Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

В.С. Климов

Одномерный математический анализ
Часть I

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальностей
Математика и Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2005

УДК 517
ББК В16я73
К 49

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2005 года

Рецензенты:
Доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ Е.И. Смирнов;
кафедра прикладной математики и вычислительной техники ЯГТУ

К 49 **Климов, В.С.** Одномерный математический анализ. Часть I: Учебное пособие / В.С. Климов; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – 120 с.
ISBN 5-8397-0370-2

Первая часть пособия содержит следующие разделы дисциплины "Математический анализ": последовательности, функции, производные.

Предназначено для студентов первого курса университетов, обучающихся по специальностям 010100 Математика, 010200 Прикладная математика и информатика и направлению подготовки 510100 Математика (дисц. «Математический анализ», блок ЕН), очной формы обучения.

Пособие подготовлено с использованием издательской системы LaTeX.

Рис. 4. Библиогр.: 20 назв.

УДК 517
ББК В16я73

ISBN 5-8397-0370-2

Учебное издание
Климов Владимир Степанович
Одномерный математический анализ
Часть I
Учебное пособие

Редактор, корректор А. А. Аладьева
Компьютерный набор, верстка О. В. Данилова

Подписано в печать 30.05.05. Формат 60×84/8. Бумага Data Copy.
Усл. печ. л. 13,95. Уч.-изд. л. 8,4. Тираж 150 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета.

Отпечатано на ризографе.
Ярославский государственный университет.
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов математического анализа, изучаемых студентами первого курса университетов специальности 010200 Прикладная математика и информатика и 010100 Математика.

Весь материал разбит на две части. Первая часть посвящена введению в анализ и одномерному дифференциальному исчислению. Здесь приведены сведения из теории множеств, сформулированы аксиомы поля действительных чисел, изложены основы теории числовых последовательностей, изучены непрерывные функции одного действительного переменного. Замыкает первую часть одномерное дифференциальное исчисление. Существенное место в этом разделе занимают техника дифференцирования, ряд Тейлора и приложения производных к исследованию функций.

Представленные в первой части вопросы изучаются в средней школе. Многолетний опыт общения с первокурсниками убедил автора в том, что полагаться на знания школьников элементов математического анализа весьма рискованно. Степень подготовленности абитуриентов существенным образом отличается; это в первую очередь связано с различиями в профиле школ, а также разными дополнительными способами подготовки к учебе в вузе. Как правило, в современных школах многие математические результаты приводятся без доказательства. В итоге у школьников складывается неправильное представление о математике; иные начинают сомневаться в необходимости проведения доказательств.

Без достаточных к тому оснований первокурсники считают все элементарные функции непрерывными. Как полагает автор, данный факт заслуживает подробного доказательства. В значительной мере студентов-первокурсников приходится не только учить, но и переучивать математическому анализу.

В пособии принята сквозная нумерация параграфов, разбитых на отдельные пункты. Формулы (теоремы, упражнения и т. п.) нумеруются в пределах каждого параграфа. При ссылках внутри параграфа указывается лишь номер соответствующей формулы (теоремы и т. п.); в противном случае приводится и номер параграфа. Например, теорема 4.3. – это теорема 3 из § 4. Символы ◀ и ▶ указывают начало и конец доказательства.

Во второй части излагаются интегральное исчисление и теория рядов. Изучаются интегралы не только скалярных, но и векторных функций. В рассмотрение включаются ряды с комплексными элементами. Замыкает эту часть раздел, посвященный несобственным интегралам. Применяемые здесь конструкции близки к используемым в теории рядов, что и мотивирует выбранный порядок изложения.

Лекции по анализу на математическом факультете ЯрГУ читаются автором около 30 лет. Большое содействие в подготовке пособия оказали декан математического факультета профессор В.Г. Дурнев и его заместитель доцент М.В. Невский. Труд по превращению разрозненных листов в удобочитаемую рукопись взяли на себя аспирантка факультета О.В. Данилова и доцент ЯрГУ С.Д. Глызин.

Некоторые разделы пособия обсуждались мною с коллегами по университету. Считаю приятным долгом выразить им самую искреннюю признательность. Буду благодарен за указания на возможные ошибки в тексте, ответственность за которые автор полностью берет на себя.

В.С. Климов

Глава 1. Последовательности

§1. Сведения из теории множеств

В математическом анализе используются некоторые понятия теории множеств. Целью этого параграфа является фиксация терминологии и обозначений. Для более подробного ознакомления с ними следует обратиться к учебникам [6] и [12].

1. Алгебраические операции над множествами

Под множеством далее понимается совокупность объектов любой природы. Объекты, образующие в своей совокупности данное множество, называются его элементами или точками. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$ (или $A \ni a$). Запись $a \overline{\in} A$ означает, что элемент a не принадлежит A. Если все элементы множества B принадлежат множеству A, то B называют подмножеством множества A и пишут $B \subset A$. Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A, B называют равными: используется запись $A = B$. Для обозначения пустого множества, т.е. множества, не содержащего ни одного элемента, используют символ $\emptyset$.

Ниже применяются следующие логические значки:

$\Rightarrow$ — "влечет за собой", "следует";

$\Leftrightarrow$ — "тогда и только тогда";

$\forall$ — "для всех", "для каждого";

$\exists$ — "существует";

$\exists\,!$ — "существует точно один";

$:=$ или $\stackrel{def}{=}$ — "равно по определению".

Совокупность элементов множества A, обладающих свойством P, обозначается символом $\{x \in A \mid P(x)\} = \{x \mid P(x)\}$.

Двум множествам A, B сопоставляют их объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и разность $A \backslash B$, определяемые следующим образом: $A \cup B$ состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B; $A \cap B$ — множество элементов, принадлежащих каждому из множеств A, B; $A \backslash B$ — множество, состоящее из всех элементов, не принадлежащих B. Таким образом,

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},\ A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\},$$
$$A \backslash B := \{x \mid x \in A \text{ и } x \overline{\in} B\}.$$

Объединение и пересечение вводят и для произвольной совокупности множеств A_t, где индекс t принадлежит некоторому множеству T. Объединение и пересечение множеств $A_t,\ t \in T$, определяются соотношениями

$$\bigcup_{t \in T} A_t := \{x \mid \exists t_0 \in T : A_{t_0} \ni x\},$$
$$\bigcap_{t \in T} A_t := \{x \mid \forall t \in T : A_t \ni x\}.$$

Разность $CE = E \backslash A$ иногда именуют дополнением до E множества $A \subset E$. Отметим равенства

$$C\Big(\bigcap_{t \in T} A_t\Big) = \bigcup_{t \in T} CA_t,\ C\Big(\bigcup_{t \in T} A_t\Big) = \bigcap_{t \in T} CA_t, \tag{1}$$

называемые законами двойственности Моргана.

Если A и B — два непустых множества, то их декартовым произведением $A \times B$ называют множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, а $b \in B$. Таким образом,

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Если $(a, b) \in A \times B$, то a называют первой координатой элемента (a, b), а b — его второй координатой; первую и вторую координату называют проекциями.

2. Понятие отображения или функции

Определение 1. *Пусть X и Y — два множества. Отображением f множества X в множество Y называют предписание (правило), сопоставляющее каждому элементу x из X точно один элемент y из Y. Слова "функция", "отображение", "оператор", "соответствие", "преобразование" являются синонимами.*

Каждая из записей: 1) $f : X \to Y$, 2) $X \xrightarrow{f} Y$, 3) $y = f(x),\ x \in X$ означает, что f есть отображение множества X в множество Y. Множество X называют областью определения отображения f и обозначают символом $D(f)$. Элемент y, который отображение f ставит в соответствие элементу x, называют образом элемента x при отображении f или значением отображения f в точке x и обозначают символом $f(x)$. Множество $R(f) := \{y \in Y \mid \exists x \in X\ ;\ f(x) = y\}$ именуют множеством значений отображения f. Если $R(f) = Y$, то отображение $f : X \to Y$ называют отображением множества X на множество Y или сюръекцией. Если из условия $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$, то отображение $f : X \to Y$ называют вложением (инъекцией). Наконец, отображение $f : X \to Y$ называют биекцией, если оно одновременно сюръекция и инъекция.

Биекция $f : X \to Y$ существует не всегда. Например, если X, Y — конечные множества, то существование биекции $f : X \to Y$ равносильно совпадению количества элементов множеств X, Y. Для бесконечных множеств нельзя говорить о количестве элементов. Подходящим обобщением понятия "количество элементов" является понятие мощности множества.

Множества X и Y называют эквивалентными или равномощными, если существует биекция $f : X \to Y$. Это обозначается так $X \sim Y$. Без труда устанавливаются следующие свойства эквивалентности:

$$1)\ X \sim X;\ 2)\ X \sim Y \Rightarrow Y \sim X;\ 3)\ X \sim Y, Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z.$$

Как установлено основоположником теории множеств Кантором[1], не всякие бесконечные множества эквивалентны. Например, совокупность $\Omega(E)$ всех подмножеств любого множества E образует множество, не эквивалентное E. Для конечного множества E, содержащего n элементов, количество элементов множества $\Omega(E)$ равно 2^n.

[1] Г. Кантор (1845 - 1918 гг.) — немецкий математик

Пусть f и g — такие отображения, что множество значений f является подмножеством области определения g. Тогда суперпозицией $g \circ f$ отображений g и f называется отображение, значение которого во всякой точке x области определения отображения f есть $g(f(x))$. Если, например, $f : X \to Y$ — отображение множества X в множество Y, $g : Y \to Z$ — отображение множества Y в множество Z, то $g \circ f : X \to Z$ — отображение множества X в множество Z.

3. Поле

Пусть A — непустое множество. Всякое отображение, определяемое на декартовым квадрате $A^2 \stackrel{def}{=} A \times A$ со значениями в A, называется бинарной операцией на A. Например, на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел определены две бинарные операции: сложение и умножение. Некоторыми свойствами этих арифметических операций обладают и бинарные операции на отличных от $\mathbb{Z}$ множествах, поэтому за ними сохраняются те же названия. Если бинарная операция $f : A^2 \to A$ называется сложением и $z = f(x, y)$, то используется запись $z = x + y$. Если бинарная операция $g : A^2 \to A$ называется умножением и $z = g(x, y)$, то z записывают в виде $z = xy$ или $z = x \cdot y$.

В элементарной математике рассматриваются операции сложения и умножения рациональных чисел. Относительно этих операций множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел образует алгебраическую структуру, называемую полем. Приведем формальное определение этого понятия.

Определение 2. *Непустое множество $\mathcal{F}$ называется полем, если на $\mathcal{F}$ определены две бинарные операции, называемые сложением и умножением, причем*

A. Для сложения:

1) справедлив закон ассоциативности

$$x, y, z \in \mathcal{F} \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z;$$

2) существует элемент 0 *множества $\mathcal{F}$, такой, что*

$$x \in \mathcal{F} \Rightarrow x + 0 = x;$$

3) для каждого x из $\mathcal{F}$ существует такой элемент $-x$ из $\mathcal{F}$, что

$$x + (-x) = 0;$$

4) справедлив закон коммутативности

$$x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow x + y = y + x.$$

B. Для умножения:

1) справедлив закон ассоциативности

$$x, y, z \in \mathcal{F} \Rightarrow x(yz) = (xy)z;$$

2) существует элемент 1 *множества* $\mathcal{F}$ *такой, что* $1 \neq 0$ *и*

$$x \in \mathcal{F} \Rightarrow x \cdot 1 = x;$$

3) для каждого элемента x *из* $\mathcal{F}$*, отличного от нуля, существует такой элемент* x^{-1} *из* $\mathcal{F}$*, что* $x \cdot x^{-1} = 1$;

4) справедлив закон коммутативности

$$x, y \in \mathcal{F} \Rightarrow xy = yx;$$

C. Для сложения и умножения:

справедлив закон дистрибутивности умножения относительно сложения

$$x, y, z \in \mathcal{F} \Rightarrow x(y + z) = xy + xz.$$

Элемент 0 поля $\mathcal{F}$ называют нулем поля $\mathcal{F}$, элемент $(-x)$ — противоположным для x. Очевидны равенства $(-0) = 0,\ -(-x) = x\ \forall x \in \mathcal{F}$. Вычитанием в поле $\mathcal{F}$ называется бинарная операция, обозначаемая символом $x - y$ и определяемая равенством $x - y \overset{def}{=} x + (-y),\ x, y \in \mathcal{F}$. Вычитание дистрибутивно относительно умножения, т.е. $(x - y)z = xz - yz\ \forall x, y, z \in \mathcal{F}$. Поскольку $x \cdot 0 = x \cdot (y - y) = xy - xy = 0$, то дистрибутивность вычитания влечет равенство $0 \cdot x = 0$.

Элемент 1 поля $\mathcal{F}$ называют единицей поля $\mathcal{F}$, а элемент x^{-1} — обратным для ненулевого элемента x из $\mathcal{F}$. Справедливы равенства $1^{-1} = 1$ и $(x^{-1})^{-1} = x$ $\forall x \in \mathcal{F},\ x \neq 0$. Бинарная операция $\dfrac{x}{y} \overset{def}{=} x \cdot y^{-1}$ $(x \in \mathcal{F},\ y \in \mathcal{F},\ y \neq 0)$ называется делением. Отметим равенства $\dfrac{1}{1} = 1;\ \dfrac{1}{x} = x^{-1}\ \forall x \neq 0,\ (-x)y = -(xy),\ (-x) = (-1)x,\ (-x) \cdot (-y) = xy\ \forall x, y \in \mathcal{F}$.

Доказательства этих равенств можно рассматривать как упражнение на применение законов A,B,C: их можно найти в курсах алгебры (см., например, [12]).

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — непустые подмножества поля $\mathcal{F}$, то непусты и множества

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{x \in \mathcal{F} \mid x = a + b,\ a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}\},$$
$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} := \{x \in \mathcal{F} \mid x = a \cdot b,\ a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}\},$$

называемые алгебраической суммой (произведением) множеств $\mathcal{A},\ \mathcal{B}$ соответственно. Множество $\lambda\mathcal{A} := \{\lambda\} \cdot \mathcal{A} := \{x \in \mathcal{F} \mid x = \lambda a,\ a \in \mathcal{A}\}$ называют произведением множества $\mathcal{A}$ на элемент λ поля $\mathcal{F}$. В частности, $-\mathcal{A} := \{-1\} \cdot \mathcal{A}$ — симметричное (противоположное) к $\mathcal{A}$ множество.

Как видно из определения, любое поле $\mathcal{F}$ содержит, как минимум, два элемента 0 и 1. Существует поле, содержащее ровно два элемента. Сложение и умножение в этом поле определяются равенствами

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0,\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1,\ 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0,\ 0 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1.$$

Это поле играет важную роль в теории чисел, алгебре и теории кодирования.

Основной интерес для нас представляют поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле действительных чисел $\mathbb{R}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Их формальные определения приводятся далее.

4. Упорядоченное поле

Известные в элементарной математике отношения $<$, $\leqslant$ между рациональными числами могут быть перенесены на некоторые классы полей. В связи с этим рассматривают так называемые упорядоченные поля. Приведем соответствующее определение.

Определение 3. *Упорядоченным полем называют поле $\mathcal{F}$, содержащее подмножество $\mathcal{P}$, такое, что: 1) $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$; 2) $\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$; 3) $\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \emptyset$; $\mathcal{P} \cup (-\mathcal{P}) = \mathcal{F} \backslash \{0\}$. Элемент x поля $\mathcal{F}$ называют положительным, если $x \in \mathcal{P}$, и отрицательным, если $-x \in \mathcal{P}$.*

Свойства 1), 2) означают замкнутость множества $\mathcal{P}$ относительно операций сложения и умножения. Свойство 3) равносильно тому, что для любого элемента x справедливо лишь одно из утверждений:

$$x \in \mathcal{P}; \qquad x = 0; \qquad -x \in \mathcal{P}.$$

В упорядоченном поле определяются отношения $x < y,\ x \leqslant y$.

Именно, $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}$; $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}$ или $y = x$. Отношения $y > x$; $y \geqslant x$ равносильны отношениям $x < y,\ x \leqslant y$ соответственно.

Нетрудно проверить следующие свойства введенных отношений:

1) $\forall x, y \in \mathcal{F}$ справедливо лишь одно из утверждений: $x < y,\ x = y,\ x > y$;

2) если $x < y,\ y < z$, то $x < z$ (транзитивность отношения $<$);

аналогичным свойством обладает и отношение $\leqslant$;

3) если $x < y$, то $x + z < y + z\ \forall z \in \mathcal{F}$;

4) если $x < y,\ 0 < z$, то $xz < yz$.

Свойства 3, 4 означают согласованность отношения $<$ с операциями сложения и умножения. Аналогичными свойствами обладает и отношение $\leqslant$. Для дальнейшего полезны свойства

5) $x^2 > 0\ \forall x \in \mathcal{F}$;

6) $x^{-1} > 0\ \forall x > 0$;

7) если $0 < x < y$, то $y^{-1} < x^{-1}$.

В упорядоченном поле $\mathcal{F}$ определены бинарные операции max и min:

$$\max(x,y) = \begin{cases} x, \text{ если } y \leqslant x \\ y, \text{ если } x < y \end{cases}; \qquad \min(x,y) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant y \\ y, \text{ если } y < x \end{cases}.$$

Очевидно, что $\max(x,y)+\min(x,y) = x+y$. Абсолютная величина (модуль) $|x|$ элемента x из $\mathcal{F}$ определяется равенством $|x| \stackrel{def}{=} max(x,-x)$. Из определения модуля вытекают его свойства:

1) $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
3) если $\varepsilon > 0$, то $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$; аналогично $|x| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$;
4) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Остановимся на последнем свойстве, называемом неравенством треугольника. Из определения модуля вытекают неравенства:

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \qquad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

складывая которые приходим к неравенствам

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant |x| + |y|.$$

Теперь неравенство треугольника вытекает из третьего свойства модуля. Непосредственным следствием правила треугольника является справедливое для произвольных элементов x, y из $\mathcal{F}$ неравенство $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

5. Подмножества упорядоченного поля

Пусть $\mathcal{F}$ — упорядоченное поле, a, b — элементы $\mathcal{F}$, $a < b$. Введем следующие подмножества поля $\mathcal{F}$:

$$[a,b] := \{x \in \mathcal{F} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad (a,b) := \{x \in \mathcal{F} \mid a < x < b\},$$
$$[a,b) := \{x \in \mathcal{F} \mid a \leqslant x < b\}, \qquad (a,b] := \{x \in \mathcal{F} \mid a < x \leqslant b\}$$
$$[a,+\infty) := \{x \in \mathcal{F} \mid a \leqslant x\}, \qquad (a,+\infty) := \{x \in \mathcal{F} \mid a < x\},$$
$$(-\infty,b] := \{x \in \mathcal{F} \mid x \leqslant b\}, \qquad (-\infty,b) := \{x \in \mathcal{F} \mid x < b\},$$
$$(-\infty,+\infty) := \mathcal{F}.$$

Указанные множества называют промежутками; при этом $[a,b]$ называют замкнутым промежутком или отрезком (иногда сегментом); (a,b), (a,∞), $(-\infty,b)$, $(-\infty,\infty)$ — открытыми промежутками или интервалами. Промежутки $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b) называют конечными, остальные промежутки — бесконечными. Промежутки $[a,\infty)$, (a,∞), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$ называют лучами. Одноточечное множество $\{a\}$ иногда также считают отрезком $[a,a]$.

Непустое подмножество A упорядоченного поля $\mathcal{F}$ называют ограниченным сверху, если $A \subset (-\infty,u]$ для некоторого u из $\mathcal{F}$. Элемент u при этом именуют верхней гранью множества A. Очевидно, что если u — верхняя грань множества A и $u' \geqslant u$ $(u' \in \mathcal{F})$, то u' также верхняя грань множества A.

Если M — верхняя грань множества A и $M \leqslant u$ для любой верхней грани u множества A, то M называют точной верхней гранью множества A и обозначают символом $\sup A$ (читают: супремум множества A). Например, если A совпадает с одним из лучей $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, то $\sup A = b$.

Аналогично, непустое множество $A \subset \mathcal{F}$ называют ограниченным снизу, если $A \subset [v,\infty)$ для некоторого v из $\mathcal{F}$. Элемент v при этом именуют нижней гранью множества A. Если m — нижняя грань множества A и $m \geqslant v$ для любой нижней грани v множества A, то m называют точной нижней гранью множества A и обозначают символом $\inf A$ (читают: инфимум A). Например, если A — один из лучей $[a, \infty)$, (a, ∞), то $\inf A = a$.

Ограниченность снизу множества A равносильна ограниченности сверху множества $-A$. Если v — нижняя грань множества A, то $-v$ — верхняя грань множества $-A$, поэтому справедливо равенство

$$\inf A = -\sup(-A); \tag{2}$$

предполагается, что одна из точных граней существует. Равенство (2) позволяет в ряде случаев рассматривать свойства лишь одной из граней.

Приведем еще одно определение $\sup A$ и $\inf A$, эквивалентное первоначальному.

Определение 4. *Элемент M из $\mathcal{F}$ называют точной верхней гранью множества $A \subset F$, если $x \leqslant M$ $\forall x \in A$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент x_0 из A, такой, что $x_0 > M - \varepsilon$. Аналогично, $m = \inf A$, если $m \in \mathcal{F}$, $m \leqslant x$ $\forall x \in \mathcal{F}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент x_1 из A, что $x_1 < m + \varepsilon$.*

Точные грани множества могут не существовать, однако если верхняя (нижняя) грань множества существует, то она единственна. Это непосредственно вытекает из определения.

§2. Поле действительных чисел

1. Действительные числа

Определение 1. *Полным упорядоченным полем называется упорядоченное поле $\mathcal{F}$, в котором для каждого непустого множества, ограниченного сверху в $\mathcal{F}$, существует точная верхняя грань.*

Обсудим данное определение. Сразу же отметим, что не всякое упорядоченное поле является полным. Этот факт (в геометрической трактовке) был известен еще в античные времена. Анализ одного из таких примеров составляет содержание приведенного ниже упражнения 1; автор затрудняется назвать руководство по математическому анализу, в котором бы отсутствовал аналогичный пример.

В связи со сказанным возникают два вопроса: 1) существуют ли полные упорядоченные поля; 2) насколько существенно отличаются между собой подобные поля. Ответ на первый вопрос условно положителен: исходя из принятой аксиоматики теории множеств, можно построить полные упорядоченные поля (см., например, [1, 3]). Ответ на второй вопрос содержит

Теорема. *Любые два полных упорядоченных поля $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ изоморфны в том смысле, что существует биекция $h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, сохраняющая бинарные операции сложения и умножения и отношение порядка, т.е. при $x \in \mathcal{F},\ y \in \mathcal{F}$*

$$h(x+y) = h(x) + h(y),\ h(xy) = h(x)h(y);$$

если $x < y$, то $h(x) < h(y)$.

Доказательство теоремы можно найти, например, в [20].

Таким образом, любые полные упорядоченные поля $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ изоморфны между собой. Известны различные реализации подобного поля: с помощью "дедекиндовых[2] сечений" или с помощью "бесконечных дробей" [3], [13].

Определение 2. *Множеством действительных чисел $\mathbb{R}$ называется полное упорядоченное поле.*

Остановимся на одном из критериев полноты упорядоченного поля $\mathcal{F}$.

Теорема 1 (***Теорема отделимости***)**.** *Упорядоченное поле $\mathcal{F}$ полно в том и только в том случае, если для любых двух непустых его подмножеств A, B, таких, что $a \leqslant b\ \forall a \in A,\ b \in B$, найдется элемент c из $\mathcal{F}$, разделяющий эти множества, т.е. $a \leqslant c \leqslant b\ \forall a \in A,\ b \in B$.*

◀ Пусть A, B — непустые подмножества полного упорядоченного поля и $a \leqslant b\ \forall a \in A,\ b \in B$. Множество A ограничено сверху; в качестве верхней грани можно взять, например, любой элемент b из B. Следовательно, существует $\sup A$ и $\sup A \leqslant b\ \forall b \in B$. Это означает, что $\sup A$ есть нижняя грань множества B, поэтому $\sup A \leqslant \inf B$. Очевидно, что любой элемент отрезка $[\sup A, \inf B]$ разделяет множества A, B.

Установим теперь обратную импликацию: существование разделяющего элемента влечет существование точной верхней грани у любого непустого и ограниченного сверху множества $A \subset F$. Обозначим через B совокупность верхних граней множества A. Множество A непусто и $A \leqslant B$. Элемент c, разделяющий множества A, B, совпадает с $\sup A$. Действительно, так как $a \leqslant c\ \forall a \in A$, то c — верхняя грань множества A, т.е. $c \in B$. С другой стороны, $c \leqslant b\ \forall b \in B$, поэтому c — наименьшая из верхних граней множества A. Таким образом, $c = \sup A$. ▶

Элементы $\mathbb{R}$ называют действительными числами. В ряде мест используются обозначения $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ = (0, \infty)$. Элемент из $\overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$ называют положительными числами, противоположные к ним — отрицательными числами.

---

[2] Р. Дедекинд (1831 - 1916 гг.) — немецкий математик

2. Натуральные и рациональные числа

Определение 3. *Натуральными числами в* $\mathbb{R}$ *называются определяемые последовательно числа* $1,\ 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1, \ldots.$

Множество натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$. Оно обладает свойствами: 1) $1 \in \mathbb{N}$; 2) $n + 1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *Множество* $\mathbb{N}$ *не ограничено сверху.*

◀ В предположении противного существует $b = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. В частности, $n \leqslant b\ \forall n \in \mathbb{N}$, то число $b - 1$ уже не является верхней гранью $\mathbb{N}$: существует число m из $\mathbb{N}$ такое, что $m > b - 1$. Следовательно, $m + 1 \in \mathbb{N}$ и $m + 1 > b$, что противоречит равенству $b = \sup \mathbb{N}$. ▶

Теорема 3 (***Принцип Архимеда*** [3]). *Для любых чисел* x, y *из* $\mathring{\mathbb{R}}_+$ *найдется такое натуральное число* n, *что* $n \cdot x > y$.

◀ Так как множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху, то существует число $n \in \mathbb{N}$, для которого $n > \frac{y}{x} > 0$. Это равносильно неравенству $nx > y$. ▶

Теорема 4 (***Принцип минимума для*** $\mathbb{N}$). *Если* A *— непустое подмножество* $\mathbb{N}$, *то существует* $m = \inf A \in A$.

