{\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)};$$

если

$$\mathbf{f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi(a) \neq 0, \quad \psi(a) = 0, \quad \psi\,'(a) \neq 0},$$

то

$$\mathbf{\operatorname*{Res}_{a} f = \frac{\varphi(a)}{\psi\,'(a)}} \ .$$

9. Вычет функции f в полюсе кратности n

$$\mathbf{\operatorname*{Res}_{a} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right]};$$

если

$$\mathbf{f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^n}, \quad h(a) \neq 0},$$

то

$$\mathbf{\operatorname*{Res}_{a} f = \frac{1}{(n-1)!} h^{(n-1)}(a)} \ .$$

10. Определение вычета функции f в ∞:

$$\operatorname*{\mathbf{Res}}_{\infty} \mathbf{f} = -\mathbf{c_{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi i}} \oint\limits_{\mathbf{C_R}} \mathbf{f(z)\,dz},$$

где C_R – окружность $|z| = R$ достаточно большого радиуса R, проходимая по часовой стрелке.

11. Если ∞ – устранимая особая точка для функции f, то

$$\operatorname*{\mathbf{Res}}_{\infty} \mathbf{f} = -\lim_{\mathbf{z}\to\infty} \mathbf{z}(\mathbf{f(z)} - \mathbf{c_0}).$$

12. Если ∞ – полюс порядка n функции f, то

$$\operatorname*{\mathbf{Res}}_{\infty} \mathbf{f} = \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}+\mathbf{1})!} \lim_{\mathbf{z}\to\infty} \{\mathbf{z^{n+2} f^{(n+1)}(z)}\}.$$

13. Основная теорема вычетов

$$\oint\limits_{\mathbf{\Gamma}} \mathbf{f(z)\,dz} = \mathbf{2\pi i} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{z_k}} \mathbf{f}.$$

14.

$$\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \mathbf{R}(\cos \mathbf{t}, \sin \mathbf{t})\,\mathbf{dt} = \mathbf{2\pi i} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{z_k}} \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{z}), \quad |\mathbf{z_k}| < \mathbf{1},$$

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{iz}} \mathbf{R}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\mathbf{z} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\right), \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2i}}\left(\mathbf{z} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}}\right)\right).$$

15.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R(x)\,dx} = \mathbf{2\pi i} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{z_k}} \mathbf{R(z)} \quad (\mathbf{Im\,z_k} > \mathbf{0}).$$

В равенстве (15) $R(z) = P(z)/Q(z)$, $P(z)$ и $Q(z)$ многочлены, причём

$$degP \leqslant degQ - 2,$$

многочлен Q не имеет действительных корней, $z_1, \dots, z_m$ – корни многочлена $Q(z)$, расположенные в верхней полуплоскости.

16.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R(x)e^{i\lambda x}\,dx} = \mathbf{2\pi i} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{z_k}} \left[\mathbf{R(z)e^{i\lambda z}}\right] \quad (\mathbf{Im\,z_k} > \mathbf{0}).$$

В равенстве (16) $R(z) = P(z)/Q(z)$, $P(z)$ и $Q(z)$ многочлены, причём $degP \leqslant degQ - 1$, многочлен Q не имеет действительных корней, $z_1, \ldots, z_m$ – корни многочлена $Q(z)$, расположенные в верхней полуплоскости; $\lambda > 0$, случай отрицательного λ сводится к рассмотренному заменой переменной.

17.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R(x)e^{i\lambda x}\,dx = 2\pi i} \left\{ \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{m}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{z_k}} \left[\mathbf{R(z)e^{i\lambda z}}\right] + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \sum_{\mathbf{l=1}}^{\mathbf{n}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{x_l}} \left[\mathbf{R(z)e^{i\lambda z}}\right] \right\}.$$

В равенстве (17) $R(z)$, z_k, λ имеют тот же смысл, что и в (16), однако многочлен $Q(z)$ имеет действительные и простые корни $x_1, \ldots, x_n$, интегралы в равенствах (16), (17) понимаются в смысле главного значения.