◀ Множество A ограничено снизу; в качестве нижней грани A можно взять, например, 1. Обозначим через m точную нижнюю грань множества $A : m \overset{def}{=} \inf A$. Установим включение $m \in A$.

Предположим противное, т.е. $m \overline{\in} A$. Из определения $\inf A$ вытекает, что $m \leqslant a\ \forall a \in A$, а число $m + 1$ уже не является нижней гранью A. В частности, существует элемент k из A, для которого $k < m + 1$. Так как $k \in A$, то $k \geqslant m$ и $k \neq m$, то $m < k < m + 1$. Противоречие. ▶

Натуральные числа, противоположные к ним, и число 0 будем называть целыми числами. Множество целых чисел обозначим символом $\mathbb{Z}$, положим $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$. Отметим ряд следствий принципа минимума.

Следствие 1. *Если* A *— непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество множества* $\mathbb{Z}$, *то* $\sup A \in A$ $(\inf A \in A)$, *т.е. в множестве* A *существует наибольший (наименьший) элемент.*

---

[3] Архимед (287 - 212 гг. до н.э.) — древнегреческий математик и механик

Следствие 2. *Для любого действительного числа x существует такое целое число m, что $m \leqslant x < m+1$.*

◀ Пусть $A := \{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x\}$. Множество A непусто и ограничено сверху, $A \subset \mathbb{Z}$. Число $m = \sup A$ является искомым. Действительно, $m \in A \Rightarrow m \leqslant x$, но $m+1 \overline{\in} A$, т.е. $x < m+1$. ▶

Целое число m, удовлетворяющее условию $m \leqslant x < m+1$, называют целой частью числа x и обозначают $[x]$. Разницу $x - [x]$ называют дробной частью числа x и обозначают $\{x\}$.

Действительные числа вида $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z})$ называют рациональными; множество всех рациональных чисел обозначают символом $\mathbb{Q}$. Сумма и произведение рациональных чисел рациональны, а поскольку 0 и 1 — рациональные числа, то $\mathbb{Q}$ — поле. Более того, $\mathbb{Q}$ — упорядоченное поле, если сохранить в $\mathbb{Q}$ отношение порядка, введенное в более широком поле $\mathbb{R}$. Вместе с тем, $\mathbb{Q}$ не является полным упорядоченным полем.

Упражнение 1. *Пусть $A := \{x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+ \mid x^2 < 2\}$. Доказать, что*

1) множество A ограничено сверху;

2) в поле $\mathbb{Q}$ не существует точной верхней грани множества A.

Элементы множества $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ называют иррациональными числами. В определенном смысле большинство действительных чисел иррационально. Вместе с тем установить иррациональность наперед заданного числа α иногда непросто. Для этого требуется доказать, что уравнение $q\alpha = p$ не имеет решений при $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Полезно заметить, что любое действительное число можно с любой точностью приблизить рациональным. Действительно, пусть $\alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ m = [n\alpha]$. Тогда $m \leqslant n\alpha < m+1$, поэтому

$$\frac{m}{n} \leqslant \alpha < \frac{m+1}{n} \qquad \text{и} \qquad 0 \leqslant \alpha - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Отмеченное свойство называют плотностью $\mathbb{Q}$ в множестве $\mathbb{R}$.

3. Принцип математической индукции

Теорема 5. *Пусть имеется утверждение, относящееся ко всем натуральным числам. Пусть выполняются предположения: 1) утверждение верно при $n = 1$; 2) из того, что утверждение верно при $n = k$, вытекает его справедливость при $n = k+1$.*

Тогда утверждение верно при любом натуральном n.

◀ Пусть A — множество тех натуральных чисел, для которых данное утверждение неверно. Если $A = \emptyset$, то все доказано. В противном случае, A — непустое подмножество $\mathbb{N}$. Согласно принципу минимума существует $m = \inf A \in A$. Очевидно, что $m > 1$; при этом $m - 1 \overline{\in} A$, т.е. утверждение верно при $k = m - 1$. В силу предположения 2) оно верно и при $k = m$. Но тогда $m \overline{\in} A$. Противоречие. ▶

В качестве иллюстрирующего примера приведем доказательство неравенства Бернулли [4]:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad (x > -1,\ n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

◀ При $n = 1$ неравенство (2) верно. Пусть оно верно при $n = k$, т.е. $(1+x)^k \geqslant$ $\geqslant 1 + kx$ при некотором натуральном k и $x > -1$. Умножая данное неравенство на число $1 + x > 0$, получаем

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) =$$
$$= 1 + (k+1)x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x.$$

Второе предположение теоремы 5 также верно, поэтому неравенство (2) справедливо для любого натурального числа n. ▶

Неравенство Бернулли влечет за собой хорошо известное неравенство Коши [5]

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n, \tag{3}$$

в котором $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа. Неравенство (3) очевидно, если одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 0. Поэтому будем считать, что все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны: $a_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Пусть

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

— среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, A_{n-1} — среднее арифметическое чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Тогда $\frac{A_n}{A_{n-1}} > 0$, $\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 > -1$. В силу неравенства Бернулли

$$\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)^n = \left[1 + \left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right)\right]^n \geqslant 1 + n\left(\frac{A_n}{A_{n-1}} - 1\right) = \frac{a_n}{A_{n-1}},$$

и, следовательно, $A_n^n \geqslant a_n \cdot A_{n-1}^{n-1}$. Отсюда последовательно получаем

$$A_n^n \geqslant a_n \cdot A_{n-1}^{n-1} \geqslant a_n a_{n-1} \cdot A_{n-2}^{n-2} \geqslant \ldots \geqslant a_n a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_2 a_1.$$

Неравенство (3) доказано.

Принцип математической индукции широко применяется в математике. Известны применения этого принципа к доказательству равенств, признаков делимости и геометрических результатов.

Иногда оказывается полезной следующая версия теоремы (5).

[4] Я. Бернулли (1654 - 1705 гг.) — швейцарский математик

[5] О. Коши (1789 - 1857 гг.) — французский математик

Теорема 5.$'$ *Пусть имеется утверждение, относящееся к целым числам* $n > n_0$ $(n_0 \in \mathbb{Z})$. *Пусть выполняются предположения: 1) утверждение верно при* $n = n_0 + 1$; *2) из того, что оно верно при* $n = k$, *вытекает его справедливость при* $n = k + 1$.

Тогда утверждение верно при любом целом $n > n_0$.

◀ Теорема $5'$ есть сдвиг теоремы 5 на n_0 влево. ▶

4. Принцип вложенных отрезков

Пусть $\mathbb{L}$ — прямая, на которой выделены точки O и E. Точка O разделяет прямую $\mathbb{L}$ на две части. Одна часть содержит точку E, вторая ее не содержит. Первую часть $\mathbb{L}_+$ назовем положительной полупрямой, вторую часть $\mathbb{L}_-$ — отрицательной полупрямой. Каждой точке M на прямой $\mathbb{L}$ можно сопоставить число x, называемое координатой точки M. Именно, если вектор $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OE}$, то число λ назовем координатой точки M. Таким образом, координаты точек из $\mathbb{L}_+$ принадлежат $\mathbb{R}_+$, а координаты точек из $\mathbb{L}_-$ — множеству $\mathbb{R}_-$. Соответствие $h : \mathbb{L} \to \mathbb{R}$ есть биекция. Точку O называют началом координат. Ввиду биективности отображения h поле $\mathbb{R}$ часто отождествляют с прямой $\mathbb{L}$.

Число $b - a$ называют длиной промежутков $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) $(a < b)$. Интервал, содержащий точку x, называют окрестностью этой точки и обозначают символом $U(x)$. Интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ именуют ε-окрестностью точки x, обозначение $U(x, \varepsilon) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Число $\frac{a+b}{2}$ называют серединой промежутка (a, b) с концами a, b. В частности, точка x есть центр своей ε-окрестности $U(x, \varepsilon)$.

Пусть каждому натуральному числу n поставлен в соответствие отрезок $I_n = [a_n, b_n]$. Если $I_{n+1} \subset I_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то говорят о вложенной системе отрезков.

Теорема 6 (***Принцип вложенных отрезков***). *Для любой системы вложенных отрезков* I_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *найдется точка, принадлежащая всем этим отрезкам.*

◀ Для любых двух отрезков $I_m = [a_m, b_m]$, $I_n = [a_n, b_n]$ имеем $a_m \leqslant b_n$. Действительно, пусть для определенности $m < n$. Тогда $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$, поэтому $a_m \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_m$, что и влечет требуемое неравенство $a_m \leqslant b_n$.

Введем числовые множества $A = \{a_m, m \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_m, m \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что $A \leqslant B$. Согласно теореме 1 найдется элемент c из $\mathbb{R}_+$, разделяющий множества A, B, т.е. $a_m \leqslant c \leqslant b_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$c \in \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m. \ ▶$$

В общем случае пересечение $\bigcap\limits_m I_m$ может состоять более, чем из одной точки. Если $b_n - a_n < \varepsilon$ при некотором n, то расстояние между любыми точками пересечения будет меньше ε. В частности, когда в качестве ε можно взять любое положительное число, пересечение $\bigcap I_m$ сводится к одной точке.

Принцип вложенных отрезков установлен Г. Кантором. Он достаточно нагляден; иногда именно этот принцип полагается в основу определения вполне упорядоченного поля.

5. Мощности множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$

Напомним (см., § 1), что множества A, B называют эквивалентными или равномощными, если существует биекция $h : A \to B$; используется обозначение $A \sim B$. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, именуют счетным. Элементы счетного множества можно занумеровать. Именно, пусть $h : \mathbb{N} \to A$ — биекция множества $\mathbb{N}$ на множество A. Полагая $a_n = h(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, получаем, что $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, так что каждый элемент множества A имеет свой номер n. Отметим без доказательства следующие свойства счетных множеств: 1) каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество; 2) бесконечное подмножество счетного множества счетно; 3) объединение счетного семейства счетных множеств счетно (см. [6]).

Из свойств 1) - 3) без труда следует счетность множества $\mathbb{Q}$ — рациональных чисел. Существование несчетных множеств установлено Г. Кантором. Например, справедлива

Теорема 7. *Отрезок* $[0, 1]$ *есть несчетное множество.*

◀ Предположим противное, т.е. отрезок $[0, 1]$ — счетное множество. Тогда элементы отрезка $[0, 1]$ можно занумеровать, т.е. $[0, 1] = \{a_1, \ldots, a_n \ldots\}$, где $a_n \in [0, 1]$ и $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три равные части. Хотя бы одна из этих частей не содержит a_1. Обозначим ее через I_1. Разделим I_1 на три равных части и выберем ту часть I_2, которая не содержит a_2. Процедура может быть продолжена неограниченно. В итоге будет построена последовательность отрезков I_n $(n = 1, 2, \ldots)$, обладающая свойствами:

1) $I_{n+1} \subset I_n, I_{n+1}$ — составляет третью часть отрезка I_n $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $a_n \overline{\in} I_n$; тем более $a_n \overline{\in} I_m$ при $m > n$.

Согласно принципу вложенных отрезков найдется точка c, принадлежащая всем этим отрезкам. Так как $a_n \overline{\in} I_n$, то $c \neq a_n$ при любом n. Противоречие. ▶

Множество, равномощное отрезку $[0, 1]$, называют множеством, имеющим мощность континуум. Например, интервал $(0, 1)$ и вся действительная прямая $\mathbb{R}$ имеют мощность континуум. В самом деле, пусть A_1, A_2 — множества рациональных чисел, содержащихся в $[0, 1]$ и $(0, 1)$ соответственно. Тогда $A_1 \sim A_2$, $[0, 1] \backslash A_1 = (0, 1) \backslash A_2$, что и влечет эквивалентность $[0, 1]$ и $(0, 1)$. Отображение

$$h(x) = \frac{2x - 1}{1 - |2x - 1|} \qquad (0 < x < 1)$$

есть биекция интервала $(0, 1)$ на действительную прямую, поэтому $\mathbb{R} \sim (0, 1) \sim [0, 1]$.

6. Корни n-ой степени

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^n \qquad (x \geqslant 0, n \in \mathbb{N}). \tag{4}$$

Функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ строго возрастает: из условия $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 < \infty$ вытекает неравенство $x_1^n < x_2^n$. Если же $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1$, то

$$0 \leqslant x_2^n - x_1^n \leqslant n(x_2 - x_1) \tag{5}$$

Оценка (5) следует из равенства $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + \ldots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1})$.

При $n = 1$ функция fесть биекция (тождественное преобразование $\mathbb{R}_+$)на себя. Очевидно, что при любом n из $\mathbb{N}$ функция $f(x) = x^n$ есть инъекция.

Пусть $0 < a < 1$. Введем в рассмотрение множество $T := \{t \in [0,1] \mid t^n < a\}$. Множество T непусто и ограничено сверху, поэтому существует $x = \sup T$. Если $0 < \delta < \frac{1-a}{n}$, то в силу неравенства Бернулли $(1-\delta)^n \geqslant 1 - n\delta > a$, следовательно, $x < 1 - \delta < 1$. Установим равенство $x^n = a$. Из определения числа x вытекает неравенство $x^n \leqslant a$. Предположим, что $x^n < a$. Если $x < y < 1$, то, в силу неравенства (5),

$$y^n - x^n \leqslant n(y - x),$$

поэтому $y^n \leqslant x^n + n(y - x)$. Пусть $0 < y - x < \frac{a - x^n}{n}$. При этом условии $y^n < a$, но $y > x$, что противоречит равенству $x = \sup T$. Итак, $x^n = a$. Отсюда следует, что сужение функции $f(x) = x^n$ а отрезок $[0,1]$ есть биекция этого отрезка на себя.

Если $a > 1$, разрешимо уравнение $z^n = \frac{1}{a}$; при этом $z \neq 0$ и $x = z^{-1}$ удовлетворяет уравнению $x^n = a$. Следовательно, отображение $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ есть сюръекция.

Единственный корень уравнения $x^n = a$ $(a > 0,\ n \in \mathbb{N})$ называют корнем n-ой степени из числа $a > 0$. Обозначения

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Если $r = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$, то полагают

$$a^r := (a^m)^{1/n}.$$

Тем самым определяется рациональная степень любого положительного числа a. Справедливы равенства $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$, $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$ для любых рациональных показателей r_1, r_2.

Отметим, что неравенство (3) равносильно неравенству

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{6}$$

Число $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ называют средним геометрическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

§3. Основные свойства сходящихся последовательностей

1. Определение предела последовательности

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n и тем самым задано отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Данное отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$ называют последовательностью, элемент $x_n = f(n)$ n-ым членом этой последовательности.

Из школьного курса математики читателю известны арифметическая и геометрическая последовательности, для которых $x_n = a + (n-1)d$ $(x_n = aq^{n-1})$. Последовательность x_n $(n \in \mathbb{N})$ называют стабилизирующейся, если $x_n = a$ при достаточно больших n $(n \geqslant n_0)$. Близки к стабилизирующимся представляющие для нас основной интерес сходящиеся последовательности.

Перейдем к точным определениям. Число a называют пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Если a — предел последовательности x_n, то пишут

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ или } \lim x_n = a;$$

при этом говорят, что последовательность x_n сходится к a, т.е. $x_n \to a$ при $n \to \infty$, или $x_n \to a$. Равенство $\lim x_n = a$ эквивалентно условию: все члены рассматриваемой последовательности, начиная с номера n_0, попадают в $U(a,\varepsilon) := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Номер n_0 зависит от числа ε. Последовательность, имеющую конечный предел, называют сходящейся; не имеющую конечного предела — расходящейся.

Упражнение 1. *Доказать, что последовательности* $1 + \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\sin n}{n}$ *сходятся, соответствующие пределы равны* 1 *и* 0.

Последовательность $x_n = (-1)^n$ расходится. Действительно, при любом a окрестность $U = (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ точки a имеет длину 1, а $|x_{n+1} - x_n| = 2$, поэтому $x_n \overline{\in} U$ для бесконечного множества номеров n.

Отметим простейшие свойства предела.

Теорема 1. *Последовательность не может иметь двух различных пределов.*

◀ Предположим противное, т.е. $x_n \to a$ и $x_n \to b \neq a$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, $2\varepsilon < |b-a|$. Тогда ε-окрестности $U(a,\varepsilon)$, $U(b,\varepsilon)$ точек a, b не пересекаются. В то же время все элементы x_n, начиная с больших номеров n, должны содержаться в ε-окрестностях точек a, b. Противоречие. ▶

Теорема 2. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

◀ Пусть $x_n \to a$. Найдем номер n_0, такой, что $|x_n - a| < 1$ при $n \geqslant n_0$. Значит, $|x_n| \leqslant a + |x_n - a| < a + 1$ при $n \geqslant n_0$. Если $M := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|, |a|+1\}$, то $|x_n| \leqslant M$ $\forall n$. ▶

Теорема 3. *Если $x_n \to a$, то*

$$|x_n| \to |a|,\ x_n^2 \to a^2,\ \lambda x_n \to \lambda a \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

◀ Докажем вначале, что $|x_n| \to |a|$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем номер n_0 так, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geqslant 0$. Поскольку $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$, то $||x_n| - |a|| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Это и приводит к требуемому результату.

Сходящаяся последовательность ограничена. Фиксируем число $L > 0$ так, что $|x_n| < L\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $|a| < L$. Справедлива оценка

$$|x_n^2 - a^2| = |x_n + a||x_n - a| \leqslant (|x_n| + |a|)|x_n - a| \leqslant 2L|x_n - a| \tag{2}$$

Поскольку $x_n \to a$, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер n_0, что $|x_n - a| < \varepsilon/2L$ при $n \geqslant n_0$. Объединяя это неравенство с оценкой (2), получаем соотношение $|x_n^2 - a^2| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$, т.е. $x_n^2 \to a^2$.

Сходимость $\lambda x_n \to \lambda a$ устанавливается аналогично. ▶

2. Предельный переход и арифметические операции

Если x_n, y_n — две последовательности, то их суммой (разностью, произведением, частным) называют последовательности $x_n + y_n,\ x_n - y_n,\ x_n y_n,\ \frac{x_n}{y_n}$ соответственно. Частное $\frac{x_n}{y_n}$ определено лишь при условии $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Сумма (разность, произведение) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность; при этом предел суммы (разности, произведения) равен сумме (разности, произведению) соответствующих пределов.*

◀ Пусть $x_n \to a,\ y_n \to b$. Докажем, что $x_n + y_n \to a + b$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $x_n \to a$, то $|x_n - a| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant n_1$. Аналогично, поскольку $y_n \to b$, то $|y_n - b| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant n_2$. Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда $|x_n - a| < \varepsilon/2,\ |y_n - b| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant n_0$, следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $x_n + y_n \to a + b$.

Поскольку

$$x_n - y_n = x_n + (-1)y_n,\ x_n y_n = \frac{1}{4}[(x_n + y_n)^2 - (x_n - y_n)^2],$$

то утверждение теоремы о разности и произведении следует из теоремы 3 и уже доказанной части теоремы. ▶

Следствие 1. *Сумма или произведение любого конечного числа сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, и предел суммы или* *произведения таких последовательностей равен соответственно сумме или произведению пределов соответствующих последовательностей.*

◀ Доказательство проводится методом математической индукции по числу слагаемых (множителей) и предоставляется читателю. ▶

Следствие 2. *Если* $x_n \to a,\ y_n \to b$, *то*

$$\max\{x_n, y_n\} \to \max\{a, b\}, \qquad \min\{x_n, y_n\} \to \min\{a, b\}.$$

◀ Для доказательства достаточно воспользоваться равенствами

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}, \qquad \min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}$$

и теоремами 3, 4. ▶

Теорема 5. *Если* $x_n \to a,\ y_n \to b$ *и* $b \neq 0$, *то*

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}.$$

◀ Доказательство разобьем на две части. Пусть вначале $x_n = 1\ \forall n$. Так как $y_n \to b$, то существует такой номер n_1, что $|y_n - b| < |b|/2$ при $n > n_1$. Поскольку $|b| \leqslant |b - y_n| + |y_n|$, то при $n \geqslant n_1$

$$|y_n| \geqslant |b| - |b - y_n| \geqslant \frac{|b|}{2}, \qquad \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{y_n - b}{y_n b}\right| \leqslant \frac{2}{b^2}\,|y_n - b|.$$

По условию $y_n \to b$, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_2, что

$$|y_n - b| < \frac{b^2}{2}\,\varepsilon$$

при $n \geqslant n_2$. Если $n \geqslant n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, то

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2}{b^2}\,|y_n - b| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{b}$. Первая часть доказательства теоремы завершена.

Пусть теперь x_n — произвольная сходящаяся последовательность: $x_n \to a$. Поскольку $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \dfrac{1}{y_n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{a}{b}\ . \ ▶$$

В условии теоремы 5 предполагалось, что $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. В связи с этим заметим, что изменение конечного числа членов последовательности не влияет на сходимость и величину предела последовательности. В теореме 5 можно, например, потребовать, что $y_n \neq 0$ лишь для больших номеров n.

Последовательность α_n называют бесконечно малой, если $\alpha_n \to 0$. Из теоремы 4 вытекает, что сумма (разность, произведение) бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Частное двух бесконечно малых последовательностей может и не быть бесконечно малой последовательностью.

Упражнение 2. *Доказать, что произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Упражнение 3. *Привести пример бесконечно малых последовательностей, частное которых есть расходящаяся последовательность.*

Упражнение 4. *Привести пример двух расходящихся последовательностей, сумма которых сходится; аналогичная задача для разности, произведения и частного двух последовательностей.*

3. Предельный переход и неравенства

Лемма 1. *Пусть $z_n \to c$ и $c > 0$. Тогда найдется такой номер n_0, что $z_n > 0$ при $n \geqslant n_0$.*

◀ Так как $z_n \to c$ и $c > 0$, то существует номер n_0 такой, что $|z_n - c| < c/2$ при $n \geqslant n_0$, в частности, $z_n - c > -c/2$ $\forall n \geqslant n_0$. Следовательно, $z_n > c/2 > 0$ при $n \geqslant n_0$. ▶

Теорема 6. *Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $x_n \leqslant y_n$ при достаточно больших n. Тогда $a \leqslant b$.*

◀ В предположении противного $a - b > 0$. Согласно лемме 1 $z_n := x_n - y_n > 0$ при $n \geqslant n_0$. Это противоречит предположению $x_n \leqslant y_n$ при достаточно больших n. ▶

Теорема 6 означает, что в нестрогих неравенствах $x_n \leqslant y_n$ можно переходить к пределу. Пример, $x_n = -\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ показывает, что аналогичный факт для строгих неравенств не имеет места: строгие неравенства для членов последовательностей могут перейти в нестрогие неравенства для пределов этих последовательностей.

Лемма 2 (***Лемма о встречных последовательностях***)**.** *Пусть* $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ *при* $n \geqslant n_0$. *Если* $x_n \to a,\ z_n \to a$, *то и* $y_n \to a$.

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из условий теоремы вытекает существование такого числа n_0, что при $n \geqslant n_0$.

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,\ |x_n - a| < \varepsilon,\ |z_n - a| < \varepsilon,$$

в частности, $x_n > a - \varepsilon,\ z_n < a + \varepsilon$. Следовательно, при $n \geqslant n_0$

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $y_n \to a$. ▶

4. Примеры

1°. Пусть

$$x^n = cn^p(1 + \alpha_n), \qquad y_n = dn^q(1 + \beta_n),$$

где $c \neq 0, d \neq 0, p$ и q — рациональные числа, α_n и β_n — бесконечно малые последовательности. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} \dfrac{c}{d}, \text{ если } p = q \\ 0, \text{ если } q > p \end{cases} \tag{3}$$

Действительно,

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{c}{d}\, n^{p-q}\, \frac{1 + \alpha_n}{1 + \beta_n},$$

т.е. последовательность $\frac{x_n}{y_n}$ представлена в виде произведения трех сходящихся последовательностей. Первая из них $\frac{c}{d}$ постоянна и ее предел равен $\frac{c}{d}$; предел второй последовательности равен 1 при $p = q$ и 0 при $q > p$. Предел третьей последовательности равен 1. Тем самым равенство (3) доказано. Если $p > q$, то последовательность $\frac{y_n}{x_n}$ сходится к 0, поэтому последовательность $\frac{x_n}{y_n}$ расходится.

2 °. Последовательность

$$z_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

легко преобразуется к рассмотренному в предыдущем примере виду. Умножая и деля z_n на $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, получаем

$$z_n = \frac{\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{x_n}{y_n},$$

где $x_n = n^{1/2},\ y_n = n^{1/2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) = 2n^{1/2}\,(1 + \beta_n)$, где $\beta_n \to 0$.

Отсюда следует, что $z_n \to 1/2$.

3°. Пусть $z_n = \sqrt[n]{n}$. Положим $y_n = \sqrt{z_n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}}$. Тогда $y_n = 1 + \alpha_n$, где $\alpha_n > 0$ при $n > 1$. Используя неравенство Бернулли, получаем далее

$$\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n, \qquad 0 < \alpha_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, то $\alpha_n \to 0,\ y_n \to 1,\ z_n = y_n^2 \to 1$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4°. Пусть $a > 0$. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

При $a = 1$ это очевидно. Если $a > 1$, то

$$1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n} \text{ при } n > a.$$

Две крайние последовательности 1, $\sqrt[n]{n}$ сходятся к 1, поэтому и средняя последовательность $\sqrt[n]{a}$ тоже сходится к 1.

Случай $0 < a < 1$ сводится к уже рассмотренному. В этом случае $1 < 1/a$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$. Поскольку $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$, то все доказано.

§4. Признаки сходимости последовательности

1. Критерий сходимости монотонной последовательности

Последовательность x_n называется возрастающей (убывающей), если $x_n \leqslant x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (соответственно, $x_{n+1} \leqslant x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Возрастающая (убывающая) последовательность обозначается $x_n\uparrow$ (соответственно, $x_n\downarrow$). Если возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, равный a, то пишут $x_n \uparrow a$ (соответственно, $x_n \downarrow a$). Возрастающая и убывающая последовательности называются монотонными.

Теорема 1 (***Критерий Вейерштрасса*** [6]). *Монотонная последовательность сходится, если и только если она ограничена.*

◀ Сходимость последовательности влечет за собой ее ограниченность (см. §3), при этом последовательность может и не быть мотонной. Пусть теперь $x_n \uparrow$ и x_n — ограниченная последовательность. Положим $b := \sup\limits_n \{x_n\}$. При любом ε число $b - \varepsilon$ не является верхней гранью множества $\{x_n\}$, поэтому $x_m > b - \varepsilon$ для некоторого номера m. Так как последовательность x_n возрастает, то $x_n \geqslant x_m$ при $n \geqslant m$. Следовательно, $x_n > b - \varepsilon$ при $n \geqslant m$. С другой стороны, $x_n \leqslant b$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $|x_n - b| < \varepsilon$ при $n \geqslant m$, т.е. $x_n \to b$. Случай убывающей последовательности сводится к рассмотренному. ▶

Замечание 1. Теорема 1 сохраняется для последовательностей x_n, возрастающих (или убывающих) лишь для $n \geqslant n_0$; изменение конечного числа членов последовательности не влияет на ее сходимость.

Замечание 2. Ограниченность возрастающей последовательности равносильна ограниченности этой последовательности сверху; аналогично, ограниченность убывающей последовательности эквивалентна ее ограниченности снизу.

Рассмотрим некоторые примеры.

---

[6] К. Вейерштрасс (1815 - 1897 гг.) — немецкий математик

1°. Пусть $c>0, x_0>0$, последовательность x_n $(n\in\mathbb{N})$ определена равенствами

$$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{c}{x_0}\right),\ldots,x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{c}{x_{n-1}}\right)\qquad (n=1,2,\ldots)\tag{1}$$

Так как

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{c}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\cdot\frac{c}{x_{n-1}}}=\sqrt{c},$$

то последовательность x_n ограничена снизу: $x_n\geqslant\sqrt{c}$ $(n=1,2,\ldots)$. Поскольку

$$x_{n-1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{x_{n-1}}-x_n\right)=\frac{1}{2}\,\frac{c-x_{n-1}^2}{x_{n-1}}\geqslant 0,$$

то последовательность x_n убывает. Согласно теореме 1 последовательность x_n имеет предел: $x_n\to a$. Переходя в равенстве (1) к пределу, получаем $a=\frac{1}{2}(a+\frac{c}{a})$, отсюда $a^2=c,\ a=\sqrt{c},\ x_n\to\sqrt{c}$. Описанный способ нахождения квадратного корня был известен еще Герону [7]; он и до сих пор используется в этих целях.

2°. Пусть последовательность $v_n\neq 0$ и существует предел

$$q:=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|<1\tag{2}.$$

Докажем, что $v_n\to 0$ при $n\to\infty$. Положим $x_n=|v_n|$ $(n=1,2,\ldots)$, $\rho=1+q/2$. Очевидны неравенства $q<\rho<1$. При достаточно больших n

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<\rho,\tag{3}$$

поэтому последовательность x_n убывает, начиная с некоторого номера. Так как $x_n>0$, то последовательность x_n сходится: $x_n\to a\geqslant 0$. Из (3) следует неравенство $x_{n+1}<\rho x_n$ $(n\geqslant n_1)$, переходящее в неравенство $0\leqslant a\leqslant\rho a$, из которого получаем $a=0$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}|v_n|=\lim_{n\to\infty}v_n=0.$$

3°. Применим предыдущий результат к последовательности

$$v_n=\frac{n^p}{b^n};$$

здесь $p\in\mathbb{N},\ b>1$. В данном случае предел последовательности v_n существует и равен $q=\frac{1}{b}<1$. Поэтому последовательность v_n является бесконечно малой. Последовательность n^p растет на ∞ медленнее последовательности b^n $(b>1)$.

4°. Если же применить результат из 2° к последовательности

$$v_n=\frac{b^n}{n!},$$

где $b\in\mathbb{R},\ n!=1\cdot 2\cdot\ldots n$, то предел (2) оказывается равен 0. Последовательность b^n растет на ∞ существенно медленнее $n!$.

---

[7] Герон (1 век н.э.) — греческий математик

2. Число e

Докажем существование предела у последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{4}$$

Встречаются (и весьма часто!) студенты, подходящие довольно просто к вычислению данного предела. Они основываются на двух совершенно верных утверждениях: 1) последовательность $1 + \frac{1}{n}$ сходится к 1; 2) 1 в любой степени равна 1. Отсюда делается вывод: предел последовательности (4) равен 1.

Дальнейшие рассуждения призваны рассеять подобные заблуждения. Наряду с последовательностью x_n введем последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Очевидно, что $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n > x_n$.

Из неравенства Бернулли вытекает оценка

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n} \geqslant 2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это же неравенство можно применить для оценок частных $\frac{y_{n-1}}{y_n}$, $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ $(n > 1)$ снизу. Например,

$$\begin{aligned} \tfrac{y_{n-1}}{y_n} &= \left(1 + \tfrac{1}{n-1}\right)^n / \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \tfrac{1}{n^2-1}\right)^n \ \tfrac{n}{n+1} \geqslant \\ &\geqslant \left(1 + \tfrac{n}{n^2-1}\right) \ \tfrac{n}{n+1} > \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) \ \tfrac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом устанавливается оценка

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1 \qquad (n > 1).$$

Таким образом, $x_n\uparrow$, $y_n\downarrow$, при этом

$$x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \text{ и } y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \ x_n.$$

Отсюда следует, что последовательности x_n, y_n имеют одинаковый предел, к которому они приближаются с разных сторон. Предел последовательности x_n обозначают символом e. Очевидно,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \forall n. \tag{5}$$

Из (5) несложно выводится, что $2 < e < 3$; более точные оценки приводят к равенству $e = 2,718281828459045\ldots$. Число e иррационально.

3. Частичный предел последовательности

Существуют ограниченные расходящиеся последовательности. Примером может служить последовательность $x_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Если рассматривать элементы этой последовательности с четными номерами n, то $x_n = 1$. Иначе говоря, при определенном прореживании исходной последовательности может возникнуть уже сходящаяся последовательность. Полученная закономерность носит общий характер; реализация этого замечания составляет содержание данного пункта.

Пусть x_n — последовательность действительных чисел, $k(n)$ — такая последовательность натуральных чисел, что при любом $M < \infty$ множество $\{n \in \mathbb{N} \mid$

$k(n) < M\}$ конечно. Последовательность $x_{k(n)}$ называется подпоследовательностью исходной последовательности x_n; если $k(n)\uparrow$, то говорят, что $x_{k(n)}$ — результат прореживания x_n. Если последовательность x_n сходится к числу a, то и любая ее подпоследовательность $x_{k(n)}$ также сходится к a. Действительно, в этом случае для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_0, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Множество $\{n \in \mathbb{N} \mid k(n) < n_0\}$ конечно, поэтому $k(n) \geqslant n_0$ при $n \geqslant m_0$. Следовательно, $|x_{k(n)} - a| < \varepsilon$ при $n \geqslant m_0$, т.е. $x_{k(n)} \to a$.

Если некоторая подпоследовательность $x_{k(n)}$ последовательности x_n сходится к числу a, то a называют частичным пределом последовательности x_n. Например, у последовательности $x_n = (-1)^n$ два частичных предела: 1 и -1.

Теорема 2. *1) Всякая ограниченная последовательность действительных чисел имеет частичный предел; 2) среди частичных пределов ограниченной последовательности существуют наименьший и наибольший.*

◄ Пусть x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — ограниченная последовательность действительных чисел. В частности, найдутся такие числа a, b, что

$$a \leqslant x_n \leqslant b \qquad \forall n. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение последовательность числовых множеств

$$E_n := \{x_n,\ x_{n+1}, \ldots\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Очевидно, что $E_{n+1} \subset E_n \subset [a, b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Каждое из множеств E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ непусто и ограничено, поэтому существуют точные верхняя и нижняя грани множеств E_n. Положим

$$u_n := \inf E_n, \qquad v_n := \sup E_n.$$

Отметим следующие свойства последовательностей u_n и v_n :

1) $a \leqslant u_n \leqslant x_n \leqslant v_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $u_n\uparrow,\ v_n\downarrow$.

Действительно, свойство 1) вытекает из включения $E_n \subset [a, b]$. Так как $E_{n+1} \subset E_n$, то $u_n \leqslant u_{n+1},\ v_{n+1} \leqslant v_n$ (inf по более узкому множеству E_{n+1} не меньше inf по более широкому множеству E_n, для sup все аналогично).

Последовательности $u_n,\ v_n$ ограничены и монотонны. Поэтому они имеют пределы: $u_n \to u,\ v_n \to v$ $(a \leqslant u \leqslant v \leqslant b)$. Докажем, что v есть наибольший частичный предел последовательности x_n. Так как $v_n \to v$, то для любого натурального числа s найдется такой номер $n_0(s)$, что $|v_n - v| < \frac{1}{2^s}$ при $n \geqslant n_0(s)$. Фиксируем номер $m(s)$ так, что $m(s) \geqslant s,\ m(s) \geqslant n_0(s)$. Поскольку

$$v_{m(s)} := \sup E_{m(s)},$$

то найдется такой номер $k(s)$, что $k(s) \geqslant m(s)$ и

$$v_{m(s)} - \frac{1}{2^s} < x_{k(s)} \leqslant v_{m(s)}.$$

В силу выбора номеров $m(s), k(s)$ справедливы неравенства

$$|v_{m(s)} - v| < \frac{1}{2^s}, \qquad |v_{m(s)} - x_{k(s)}| < \frac{1}{2^s}, \qquad k(s) \geqslant m(s) \geqslant s.$$

Следовательно,

$$|x_{k(s)} - v| \leqslant |x_{k(s)} - v_{m(s)}| + |v_{m(s)} - v| < \frac{1}{2^{s-1}}, \qquad k(s) \geqslant s.$$

Отсюда вытекает, что $x_{k(s)} \to v$ при $s \to \infty$, т.е. v — частичный предел последовательности x_n.

Теперь установим, что v — наибольший из частичных пределов последовательности x_n. В самом деле, пусть x есть частичный предел последовательности x_n, т.е. $x_{l(n)} \to x$, $l(n)$ — подходящая последовательность натуральных чисел. Тогда

$$x_{l(n)} \leqslant v_{l(n)}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем соотношение $x \leqslant v$, означающее, что v — наибольший из частичных пределов последовательности x_n.

Аналогичным образом устанавливается, что u — наименьший из частичных пределов последовательности x_n. Тем самым теорема 2 полностью доказана. ▶

Наибольший (наименьший) частичный предел последовательности x_n называют верхним (нижним) пределом последовательности x_n; используются обозначения

$$\overline{\lim}\, x_n \quad \text{и} \quad \underline{\lim}\, x_n$$

соответственно. Из теоремы 2 вытекают равенства

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{k \geqslant n} \{x_k\}, \quad \underline{\lim}\, x_n = \sup_n \inf_{k \geqslant n} \{x_k\}. \tag{7}$$

Полезно отметить некоторые свойства верхнего и нижнего пределов.

Упражнение 1. *Пусть x_n, y_n — ограниченные последовательности. Доказать следующие утверждения:*

а) $\overline{\lim}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$;

б) если $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$, *то* $\overline{\lim}\,(x_n \cdot y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$;

в) если $x_n \leqslant y_n$, *то* $\overline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, y_n$.

Упражнение 2. *Сформулировать и доказать варианты утверждений а) – в) для нижнего предела.*

Упражнение 3. *Привести пример ограниченной последовательности, множество частичных пределов которой конечно (счетно; имеет мощность континуум).*

4. Критерий Коши сходимости последовательности

Приведем два критерия сходимости, относящиеся к произвольным (не обязательно монотонным) последовательностям.

Теорема 3. *Для того, чтобы последовательность x_n была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и*

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n. \tag{8}$$

◀ Если $x_n \to a$, то x_n — ограниченная последовательность и любой ее предел совпадает с a, т.е. выполнено равенство (8).

Пусть теперь x_n — ограниченная последовательность и выполнено равенство (8). Как и выше, положим

$$u_n := \inf_{k\geqslant n} \{x_k\},\ v_n := \sup_{k\geqslant n} \{x_k\}.$$

В силу (8) последовательности $u_n,\ v_n$ имеют один и тот же предел. Так как $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$, то и последовательность x_n имеет тот же предел. ▶

Чаще используется критерий сходимости Коши. Последовательность x_n называют фундаментальной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, такой, что $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ и любом натуральном p. Оказывается, классы фундаментальных и сходящихся последовательностей совпадают.

Теорема 4 (***Критерий Коши***). *Для того, чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

◀ **Необходимость.** Пусть $x_n \to a$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберем номер n_0 так, что $|x_n - a| < \varepsilon/2$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда и $|x_{n+p} - a| < \varepsilon/2$ при любом натуральном числе p. Следовательно,

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p}| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть x_n — фундаментальная последовательность. Установим ее ограниченность. Подберем номер n_0 так, что $|x_{n+p} - x_n| < 1$ при $n \geqslant n_0$ и любом натуральном p. В частности, $|x_m - x_{n_0}| < 1$ при $m \geqslant n_0$, $|x_m| \leqslant |x_{n_0}| + 1\ \forall m \geqslant n_0$. Следовательно, x_n — ограниченная последовательность.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем номер n_0 так, что

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

при $n \geqslant n_0,\ p \in \mathbb{N}$. Из этого неравенства вытекает оценка

$$x_{n_0} - \varepsilon < x_m < x_{n_0} + \varepsilon\ \ \forall m \geqslant n_0,$$

следовательно,

$$x_{n_0} - \varepsilon \leqslant \underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n \leqslant x_{n_0} + \varepsilon.$$

Поэтому
$$0 \leqslant \overline{\lim}\, x_n - \underline{\lim}\, x_n < 2\varepsilon.$$
Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо равенство (8), что влечет за собой сходимость последовательности x_n. ▶

Бывают расходящиеся последовательности x_n, для которых
$$\lim\, |x_{n+p} - x_n| = 0 \tag{9}$$
при любом фиксированном p из $\mathbb{N}$. Например, последовательность
$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$
Поскольку $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность x_n обладает свойством (9). В то же время
$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
поэтому последовательность x_n не является фундаментальной, а значит, и сходящейся.

Упражнение 4. *Доказать, что сходимость последовательности x_n равносильна оценке*
$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \lambda_n,$$
где λ_n — убывающая бесконечно малая последовательность.

Указание. Положить $\lambda_n := \sup\, \{|x_{n+p} - x_n|,\ p \in \mathbb{N}\}$.

5. Теорема Штольца [8]

Теоремы 1-4 носят качественный характер. Приведем результат, позволяющий (в некоторых случаях) вычислить предел.

Теорема 5 (***Теорема Штольца***)**.** *Пусть последовательности x_n, y_n $(n \in \mathbb{N})$ обладают свойствами: 1) $y_n < y_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; 2) y_n — неограниченная последовательность; 3) существует предел*
$$l := \lim\, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}. \tag{10}$$
Тогда последовательность $\frac{x_n}{y_n}$ также имеет предел
$$\lim\, \frac{x_n}{y_n} = l. \tag{11}$$

---

[8] О. Штольц (1842 - 1905 гг.) — немецкий математик

◀ Положим $a_1 := x_1,\ b_1 := y_1,\ a_n := x_n - x_{n-1},\ b_n := y_n - y_{n-1}$ $(n > 1)$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = x_n,\ b_1 + b_2 + \ldots + b_n = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$. В силу (10) $\frac{a_n}{b_n} \to l$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем номер n_0 так, что

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_k}{b_k} < l + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

при $k \geqslant n_0$. Неравенства (12) равносильны оценкам

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) b_k < a_k < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) b_k, \qquad k \geqslant n_0.$$

Просуммируем эти оценки по k от $n_0 + 1$ до n. В итоге придем к неравенствам

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n_0}) < x_n - x_{n_0} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n_0}). \tag{13}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $y_n > 0$ при $n \geqslant n_0$. Поделив (13) на y_n, получаем после элементарных преобразований двустороннюю оценку

$$\frac{x_{n_0}}{y_n} + \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n_0}}{y_n} + \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right). \tag{14}$$

Предел левой части в (14) при $n \to \infty$ равен $l - \frac{\varepsilon}{2}$, предел правой части — $l + \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому можно указать такое число $n_1 \geqslant n_0$, что при $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство

$$l - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < l + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ последние неравенства влекут за собой равенство (11). ▶

Замечание. Заключение теоремы сохраняется, если неравенство $y_n < y_{n+1}$ выполняется лишь при достаточно больших n.

Приведем несколько следствий теоремы Штольца.

Следствие 1. *Если $a_n \to a$, то и*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a.$$

◀ Достаточно положить $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ y_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$. ▶

Следствие 2. *Если $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ и $a_n \to a$, то и $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to a$.*

◀ Если $a = 0$, то требуемый результат вытекает из неравенства Коши

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \tag{15}$$

и следствия 1.

Пусть теперь $a > 0$. Заменяя в неравенстве (15) числа a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ обратными величинами, приходим к оценке

$$\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)\right]^{-1} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{16}$$

Левую часть (16) именуют средним гармоническим чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Обе последовательности

$$\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\right]^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

сходятся к a. В силу леммы о встречных последовательностях и неравенств (15), (16) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \to a$. ►

Следствие 3. *Пусть v_n — положительная последовательность и существует предел*

$$D := \lim \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Тогда $\sqrt[n]{v_n} \to D$.

◄ Достаточно положить $a_1 = v_1,\ a_2 = \frac{v_2}{v_1}, \dots, a_n = \frac{v_n}{v_{n-1}}$ и воспользоваться следствием 2. ►

Применим полученный результат к последовательности

$$v_n = \frac{n!}{n^n} \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

В этом случае $\quad D = \lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{e}\,.$

Согласно следствию 3 $\quad \sqrt[n]{v_n} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \dfrac{1}{e}\,.$

Например, при $n \geqslant n_0$ (n_0 достаточно велико) верно двустороннее неравенство

$$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{2},$$

равносильное двусторонней оценке $\quad \left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\dfrac{n}{2}\right)^n.$

6. Бесконечные пределы

Иногда к действительной прямой $\mathbb{R}$ присоединяют два несобственных числа $+\infty$ и $-\infty$. Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)$ называют расширенной числовой прямой. В $\overline{\mathbb{R}}$ вводятся отношения порядка $\alpha < (+\infty)\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \cup (-\infty)$, $-\infty < \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \cup (+\infty)$. Если множество $A \subset \mathbb{R}$, A непусто и неограниченно снизу, то $\inf\ A := -\infty$; если $A \subset \mathbb{R}$, A непусто и неограниченно сверху, то $\sup\ A = +\infty$. Таким образом, каждое непустое подмножество $\mathbb{R}$ имеет точные верхнюю и нижнюю грани, принадлежащие $\overline{\mathbb{R}}$. Удобно положить $\inf\ \emptyset := +\infty$, $\sup\ \emptyset := -\infty$.

Введем ε-окрестность несобственных чисел $(-\infty)$ и $(+\infty)$, полагая для любого $\varepsilon > 0$

$$U(-\infty;\varepsilon) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right),\ U(+\infty;\varepsilon) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right).$$

После этого стандартным образом определяется предел последовательности x_n действительных чисел. Именно, элемент a из $\overline{\mathbb{R}}$ называют пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что $x_n \in U(a;\varepsilon)$

при $n \geqslant n_0$. Например, $(+\infty)$ есть предел последовательности x_n, если найдется такой номер n_0, что $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ при $n > n_0$. Используется запись

$$\lim\ x_n = +\infty,\ \lim\ x_n = -\infty \text{ (или } x_n \to +\infty,\ \lim\ x_n \to -\infty).$$

Отметим, что в $\overline{\mathbb{R}}$ имеет предел всякая монотонная последовательность. Для произвольной последовательности x_n в $\overline{\mathbb{R}}$ существуют частичные пределы; справедливы равенства (7); существование предела последовательности x_n равносильно равенству (8).

Теорема Штольца остается верной и в случае $l = \pm\infty$.

Сходящейся будем называть последовательность, имеющую конечный предел. Если $|x_n| \to +\infty$, то последовательность x_n будем называть бесконечно большой. В этом случае $x_n \neq 0$ при больших n, а последовательность $\alpha_n = \frac{1}{x_n}$ является бесконечно малой; очевидно, что верно и обратное: если α_n — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $x_n = \frac{1}{\alpha_n}$ является бесконечно большой.

§5. Начальные сведения о рядах

1. Сумма ряда

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — числовая последовательность. Сумму $a_k + \ldots + a_l$ $(k \leqslant l)$ обозначают символом

$$\sum_{n=k}^{l} a_n.$$

Определение 1. *Выражение вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ldots$ обозначают символом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

(или $\sum a_n$) и называют числовым рядом, a_n — n-ым членом ряда, сумму

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — n-ой частичной суммой ряда (1).

Определение 2. *Ряд (1) называют сходящимся, если последовательность S_n его частичных сумм сходится; если последовательность S_n расходится, то и ряд (1) называют расходящимся. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ последовательности частичных сумм, если он существует и конечен, называют суммой ряда.*

Каждую последовательность x_n $(n \in \mathbb{N})$ можно рассматривать как последовательность частичных сумм некоторого ряда вида (1); достаточно положить $a_1 = x_1, \ldots, a_n = x_n - x_{n-1}$ $(n > 1)$. По этой причине рассмотрение рядов не вносит ничего принципиально нового. Любой результат, относящийся к последовательностям, имеет свой аналог для рядов, и наоборот. Вместе с тем ряд утверждений удобнее формулировать в терминах рядов.

Приведем два критерия сходимости ряда.

Теорема 1. *Пусть $a_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда ряд (1) сходится в том и только в том случае, когда последовательность S_n его частичных сумм ограничена.*

◀ Если $a_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ возрастает. Поэтому теорема 1 вытекает из критерия сходимости монотонных последовательностей. ▶

Теорема 2 (***Критерий Коши сходимости ряда***)**.** *Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что из неравенства $n \geqslant n_0$ следует оценка*

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\Big| < \varepsilon \qquad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

◀ Для доказательства достаточно заметить, что $S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$. Теперь требуемый результат вытекает из критерия Коши сходимости последовательности $S_n = a_1 + \ldots + a_n$. ▶

Следствие 1 (***Необходимый признак сходимости***)**.** *Для того, чтобы ряд (1) сходился, необходимо, чтобы $a_n \to 0$.*

Следствие 2. *Сходимость ряда не зависит от изменения конечного числа его членов.*

В качестве примера рассмотрим ряд $\sum a_1 q^{n-1}$, где $a_1 \neq 0, q$ — не зависящая от n постоянная. Если $|q| \geqslant 1$, то $|a_n| = |a_1||q^{n-1}| \geqslant |a_1| > 0$, поэтому данный ряд расходится (не выполнен необходимый признак сходимости).

Если $|q| < 1$, то последовательность

$$S_n = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

сходится, так как $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ (см. п. 4.1). Таким образом, ряд $\sum a_1 q^{n-1}$ сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и в этом случае его сумма равна $\frac{a_1}{1-q}$.

2. Признаки сравнения

Говорят, что ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3}$$
мажорирует ряд (1), если
$$|a_n| \leqslant b_n \text{ при } n \geqslant n_0. \tag{4}$$
Из (4) вытекает, что члены ряда (3) при достаточно больших n неотрицательны, поэтому сходимость ряда (3) равносильна ограниченности последовательности его частичных сумм.

Теорема 3 (***Признак сравнения Вейерштрасса***). *Пусть ряд (3) мажорирует ряд (1). Тогда 1) если ряд (3) сходится, то и ряд (1) также сходится; 2) если $a_n \geqslant 0$ $\forall n \geqslant n_0$ и ряд (1) расходится, то и ряд (3) также расходится.*

◀ 1) Пусть ряд (3) сходится. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем номер $n_1 > n_0$ так, что при $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $b_{n+1} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Следовательно, $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < b_{n+1} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon$ $\forall n \geqslant n_1,\ p \in \mathbb{N}$. Теперь сходимость ряда (1) следует из критерия Коши.

2) Расходимость ряда (1) с элементами $a_n \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ влечет за собой расходимость ряда (3). Действительно, в противном случае ряд (3) сходится, а вместе с ним сходится и ряд (1). Противоречие. ▶

Следствие 3 (***Признак сравнения в предельной форме***). *Пусть $u_n \geqslant 0$, $v_n > 0$ и*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l. \tag{5}$$
Тогда

1) если $0 \leqslant l < \infty$ и ряд $\sum v_n$ сходится, то и ряд $\sum u_n$ также сходится;

2) если $0 < l \leqslant \infty$ и ряд $\sum v_n$ расходится, то и ряд $\sum u_n$ также расходится.

◀ 1) Пусть $0 \leqslant l < \infty$ и ряд $\sum v_n$ сходится. В силу (5) существует такой номер n_0, что $\frac{u_n}{v_n} < l + 1$ при $n \geqslant n_0$, а следовательно,
$$u_n < (l+1)v_n \ (n \geqslant n_0).$$
Ряд $\sum (l+1)v_n$ сходится, поэтому сходимость ряда $\sum u_n$ вытекает из теоремы 3.

2) Пусть $l > 0$ и ряд $\sum v_n$ расходится. Фиксируем число l_1 из $(0, l.)$ В силу (5) найдется такой номер n_0, что $\frac{u_n}{v_n} > l_1$ при $n \geqslant n_0$, а следовательно,
$$u_n > l_1 v_n \ (n \geqslant n_0).$$
Теперь расходимость ряда $\sum u_n$ вытекает из теоремы 3 ▶

Применим признаки сравнения к исследованию сходимости ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}; \tag{6}$$

здесь $\alpha \in \mathbb{Q}$ (это требование на самом деле несущественно). При $\alpha = 1$ ряд (6) расходится (см. п. 4.4). Поскольку $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$ при $\alpha \leqslant 1$, то ряд (6) расходится и при $\alpha \leqslant 1$.

Пусть теперь $\alpha = 1 + \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Сравним ряд (6) с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{n}} - \frac{1}{\sqrt[k]{n+1}} \right). \tag{7}$$

Ряд (7) очевидным образом сходится. Положим $\quad u_n = n^{-1-\frac{1}{k}},\ v_n = \dfrac{1}{\sqrt[k]{n}} - \dfrac{1}{\sqrt[k]{n+1}}$. Как легко проверить, $\frac{u_n}{v_n} \to k$, поэтому ряд $\sum u_n$ сходится. Для любого $\alpha > 1$ найдется такое натуральное число k, что $\alpha > 1 + \frac{1}{k}$, а следовательно,

$$\frac{1}{n^\alpha} \leqslant n^{-1-\frac{1}{k}} = u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Теперь сходимость ряда (6) при $\alpha > 1$ вытекает из признака сравнения в предельной форме.