18.

$$\oint_{\Gamma} \varphi(\mathbf{z}) \frac{\mathbf{f'(z)}}{\mathbf{f(z)}}\,\mathbf{dz = 2\pi i} \left(\sum_{\mathbf{s=1}}^{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{s}} \varphi(\mathbf{a_s}) - \sum_{\mathbf{t=1}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{t}} \varphi(\mathbf{b_t}) \right).$$

В равенстве (18) $\varphi(z)$ – аналитическая внутри контура Γ и непрерывная на самом контуре Γ функция, функция f непрерывна на контуре Γ и $f(z) \neq 0\ \forall z \in \Gamma$, внутри контура Γ функция f аналитична, за исключением конечного числа полюсов; α_s – кратность нуля a_s функции f; β_t – кратность полюса b_t функции f. Важный частный случай: $\varphi(z) \equiv 1$, функция f не имеет полюсов внутри контура Γ; в этой ситуации правая часть (18) равна $2\pi i N$, где N – сумма кратностей корней аналитической функции f, лежащих внутри контура Γ.

19. Определение преобразования Лапласа

$$\mathbf{F(p)} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{f(t)e^{-pt}\,dt} \quad \sim \mathbf{f(t)} \risingdotseq \mathbf{F(p)}.$$

20. Важнейшее свойство преобразования Лапласа

$$\mathbf{f^{(n)}(t)} \risingdotseq \mathbf{p^n - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0)} - \cdots - \mathbf{f^{(n-1)}(0)}.$$

21.

$$\mathbf{f(t)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\pi i}} \int_{\mathbf{a-i\infty}}^{\mathbf{a+i\infty}} \mathbf{e^{pt}F(p)\,dp} \qquad \text{(формула обращения)}.$$

22.

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{c_k}}{\mathbf{p^k}} \risingdotseq \theta(\mathbf{t}) \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{c_k}}{\mathbf{(k-1)!}} \mathbf{t^{k-1}} \qquad \text{(первая теорема разложения)}.$$

23. Если $F(p)$ – правильная рациональная дробь, то

$$\mathbf{F(p)} \risingdotseq \theta(\mathbf{t}) \sum_{\mathbf{p_k}} \operatorname*{\mathbf{Res}}_{\mathbf{p_k}} \left[\mathbf{F(p)e^{pt}}\right] \quad \text{(вторая теорема разложения).}$$

24. В частности, если $F(p) = A(p)/B(p)$ $(A(p), B(p)$– многочлены степеней n, m соответственно, $n < m$ и нули p_k многочлена $B(p)$ простые), то

$$\mathbf{f(t)} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{l}} \frac{\mathbf{A(p_k)}}{\mathbf{B'(p_k)}} \mathbf{e^{p_k t}}.$$

25. Преобразование Лапласа $X(p)$ решения $x(t)$ задачи Коши

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{Ax}, \quad \mathbf{x(0)} = \mathbf{x_0}$$

определяется равенством

$$\mathbf{X(p)} = (\mathbf{pE} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x_0},$$

в котором E – единичная матрица. Компоненты векторной функции $X(p)$ – правильные рациональные дроби, поэтому вычисление обратного преобразования Лапласа проводится на основе формул (23), (24).

Литература

I. Основные учебники

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

2. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1992.

3. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977.

4. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1979.

5. Шабунин М. И. Сидоров Ю. В. Теория функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2002.

II. Дополнительная литература

6. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций. М.: Наука, 1984.

7. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.:Наука, 1968.

8. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978.

9. Постников М. М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981.

10. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

11. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.

12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.

Учебное издание

Климов Владимир Степанович

Основы комплексного анализа

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерная верстка А. Ю. Ухалова
Подписано в печать 17.02.2010. Формат 60 х 84/8.
Бумага офсетная. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 11,16.
Уч.-изд. л. 5,5.
Тираж 100 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ им. П. Г. Демидова.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150044, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано на ризографе.