3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Ряд (1) называют абсолютно сходящимся, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{8}$$

сходится. Сходящийся ряд (1) называют условно сходящимся, если ряд (8) расходится. Очевидно, что ряд (8) мажорирует ряд (1), поэтому если ряд (1) абсолютно сходится, то он сходится. Обратное, вообще говоря, неверно. В качестве примера рассмотрим ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots .$$

Частичные суммы этого ряда равны либо $\frac{1}{n}$, либо 0, поэтому данный ряд сходится к 0. Вместе с тем ряд абсолютных величин его членов расходится, что вытекает из расходимости ряда (6) при $\alpha = 1$.

Положим $u_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}$, $v_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$). Очевидно, что $u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$, $a_n = u_n - v_n$, $|a_n| = u_n + v_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Теорема 4. *1) Если ряд (1) сходится абсолютно, то ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{9}$$

сходятся;

2) если ряд (1) сходится условно, то каждый из рядов (9) расходится.

◀ 1) Если ряд (1) сходится абсолютно, то сходимость рядов (9) следует из неравенств $0 \leqslant u_n \leqslant |a_n|$, $0 \leqslant v_n \leqslant |a_n|$ и теоремы 3.

2) Пусть сходится один из рядов (9), например, первый. Если сходится ряд (1), то из равенства $v_n = u_n - a_n$ следует сходимость ряда $\sum v_n$. Сходимость каждого

из рядов (9) влечет абсолютную сходимость ряда (1), так как $|a_n| = u_n + v_n$. Из проведенных рассуждений вытекает второе утверждение теоремы. ▶

Теорема 5 (***Признак Лейбница*** [9]). *Пусть последовательность c_n убывает и $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда ряд*

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \tag{10}$$

сходится.

◀ Последовательность $S_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots + c_{2n-1} - c_{2n}$ частичных сумм ряда (10) возрастает, поскольку $S_{2n} - S_{2n-2} = c_{2n-1} - c_{2n} \geqslant 0$. С другой стороны, имеем

$$S_{2n} = c_1 - (c_2 - c_3) - \ldots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) - c_{2n} \leqslant c_1. \tag{11}$$

Таким образом, последовательность S_{2n} возрастает и ограничена сверху, поэтому она сходится: $S_{2n} \to S$. Далее, $S_{2n+1} = S_{2n} + c_{2n+1} \to S$, поскольку $c_{2n+1} \to 0$. Отсюда вытекает, что последовательность S_n сходится к S. ▶

Из (11) вытекает оценка $0 \leqslant S \leqslant c_1$. Аналогичным образом устанавливается неравенство

$$|S - S_n| \leqslant |c_{n+1}|, \tag{12}$$

позволяющее оценивать скорость сходимости ряда (10).

Пример 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \, \frac{1}{n^{\alpha}} \tag{13}$$

сходится, если $\alpha > 0$; его сумма $S \in (0, 1)$. Для $\alpha > 0$ ряд (13) сходится условно. Из (12) следует оценка

$$|S - S_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}.$$

4. Признаки Коши и Даламбера сходимости ряда

Теорема 6 (***Признак Коши***). *1) Пусть существует такое число q $(0 < q < 1)$ и такой номер n_0, что $\sqrt[n]{|a_n| \leqslant q}$ при $n \geqslant n_0$. Тогда ряд (1) абсолютно сходится.*

2) Если $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ для бесконечного числа номеров n, то ряд (1) расходится.

◀ 1) Неравенство $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q$ при $n \geqslant n_0$ означает, что ряд (8) мажорируется рядом $\sum q^n$, а так как ряд $\sum q^n$ сходится для q из $(0, 1)$, то и ряд (1) абсолютно сходится.

2) Если $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$ для бесконечного числа номеров n, то последовательность a_n не стремится к 0, поэтому ряд (1) расходится. ▶

[9] Г. Лейбниц (1646 - 1716 гг.) — немецкий философ и математик

Следствие 4 (***Признак Коши в предельной форме***). *Пусть*

$$\mathcal{K} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $\mathcal{K} < 1$, *то ряд (1) абсолютно сходится; если же* $\mathcal{K} > 1$, *то ряд (1) расходится.*

◀ Пусть вначале $\mathcal{K} < 1$. Тогда число $q = \frac{1+\mathcal{K}}{2} \in (\mathcal{K}, 1)$, поэтому существует такой номер n_0, что $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q$ при $n \geqslant n_0$. Теперь абсолютная сходимость ряда (1) вытекает и теоремы 6.

Если же $\mathcal{K} > 1$, то для бесконечного числа номеров n выполняется неравенство $\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1$. Результат снова следует из теоремы 6. ▶

Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды (1), для которых $\mathcal{K} = 1$. Действительно, рассмотрим ряды $\sum \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n}$. Для каждого из этих рядов соответствующее число $\mathcal{K} = 1$, однако первый ряд сходится, а второй расходится.

Теорема 7 (***Признак Даламбера***[10]). *Пусть* $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда 1) если существует такое число* q *из* $(0, 1)$ *и такой номер* n_0, *что* $|a_{n+1}| \leqslant q|a_n|$ $\forall n \geqslant n_0$, *то ряд (1) абсолютно сходится; 2) если же существует такой номер* n_0, *что* $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$ $\forall n \geqslant n_0$, *то ряд (1) расходится.*

◀ 1) Пусть $n_0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \leqslant q, \ldots, \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \leqslant q, \ldots, \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leqslant q.$$

Перемножая эти неравенства, приходим к оценке

$$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| \leqslant q^{n-n_0-1},$$

или $|a_n| \leqslant Mq^{n-1}$, где $M := q^{-n_0}|a_{n_0}|$. Теперь абсолютная сходимость ряда (1) вытекает из сходимости ряда $\sum Mq^{n-1}$ при q из $(0, 1)$.

2) Если $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$ $\forall n \geqslant n_0$, то $|a_n| \geqslant |a_{n_0}|$ $\forall n \geqslant n_0$, поэтому последовательность a_n не сходится к 0. Значит, ряд (1) расходится. ▶

Следствие 5 (***Признак Даламбера в предельной форме***). *Пусть* $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *и существует предел*

$$D := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{14}$$

[10] Ж.Л. Даламбер (1717 - 1783 гг.) — французский математик и философ

Если $D < 1$, *то ряд (1) абсолютно сходится; если же* $D > 1$, *то ряд (1) расходится.*

◀ Доказательство предоставляется читателю. ▶

Заметим, что если существует предел (14), то существует и равен ему предел

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \tag{15}$$

(см. §4). Поэтому признак Даламбера в предельной форме вытекает из аналогичного признака Коши. Вместе с тем иногда предел (14) находится проще, чем предел (15).

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum \frac{n}{2^n}$. В этом случае

$$D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}}\right| = \frac{1}{2} < 1,$$

следовательно, данный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{3n^3+5}\right)^n.$$

Применим признак Коши в предельной форме. Имеем

$$\mathcal{K} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{3n^3+5} = \frac{2}{3} < 1;$$

рассматриваемый ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n-n}.$$

Данный ряд интересен тем, что признак Даламбера для него неэффективен; в то же время

$$\mathcal{K} := \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{(-1)^n-n}{n}} = \frac{1}{2} < 1;$$

согласно признаку Коши ряд сходится.

Признаки Коши и Даламбера основаны на сравнении ряда (1) с геометрической прогрессией. Более тонкие признаки сходимости вытекают из сравнения ряда (1) с рядом (6). Известны существенные обобщения признака Лейбница. Более подробно вопрос о сходимости рядов рассматривается в главе 6.

Иногда рассматривают ряды вида

$$d_m + d_{m+1} + \ldots + d_n + \ldots = \sum_{k=m}^{\infty} d_k, \tag{16}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $d_k \in \mathbb{R}$ $(k \geqslant m,\ k \in \mathbb{Z})$. Сопоставим ряду (16) ряд (1), где $a_n = d_{n+m-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Назовем ряд (16) сходящимся (расходящимся), если таковым является соответствующий ему ряд (1). Суммой сходящегося ряда (16) назовем сумму соответствующего ряда (1). Это позволяет распространить предшествующие результаты на ряды вида (16). Как правило, $m \geqslant 0$.

Глава 2. Функции

§6. Предел функции

1. Понятие функции одного действительного переменного

Пусть X — непустое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$. Если в силу некоторого закона f каждому элементу x из X сопоставлено число y из $\mathbb{R}$, то говорят, что на множестве X задана функция f со значениями в $\mathbb{R}$. Используется запись $f : X \to \mathbb{R}$ (или $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$). При этом X называют областью определения функции f; символ x — аргументом функции; соответствующий элементу x_0 из X элемент y_0 из $\mathbb{R}$ — значением функции f в точке x_0 : обозначение $y_0 = f(x_0)$. Множество $f(X) := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists\ x \in X, y = f(x)\}$ всех значений функции f именуют множеством значений или областью значений f на множестве X.

Две функции f_1, f_2 называют равными, если они имеют одинаковую область определения X и $f_1(x) = f_2(x)\ \forall x \in X$; пишут $f_1 = f_2$. Если $f : X \to \mathbb{R}, A \subset X$, то через $f\ |_A$ обозначают функцию $\varphi : A \to \mathbb{R}$, для которой $\varphi(x) = f(x)\ \forall\ x \in A$. Функцию $\varphi : A \to \mathbb{R}$ называют сужением функции f на множество A, а исходную функцию $f : X \to \mathbb{R}$ — продолжением функции $\varphi : A \to \mathbb{R}$.

Рассматривают три способа задания функции: аналитический, графический и табличный. Аналитический способ подразумевает наличие формулы, связывающей аргумент и значение функции. При графическом способе задания функция $f : X \to \mathbb{R}$ характеризуется своим графиком $Gr\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X, y = f(x)\}$. Достоинства этого метода: наглядность, геометричность, позволяющие усмотреть аналитические факты, минуя громоздкие выкладки. При табличном способе функция задается таблицей, связывающей значения аргумента и функции.

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют ограниченной сверху (снизу), если ее область значений $f(X)$ есть ограниченное сверху (снизу) числовое множество. Числа

$$M := \sup_X\ f := \sup\{f(x), x \in X\}, \qquad m := \inf_x\ f := \inf\{f(x), x \in X\} \qquad (1)$$

именуют точной верхней (нижней) гранью функции f на множестве X. Ограниченную и сверху, и снизу функцию f называют ограниченной; в этом случае оба числа M и m из (1) конечны. Разность

$$M - m = \sup_X\ f - \inf_X\ f$$

называют колебанием функции f на множестве X и обозначают символом $\omega(f, X)$. Справедливо равенство

$$\omega(f, X) = \sup\{|f(x') - f(x'')|, x' \in X, x'' \in X\}.$$

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют возрастающей (строго возрастающей), если из условия $x_1 < x_2$ $(x_1 \in X, x_2 \in X)$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < f(x_2)$). Аналогично, функцию $f : X \to \mathbb{R}$ именуют убывающей (строго убывающей), если из условия $x_1 < x_2$ $(x_1 \in X, x_2 \in X)$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) > f(x_2)$). Наконец, функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют монотонной (строго монотонной), если она либо возрастает (убывает) на множестве X (соответственно, либо строго возрастает (убывает) на множестве X).

Функцию f, определенную на симметричном относительно 0 множестве $X = -X$ называют четной, если $f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in X$; и нечетной, если $f(-x) = -f(x)$

$\forall\ x \in X$. Если при некотором $T > 0$ для всех x из X выполняются соотношения $x+T \in X$ и $f(x+T) = f(x)$, то функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют T - периодической, а число T — периодом функции f.

2. Предельная точка множества

Пусть E — непустое подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$. Число a из $\mathbb{R}$ называют предельной точкой множества E, если любая δ - окрестность $U(a,\delta) := (a-\delta, a+\delta)$ точки a $(\delta > 0)$ содержит отличный от a элемент x из $E : U(a,\delta) \cap (E \backslash a) \neq \emptyset\ \forall \delta > 0$.

Лемма 1. *Число a есть предельная точка множества $E \subset \mathbb{R}$ в том и только в том случае, если существует последовательность x_n $(n \in \mathbb{N})$, обладающая свойствами*

$$x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \to a. \tag{2}$$

◀ Пусть a — предельная точка для множества E. Тогда

$$E_n := \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \cap (E \backslash a) \neq \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Выберем элемент x_n из E_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $x_n \in E,\ 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, т.е. последовательность x_n обладает свойствами (2).

Обратно, пусть существует обладающая свойствами (2) последовательность x_n. Фиксируем $\delta > 0$. Поскольку $x_n \to a$, то $x_n \in U(a,\delta)$ при $n \geqslant n_0$. Так как $x_n \in E$, $x_n \neq a$, то $U(a,\delta) \cap (E \backslash a) \neq \emptyset$. В силу произвольности $\delta > 0$ все доказано. ▶

Лемма 2 (***Принцип Больцано***[11] ***- Вейерштрасса***). *Пусть E — ограниченное бесконечное числовое множество. Тогда оно имеет хотя бы одну предельную точку.*

◀ Так как E — бесконечное множество, то существует последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, попарно различных элементов множества E. По условию E — ограниченное множество, поэтому a_n — ограниченная последовательность. Пусть $a = \overline{\lim}\ a_n$. Тогда найдется последовательность $k(n)$ натуральных чисел, обладающая свойствами: 1) при любом $M < \infty$ множество $\{n \in \mathbb{N} \mid k(n) < M\}$ конечно, 2) $a_{k(n)} \to a$. Без ограничения общности можно считать, что $a_{k(n)} \neq a$ (напомним, что элементы a_n попарно различны). Последовательность $x_n := a_{k(n)}$ обладает свойствами (2), поэтому a — предельная для множества E точка. ▶

Обозначим через E' множество точек, предельных для множества E. Его называют производным множеством множества E. Точку множества E, не являющуюся предельной точкой этого множества, называют изолированной точкой

[11] Б. Больцано (1781 - 1848 гг.) — чешский математик

множества E. В условиях леммы 2 E' — непустое множество. Если E — конечное множество, то $E' = \emptyset$, каждая точка из E изолированная.

В общем случае предельная для множества E точка может и не принадлежать множеству E. Пусть, например, $E = (0, 1)$; тогда $E' = [0, 1]$, так что $0, 1 \in E' \setminus E$.

Множество E называют замкнутым, если $E' \subset E$. Например, отрезок $[a, b]$ есть замкнутое множество, а интервал (a, b) таковым не является.

Лемма 3. *Для того, чтобы множество E было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы предел всякой сходящейся последовательности элементов из E принадлежал множеству E.*

◀ **Необходимость.** Пусть E — замкнутое множество, $x_n \in E$ и $x_n \to a$. Установим включение $a \in E$. В предположении противного $a \in E' \setminus E$, что противоречит условию $E' \subset E$.

Достаточность очевидна. ▶

Таким образом, замкнутость множества E означает возможность переходить к пределу во включении: $x_n \in E \Rightarrow \lim\ x_n \in E$.

Лемма 4. *Пусть E — непустое замкнутое ограниченное снизу (сверху) числовое множество. Тогда E содержит минимальный (максимальный) элемент, совпадающий с* $\inf\ E$ ($\sup\ E$ *соответственно).*

◀ Пусть, например, множество E замкнуто и ограничено снизу, $E \neq \emptyset$ и $a := \inf\ E$. Для любого натурального числа n существует такой элемент x_n из E, что $a \leqslant x_n < a + \frac{1}{n}$. Поскольку $x_n \in E$ и $x_n \to a$, а E — замкнутое множество, то $a = \lim\ x_n \in E$. ▶

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называют компактным, если из всякой последовательности $x_n \in E$ можно извлечь подпоследовательность $x_{k(n)}$, сходящуюся к элементу a из E. Компактные множества играют важную роль при исследовании функций.

Теорема 1 (***Критерий компактности***)**.** *Для того, чтобы непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

◀ **Необходимость.** Пусть E — компактное множество. Если E было бы неограниченным, то для каждого натурального n существовал бы элемент x_n из E, для которого $|x_n| > n$. Из последовательности x_n нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность; это и доказывает ограниченность E. Если E незамкнуто, то существует последовательность x_n, обладающая свойствами (2), причем

$a := \lim x_n \overline{\in} E$. Любая подпоследовательность $x_{k(n)}$ этой последовательности также сходится к числу a, не принадлежащему E. Это снова противоречит компактности множества E.

Достаточность. Пусть E — ограниченное замкнутое множество, $x_n \in E$, $n = 1, 2, \ldots$. Из ограниченной последовательности x_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $x_{k(n)}$. В силу замкнутости множества E $a = \lim\ x_{k(n)} \in E$. ►

3. Определения предела функции

Проколотой δ - окрестностью точки a будем называть множество $\mathcal{D}(a, \delta) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}$. Таким образом, $\mathcal{D}(a, \delta)$ получается из δ-окрестности $U(a, \delta)$ точки a путем исключения ее центра: $\mathcal{D}(a, \delta) = U(a, \delta) \backslash \{a\}$.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — действительная функция на множестве $E \subset \mathbb{R},\ a \in E'$. Число b называют пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x) \in U(b, \varepsilon),\ \text{если } x \in \mathcal{D}(a, \delta) \cap E. \tag{3}$$

Включение (3) означает, что близость x к a влечет близость $f(x)$ к b. Оно равносильно соотношениям

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta,\ x \in E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon. \tag{4}$$

Приведенное определение называют определением предела функции f на языке $\varepsilon - \delta$ или определением предела по Коши. Используется запись

$$\lim_{x \to a} f(x) = b\ \ (\text{или } f(x) \to b \text{ при } x \to a).$$

В определении (3) фигурируют проколотые симметричные окрестности $\mathcal{D}(a, \delta)$ точки a. От требования симметричности можно отказаться. Важно лишь, что окрестность непуста и в пересечении любых двух окрестностей содержится третья окрестность.

Наряду с определением предела функции на языке $\varepsilon - \delta$ (определении Коши) используют определение на языке последовательностей (определение предела функции по Гейне [12]).

Определение 1. *Число b называют пределом функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке a из E', если для любой последовательности x_n, обладающей свойствами (2), соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к b.*

Лемма 5. *Определения предела функции по Коши и Гейне эквивалентны.*

◄ Пусть выполнено (4). Если последовательность x_n обладает свойствами (1), то для каждого $\delta > 0$ найдется такой номер n_0, что $x_n \in E,\ 0 < |x_n - a| < \delta$ при $n \geqslant n_0$. В силу (4) это влечет неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$, т.е. $f(x_n) \to b$.

[12] Г. Гейне (1821 - 1881 гг.) — немецкий математик

Обратно, пусть $f(x_n) \to b$ для любой последовательности x_n, обладающей свойствами (2). Если (4) не имеет места, то существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется элемент x из $\mathcal{D}(a,\delta) \cap E$, для которого $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$. Будем придавать δ значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. Для каждого n из $\mathbb{N}$ найдется элемент x_n из $\mathcal{D}(a, \frac{1}{n}) \cap E$, для которого $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$. Но это противоречит тому, что $f(x) \to b$ для любой последовательности x_n, обладающей свойствами (2). Противоречие приводит к требуемому результату. ►

Пример 1. Пусть $f(x) = x^m$ $(x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N})$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^m = a^m \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Действительно, если $x_n \to a$, то $x_n^m \to a^m$.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = \frac{x^m - a^m}{x - a} \qquad (x \neq a, m \in \mathbb{N}).$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = \lim_{x\to a}(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1}) = ma^{m-1}.$$

В самом деле, если $x_n \to a$, то $x_n^k \to a^k$ при любом натуральном k. Отсюда и следует требуемый результат.

4. Общие свойства предела функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E', f : E \to \mathbb{R}$ — действительная функция на множестве E.

Лемма 6. *Если $f(x) \to b_1$ при $x \to a$ и $f(x) \to b_2$ при $x \to a$, то $b_1 = b_2$ (единственность предела).*

◄ Пусть последовательность x_n обладает свойствами (2). Тогда $f(x_n) \to b_1$ и $f(x_n) \to b_2$. Но числовая последовательность имеет лишь один предел, поэтому $b_1 = b_2$. ►

Определение 2. *Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют финально ограниченной при $x \to a$ $(a \in E')$, если найдутся такие числа C, δ, что $|f(x)| < C \ \forall\, x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$; если при тех же x выполняется неравенство $f(x) < C$ $(f(x) > C)$, то функцию f называют финально ограниченной сверху (соответственно снизу).*

Лемма 7 (***Лемма о финальной ограниченности***). *Если $f(x) \to b$ при $x \to a$, то функция $f : E \to \mathbb{R}$ финально ограничена при $x \to a$.*

◀ Поскольку $f(x) \to b$ при $x \to a$, то найдется такая проколотая окрестность $\mathcal{D}(a,\delta)$ $(\delta > 0)$ точки a, что $|f(x) - b| < 1 \; \forall \; x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$. Следовательно, $|f(x)| \leqslant |f(x) - b| + |b| < |b| + 1 \; \forall \; x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$ ▶

Лемма 8 (***Лемма о сохранении знака***). *Если $f(x) \to b$ при $x \to a$ и $b > 0$, то найдется такая постоянная $\delta > 0$, что $f(x) > b/2 > 0 \; \forall \; x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$.*

◀ Подберем $\delta > 0$ так, что из включения $x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$ следует неравенство $|f(x) - b| < b/2$. Указанное $\delta > 0$ является искомым, поскольку неравенство $|f(x) - b| < b/2$ влечет за собой неравенство $f(x) > b/2$. ▶

Если две числовые функции f_1, f_2 определены на множестве $E \subset \mathbb{R}$, то их суммой (разностью, произведением, частным) называют функции, определенные на E равенствами:

$$(f_1 + f_2)(x) \overset{def}{=} f_1(x) + f_2(x), \; (f_1 - f_2)(x) \overset{def}{=} f_1(x) - f_2(x),$$
$$(f_1 f_2)(x) \overset{def}{=} f_1(x) f_2(x), \; \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) \overset{def}{=} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \text{ если } f_2(x) \neq 0 \qquad \forall \; x \in E.$$

Теорема 2. *Пусть функции $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ имеют конечные пределы в точке a из E' :*

$$f_1(x) \to b_1 \text{ при } x \to a, \; f_2(x) \to b_2 \text{ при } x \to a.$$

Тогда

$$f_1(x) + f_2(x) \to b_1 + b_2, \; f_1(x) - f_2(x) \to b_1 - b_2,$$
$$f_1(x) f_2(x) \to b_1 b_2, \; \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \frac{b_1}{b_2}$$

при $x \to a$; в случае частного предполагается, что $b_2 \neq 0$.

◀ Докажем, например, результат о частном. Пусть последовательность x_n обладает свойствами (2). Тогда $f_1(x_n) \to b_1, \; f_2(x_n) \to b_2$,
$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x_n) = \frac{f_1(x_n)}{f_2(x_n)} \to \frac{b_1}{b_2}.$$
Ввиду произвольности выбора последовательности x_n приходим к требуемому результату. ▶

Функцию $f : E \to \mathbb{R}$ называют бесконечно малой в точке a из E', если $f(x) \to 0$ при $x \to a$. Из теоремы 2 и результатов § 3 вытекает

Следствие 1. *а) Сумма и разность бесконечно малых в точке a функций есть бесконечно малая функция; б) произведение бесконечно малой в точке a функции* *на финально ограниченную при $x \to a$ функцию есть бесконечно малая в точке a функция.*

Пример 3. Пусть $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}(f_1(x)f_2(x)) = \lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x}) = 0.$$

В нестрогих функциональных неравенствах можно переходить к пределу. Именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть функции $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ имеют конечные пределы в точке a из E' и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ в некоторой проколотой δ - окрестности точки a. Тогда*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \leqslant \lim_{x\to a} f_2(x). \tag{5}$$

◀ Предположим, что неравенство (5) неверно. Тогда функция $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ имеет в точке a положительный предел. Согласно лемме 8 $f(x) > 0$ $\forall\ x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$. Это равносильно неравенству $f_1(x) > f_2(x)$ для тех же x, что противоречит условиям теоремы. ▶

Лемма 9 (***Лемма о встречных функциях***)**.** *Пусть функции $f_1, f_2, f_3 : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенствам*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \qquad \forall\ x \in E.$$

Если $f_1(x) \to b$ и $f_3(x) \to b$ при $x \to a$, то и $f_2(x) \to b$ при $x \to a$.

◀ Пусть последовательность x_n обладает свойствами (2). Тогда $f_1(x_n) \leqslant f_2(x_n) \leqslant f_3(x_n)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и $f_1(x_n) \to b,\ f_3(x_n) \to b$. В силу леммы о встречных последовательностях (см. § 3) $f_2(x_n) \to b$. Проведенное рассуждение означает, что $f_2(x) \to b$ при $x \to a$. ▶

5. Предел суперпозиции функций

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — числовая функция на множестве $X \subset \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ — числовая функция на множестве $Y \subset \mathbb{R}$. Если область значений $f(X)$ функции f на множестве X принадлежит множеству Y, то каждому x из X можно сопоставить число $g(f(x))$. Определенную таким образом функцию $x \to g(f(x))$ называют суперпозицией (композицией) функций f, g и обозначают символом $g \circ f$. Итак, $(g\circ f)(x) := g(f(x))$ $\forall\ x \in X$. При этом f называют внутренней функцией суперпозиции, g — внешней функцией суперпозиции.

Пусть $x_0 \in X',\ y_0 \in Y'$ и справедливы равенства

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y \to y_0} g(y) = z_0. \tag{6}$$

Равенство

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = z_0 = \lim_{y \to y_0} g(y) \tag{7}$$

называют правилом замены переменных. Приведем пример, показывающий, что без дополнительных предположений из (6) не следует (7). Действительно, пусть функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определены равенствами

$$f(x) \equiv 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g = \begin{cases} 0, \text{ если } y \neq 0 \\ 1, \text{ если } y = 0, \end{cases}$$

$x_0 \in \mathbb{R},\ y_0 = 0$. Тогда $(g \circ f)(x) \equiv 1$, поэтому левая часть (7) равна 1. Правая часть (7) равна 0. Таким образом, в данной ситуации равенство (7) неверно.

Теорема 4. *Пусть $x_0 \in X',\ y_0 \in Y'$ и справедливы равенства (6). Пусть выполнено одно из предположений:*

1) $f(x) \neq y_0$ при $x \in \mathcal{D}(x_0, \delta) \cap X$ и некотором $\delta > 0$;

2) $y_0 \in Y$ и $z_0 = g(y_0)$.

Тогда имеет место равенство (7).

◀ 1) Пусть последовательность x_n из $X \backslash \{x_0\}$ сходится к x_0. Тогда

$$f(x_n) \in Y,\ f(x_n) \neq y_0 \text{ и } f(x_n) \to y_0.$$

Поскольку $g(y) \to z_0$ при $y \to y_0$, то $g(f(x_n)) \to z_0$. Ввиду имеющегося произвола в способе выбора последовательности x_n получаем, что $g(f(x)) \to z_0$ при $x \to x_0$.

2) Пусть $x_n \in X \backslash \{x_0\}$ и $x_n \to x_0$. Тогда $f(x_n) \in Y$ и $f(x_n) \to y_0$. Так как $g(y) \to z_0$ при $y \to y_0$ и $z_0 = g(y_0)$, то $g(f(x_n)) \to z_0 = g(y_0)$. Теперь доказываемый результат очевиден. ▶

§7. Существование предела функции

1. Частичные пределы функции

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}, a \in E'$. Может случиться, что a является предельной точкой и для некоторого множества $E_1 \subset E$, т.е. $a \in E_1'$. Если существует предел сужения f_{E_1} функции f на множество E_1, то этот предел называют частичным пределом функции f в точке a. Очевидна

Лемма 1. *Число b есть частичный предел функции f в точке a в том и только в том случае , если существует последовательность x_n, обладающая свойствами*

$$x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \to a, \tag{1}$$

для которой $f(x_n) \to b$.

Очевидно, что если
$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$
то и все частичные пределы функции f в точке a равны b. Для функции
$$f(x) = \sin\ \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0)$$
совокупность ее частичных пределов совпадает с отрезком $[-1, 1]$.

Лемма 2. *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ финально ограничена при $x \to a$ ($a \in E'$). Тогда совокупность ее частичных пределов f в точке a есть непустое компактное подмножество $\mathbb{R}$.*

◀ Так как функция f финально ограничена при $x \to a$ ($a \in E'$), то найдутся такие числа $C > 0,\ \delta > 0$, что $|f(x)| < C,\ \forall\ x \in \mathcal{D}(a, \delta) \cap E$. Если последовательность x_n обладает свойствами (1), то $x_n \in \mathcal{D}(a, \delta) \cap E$ при достаточно больших n, а, следовательно $|f(x_n)| < C$, при тех же n. Любой из частичных пределов последовательности $f(x_n)$ является частичным пределом функции f, поэтому множество $\mathbb{B}$ частичных пределов функции f непусто. Очевидно включение $\mathbb{B} \in [-C, C]$, означающее ограниченность множества $\mathbb{B}$.

Для завершения доказательства леммы достаточно установить замкнутость множества $\mathbb{B}$. Пусть $b_m \in \mathbb{B}$ и $b_m \to b$ при $m \to \infty$. Из определения множества $\mathbb{B}$ вытекает существование последовательности z_{mn} ($n \in \mathbb{N}$), обладающей свойствами

$$z_{mn} \in E,\ z_{mn} \neq a,\ z_{mn} \to a \text{ при } n \to \infty,\ f(z_{mn}) \to b_m \text{ при } n \to \infty.$$

Фиксируем номер $n(m)$ так, что $|z_{mn(m)} - a| + |f(z_{mn(m)}) - b_m| < \frac{1}{m}$. Положим $x_m := z_{mn(m)}$ ($m \in \mathbb{N}$). Определенная таким образом последовательность x_m обладает свойствами (1); при этом

$$|f(x_n) - b| \leqslant |f(x_n) - b_m| + |b_m - b| < \frac{1}{m} + |b_m - b|.$$

Следовательно, $f(x_n) \to b$, т.е. $b \in \mathbb{B}$. Замкнутость множества $\mathbb{B}$ доказана. ▶

Следствие 1. *В условиях леммы 2 среди частичных пределов функции f в точке a существуют наибольший и наименьший частичные пределы; соответствующие пределы называют верхним и нижним пределами функции f в точке a и обозначают символами*

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x),\ \underline{\lim_{x\to a}} f(x).$$

Если a является предельной точкой для множества $E_1 := E \cap (a, \infty)$, то предел сужения f_{E_1} функции f на множество E_1 называют пределом справа (правосторонним пределом) функции f в точке a. Для его обозначения используют символы

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ и } f(a+0).$$

Точно так же (с $E_1 := E \cap (-\infty, a)$) вводится понятие предела слева (левостороннего предела) функции f в точке a, обозначаемого символами

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } f(a-0).$$

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть a есть предельная точка для каждого из множеств $E \cap (a, \infty)$ и $E \cap (-\infty, a)$. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — функция на множестве E. Тогда функция f имеет предел в точке a в том и только в том случае, если $f(a+0) = f(a-0)$.*

2. Критерии существования предела функции

Теорема 1. *Для того, чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ имела предел в точке a из E', необходимо и достаточно, чтобы она была финально ограниченной при $x \to a$ и*

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim_{x\to a}} f(x). \tag{2}$$

◀ В доказательстве нуждается лишь достаточность указанных предположений. Если последовательность x_n обладает свойствами (1), то из (2) вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n).$$

Это означает, что $f(x) \to b := \overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ при $x \to a$. ▶

Теорема 1 аналогична теореме 4.3. Функция f удовлетворяет условию Коши при $x \to a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из соотношений

$$x' \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E,\ x'' \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E \tag{3}$$

следует неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{4}$$

Теорема 2 (***Критерий Коши существования предела функции***). *Для того, чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$ имела предел в точке a из E', необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условию Коши при $x \to a$.*

◀ **Необходимость.** Пусть $f(x) \to b$ при $x \to a$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы из соотношения $x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$ следовала оценка $|f(x) - b| < \varepsilon$. В частности, если $x' \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E,\ x'' \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$, то $|f(x') - b| < \varepsilon/2,\ |f(x'') - b| < < \varepsilon/2$, поэтому

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - b| + |b - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает теорему в части необходимости.

Достаточность. Пусть из (3) следует (4). Таким образом,

$$f(x'') - \varepsilon < f(x') < f(x'') + \varepsilon \tag{5}$$

если только $x' \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$. Оценка (5) влечет за собой финальную ограниченность функции $f : E \to \mathbb{R}$ в точке a и неравенства

$$f(x'') - \varepsilon \leqslant \varliminf_{x \to a} f(x) \leqslant \varlimsup_{x \to a} f(x) \leqslant f(x'') + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \varlimsup_{x \to a} f(x) - \varliminf_{x \to a} f(x) \leqslant 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к равенству (2), из которого вытекает существование предела функции f в точке a. ▶

Для монотонных функций можно указать простой критерий существования предела.

Теорема 3 (***Критерий существования предела монотонной функции***). *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ монотонна и число $a := \inf\ E$ есть предельная точка для множества E. Для того, чтобы функция f имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она была финально ограниченной при $x \to a$.*

◀ В доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть, для определенности, функция f возрастает и ограничена на $\mathcal{D}(a,\delta) \cap E$ при некотором $\delta > 0$. Положим $b = \inf\{f(x),\ x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E\}$. Тогда $b \leqslant f(x)\ \forall\ x \in \mathcal{D}(a,\delta) \cap E$; для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент x' из $\mathcal{D}(a,\delta) \cap E$ такой, что $f(x') < b + \varepsilon$. Поскольку функция f возрастает , то $f(x) \leqslant f(x')\ \forall\ x \in \mathcal{D}(a,x') \cap E$. Следовательно, $b \leqslant$

$\leqslant f(x) < b + \varepsilon \ \forall \ x \in \mathcal{D}(a, x') \cap E$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $f(x) \to b$ при $x \to a$. ▶

Аналогичный результат справедлив и в случае, если число $a := \sup \ E$ есть предельная точка множества E.

Следствие 2. *Пусть функция f определена и возрастает на некоторой окрестности U точки c. Тогда существуют односторонние пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ функции f в точке c, причем*

$$f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0). \tag{6}$$

◀ Пусть $x_1 \in U$, $x_2 \in U$ и $x_1 < c < x_2$. В силу возрастания функции f справедливы неравенства

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \qquad \forall \, x \in [x_1, x_2]. \tag{7}$$

В частности, функция f ограничена на отрезке $[x_1, x_2]$. Существование односторонних пределов $f(c-0)$, $f(c+0)$ вытекает из теоремы 3. Оценка (6) следует из (7) при $x = c$. ▶

Следствие 3. *Пусть функция f определена и возрастает на отрезке $[c, c+\delta]$ (или $[c-\delta, c]$) при некотором $\delta > 0$. Тогда существует односторонний предел $f(c+0)$ (соответственно $f(c-0)$), причем $f(c) \leqslant f(c+0)$ (соответственно $f(c-0) \leqslant f(c)$).*

Аналогичные следствиям 2, 3 результаты верны и для убывающей функции.

3. Предел на ∞ и бесконечный предел функции

Предшествующие определения предела функции (см. п. 6.3) относились к случаю конечных a, b. В этом пункте обсудим модификации понятия предела для a, b из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)$. Введем ε - окрестности несобственных чисел $(-\infty)$ и $(+\infty)$, полагая для любого $\varepsilon > 0$

$$U(-\infty; \varepsilon) = \mathcal{D}(-\infty; \varepsilon) := \left(-\infty, \frac{1}{\varepsilon}\right), \ U(-\infty; \varepsilon) = \mathcal{D}(+\infty; \varepsilon) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$

Элемент a из $\overline{\mathbb{R}}$ назовем предельной точкой непустого множества $E \subset \mathbb{R}$, если $\mathcal{D}(a, \delta) \cap E \neq \emptyset \ \forall \delta > 0$. В случае a из $\mathbb{R}$ это совпадает с принятым в п. 6.2 определением. Если же $a = +\infty$, $(a = -\infty)$, то данное определение равносильно неограниченности сверху (снизу) множества E.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — действительная функция на множестве $E \subset \mathbb{R}$, элемент a из $\overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка множества E. Элемент b из $\overline{\mathbb{R}}$ назовем пределом функции f в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$f(x) \in U(b, \varepsilon), \text{ если } x \in \mathcal{D}(a, \delta) \cap E.$$

Это определение идентично приведенному в п. 6.3. Единственное отличие связано с тем, что на этот раз a, b — любые элементы из $\overline{\mathbb{R}}$, в связи с чем ε - окрестности элементов могут быть и лучами прямой $\mathbb{R}$. Используется запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$). Приведенное определение позволяет распространить большинство установленных выше свойств предела функции на рассматриваемый случай. Не останавливаясь на всех переформулировках, отметим здесь лишь аналоги теорем 2, 3.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $f : E \to \mathbb{R}$, определенная на неограниченном сверху множестве $E \subset \mathbb{R}$, имела конечный предел на $+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\delta > 0$, что*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \; \forall \, x', \; x'' \in \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right) \cap E.$$

Теорема 5. *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ определена и монотонна на неограниченном сверху множестве $E \subset \mathbb{R}$. Для того, чтобы функция f имела конечный предел на $+\infty$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной на множестве $(N, \infty) \cap E$ при некотором N из $\mathbb{R}$.*

◀ Теорема 4 — это критерий Коши существования предела функции на ∞. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 2, поэтому не приводится. Теорема 5 доказывается так же, как и теорема 3. ▶

4. Символы o и O

Пусть функции f и g определены на множестве E, a — конечная или бесконечная предельная точка множества E. Пусть существует такая окрестность $U(a, \delta)$ точки a и такая функция φ, заданная на $E \cap U(a, \delta)$, что для всех x из $E \cap U(a, \delta)$ выполняется равенство

$$f(x) = \varphi(x) g(x).$$

Определение 1. *Функция f называется функцией, ограниченной относительно функции g в окрестности точки a, если функция φ ограничена.*

Если функция f ограничена относительно функции g в окрестности точки a, то пишут
$$f = O(g),\ x \to a$$
(читается: f есть "O большое" от g).

Определение 2. *Функция f называется бесконечно малой относительно функции g при $x \to a$, если функция φ бесконечно малая при $x \to a$, (т.е. при $x \to a$).*

В этом случае пишут
$$f = o(g), \qquad x \to a$$
(читается: f есть "o малое" от g при $x \to a$).

Определение 3. *Функция f называется эквивалентной функции g при $x \to a$, если*
$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 1.$$

Используется запись $f \sim g,\ x \to a$.

Например, верны соотношения
$$x(1+\sin\ x) = O(x),\ x \to \infty; \qquad x^2 = o(x),\ x \to 0$$
$$x^2 \sim x^2+1,\ x \to \infty.$$

Равенство $f(x) = O(1),\ x \to a$ эквивалентно финальной ограниченности функции f при $x \to a$; равенство $f(x) = o(1),\ x \to a$ означает, что f — бесконечно малая функция при $x \to a$.

§8. Непрерывные функции

1. Локальные свойства непрерывных функций

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве $X \subset \mathbb{R},\ x_0 \in X$. Функцию f называют непрерывной в точке x_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из соотношений $|x - x_0| < \delta,\ x \in X$ следует, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Возможно определение на языке последовательностей: функция f непрерывна в точке x_0, если для всякой последовательности x_n из X, сходящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$. Оба определения эквивалентны между собой.

Действительно, если x_0 – изолированная точка множества X, то $U(x_0,\delta)\cap X{=}x_0$ при малых δ, поэтому $f(x) = f(x_0)\ \forall\ x \in U(x_0,\delta) \cap X$. В этом случае любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. Если $x_0 \in X'$ (x_0 — предельная точка множества X), то непрерывность функции f в точке x_0 равносильно равенству
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

поэтому эквивалентность двух определений непрерывности следует из эквивалентности определений предела функции по Коши и Гейне.

Теорема 1. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Тогда 1) функция f ограничена на множестве $U(x_0, \delta) \cap X$ при некотором $\delta > 0$ (локальная ограниченность непрерывной функции); 2) если $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ на множестве $U(x_0, \delta) \cap X$ при некотором $\delta > 0$ (сохранение знака непрерывной функции).*

◀ Достаточно рассмотреть случай, когда $x_0 \in X'$. В этой ситуации оба утверждения следуют из (1) и результатов о пределах функций (см. §6). ▶

Теорема 2. *Сумма (разность, произведение, частное) двух функций, определенных на множестве X и непрерывных в точке x_0, есть непрерывная в точке x_0 функция.*

◀ Теорема 2 следует из (1) и теорем о пределе суммы (разности, произведения, частного) двух функций (см. §6). Отметим, что частное $\frac{f}{g}$ двух функций f, g определено на X, если $g(x) \neq 0 \ \forall\, x \in X$. ▶

Теорема 3. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция $g : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, причем $f(X) = Y$.*

Тогда суперпозиция $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0.

◀ Теорема вытекает из теоремы о пределе суперпозиции двух функций (см. §6).▶

Приведем примеры непрерывных функций. Функцию

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

при условии $c_n \neq 0$ называют многочленом степени n. Многочлен непрерывен в каждой точке x_0 прямой $\mathbb{R}$. Функцию вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

называют рациональной, если $P(x), Q(x)$ суть многочлены. Естественная область определения функции $R(x)$ состоит из чисел a, для которых $Q(a) \neq 0$. Рациональная функция непрерывна в каждой точке области определения.

Если x_0 из X не является точкой непрерывности функции $f : X \to \mathbb{R}$, то x_0 именуют точкой разрыва функции f. Очевидно, что точки разрыва принадлежат X'. Например, $x_0 = 0$ есть точка разрыва для функций,

$$f_1(x) := \begin{cases} x^2, \text{ если } x \neq 0 \\ 1, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \operatorname{sign} x := \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0 \\ 0, \text{ если } x = 0 \\ -1, \text{ если } x < 0 \end{cases},$$

$$f_3(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0 \\ A, \text{ если } x = 0 \end{cases}, \qquad f_4(x) := [x] \ (x \in \mathbb{R}), \tag{2}$$

здесь A — любое действительное число.

2. Теорема Вейерштрасса

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X. Совокупность непрерывных на множестве X функций обозначают символом $C(X)$.

Теорема 4. *Пусть X — компактное подмножество прямой $\mathbb{R}$, $f \in C(X)$. Тогда область значений $f(X) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x),\ x \in X\}$ функции f на множестве X есть компактное множество (краткая формулировка: непрерывный образ компакта есть компакт).*

◀ Пусть y_n — произвольная последовательность элементов из $f(X)$. Тогда $y_n = f(x_n)$, где $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку X — компактное множество, то из последовательности x_n можно извлечь последовательность $x_{k(n)}$, сходящуюся к элементу x_0 из X. Так как $f \in C(X)$, то $f(x_{k(n)}) \to f(x_0)$. Это означает, что последовательность $y_{k(n)}$ сходится к элементу $y_0 := f(x_0)$ из $f(X)$. Таким образом, из произвольной последовательности элементов y_n множества $f(X)$ можно извлечь подпоследовательность $y_{k(n)}$, сходящуюся к элементу множества $f(X)$. Это и доказывает компактность множества $f(X)$. ▶

Теорема 5 (***Теорема Вейерштрасса***). *Непрерывная на компактном множестве функция ограничена и достигает своих точных верхней и нижней границ.*

◀ Действительно, пусть X — компактное множество, $f \in C(X)$. Тогда область значений $f(X)$ есть компактное множество. Поэтому в множестве $f(X)$ существует наименьший и наибольший элементы m и M соответственно. Следовательно, найдутся такие элементы $x_0,\ x_1$ из X, для которых

$$m = f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) = M \qquad \forall\, x \in X. \ ▶$$

Упражнение 1. *Привести пример функции f, определенной и непрерывной на луче $X := [0, \infty)$, для которой множество $f(X)$ не является ни замкнутым, ни ограниченным.*

Упражнение 2. *Привести пример функции f, определенной и непрерывной на интервале $X := (0, 1)$, для которой множество $f(X)$ не является ни замкнутым, ни ограниченным.*

Упражнение 3. *Доказать, что если любая непрерывная на множестве X функция ограничена, то X — компактное множество.*

3. Теорема Кантора

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют равномерно непрерывной на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из соотношений

$$x' \in X,\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta$$

следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Эквивалентное приведенному определение на языке последовательностей выглядит таким образом: функция $f : X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, если для произвольных последовательностей $x'_n,\ x''_n$ из X, таких, что $x'_n - x''_n \to 0$, последовательность $f(x'_n) - f(x''_n)$ также стремится к 0.

Очевидно, что равномерная непрерывность функции $f : X \to \mathbb{R}$ влечет за собой включение $f \in C(X)$. Обратное, вообще говоря, не верно. Например, функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ непрерывна на множестве $X := (0, 1]$, однако не является равномерно непрерывной на этом множестве. Действительно, пусть

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad x''_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда $x'_n - x''_n \to 0$, но $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$.

Теорема 6 (***Теорема Кантора***). *Непрерывная на компактном множестве $X \subset \mathbb{R}$ функция $f : X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна.*

◀ Пусть $x'_n,\ x''_n$ — две сближающиеся последовательности элементов множества X, т.е. $x'_n - x''_n \to 0$. Докажем, что последовательность $f(x'_n) - f(x''_n)$ также бесконечно мала. В предположении противного найдется такое число $\varepsilon > 0$, что множество

$$\mathbb{N}_0 := \{n \in \mathbb{N},\ |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon\}$$

бесконечно. Производя, если это нужно, перенумерацию, можно считать, что $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$; таким образом,

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

В условиях теоремы X — компактное множество. Поэтому некоторая подпоследовательность $x'_{k(n)}$ последовательности x'_n сходится к элементу x_0 из $X : x'_{k(n)} \to x_0$. Но тогда и $x''_{k(n)} \to x_0$. Так как $f \in C(X)$, то

$$f(x'_{k(n)}) \to f(x_0),\ f(x''_{k(n)}) \to f(x_0),$$

$$f(x'_{k(n)}) - f(x''_{k(n)}) \to 0.$$

Последнее противоречит предположению:$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. ►

Упражнение 4. *Доказать, что функция* $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ *не является равномерно непрерывной на прямой* $\mathbb{R}$.

Упражнение 5. *Доказать равномерную непрерывность функции* $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x < \infty)$.

4. Теорема о промежуточных значениях

Теорема 7 (***Теорема Больцано-Коши***). *Пусть* $f \in C([a, b])$ *и* $f(a)f(b) < 0$. *Тогда существует точка* x_* *из* (a, b), *в которой функция* f *обращается в нуль:* $f(x_*) = 0$.

◄ Назовем отрезок $[x_0, x_1] \subset [a, b]$ пестрым, если $f(x_0)f(x_1) < 0$. По условию теоремы исходный отрезок $I_0 := [a, b]$ является пестрым. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то все доказано. В противном случае одна из половинок отрезка I_0 является пестрой. Обозначим ее через $I_1 := [a_1, b_1]$. Очевидно, что $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, $f(a_1)f(b_1) < 0$. С отрезком I_1 поступаем точно так же, т.е. делим I_1 пополам и в случае необходимости выбираем пеструю половину I_2. Таким образом, продолжаем процесс далее. Тогда либо на каком-то шаге получаем точку c из (a, b), в которой $f(c) = 0$, либо возникает бесконечная последовательность пестрых отрезков $I_n := [a_n, b_n]$, причем $I_{n+1} \subset I_n$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; в последнем случае найдется единственная точка x_*, принадлежащая всем отрезкам I_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Оказывается, $f(x_*) = 0$. В предположении противного $f(x_*) \neq 0$; для определенности пусть $f(x_*) > 0$. Поскольку $a_n \to x_*$, $b_n \to x_*$ то $f(a_n) > 0$, $f(b_n) > 0$ при достаточно больших n, т.е. отрезок $[a_n, b_n]$ не является пестрым. Противоречие. ►

Доказательство теоремы носит конструктивный характер. Оно приводит к методу деления пополам для нахождения корней уравнения $f(x) = 0$. Геометрически теорема очевидна: начальная и конечная точки графика функции $y = f(x)$ находятся по разные стороны от оси абсцисс, поэтому непрерывная кривая $y = f(x)$ в некоторой промежуточной точке пересекает ось абсцисс.

Теорема 8 (***Теорема о промежуточных значениях***). *Пусть функция φ непрерывна на промежутке J и $y_0 \in \varphi(J)$, $y_1 \in \varphi(J)$. Тогда весь отрезок с концами y_0, y_1 принадлежит множеству $\varphi(J)$.*

◀ Пусть $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \varphi(x_1)$, где $x_0 \in J$, $x_1 \in J$ и (для определенности) $x_0 < x_1$. Сужение функции φ на отрезок $[x_0, x_1]$ принадлежит $C([x_0, x_1])$. Если $y_0 = y_1$, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть $y_0 \neq y_1$ и $z := (1-t)y_0 + ty_1$ при некотором t из $(0, 1)$. Тогда функция

$$f(x) := \varphi(x) - z \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$$

непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$ и принимает на его концах значения разных знаков:

$$f(x_0)f(x_1) < 0$$

Поэтому $f(x_*) = 0$ для некоторого x_* из отрезка $[x_0, x_1]$. Следовательно, $\varphi(x_*) = z$, т.е. $z \in \varphi(J)$. ▶

Объединяя теоремы 5, 8, получаем.

Следствие 1. *Область значений непрерывной на отрезке функции есть также отрезок.*

◀ Действительно, пусть x_0 и x_1 — точки минимума и максимума функции f класса $C([a, b])$; $m := f(x_0)$, $M := f(x_1)$ — минимальное и максимальное значение функции. Если $L \in [m, M]$, то, в силу теоремы о промежуточных значениях, найдется элемент x_*, расположенный между x_0 и x_1, для которого $f(x_*) = L$. Следовательно, $f([a, b]) = [m, M]$. ▶

5. Критерий непрерывности монотонной функции

Теорема 9. *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ монотонна. Тогда $f \in C([a, b])$ в том и только в том случае, если множество ее значений $f([a, b])$ есть отрезок.*

◀ Пусть (для определенности) f – возрастающая функция и $f([a, b])=[f(a), f(b)]$. Установим ее непрерывность в каждой точке c из отрезка $[a, b]$.

Пусть вначале $c \in (a, b)$. В силу следствия 2 теоремы 2 существуют односторонние пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ функции f в точке c, причем $f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0)$. Если c — точка разрыва функции f, то хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c)$, $(f(c), f(c+0))$ имеет положительную длину и в этом интервале нет значений функции f; действительно, $f(x) \leqslant f(c-0)\ \forall\ x \in [a, c)$ и

$f(x) \geqslant f(c+0)\ \forall\, x \in (c, b]$. это противоречит предположению $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$. Противоречие и доказывает непрерывность функции f в точке c из (a, b).

Непрерывность функции f в точках a, b доказывается аналогично. Единственное изменение в доказательстве: вместо следствия 2 используется следствие 3 теоремы 2. Тем самым доказана импликация: если $f([a,b])$ есть отрезок, то $f \in C([a,b])$. Справедливость обратной импликации вытекает из следствия теоремы 8. ►

Теорема 10. *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ строго монотонна и $f \in C([a,b])$. Тогда 1) множество $f([a,b])$ есть отрезок $[m, M]$ с концами $f(a), f(b)$; 2) для каждого y из $[m, M]$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение $x = g(y)$; 3) определенная таким образом функция $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[m, M]$.*

◄ Пусть (для определенности) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — строго возрастающая и непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тогда множество ее значений есть отрезок $[m, M]$, где $m = f(a) < M = f(b)$. Единственность решения $x = g(y)$ уравнения $f(x) = y$ для любого y из $[m, M]$ следует из строгой монотонности функции f. Если $m \leqslant y_1 < y_2 \leqslant M$, то $g(y_1) < g(y_2)$. Действительно, в предположении противного $x_1 = g(y_1) \geqslant x_2 = g(y_2)$; поэтому $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$. Противоречие доказывает строгую монотонность функции $g : [m, M] \to \mathbb{R}$. Область значений функции на отрезке $[m, M]$ есть отрезок $[a, b]$, поэтому включение $g \in C([m, M])$ вытекает из теоремы 9. ►

Определенную в теореме 10 функцию $g : [m, M] \to \mathbb{R}$ называют обратной к функции f и обозначают символом f^{-1}. Как видно из доказательства теоремы 10 обратная функция f^{-1} строго монотонна в том же смысле, что и исходная функция f.

6. Параметрическое задание функции

Пусть на некотором множестве $T \subset \mathbb{R}$ заданы действительные функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Предположим, что φ есть биекция множества T на множество $X := \varphi(T)$. В этом случае существует обратная функция $\varphi^{-1} : X \to T$, определенная на множестве X. Функция

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \qquad (x \in X)$$

также определена на множестве X. Равенства

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad (t \in T) \tag{3}$$

называют параметрическим заданием функции $f = \psi \circ \varphi^{-1} : X \to \mathbb{R}$.

Некоторые свойства функции f усматриваются из свойств функций φ, ψ. Пусть, например, $T = [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C(T)$, $\psi \in C(T)$ и функция φ строго монотонна на отрезке T. Тогда φ есть биекция отрезка T на отрезок X с концами $\varphi(\alpha), \varphi(\beta)$, обратная к φ функция $\varphi^{-1} : X \to \mathbb{R}$ принадлежит $C(X)$. Отсюда вытекает включение $f = \psi \circ \varphi^{-1} \in C(X)$.

Остановимся на механической интерпретации функции, заданной равенствами (3) с $T = [\alpha, \beta]$. Соотношения (3) можно интерпретировать как уравнения, определяющие зависимость от времени t координат точки M, движущейся в плоскости Oxy. При изменении t от α до β точка M описывает некоторую кривую, называемую траекторией движения точки. Если траектория совпадает с графиком некоторой функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, то f — функция, заданная параметрическими соотношениями (3).

§9. Элементарные функции

1. Тригонометрические функции

Пусть Γ — окружность в плоскости Oxy радиуса 1 с центром в точке $O = (0, 0)$. Точка M, принадлежащая Γ, может быть охарактеризована декартовыми координатами (x, y) и углом φ, который вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с положительным направлением оси абсцисс и отсчитываемым против часовой стрелки. Если не оговорено противное, используется радианная мера угла, так что φ есть длина дуги AM; здесь $A = (1, 0)$ — точка пересечения окружности Γ с положительной полуосью абсцисс. Отметим, что φ совпадает с удвоенной площадью сектора OAM — части плоскости, ограниченной отрезками OA, OM и дугой AM (см. рис. 1, относящийся к ситуации, когда $0 < \varphi < \pi/2$). При движении точки $M = (x, y)$ против часовой стрелки угол φ изменяется от 0 до 2π; по определению положим $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Тем самым на промежутке $[0, 2\pi)$ определяются две функции cos и sin. Сохраним обозначение cos и sin за продолжениями этих функций на всю действительную прямую, удовлетворяющими условию 2π – периодичности:

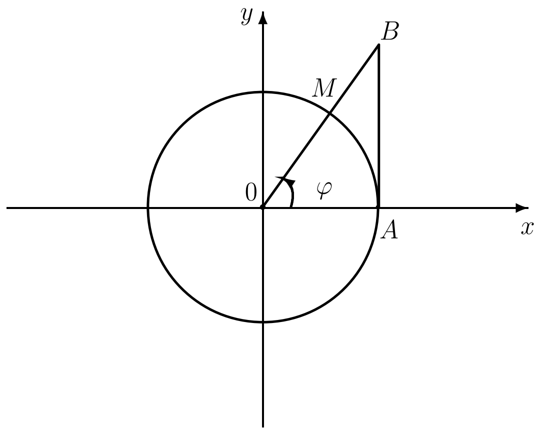

Рис. 1

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi,\ \sin(\varphi + 2\pi) = \sin\varphi;$$

здесь $\varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$.

Из определения cos, sin вытекает основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1;$$

четность косинуса и нечетность синуса, равенство $\cos\varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$ $\forall \varphi \in \mathbb{R}$. Отметим менее тривиальные свойства:

1) сужение синуса на отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ есть строго возрастающая функция;

2) для любых φ_1, φ_2 из $\mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 = 2\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \tag{1}$$

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = -2\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}. \qquad (2)$$

Предполагается, что читатель знаком с этими свойствами синуса и косинуса, а также умеет находить их значения при $\varphi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$ и $\pi/2$. Как обычно, $\mathrm{tg}\ \varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, если $\cos\varphi \neq 0$; $\mathrm{ctg}\ \varphi := \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, если $\sin\varphi \neq 0$.

Докажем неравенство

$$\cos\varphi < \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1 \text{ при } 0 < |\varphi| < \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Так как $\cos\varphi$, $\dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$ — четные функции, то достаточно установить неравенство (3) для φ из $(0, \pi/2)$. Пусть, как и ранее, Γ — окружность $x^2+y^2=1$, $M = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $A = (0,1), B$ — точка пересечения прямой OM с прямой $x = 1$, т.е. $B = (1, \mathrm{tg}\ \varphi)$. Тогда (см. рис. 1) площади треугольников OAB, OAM равны $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\ \varphi$, $\frac{1}{2}\sin\varphi$ соответственно, площадь сектора OAM равна $\varphi/2$ и заключена между площадями треугольников OAB и OAM. Таким образом,

$$0 < \frac{1}{2}\sin\varphi < \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{2}\mathrm{tg}\ \varphi \ (0 < \varphi\frac{\pi}{2}). \qquad (4)$$

Неравенство (4) влечет за собой неравенство (3).

В качестве следствий неравенств (3) отметим оценки

$$|\sin\varphi| < |\varphi| \qquad (\varphi \neq 0), \qquad (5)$$

$$|\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1| < |\varphi_2 - \varphi_1|, \ |\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1| < |\varphi_2 - \varphi_1| \qquad (\varphi_1 \neq \varphi_2). \qquad (6)$$

Действительно, при $0 < |\varphi| < \pi/2$ неравенство (5) вытекает из (3), а при $|\varphi| \geqslant \pi/2$ оно очевидно, поскольку $\pi/2 > 1 \geqslant |\sin\varphi|$. Оценки (6) следуют из неравенства (5) и тождеств (1),(2) соответственно.

Оценки (6) влекут за собой равномерную непрерывность косинуса и синуса на всей действительной прямой. Поскольку $\mathrm{tg}\ \varphi := \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$, то тангенс непрерывен всюду, где он определен.

Обратная к сужению синуса на отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ функция определена на отрезке $[-1,1]$. Ее обозначают символом $\arcsin$. Она характеризуется свойствами: для любого x из отрезка $[-1,1]$ $\arcsin x$ — это такой угол φ, что 1) $\sin\varphi = x$; 2) $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$.

Как обратная к строго возрастающей и непрерывной функции $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}$, функция $\arcsin := [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ также строго возрастает и непрерывна.

Функция $\arccos$ определяется как обратная к сужению косинуса на отрезок $[0,\pi]$. Легко проверяется равенство

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Сужение тангенса на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ есть строго возрастающая непрерывная функция, область значений которой совпадает со всей действительной прямой. Обратную к $\mathrm{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}$ функцию обозначают символом arctg. Она определена на всей действительной прямой и характеризуется свойствами: для любого x из $\mathbb{R}$ $\mathrm{arctg}\ x$ — это такой угол φ, что: 1) $\mathrm{tg}\ \varphi = x$; 2) $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Как обратная к строго возрастающей и непрерывной функции $\mathrm{tg}|_{(-\pi/2,\pi/2)}$, функция $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ также строго возрастает и непрерывна.

Подводя итог, можно сказать, что известные из школьного курса математики тригонометрические функции непрерывны в естественной области определения.

2. Первый специальный предел

Установим равенство
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \tag{7}$$
именуемое далее первым специальным пределом. В силу неравенства (3)
$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (0<|x|<\frac{\pi}{2}).$$
Поскольку $\cos x\to\cos 0=1$ при $x\to 0$, то (7) вытекает из леммы 9 о встречных функциях (см. § 6).

Следствие 1.
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0 \qquad \forall\ x_0\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

◀ В самом деле
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\lim_{x\to x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0.$$ ▶

Следствие 2.
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=-\sin x_0 \qquad \forall\ x_0\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

◀ Доказательство равенства (9) аналогично доказательству равенства (8), поэтому опускается. ▶

3. Показательная функция

Напомним определение показательной функции для рационального аргумента. Пусть $a>0,\ r=\frac{n}{m}$ $(n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N})$. Тогда $a^r:=\sqrt[m]{a^n}$, поэтому все сводится к понятиям целой степени числа $a>0$ и корня степени $m\in\mathbb{N}$ из положительного числа a^n. Отметим основные свойства показательной функции рационального аргумента:
$$1)\ a^{r+s}=a^r\cdot a^s \qquad (r\in\mathbb{Q}, s\in\mathbb{Q}); \qquad 2)\ a^1=a.$$
Этими свойствами показательная функция a^x однозначно определяется на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Ниже считаем, что $a>1$. Тогда $a^t>1$ при $t>0$. Отсюда вытекает строгое возрастание функции a^x на $\mathbb{Q}$: если $r<s$ $(r\in\mathbb{Q},\ s\in\mathbb{Q})$, то $a^r<a^s$. В § 3 доказано равенство
$$\lim_{n\to\infty}a^{1/n}=\lim_{n\to\infty}a^{-1/n}=1. \tag{10}$$
Его следствием является

Лемма 1. *Для каждого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta>0$, *что если* $|x|<\delta,\ x\in\mathbb{Q}$, *то* $|a^x-1|<\varepsilon$.

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из равенства (10) вытекает существование такого натурального числа n, что

$$|a^{1/n} - 1| < \varepsilon,\ |a^{-1/n} - 1| < \varepsilon.$$

В частности,

$$1 - \varepsilon < a^{-1/n} < a^{1/n} < 1 + \varepsilon.$$

Если $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ $(x \in \mathbb{Q})$, то в силу строгого возрастания функции a^x $(x \in \mathbb{Q})$ имеем $a^{-1/n} < a^x < a^{1/n}$, следовательно,

$$a^{-1/n} - 1 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1.$$

Таким образом, $|a^x - 1| < \varepsilon$, если $|x| < \delta,\ x \in \mathbb{Q}$. ▶

Лемма 2. *Показательная функция a^x рационального аргумента x непрерывна в каждой точке x_0 из $\mathbb{Q}$.*

◀ Для любых x, x_0 из $\mathbb{Q}$ верно равенство

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберем $\delta > 0$ так, что $|a^t - 1| < \varepsilon a^{x_0}$, если $|t| < \delta,\ t \in \mathbb{Q}$; это возможно в силу леммы 1. Если $|x - x_0| < \delta,\ x \in \mathbb{Q}$, то $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon$. Приведенная оценка влечет за собой требуемый результат. ▶

Оценим теперь степень a^α для любого действительного показателя α. Существуют последовательности рациональных чисел, сходящихся к α; например, можно положить $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ (см. § 2), или $x_n = \frac{[n\alpha]+1}{n}$. Фиксируем последовательность x_n из $\mathbb{Q}$, сходящуюся к α. Докажем фундаментальность последовательности a^{x_n}. Действительно,

$$|a^{x_{n+p}} - a^{x_n}| = a^{x_n}|a^{x_{n+p}-x_n} - 1| \leqslant a^\beta |a^{x_{n+p}-x_n} - 1|,$$

где $\beta \in \mathbb{Q}$ и $\beta > x_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 1 и фундаментальности последовательности x_n множитель $|a^{x_{n+p}-x_n} - 1|$ может быть сделан сколь угодно малым при достаточно больших n. Именно, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такой номер n_0, что

$$|a^{x_{n+p}-x_n} - 1| < a^{-\beta}\varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Объединяя последние оценки, приходим к неравенству

$$|a^{x_{n+p}} - a^{x_n}| \leqslant a^\beta |a^{x_{n+p}-x_n} - 1| < \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Фундаментальность, а значит, и сходимость последовательности a^{x_n} доказана.

Таким образом, для произвольной последовательности x_n, сходящейся к α, последовательность a^{x_n} сходится. Этот предел не зависит от выбора последовательности $x_n \to \alpha$. Действительно, пусть x'_n — еще одна последовательность, сходящаяся к α. Тогда последовательность

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$$

также сходится к α. Последовательность $a^{x_1}, a^{x'_1}, a^{x_2}, a^{x'_2}, \ldots, a^{x_n}, a^{x'_n}, \ldots$ в силу доказанного выше сходится, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x'_n}.$$

Получаем $a^\alpha := \lim a^{x_n}$, где $x_n \in \mathbb{Q}$ и $x_n \to \alpha$. Тем самым показательная функция a^x определена для любого действительного аргумента x.

Сохраняется основное свойство показательной функции:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Действительно, пусть $r_n \in \mathbb{Q},\ s_n \in \mathbb{Q}$ и $r_n \to x,\ s_n \to y$. Переходя к пределу в равенстве

$$a^{r_n+s_n} = a^{r_n} \cdot a^{s_n},$$

получаем требуемое свойство.

Для любого $x > 0$ существует рациональное число t из $(0, x)$. Если $x_n \in \mathbb{Q}$ и $x_n \to x$, то $x_n > t$ при достаточно больших n и

$$a^{x_n} > a^t \qquad (n \geqslant n_0).$$

С помощью предельного перехода отсюда получаем $a^x \geqslant a^t > 1$. Отсюда следует строгое возрастание функции a^x :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2-x_1} - 1) > 0.$$

Лемма 3. *Показательная функция a^x действительного аргумента x непрерывна в каждой точке x_0 из $\mathbb{R}$.*

◀ Сохраняется не только формулировка леммы 2, но и ее доказательство. ▶

Лемма 4. *Область значений функции a^x $(x \in \mathbb{Q})$ есть луч $(0, \infty)$.*

◀ Пусть $b > 0$. Так как $a > 1$, то $a^n \geqslant 1 + n(a-1)$ в силу неравенства Бернулли. Поскольку $1 + n(a-1) > b$ при достаточно больших n, то $a^n > b$ при $n \geqslant n_1$. Далее $\left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $a^{-n} < b$ при $n \geqslant n_2$. В силу непрерывности функции a^x $(x \in \mathbb{R})$ найдется число x_* из $[-n_2, n_1]$, для которого $a_{x_*} = b$. Проведенные рассуждения применимы для любого $b > 0$, то и приводит к требуемому результату. ▶

Итак, установлены следующие свойства показательной функции: I) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; II) $a^1 = a$; III) функция a^x непрерывна; IV) область значений функции a^x есть луч $(0, \infty)$. Первые три свойства являются характеристическими, т.е. полностью определяют показательную функцию (см., например, [18]).

Замечание 1. Избавимся от предположения $a > 1$. Если $a \in (0, 1)$, то $\frac{1}{a} > 1$. Показательная функция a^x для основания a из $(0, 1)$ определяется равенством

$$a^x := \left[\left(\frac{1}{a}\right)^x\right]^{-1}.$$

Свойства I) - IV) показательной функции a^x сохраняются и при a из $(0, 1)$.

4. Логарифмическая и степенная функции

Пусть $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$. Уравнение $a^z = b$ имеет единственное решение, которое называют логарифмом b по основанию a и обозначают символом $\log_a b$; логарифм по основанию 10 называют десятичным и обозначают символом $\lg$: $\log_{10} x = \lg x$; логарифм по основанию e называют натуральным и обозначают символом $\ln : \log_e x = \ln x$.

Таким образом, логарифмическая функция $\log_a x$ определена на луче $(0, \infty)$. Сформулируем некоторые ее свойства:

I $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (x_1 > 0,\ x_2 > 0)$;

II $\log_a a = 1$;

III логарифмическая функция непрерывна;

IV при $a > 1$ функция $\log_a$ строго возрастает, при $0 < a < 1$ функция $\log_a$ строго убывает.

Для доказательства этих свойств достаточно воспользоваться определением логарифмической функции и установленными выше свойствами показательной функции. Докажем, например, свойства I, III.

Пусть $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ z_1 = \log_a x_1,\ z_2 = \log_a x_2$, т.е. $a^{z_1} = x_1,\ a^{z_2} = x_2$. Тогда $x_1 x_2 = a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$, что эквивалентно равенству $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$. Свойство I доказано.

Для доказательства свойства III достаточно установить непрерывность сужения логарифмической функции на каждый из отрезков $[x_1, x_2]$, где $0 < x_1 < x_2$. Функция $\log_a x$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$ является обратной к функции a^y $(y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $y_1 = \min(a^{x_1}, a^{x_2})$, $y_2 = \max(a^{x_1}, a^{x_2}))$, поэтому ее непрерывность следует из леммы 3 и теоремы 8.10.

Понятие степенной функции x^α вводилось ранее для рационального показателя α. В случае иррационального α будем считать ее определенной для $x > 0$. Очевидно равенство $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$. Отсюда вытекает непрерывность степенной функции x^α на луче $(0, \infty)$. Если $\alpha > 0$, то полагают $0^\alpha := 0$; продолженная таким образом функция оказывается непрерывной на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Иногда степенную функцию x^α рассматривают и для отрицательных аргументов x. Например, если $\alpha = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь, n — нечетное число, то $x^\alpha := (x^{1/n})^m$.

Замечание 2. Пусть $u(x),\ v(x)$ — функции, определенные на одном и том же множестве X и $u(x) > 0\ \forall\, x \in X$. Тогда на X определена показательно-степенная функция $u(x)^{v(x)}$. Очевидно равенство

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}. \tag{11}$$

Если $x_0 \in X'$ и $u(x) \to u_0 > 0,\ v(x) \to v_0$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} u(x)^{v(x)} = u_0^{v_0}. \tag{12}$$

Равенство (12) следует из (11) и непрерывности показательной и логарифмической функций. В частности, если $u \in C(X),\ v \in C(X)$, то и $u^v \in C(X)$.

Замечание 3. Известны аксиоматические определения тригонометрических, показательных, логарифмических и степенных функций (см., например, [18]).

5. Второй специальный предел

Ранее (см. § 4) была установлена сходимость последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ее предел, обозначаемый символом e, появляется во многих разделах математики.

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^{1/x}$, определенную при $x > -1,\ x \neq 0$. Оказывается, что $f(x) \to e$ при $x \to 0$, т.е. верно равенство

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \tag{13}$$

называемое далее вторым специальным пределом. Для доказательства (13) достаточно установить равенства

$$\lim_{x\to +0}(1+x)^{1/x} = e,\ \lim_{x\to -0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{14}$$

◀ Пусть $x_n > 0,\ x_n \to 0$. Без ограничения общности будем считать, что $0 < x_n < 1$. Положим $t_n = \left[\frac{1}{x_n}\right]$, так что $t_n \in \mathbb{N}$ и $t_n \leqslant \frac{1}{x_n} < t_n + 1,\ t_n \to \infty$. Справедливы неравенства

$$\left(1 + \frac{1}{t_n+1}\right)^{t_n} \leqslant (1+x_n)^{1/x_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n+1}, \tag{15}$$

вытекающие из монотонности показательной и степенной функции. Две крайние последовательности, фигурирующие в неравенстве (15), сходятся к числу e. Действительно,

$$\lim n \to \infty \left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n+1}\right)^{t_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n+1}\right)^{t_n+1} = e.$$

Поэтому и средняя последовательность

$$(1+x_n)^{1/x_n} \to e.$$

Ввиду произвольности последовательности $x_n > 0,\ x_n \to 0$, получаем первое из соотношений (14).

Для доказательства второго из соотношений (14) положим $x = -t$. Тогда

$$\lim_{x\to -0}(1+x)^{1/x} = \lim_{t\to +0}(1-t)^{-1/t} = \lim_{t\to +0}\left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^{1/t} = \lim_{t\to +0}\left(1 + \frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1-t}{t}\cdot\frac{1}{1-t}} = e.$$

Оба соотношения доказаны, что и приводит к равенству (13). ▶

6. Таблица специальных пределов

Поскольку

$$(1+x)^{1/x} \to e \text{ при } x \to 0,$$

а функция $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна, то

$$\ln(1+x)^{1/x} \to \ln e = 1 \text{ при } x \to 0.$$

Это приводит к равенству

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

называемому иногда третьим специальным пределом.

Рассмотрим отношение $\frac{a^x-1}{x}$. Положим $a^x - 1 = y$. Тогда $a^x = 1 + y$, $x\ln a = \ln(1+y)$,

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{y\ln a}{\ln(1+y)}.$$

Если $x \to 0$, то $y \to 0$ и
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a.$$
Это равенство именуют четвертым специальным пределом.

Наконец, равенство
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$
есть пятый специальный предел. Для его доказательства достаточно учесть соотношение
$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x},$$
в силу которого
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot \alpha \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$
Сведем установленные выше результаты о специальных пределах в таблицу:
$$1)\ \frac{\sin x}{x} \to 1; \quad 2)\ (1+x)^{1/x} \to e; \quad 3)\ \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1;$$
$$4)\ \frac{a^x - 1}{x} \to \ln a; \quad 5)\ \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \to \alpha$$
при $x \to 0$; здесь $a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

§10. Разрывные функции

1. Классификация точек разрыва

Понятие точки разрыва функции введено в п. 8.1. Именно, пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Точку x_0 из X именуют точкой разрыва функции f, если x_0 не является точкой непрерывности f. Очевидно, $x_0 \in X'$, ибо в изолированных точках множества X любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Если существует конечный предел
$$\lim_{x\to x_0} f(x),$$
отличный от $f(x_0)$, то x_0 называют точкой устранимого разрыва. Например, $x_0 = 0$ есть точка устранимого разрыва для функции
$$f_1(x) := \begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$
Если x_0 — точка устранимого разрыва функции f, то разрыв можно устранить, не изменяя значений функции f в точках, отличных от x_0. Для этого достаточно положить значение функции в точке x_0 равным пределу функции в этой точке.

Число x_0 называют точкой разрыва первого рода функции f, если существуют конечные односторонние пределы f в этой точке и $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. При этом подразумевается, что x_0 есть предельная точка для множеств $E \cap (x_0, \infty)$ и

$E \cap (-\infty, x_0)$. Например, для функции $f_2 = \operatorname{sgn}\, x$ число x_0 есть точка разрыва первого рода.

Пример разрывной в точке $x_0 = 0$ функции

$$f_3(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ A & x = 0, \end{cases}$$

показывает, что приведенная выше классификация точек разрыва не является исчерпывающей. Будем именовать x_0 точкой разрыва второго рода функции f, если хотя бы один из пределов $f(x_0+0),\ f(x_0-0)$ не существует.

Классическим примером является функция Дирихле[13], равная 1 в рациональных точках и нулю в иррациональных точках. Для этой функции каждое действительное число есть точка разрыва второго рода.

2. Колебание функции в точке

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ финально ограничена в точке x_0 из X. В этом случае функция f ограничена на множестве $X \cap U(x_0, \delta_0)$ при некотором $\delta_0 > 0$. Отсюда вытекает ограниченность функции f на каждом из множеств $X \cap U(x_0, t)$ $(o < t < \delta_0)$. Обозначим через $\Phi(t)$ — колебание функции f на множестве $X \cap U(x_0, t)$ (см. § 6). Таким образом,

$$\Phi(t) := \sup\{|f(x') - f(x'')|; x', x'' \in U(x_0, t) \cap X\}.$$

Поскольку $U(x_0, t_1) \subset U(x_0, t_2)$ при $0 < t_1 < t_2$, то $\Phi(t_1) \leqslant \Phi(t_2)$, следовательно, $\Phi : (0, \delta_0) \to \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция. Число

$$\Phi(+0) = \lim_{t \to +0} \Phi(t)$$

называют колебанием функции f в точке x_0 и обозначают символом $\omega(f; x_0)$. Очевидно, что $0 \leqslant \omega(f; x_0) < \infty$.

Лемма 1. *Функция f непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда*

$\omega(f; x_0) = 0$.

◄ Пусть $\omega(f; x_0) = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, что $\Phi(t) < \varepsilon$ при $t \in (0, \delta)$. Если $x \in X \cap U(x_0, \delta)$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \Phi(|x - x_0|) < \varepsilon,$$

а это влечет за собой непрерывность функции f в точке x_0.

Обратно, пусть функция f непрерывна в точке x_0. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $\delta > 0$ так, чтобы из соотношения $x \in X \cap U(x_0, \delta)$ следовало неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$. Если $x' \in X \cap U(x_0, \delta),\ x'' \in X \cap U(x_0, \delta)$ то

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x'')| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

отсюда вытекает неравенство $\Phi(\delta) \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\omega(f; x_0) = \Phi(+0) = 0$. ►

---

[13] Л. Дирихле (1805 - 1859 гг.) — немецкий математик

Число $\omega(f;x_0)$ может служить количественной характеристикой точки разрыва функции f. Если функция f определена и монотонна в некоторой окрестности точки x_0, то $\omega(f;x_0) = |f(x_0+0) - f(x_0-0)|$.

Лемма 2. *Если $\omega(f;x_0) < \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $\omega(f;x') < \varepsilon$ для всех x' из $X \cap U(x_0,\delta)$.*

◀ Действительно, поскольку $\omega(f;x_0) < \varepsilon$, то найдется такое положительное число t, что $\Phi(t) < \varepsilon$, т.е.

$$\sup\{|f(x') - f(x'')|; x', x'' \in X \cap U(x_0,t)\} < \varepsilon.$$

Если $0 < \delta < \frac{t}{2}$ и $|x' - x| < \delta$, то $U(x',\delta) \subset U(x_0,t)$. Следовательно, колебание f на множестве $X \cap U(x',\delta)$ не превзойдет колебания f на множестве $X \cap U(x_0,t)$, т.е. будет меньше ε. Отсюда и следует требуемое неравенство $\omega(f;x') < \varepsilon$. ▶

Смысл леммы 2 в том, что малость колебания функции f в точке x_0 влечет малость колебания функции f в точках x', близких к точке x_0.

3. Теорема Кантора для разрывных функций

Теорема 1. *Пусть X — компактное подмножество прямой $\mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция и $\omega(f;x) \leqslant \tau$ при некотором $\tau \geqslant 0$ и любом x из X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из соотношений*

$$x' \in X,\ x'' \in X,\ |x' - x''| < \delta$$

вытекает неравенство $|f(x') - f(x'')| < \tau + \varepsilon$.

◀ В предположении противного для некоторого $\varepsilon > 0$ соответствующее $\delta > 0$ не найдется. Тогда существуют последовательности x'_n, x''_n из X, обладающие свойствами

$$x'_n - x''_n \to 0,\ |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \tau + \varepsilon.$$

Производя прореживание последовательности x'_n, а затем и перенумерацию, можно считать, что последовательности x'_n, x''_n сходятся к точке x_0 из X. Таким образом, в любой окрестности точки x_0 имеются точки x'_n, x''_n, соответствующие большим номерам n, таким, что $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \tau + \varepsilon$. Отсюда следует неравенство $\omega(f;x_0) \geqslant \tau + \varepsilon$, противоречащее условию $\omega(f;x) \leqslant \tau\ \forall\, x \in X$. ▶

Теорема 1 содержит теорему Кантора для непрерывных на компактных множествах функций. В этом случае колебание функции в каждой точке равно 0, поэтому можно положить $\tau = 0$.

4. Структура множества точек разрыва

В этом пункте обсуждается вопрос о структуре множества точек разрыва функции и рассматривается ряд примеров.

Теорема 2. *Множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.*

◀ Пусть для определенности $f : X \to \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Если a — точка разрыва функции f, то хотя бы один из интервалов $(f(a-0), f(a))$ или $(f(a), f(a+0))$ имеет положительную длину. Аналогичное замечание применимо и к любой другой точке разрыва b функции f : один из интервалов $(f(b-0), f(b))$ или $(f(b), f(b+0))$ имеет положительную длину. Из возрастания функции f следует, что интервалы, соответствующие различным точкам a, b, попарно не пересекаются.

Остается заметить, что любая система взаимно непересекающихся интервалов не более чем счетна. Действительно, выберем в каждом из интервалов по рациональной точке. Соответствие между интервалами и выбранными точками взаимно однозначно. Теперь результат вытекает из того, что любое подмножество множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел не более чем счетно. ▶

Упражнение 1. *Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ — счетное подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$. Положим*

$$h(x) := \sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n},$$

т.е. суммирование распространяется лишь на индексы n, для которых $a_n < x$. Соответствующая сумма $h(x)$ конечна для любого x из $\mathbb{R}$: $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$. Функция $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ возрастает. Доказать, что

I) $h(a_n + 0) = h(a_n) = h(a_n - 0) + 2^{-n}$ $(n = 1, 2, \dots)$;

II) функция h непрерывна в точках x, отличных от a_n $(n = 1, 2, \dots)$.

Таким образом, множество точек разрыва функции $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ совпадает с множеством A.

Пусть X — замкнутое подмножество действительной прямой, $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, $\omega(f; x) < \infty \; \forall \, x \in X$. Введем множества

$$\mathcal{B}_\tau := \{x \in X \mid \omega(f; x) \geqslant \tau\}, \; (\tau > 0)$$
$$\mathcal{B} := \{x \in X \mid \omega(f; x) > 0\}.$$

В силу леммы 1 $\mathcal{B}$ совпадает с множеством точек разрыва функции $f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 3. *a) При любом $\tau > 0$ множество $\mathcal{B}_\tau$ замкнуто; b) множество $\mathcal{B}$ представимо в виде объединения счетного числа замкнутых подмножеств.*

◀ a) Пусть $x_n \in \mathcal{B}_\tau$ и $x_n \to x_0$. Таким образом, $\omega(f; x_n) \geqslant \delta$; исходя из этого, установим неравенство $\omega(f; x_0) \geqslant \tau$. В предположении противного $\omega(f; x_0) < \tau$. Согласно лемме 2 найдется такое $\delta > 0$, что $\omega(f; x') < \tau \ \forall \ x \in X \cap U(x_0, \delta)$. Поскольку $x_n \to x_0$, то $x_n \in X \cap U(x_0, \delta)$ при достаточно больших n, поэтому $\omega(f; x_n) < \delta$. Противоречие доказывает неравенство $\omega(f; x_0) \geqslant \tau$ и включение $x_0 \in \mathcal{B}_\tau$. Следовательно, $\mathcal{B}_\tau$ — замкнутое множество.

b) При любом натуральном n множество $\mathcal{B}_{1/n}$ замкнуто. Поскольку

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_{1/n},$$

то все доказано. ▶

Пусть A — подмножество числовой прямой. Индикатором (характеристической функцией) множества A называют функцию $1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемую равенством

$$1_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{если} \qquad x \in A \\ 0, & \text{если} \quad x \in CA := \mathbb{R} \backslash A. \end{cases}$$

Например, введенная выше функция Дирихле совпадает с индикатором $1_{\mathbb{Q}}$ множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Упражнение 2. *Доказать равенства*

$$1_{CA}(x) = 1 - 1_A(x), \ 1_{A_1 \cup A_2}(x) = \max\{1_{A_1}(x), 1_{a_2}(x)\},$$

$$1_{A_1 \cap A_2}(x) = \min\{1_{A_1}(x), 1_{A_2}(x)\} = 1_{A_1}(x) 1_{A_2}(x).$$

Функция 1_A разрывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда

$$A \cap U(x_0, \delta) \neq \emptyset, \ CA \cap U(x_0, \delta) \neq \emptyset \qquad \forall \delta > 0.$$

Множество точек разрыва функции $1_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называют границей множества A и обозначают символом ∂A. Как нетрудно видеть,

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R} \mid \omega(1_A; x) \geqslant 1\},$$

поэтому ∂A есть замкнутое множество. Если A — ограниченное подмножество $\mathbb{R}$, то ∂A — компактное множество. Отметим равенства

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}, \ \partial([a, b]) = \partial((a, b)) = \{a\} \cup \{b\}.$$

Глава 3. Производные

§11. Производные и дифференциалы

1. Определение производной и дифференциала

Пусть X — подмножество числовой прямой $\mathbb{R}$. Точку x_0 из X называют внутренней точкой множества X, если $U(x_0, \delta) := \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \subset X$ при некотором $\delta > 0$. Совокупность внутренних точек множества X называют внутренностью множества X и обозначают символом $\overset{\circ}{X}$; иногда $\overset{\circ}{X}$ именуют интерьером множества X и обозначают символом $\operatorname{int} X$. Если $\overset{\circ}{X} = X$, то множество X называют открытым. Например, интервал (a, b) есть открытое множество; объединение любой совокупности интервалов также открыто.

Определение 1. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена на множестве X и $x_0 \in \overset{\circ}{X}$. Если отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ имеет конечный предел при $x \to x_0$, то этот предел называют производной функции f в точке x_0 или, что то же, при $x = x_0$, и обозначают $f'(x_0)$. Таким образом,*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Числа $\Delta x := x - x_0$, $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ называют приращением аргумента x и функции $y = f(x)$ соответственно. Используют и другие обозначения производной; в частности, $\frac{df}{dx}(x_0)$ (обозначение Лейбница), $(Df)(x_0)$ (обозначение Коши).

Определение 2. *Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют дифференцируемой в точке $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, если ее приращение в этой точке $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ представимо в виде*

$$\Delta f = A \Delta x + r(\Delta x; x_0), \tag{2}$$

где A — постоянная, а $r(\Delta x; x_0) = o(\Delta x)$, т.е. $\frac{r(\Delta x; x_0)}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f : X \to \mathbb{R}$ была дифференцируемой в точке x_0 из $\overset{\circ}{X}$, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в этой точке.*

◀ **Необходимость.** Если выполнено соотношение (2), то

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{r(\Delta x; x_0)}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Достаточность. Пусть существует предел (1), так что разность

$$\alpha(x) := \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$$

стремится к 0 при $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, что и приводит к соотношению (2). ▶

Равенство (2) означает, что приращение функции f, дифференцируемой в точке x_0, представимо в виде суммы двух слагаемых. Первое из них линейно зависит от Δx, второе бесконечно мало по сравнению с Δx.

Линейную функцию $h \to Ah$ аргумента $h \in \mathbb{R}$ называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают символом $df(x_0, h)$. Таким образом, $df(x_0, h) := f'(x_0)h$ $(h \in \mathbb{R})$. Если $A = f'(x_0) \neq 0$, то $f(x_0+h) - f(x_0)$ и $df(x_0, h)$ — бесконечно малые и эквивалентные при $h \to 0$ функции; в этом смысле линейную функцию $df(x_0, \cdot)$ называют главной частью приращения $f(x_0+h)-f(x_0)$ функции f в точке x_0. Переменную h иногда обозначают единым символом dx, т.е. $dx := h$. В этих обозначениях дифференциал df функции f в точке x_0 равен $f'(x_0)dx$.

Из теоремы 1 вытекает, что дифференцируемая в точке x_0 из $\overset{\circ}{X}$ функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в этой точке. Действительно, правая часть (2) стремится к 0 при $\Delta x \to 0$. Обратное неверно; непрерывная всюду функция $|x|$ недифференцируема в точке $x_0 = 0$.

2. Геометрический и физический смысл производной

Приведем несколько иллюстрирующих примеров.

Пример 1. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0 из $\overset{\circ}{X}$. Если $h \in \mathbb{R}$ и $0 < |h| < \delta$, то при достаточно малом $\delta > 0$ $x_0 + h \in X$, а точка $M = (x_0 + h, f(x_0 + h))$ принадлежит графику $Gr\ f$ функции f. Проведем через точки M и $M_0 = (x_0, f(x_0))$ прямую. Уравнение этой прямой имеет вид

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Если $h \to 0$, то угловой коэффициент $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ данной прямой стремится к $f'(x_0)$. Прямую

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

можно рассматривать как предельную для рассматриваемого семейства прямых. Ее называют касательной к графику функции f в точке $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Таким образом, производную $f'(x_0)$ можно интерпретировать как угловой коэффициент касательной.

Пример 2. Рассмотрим точку, движущуюся по прямой Ox. Пусть ее координата в момент времени t равна $x(t)$. Если $t+\Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$ — еще один момент времени, то отношение $(x(t+\Delta t)-x(t))/\Delta t$ есть средняя скорость движения точки на промежутке времени с концами $t,\ t+\Delta t$. Предел средней скорости при $\Delta t\to 0$ называют мгновенной скоростью точки в момент времени t; его существование равносильно дифференцируемости функции x в точке t. Мгновенная скорость $v(t)$ совпадает с производной $x'(t)$. В задачах кинематики $x'(t)$ обозначают символом $\dot{x}\ (t)$ (обозначение Ньютона[14]).

Пример 3. Пусть $q=q(t)$ — количество электричества, протекающего через поперечное сечение в момент времени t. Тогда $q(t+\Delta t)-q(t)$ равно количеству электричества, прошедшее через данное сечение за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$. Отношение $(q(t+\Delta t)-q(t))/\Delta t$ называют средней силой тока за указанный промежуток времени. Предел средней силы тока при Δt именуют силой тока I в момент времени t. Таким образом, $I=\dfrac{dq(t)}{dt}(t)=q'(t)$.

3. Примеры на вычисление производной

Вычислим производные некоторых функций. Справедливы равенства

$$I)\ c'=0;\ II)\ (x^m)'=mx^{m-1};\ III)\ (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1};\ IV)\ (\cos x)'=-\sin x;$$

$$V)\ (\sin x)'=\cos x;\ VI)\ (a^x)'=a^x\ln a;\ VII)(e^x)'=e^x;\ VIII)(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

◀ Равенство $I)$ означает, что производная от постоянной функции равна 0; это совершенно очевидно. В равенстве $II)$ m — натуральное число, x — произвольное действительное число.

Равенство $II)$ вытекает из установленного в § 6 соотношения

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}.$$

Докажем равенство $III)$ для $x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Пусть $x_0>0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^\alpha-x_0^\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}x_0^\alpha\frac{\left(1+\frac{h}{x_0}\right)-1}{h}=x_0^{\alpha-1}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}=\alpha x_0^{\alpha-1};$$

используется замена $h=x_0t$ и четвертый специальный предел.

Равенства $(\cos x)'=-\sin x,\ (\sin x)'=\cos x$ следуют из формул (9.8), (9.9). Поскольку

$$\frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h}=a^{x_0}\frac{a^h-1}{h}\ \text{и}\ \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a\ (\text{см. § 9}),$$

то $(a^x)'=a^x\ln a$; в частности, $(e^x)'=e^x$.

Если $x_0\neq 0$, то

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln|x_0+h|-\ln|x_0|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left|1+\frac{h}{x_0}\right|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{h_0}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{x_0t}=\frac{1}{x_0}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x_0};$$

применяются замена $h=x_0t$ и третий специальный предел. Это доказывает равенство $VIII)$ для любого $x_0\neq 0$. ▶

Более полный перечень правил дифференцирования приводится в § 12.

---

[14] И. Ньютон (1643 - 1727 гг.) — английский физик, механик и математик

4. Модификации понятия производной

Заменяя в определении (1) двусторонний конечный предел различными его вариантами, придем к соответствующим модификациям понятия производной. В частности, односторонний предел

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называют правой производной функции f в точке x_0 и обозначают символом $f'_{\text{пр}}(x_0)$. При этом не требуется, чтобы x_0 была внутренней точкой области определения X функции f; достаточно, чтобы $(x_0, x_0 + \delta) \subset X$ при некотором $\delta > 0$.

Совершенно аналогично левосторонний предел

$$\lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

называют левой производной функции f в точке x_0; и используют обозначение $f'_{\text{л}}(x_0)$.

Если функция f дифференцируема в точке x_0, то $f'_{\text{пр}}(x_0) = f'_{\text{л}}(x_0) = f'(x_0)$. Вместе с тем недифференцируемая в точке x_0 функция может иметь конечные левую и правую производные. Например, если $f(x)=|x|$, то $f'_{\text{пр}}(0)=1$, $f'_{\text{л}}(0)= -1$.

В некоторых случаях можно говорить лишь об одной из производных $f'_{\text{пр}}(x_0)$, $f'_{\text{л}}(x_0)$. Например, если функция f определена на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, то производные $f'_{\text{л}}(a)$, $f'_{\text{пр}}(b)$ не могут быть определены; в этом случае производные $f'_{\text{пр}}(a)$, $f'_{\text{л}}(b)$ будем обозначать символами $f'(a)$ и $f'(b)$ соответственно.

Если для некоторого x_0 предел (1) равен $(+\infty)$ или $(-\infty)$, то говорят, что при $x = x_0$ существует производная, равная $+\infty$ или $-\infty$. Например, для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ производная в 0 равна $+\infty$; для противоположной к ней функции $g(x) = -\sqrt[3]{x}$ производная в нуле равна $-\infty$.

Если не оговорено противное, всюду далее выражения "функция f имеет производную в точке x_0" и "функция f дифференцируема в точке x_0" означает, что существует конечный предел (1) и, таким образом, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Операцию вычисления производной именуют операцией дифференцирования.

Каждое правило для вычисления производной порождает соответствующее правило для вычисления дифференциалов. Напомним, что дифференциал $df(x_0; h)$ функции f в точке x_0 определяется равенством $df(x_0; h) := f'(x_0)h$. Это равенство обычно записывают в виде $df = f'(x_0)dx$ (см. п. 1). Например, равенства $III)$–$VI)$ равносильны соотношениям

$$dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}dx,\ d\cos x = -\sin x dx,$$
$$d\sin x = \cos x dx,\ da^x = a^x \ln a dx.$$

В качестве иллюстрирующего примера найдем касательную к синусоиде $y = \sin x$ в точке $M_0 = \left(\pi/4, \sqrt{2}/2\right)$. Согласно формуле $V)$, $(\sin x)' = \cos x$. В силу формулы (3), искомая касательная имеет уравнение $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, т.е.

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

§12. Правила дифференцирования

1. Дифференцирование и арифметические действия над функциями

Установим формулы для производных суммы, произведения и частного функций.

Теорема 1. *Пусть функции* $u, v : X \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{X}$. *Тогда их сумма* $u + v$, *произведение* uv, *а если* $v(x_0) \neq 0$, *то и частное* $\dfrac{u}{v}$ *также дифференцируемы в точке* x_0, *причем*

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0), \tag{1}$$

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0), \tag{2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)(x_0) = \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right)(x_0). \tag{3}$$

◀ Пусть $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)$ — приращения функций u, v в точке x_0, соответствующие приращению Δx аргумента x; $\Delta(u+v)$, $\Delta(uv)$, $\Delta\left(\frac{u}{v}\right)$ — приращения функций $u + v$, uv, $\frac{u}{v}$ в точке x_0, отвечающие приращению Δx аргумента x.

Так как $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Полученное равенство эквивалентно формуле (1).

Несколько длиннее доказательство формулы (2). Представим $\Delta(uv)$ в следующем виде

$$\Delta(uv) = u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0))v(x_0 + \Delta x) + \\ +(v(x_0 + \Delta x) - v(x_0))u(x_0) = v(x_0 + \Delta x)\Delta u + u(x_0)\Delta v.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = v(x_0 + \Delta x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ имеем: $v(x_0 + \Delta x) \to v(x_0)$ в силу непрерывности функции v в точке x_0, $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0)$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0)$ в силу дифференцируемости функций u, v в точке x_0. Поэтому

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} \to u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

что и доказывает формулу (2).

Пусть $v(x_0) \neq 0$. Поскольку функция v дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке. Следовательно, $v(x) \neq 0$ для x из некоторой окрестности $U(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ точки x_0. Представим приращение $\Delta\left(\frac{u}{v}\right)$ в виде

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{(u(x_0+\Delta x) - u(x_0))v(x_0) - u(x_0)(v(x_0+\Delta x) - v(x_0))}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \frac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\Delta x}\,\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}\left(v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

При $\Delta x \to 0$ имеем $v(x_0+\Delta x) \to v(x_0)$, $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0)$, $\frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0)$, поэтому

$$\frac{1}{\Delta x}\,\Delta\left(\frac{u}{v}\right) \to \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} \text{ при } \Delta x \to 0,$$

что равносильно формуле (3). ►

Следствие 1. *Если функция u дифференцируема в точке x_0 и $c \in \mathbb{R}$, то функция cu также дифференцируема в точке x_0 и*

$$(cu)'(x_0) = cu'(x_0). \tag{4}$$

◄ Достаточно положить $v(x) \equiv c$ и воспользоваться формулой (2). ►

Следствие 2. *Если функции $u_1, \ldots, u_n$ дифференцируемы в точке x_0, величины $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, то функция $c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$ также дифференцируема в точке x_0 и*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k u_k\right)'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k'(x_0). \tag{5}$$

◄ Доказательство проводится методом математической индукции по числу n. ►

Следствие 3. *Если функции $u_1, \ldots, u_n$ дифференцируемы в точке x_0, то их произведение $u_1 \cdots u_n$ также дифференцируемо в точке x_0 и*

$$(u_1 \cdots u_n)'(x_0) = u_1'(x_0)u_2(x_0)\cdots u_n(x_0) + u_1(x_0)u_2'(x_0)\cdots u_n(x_0) + \ldots +$$

$$+ u_1(x_0)u_2(x_0)\cdots u_n'(x_0).$$

◄ Для доказательства достаточно применить метод математической индукции по числу множителей. ►

Следствие 4. *Справедливы равенства*

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{6}$$

◀ Проверим, например, первое равенство

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \ ▶$$

Следствие 5. *Производная рациональной функции есть рациональная функция.*

2. Производная обратной функции

Теорема 2. *Пусть функция $f : U(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$ строго монотонна, непрерывна и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $f^{-1} : f(U(x_0, \delta)) \to \mathbb{R}$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{7}$$

◀ Строгая монотонность и непрерывность функции $f : U(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$ влекут за собой строгую монотонность и непрерывность обратной функции f^{-1}, определенной на некоторой окрестности $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ (см. § 8). Если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение аргумента x в точке x_0 и приращение функции $y = f(x)$, то Δx и Δy отличаются от нуля одновременно и стремятся к 0 также одновременно. Эти же величины можно рассматривать как приращения функции $x = f^{-1}(y)$ и аргумента y. Равенство (7) вытекает из цепи соотношений

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \ ▶$$

Геометрически равенство (7) очевидно. Прямая

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

есть касательная к кривой $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0). Но кривая $y = f(x)$ и касательная к ней могут быть заданы уравнениями

$$x = f^{-1}(y), \ x - x_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0),$$

разрешимыми относительно x. Это и приводит к равенству (7).

Следствие 1.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1). \tag{8}$$

◀ Действительно, если $y = \arcsin x$ ($|x| < 1$), то $x = \sin y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поскольку $\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$, то $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ▶

Следствие 2.

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{9}$$

◀ Равенство $y = \text{arctg } x$ равносильно соотношениям $x = \text{tg } y$, $-\pi/2 < y < \pi/2$. Следовательно,

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Так как $\text{arcctg } x = \pi/2 - \text{arctg } x$ (это можно считать определением функции $\text{arcctg } x$), то $(\text{arcctg } x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. ▶

3. Производная суперпозиции функций

Пусть заданы две функции $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, причем $f(X) \subset Y$. Тогда определена суперпозиция $\phi = g \circ f : X \to \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0 из $\overset{\circ}{X}$, а функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ из $\overset{\circ}{Y}$. Тогда суперпозиция $\phi = g \circ f$ дифференцируема в точке x_0, причем*

$$\phi'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{10}$$

◀ Поскольку функция $g : Y \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке y_0, то справедливо равенство

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \alpha(y)(y - y_0),$$

где $\alpha(y) \to 0$ при $y \to y_0$. Будем считать, что $\alpha(y_0) = 0$. Для $x \neq x_0$ положим в этом равенстве $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ и разделим на $x - x_0$:

$$\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = g'(f(x_0))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \alpha(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{11}$$

Поскольку $f(x) \to f(x_0)$, то $\alpha(f(x)) \to \alpha(y_0) = 0$. На основании равенства (11) при $x \to x_0$ получаем существование производной функции $\phi = g \circ f$ в точке x_0 и равенство (10). ▶

Формулу (10) называют цепным правилом дифференцирования. Наиболее выразительно она выглядит в обозначениях Лейбница: если $z = g(y),\ y = f(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \tag{12}$$

где производные $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{dy}{dx}$ считаются в точках $x_0,\ y_0 = f(x_0)$ и x_0 соответственно. Интересен вариант этой формулы в дифференциалах:

$$dz = \frac{dz}{dz}(x_0)dx = \frac{dz}{dy}(y_0)\frac{dy}{dx}(x_0)dx = \frac{dz}{dy}(y_0)dy. \tag{13}$$

Равенство (13) показывает, что формально записи дифференциала функции имеют один и тот же вид: произведение производной по некоторой переменной на дифференциал этой переменой — независимо от того, является эта переменная, в свою очередь, функцией или независимой переменной (свойство инвариантности дифференциала).

Отметим частный случай формулы (10), в котором $g(y) = \ln|y|\ (y \neq 0),\ f : X \to \mathbb{R}$ и $f(x) \neq 0\ \forall\ x \in X$. Так как $g'(y) = \frac{1}{y}$, то из (10) вытекает равенство $(\ln|f|)' = \frac{f'}{f}$. Это равенство называют правилом логарифмического дифференцирования. Его иногда записывают в виде

$$f' = f(\ln|f|)'. \tag{14}$$

Равенством (14) удобно пользоваться, когда $\ln|f|$ — достаточно простая функция. В качестве примера рассмотрим показательно - степенную функцию $f(x) = u(x)^{v(x)}$, где $u, v : X \to \mathbb{R}$ — функции на множестве $X = \overset{\circ}{X},\ u(x) > 0\ \forall\ x \in X$. Если функции u, v дифференцируемы в точке $x_0 \in X$, то и функция f также дифференцируема в точке x_0. В самом деле, $\ln f = v \ln u$, следовательно,

$$(\ln f)'(x_0) = (v \ln u)'(x_0) = \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)(x_0).$$

Применяя правило логарифмического дифференцирования, имеем

$$(u^v)'(x_0) = [u^v \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)](x_0) = (u^v \ln u\ v' + u^{v-1} v u')(x_0). \tag{15}$$

Пример 1. Найти производную функции $e^{\operatorname{arctg} x}$. Положим $z = g(y) = e^y$, $y = f(x) = \operatorname{arctg} x$. В силу (12)

$$(e^{\operatorname{arctg} x})' = e^{\operatorname{arctg} x}(\operatorname{arctg} x)' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}.$$

Пример 2. Найти производную функции $(\sin x)^{\cos x}$. Применим формулу (15) с $u(x) = \sin x,\ v(x) = \cos x$. В итоге получаем

$$((\sin x)^{\cos x})' = (\sin x)^{\cos x} \ln(\sin x)(-\sin x) + (\sin x)^{\cos x - 1} \cos x \cdot \sin x.$$

4. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

Предполагается, что функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, ее область значений есть отрезок $[a, b]$ с концами $\varphi(\alpha), \varphi(\beta)$. Суперпозиция $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ определена на отрезке $[a, b]$. Непрерывность функции $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ в точке t_0 влечет за собой непрерывность функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ (см. п. 8.6).

Если функции φ, ψ дифференцируемы в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то, используя теорему о дифференцировании суперпозиции и теорему о дифференцировании обратной функции (теоремы 3, 2 соответственно), получаем

$$f'(x_0) = \psi'(t)(\varphi^{-1})'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \tag{16}$$

здесь $x_0 = \varphi(t_0) \in (a, b)$. Равенство (16) называют правилом дифференцирования функции, заданной параметрически.

Пример 3. Пусть $\varphi(t) = a(t - \sin t),\ \psi(t) = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ a > 0)$. Функция $\varphi(t)$ непрерывна и строго возрастает на $[0, 2\pi]$ (см. п. 9.1). Если $0 < t_0 < 2\pi$, то $\varphi'(t_0) = a(1 - \cos t_0) \neq 0$. Функция $\psi(t)$ дифференцируема в точке t_0 и $\psi'(t) = a \sin t_0$. Применяя правило (16), находим, что функция $f = \psi \circ f^{-1} : [0, 2a\pi] \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и

$$f'(x_0) = \frac{a \sin t_0}{a(1 - \cos t_0)} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

График функции $f : [0, 2a\pi] \to \mathbb{R}$ изображен на рис. 2. Эту кривую называют циклоидой. Она имеет простую кинематическую интерпретацию. Пусть, например, окружность радиуса a с отмеченной на ней точкой A катится без скольжения по оси Ox. Предположим, что в начальный момент движения точка A находится в начале координат и окружность катится в положительном направлении. Если t — угол, на который повернулась окружность, и точка $A = (0, 0)$ переместилась в положение $A' = (x, y)$, то как показывают несложные геометрические подсчеты,

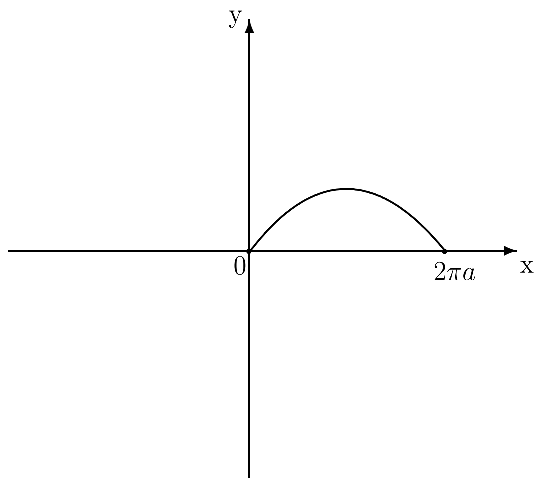

Рис. 2

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

При изменении t от 0 до 2π окружность сделает полный оборот, а точка A опишет некоторую траекторию, совпадающую с графиком функции $y = f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2a\pi)$.

5. Сводка правил дифференцирования

В математическом анализе рассматривают функции

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ (x \in \mathbb{R}),$$

называемые гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом соответственно. Эти функции всюду дифференцируемы и

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x,\ \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} \mathrm{x}.$$

Функция $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастающая биекция прямой $\mathbb{R}$ на себя. Обратная функция также строго возрастает. Ее легко выразить через известные. Если

$y = \text{sh}\ x$, то $y + \sqrt{1+y^2} = e^x$, поэтому $x = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$. Иногда обратную функцию обозначают $\text{Area sh}\, y$ (читается: ареа-синус от y).

На основе теоремы о производной обратной функции, получаем

$$(\text{Area sh}\, y)'(y) = \frac{1}{\text{sh}'\, x} = \frac{1}{\text{ch}\, x} = \frac{1}{\sqrt{1+sh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Это равенство можно вывести и непосредственно, используя равенство

$$\text{Area sh}\, y = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

Приведем частные и общие правила дифференцирования. Объединяя введенные в §§ 11,12 частные правила, приходим к равенствам

$I)$ $c' = 0$; $II)$ $(x^m)' = mx^{m-1}$; $III)$ $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;

$IV)$ $(\cos x)' = -\sin x$; $V)$ $(\sin x)' = \cos x$; $VI)$ $(a^x)' = a^x \ln a$;

$VII)$ $(e^x)' = e^x$; $VIII)$ $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$; $IX)$ $(\text{tg}\ x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

$X)$ $(ctg\ x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $XI)$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $XII)$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$XIII)\ (\text{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2};\quad XIV)\ (\text{arcctg}\ x)' = -\frac{1}{1+x^2};\quad XV)\ (\text{sh}\ x)' = \text{ch}\ x;$$

$$XVI)\ (\text{ch}\ x)' = \text{sh}\ x \qquad XVII)\ (\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Эти равенства справедливы в области определения соответствующих функций. Аналогичная таблица для общих правил дифференцирования выглядит следующим образом:

$$1.\ (u \pm v)' = u' \pm v';\ 2.\ (uv)' = u'v + uv';\ 3.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$4.\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f(y))};\ 5.\ \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx};\ 6.\ f' = (\ln f)' f;$$

$$7.\ f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \text{если}\ x = \varphi(t), f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x)).$$

Замечание 1. В этих правилах пропущены условия их справедливости, не указаны точки, в которых считаются производные. Каждому общему правилу вычисления производных соответствует правило для вычисления дифференциалов функций. Например, правило 2 порождает дифференциальное равенство

$$d(uv) = vdu + udv$$

и т.д.

Замечание 2. Правила вычисления производных могут быть соответствующим образом обобщены на односторонние и бесконечные производные. В частности, если $f(x) = \arcsin x$, то

$$f'_{\text{л}}(1) = f'_{\text{пр}}(-1) = +\infty.$$

Замечание 3. Иногда удобнее считать производную, исходя непосредственно из ее определения. Если, например,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ \quad 0 & x = 0, \end{cases}$$

то

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Этот пример интересен тем, что функция всюду дифференцируема, однако ее производная имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$.

§13. Теоремы о среднем

1. Теоремы Ферма и Ролля

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — действительнозначная функция. Точку x_0 из $\overset{\circ}{X}$ называют точкой локального внутреннего минимума (максимума), если найдется такая окрестность $U(x_0) \subset X$, что $f(x) \geqslant f(x_0)$ $\forall\ x \in U(x_0)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(x_0)$ $\forall\ x \in U(x_0)$). Точки локального внутреннего минимума и максимума называют точками локального внутреннего экстремума, а значения функции в этих точках — локальными экстремумами функции.

Теорема 1 (***Теорема Ферма***[15]). *Если функция f дифференцируема в точке локального внутреннего экстремума x_0, то $f'(x_0) = 0$.*

◀ Пусть, для определенности, x_0 — точка внутреннего локального минимума. Тогда $f(x) \geqslant f(x_0)$ $\forall\ x \in U(x_0) \subset X$. Если при этом $x > x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to x_0 + 0$, получаем $f'(x_0) \geqslant 0$. Если же $x < x_0$, то $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$, откуда следует неравенство $f'(x_0) \leqslant 0$. Таким образом, $f'(x_0) = 0$. ▶

Замечание 1. Условие $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ существенно. Например, функция $f(x) = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ достигает минимума в точке $x_0 = 0$, но ее производная $f'(x) \equiv 1$ $\forall\ x \in [0, 1]$.

Замечание 2. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0 = (x_0, f(x_0))$ (x_0 — точка внутреннего локального экстремума функции f) горизонтальна. Именно таким образом формулировал свой результат Ферма.

Замечание 3. Предположение о дифференцируемости функции f в точке x_0 можно заменить условием существования производной $f'(x_0)$ (хотя бы и равной $\pm\infty$).

---

[15] П. Ферма (1601 - 1665 гг.) — французский математик

Теорема 2 (***Теорема Ролля***[16]). *Пусть функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$ $(a \neq b)$, *дифференцируема в каждой точке интервала* (a,b) *и* $f(a) = f(b)$. *Тогда найдется такая точка* c *из* (a,b), *что* $f'(c) = 0$.

◀ Поскольку $f \in C([a,b])$, то в силу теоремы Вейерштрасса существуют такие точки x_0, x_1 из отрезка $[a,b]$, что $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$ $\forall\ x \in [a,b]$. Если $f(x_0) = f(x_1)$, то поскольку $f(a) = f(b)$, хотя бы одна из точек x_0, x_1 принадлежит интервалу (a,b). В силу теоремы Ферма производная в этой точке равна 0. ▶

Отбрасывание хотя бы одного из условий теоремы Ролля влечет, в общем случае, нарушение справедливости заключения теоремы. Соответствующие примеры рекомендуется провести читателю.

2. Формула конечных приращений

Теорема 3 (***Теорема Коши***). *Пусть функции* f, g *определены и непрерывны на отрезке* $[a,b]$, *дифференцируемы на интервале* (a,b) *и* $g'(x) \neq 0$ $\forall\ x \in (a,b)$. *Тогда существует такая точка* c *из* (a,b), *что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{1}$$

◀ Так как $g'(x) \neq 0$ $\forall\ x \in (a,b)$, то в силу теоремы Ролля $g(b) \neq g(a)$. Поэтому знаменатели дробей в равенстве (1) отличны от 0.

Введем в рассмотрение функцию $\Phi(x) = f(x) - \lambda g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$; постоянную λ определим так, чтобы $\Phi(b) = \Phi(a)$. Это приводит к равенству $f(b) - \lambda g(b) = f(a) - \lambda g(a)$, из которого и находится

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Функция $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет предположениям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $\Phi(a) = \Phi(b)$. Согласно теореме Ролля $\Phi'(c) = 0$ для некоторой точки c из (a,b). Но $\Phi'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$ $\forall\ x \in (a,b)$, поэтому $f'(c) - \lambda g'(c) = 0$. Таким образом,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

что и приводит к равенству (1). ▶

Полагая $g(x) = x$, приходим к следующему утверждению.

---

[16] М. Ролль (1652 - 1719 гг.) — французский математик

Теорема 4 (***Теорема Лагранжа***[17]). *Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ $(a \neq b)$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда найдется такая точка c из (a, b), что*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{2}$$

◀ Достаточно учесть равенство $(x)' = 1$. ▶

Равенство (2) называют формулой конечных приращений. Геометрический смысл равенства (2) состоит в том, что на графике функции $y = f(x)$ с концами в точках $M_0 = (a, f(a))$, $M_1 = (b, f(b))$ найдется точка $M = (c, f(c))$, касательная в которой параллельна хорде M_0M_1. Действительно, в силу (2),

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{3}$$

Левая часть (3) есть угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_0, M_1. Правая часть (3) — это угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0 = (c, f(c))$.

Если положить $\Theta \overset{def}{=} \frac{c-a}{b-a}$, $a < c < b$, то, очевидно, $0 < \Theta < 1$ и $c = a + \Theta(b - a)$. Поэтому формулу (3) можно также записать в виде $f(b) - f(a) = f'(a + \Theta(b - a)) \times$ $\times (b - a)$, $0 < \Theta < 1$, или, полагая $b - a = h$, в виде

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \Theta h)h. \tag{4}$$

Заметим, что равенство (3) остается верным и при $b < a$, так как при перемене местами a и b левая часть (3) не меняется. Аналогично, равенство (4) справедливо для отрицательных h.

Далее под отрезком $[a, b]$ понимается множество

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + t(b - a),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

При этом возникают случаи: $a < b$, $a = b$, $a > b$. При $a = b$ отрезок $[a, b]$ вырождается в точку.

3. Следствия формулы конечных приращений

Следствие 1 (***Критерий постоянства функции***). *Непрерывная на промежутке X функция постоянна на нем тогда и только тогда, когда ее производная равна* 0 *в любой точке множества* $\overset{\circ}{X}$.

◀ Пусть $f \in C(X)$ и $f'(x) = 0\ \forall\ x \in \overset{\circ}{X}$. Для любых x_1, x_2 из X найдется такая расположенная между x_1, x_2 точка ξ, что $f(x_1) - f(x_2) = f(\xi)(x_1 - x_2) = 0$. Следовательно, $f(x_1) = f(x_2)$, т.е. функция f постоянна на промежутке X. Обратное утверждение очевидно. ▶

[17] Ж.-Л. Лагранж (1736 - 1813 гг.) — французский математик и механик

Следствие 2 (***Критерий возрастания функции***)**.** *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема на множестве $\overset{\circ}{X}$. Тогда: 1) функция f возрастает на X в том и только в том случае, если $f'(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in \overset{\circ}{X}$; 2) функция f строго возрастает на X тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $\forall\ x \in \overset{\circ}{X}$ и множество $\{x \in \overset{\circ}{X} |\ f'(x) = 0\}$ не имеет внутренних точек.*

◀ 1) Если функция f возрастает на промежутке X, то $f(x) \geqslant f(x_0)$ при $x_0 < x$ ($x_0 \in \overset{\circ}{X},\ x \in X$), поэтому

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

При $x \to x_0$ это неравенство влечет за собой неравенство $f'(x_0) \geqslant 0$, что и доказывает необходимость условия $f'(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in \overset{\circ}{X}$.

Его достаточность вытекает из формулы конечных приращений. Действительно, пусть $x_1 < x_2$ ($x_1 \in X,\ x_2 \in X$). Тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0$, т.е. $f(x_2) \geqslant f(x_1)$.

2) Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ строго возрастает, то в силу уже доказанного выше $f'(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in \overset{\circ}{X}$. Функция f непостоянна на каждом из отрезков $[x_1, x_2]$ ($x_1 < x_2$), поэтому множество $\{x \in \overset{\circ}{X} |\ f'(x) = 0\}$ не имеет внутренних точек.

Обратное утверждение доказывается по аналогичной схеме. ▶

Убывание функции $f : X \to \mathbb{R}$ равносильно возрастанию функции $-f : X \to \mathbb{R}$. Отсюда без труда выводится критерий убывания (строгого убывания) функции f на промежутке X.

Определение 1. *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица*[18]*, если найдется такая константа L, что*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant L|x_2 - x_1| \qquad \forall\ x_1, x_2 \in X, \tag{5}$$

константу L при этом называют постоянной Липшица.

Например, функции синус и косинус удовлетворяют условию Липшица с константой 1 (см. § 9). Поскольку

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leqslant \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}},$$

то функция $f(x) = \sqrt{x}$ на каждом из лучей $[a, \infty)$ ($a > 0$) удовлетворяет условию Липшица с константой $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

---

[18] Р. Липшиц (1832 - 1903 гг.) — немецкий математик

Теорема 5. *Пусть функция f непрерывна на промежутке X и дифференцируема на множестве $\overset{\circ}{X}$. Тогда неравенство (5) равносильно оценке*

$$|f'(x)| \leqslant L \qquad \forall\, x \in \overset{\circ}{X} . \tag{6}$$

◀ Вначале докажем импликацию (6) $\Rightarrow$ (5). Действительно, если $x_1 < x_2$ ($x_1 \in \in X,\ x_2 \in X$), то $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1, x_2)$. Так как $|f'(\xi)| \leqslant L$, то $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \leqslant L|x_2 - x_1|$, что и приводит к требуемому.

Импликация (5) $\Rightarrow$ (6) следует из равенства

$$|f'(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \qquad \forall\, x_0 \in \overset{\circ}{X} . \ ▶$$

Пример 1. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ($-\infty < x < \infty$). Тогда

$$|f'(x)| = \frac{1}{1 + x^2} \leqslant 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, $|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \leqslant |x_1 - x_2|\ \forall\, x_1, x_2 \in X$.

Пример 2. $f(x) = x^\alpha$ ($1 \leqslant x < \infty,\ \alpha \leqslant 1$). Тогда

$$|f'(x)| = |\alpha x^{\alpha - 1}| \leqslant |\alpha| \qquad \forall\, x \geqslant 1.$$

Поэтому $|x_1^\alpha - x_2^\alpha| \leqslant |\alpha||x_1 - x_2|\ \forall\, x_1, x_2 \in [1, \infty)$.

4. Теорема Дарбу[19]

Определение 2. *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой на отрезке $[a, b]$, если она дифференцируема на интервале (a, b), а в граничных точках a, b имеет конечные односторонние производные, обозначаемые стандартным образом: $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Теорема 6 (*Теорема Дарбу*). *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a \neq b$) дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда $f'(x)$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

◀ Пусть, например, $a < b,\ f'(a) < f'(b),\ \gamma \in (f'(a), f'(b))$. Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - \gamma x$. Эта функция дифференцируема, следовательно, непрерывна на отрезке $[a, b]$. В силу теоремы Вейерштрасса она достигает минимума в некоторой точке c отрезка $[a, b]$. Покажем, что $c \in (a, b)$. Действительно,

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) = f'(a) - \gamma < 0,$$

[19] Г. Дарбу (1842 - 1917 гг.) — французский математик

поэтому $\varphi(x) < \varphi(a)$ для $x > a$ и достаточно близких к a. Таким образом, $c \neq a$. Аналогичным образом, неравенство $\varphi'(b) > 0$ влечет за собой неравенство $c \neq b$.

Следовательно, $c \in (a, b)$. По теореме Ферма $\varphi'(c) = 0 = f'(c) - \gamma$, т.е. $f'(c) = \gamma$. ►

В теореме Дарбу непрерывность производной $f'(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ не предполагается, поэтому она не вытекает из доказанной ранее (см. § 8) теоремы о промежуточных значениях. Пример всюду дифференцируемой функции, имеющей разрывную в некоторых точках производную, приведен в § 12.

Теорема 7. *Пусть функция* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ *всюду дифференцируема и* $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a, b)$. *Тогда: 1) функция* g *строго монотонна на интервале* (a, b);

2) существуют пределы (возможно, бесконечные)

$$A := \lim_{x \to a+0} g(x),\ B := \lim_{x \to b-0} g(x);$$

3) определена обратная к g *функция* $g^{-1} : (A, B) \to \mathbb{R}$; *она строго монотонна и всюду дифференцируема, причем*

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(x)}, \tag{7}$$

где $x = g^{-1}(y),\ y \in (A, B)$.

◄ Действительно, поскольку $g'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a, b)$, то в силу теоремы Дарбу функция $g'(x)$ всюду на интервале (a, b) имеет один и тот же знак. Поэтому функция g строго монотонна на интервале (a, b). Существование односторонних пределов функции g в точках a, b вытекает из ее монотонности. Формула (7) следует из правила дифференцирования обратной функции. ►

В условиях теоремы 3 функция $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна, обратная к ней g^{-1} строго монотонна и непрерывна на отрезке $[A, B]$, где $A = g(a)$, $B = g(b)$. Функция $h := f \circ g^{-1} : [A, B] \to \mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[A, B]$ и дифференцируема на интервале (A, B), причем

$$h'(y) = f'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y) = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где $x = g^{-1}(y)$. Применяя к функции $h : [A, B] \to \mathbb{R}$ формулу конечных приращений, имеем

$$h(B) - h(A) = h'(C)(B - A) \tag{8}$$

при некотором C из (A, B). Если учесть равенства $A = g(a)$, $B = g(b)$, $h(A) = f(a)$, $h(B) = f(b)$, $h'(C) = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ $(c = g^{-1}(C))$, то (8) приводит к равенству (1). Таким образом, теорема 3 следует из формулы конечных приращений; в определенном смысле теоремы 3, 4 эквивалентны.

§14. Правило Лопиталя[20]

1. Леммы к правилу Лопиталя

Лемма 1. *Пусть функция* $h : (0, \alpha) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на интервале* $(0, \alpha)$ $(0 < \alpha < \infty)$, $h(+0) = 0$ *и существует предел (конечный или бесконечный)*

$$\lim_{x\to 0} h'(x). \tag{1}$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to 0} h'(x). \tag{2}$$

◀ Доопределим функцию h в точке 0, полагая $h(0) = 0$. Тогда сужение функции h на отрезок $[0, \beta]$ $(0 < \beta < \alpha)$ есть непрерывная функция, всюду на интервале $(0, \beta)$ h — дифференцируемая функция. Если $x_n \in (0, \beta)$, $x_n \to 0$, то $h(x_n) = h(x_n) - h(0) = h'(c_n)x_n$, где $0 < c_n < x_n$, поэтому $c_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\frac{h(x_n)}{x_n} = h'(c_n) \to \lim_{x\to 0} h'(x).$$

Это соотношение и приводит к равенству (2). ▶

Лемма 2. *Пусть функция* $h : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ *дифференцируема на луче* (α, ∞) $(0 < \alpha < \infty)$ *и существует (конечный или бесконечный) предел*

$$\lim_{x\to +\infty} h'(x). \tag{3}$$

Тогда

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} h'(x). \tag{4}$$

◀ 1) Пусть вначале предел (3) конечен и равен L. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $N > \alpha$ так, что

$$|h'(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } x \geqslant N.$$

Это равносильно двусторонней оценке

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < h'(x) < L + \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } x \geqslant N. \tag{5}$$

применим к сужению функции h на отрезок $[N, x]$ формулу конечных приращений. Это приводит к равенству $h(x) - h(N) = h'(c)(x - N)$ $(N < c < x)$. В силу (5)

[20] Г. Лопиталь (1661 - 1704 гг.) — французский математик

$L - \varepsilon/2 < h'(c) < L + \varepsilon/2$, поэтому $h(N) + (L - \varepsilon/2)(x - N) < h(x) < h(N) + (L + \varepsilon/2)(x - N)$ $(x \geqslant N)$.

Поделив это неравенство на x, приходим к неравенству

$$\frac{h(N)}{x} + \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{N}{x}\right) < \frac{h(x)}{x} < \frac{h(N)}{x} + \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{N}{x}\right) \ (x \geqslant N). \qquad (6)$$

Пределы функций, находящихся в левой и правой части неравенства (6) при $x \to +\infty$ равны $L - \varepsilon/2$ и $L + \varepsilon/2$ соответственно. Поэтому найдется такое число $N(\varepsilon) > N$, что при $x > N(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$L - \varepsilon < \frac{h(N)}{x} + \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{N}{x}\right), \ \frac{h(N)}{x} + \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{N}{x}\right) < L + \varepsilon.$$

С учетом (6) приходим к оценке $L - \varepsilon < \frac{h(x)}{x} < L + \varepsilon \quad \forall\, x > N(\varepsilon)$.

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ данная оценка влечет за собой равенство (4).

2) Пусть теперь предел (3) равен $+\infty$ (противоположный случай рассматривается аналогично). Фиксируем $M > 1$ и подберем $N > 2$, так, что $h'(x) \geqslant M$ при $x \geqslant N$. Из формулы конечных приращений, примененной к сужению функции h на отрезок $[N, x]$, вытекает цепь соотношений

$$h(x) - h(N) \geqslant h'(c)(x - N) \geqslant M(x - N) \qquad (x \geqslant N).$$

Следовательно,

$$\frac{h(x)}{x} \geqslant \frac{h(N)}{x} + M\left(1 - \frac{N}{x}\right) \qquad (x \geqslant N). \qquad (7)$$

Предел функции в правой части (7) при $x \to \infty$ равен M, поэтому найдется такое число $N_1 > N$, что

$$\frac{h(N)}{x} + M\left(1 - \frac{N}{x}\right) > M - 1 \qquad \forall\, x > N_1.$$

С учетом (7) отсюда получаем неравенство

$$\frac{h(x)}{x} > M - 1 \ \forall\, x > N_1.$$

Ввиду произвольности M это неравенство влечет за собой требуемый результат в рассматриваемом случае. ►

Замечание 1. Результат, аналогичный лемме 1, справедлив и для функции h, определенной на левой полуокрестности точки 0. Пределы в (1), (2) в этом случае следует считать левосторонними.

Замечание 2. Результат леммы 2 переносится на случай функции, заданной на луче $(-\infty, -\alpha)$; в этом случае символ $+\infty$ в (3), (4) следует заменить символом $-\infty$.

Замечание 3. Пределы (1), (3) могут не существовать, а пределы в левых частях (2), (4) тем не менее существуют. Например, если $h(x) = \sin x$, то $h'(x) = \cos x$ и предел (3) не существует. В то же время

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Замечание 4. Иногда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x}$$

именуют асимптотической производной функции h на $+\infty$ и обозначают символом $h'(+\infty)$. Лемма 2 делает это обозначение в достаточной мере мотивированным.

2. Раскрытие неопределенностей по Лопиталю

Доказанные ранее теоремы о пределе отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ неприменимы к случаю, когда предел знаменателя $g(x)$ равен 0 или ∞. Правила Лопиталя позволяют во многих случаях свести нахождение предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ к вычислению более простого предела отношения производных.

Теорема 1 (***Первое правило Лопиталя***). *Пусть функции* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на промежутке* (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, *причем* $g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in (a, b)$ *и существует предел*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{8}$$

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$, *то*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \tag{9}$$

Аналогичное утверждение справедливо и при $x \to b - 0$.

◀ Рассмотрим случай, когда $x \to a + 0,\ g'(x) > 0\ \forall\, x \in (a, b)$. Функция $y = g(x)$ строго возрастает на интервале (a, b); при $x \to a+0$ переменная $y = g(x)$ стремится к 0. Очевидно,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{(f \circ g^{-1})(y)}{y}.$$

Положим $h = f \circ g^{-1}$. Определенная таким образом функция h удовлетворяет условиям леммы 1; для нее

$$h'(y) = f'(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y) = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

где $x = g^{-1}(y)$. Тогда $h'(y) \to A$ при $y \to +0$. Согласно лемме 1 отношение $\frac{h(y)}{y}$ стремится к A при $y \to 0$. С учетом равенств $y = g(x),\ h(y) = h(g(x)) = f(x)$ получаем, что $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$ при $x \to a + 0$. ▶

Теорема 2 (***Второе правило Лопиталя***). *Пусть функции* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *дифференцируемы на промежутке* (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, *причем* $g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in (a, b)$ *и выполнено условие (8). Если* $g(x) \to +\infty$ *при* $x \to a + 0$, *то имеет место равенство (9); аналогичное утверждение справедливо и при* $x \to b - 0$.

◀ Теорема 2 доказывается так же, как и теорема 1. Нужно лишь вместо леммы 1 использовать лемму 2. ▶

В условиях теоремы 1 числитель и знаменатель дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ стремятся к 0; такого рода дробь именуют неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. В условиях теоремы 2 знаменатель дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ стремится к ∞. Теорема 2 созвучна теореме Штольца для последовательностей (см. § 4).

Пример 1. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3},$$

поучительный в том отношении, что первое правило Лопиталя применяется трижды. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

Пример 2 иллюстрирует ту же идею, однако второе правило Лопиталя применяется многократно. Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Это равенство означает, в частности, что $x^n=o(e^x)$ при $x\to\infty$; экспонента растет на $+\infty$ быстрее любой степенной функции.

3. Неопределенности других видов

Иногда возникают неопределенности вида $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 и $\infty-\infty$. Например, неопределенность вида $0\cdot\infty$ возникает при вычислении предела произведения $u(x)v(x)$, когда первый множитель стремится к 0, а второй — к ∞. Эти неопределенности сводятся к уже рассмотренным. Проиллюстрируем способ сведения на примере

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{1/x^2}=-\lim_{x\to+0}x=0.$$

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0 появляются при вычислении предела показательно–степенной функции $u(x)^{v(x)}$. Эти неопределенности можно привести к рассмотренным выше путем логарифмирования. Например,

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x}=1.$$

Неопределенности вида $\infty-\infty$ следует привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. При этом по ходу вычисления рекомендуется упрощать получающиеся выражения. Рассмотрим

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}.$$

Заметим, что

$$\frac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$$

Предел первого множителя равен 2; это находится непосредственно. Предел второго множителя найдем с помощью правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\frac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \mathrm{ctg}^2 x\right) = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

§15. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Определения производных и дифференциалов высших порядков

Пусть функция f определена и дифференцируема на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Тогда на $U(x_0)$ определена функция, сопоставляющая каждому x из $U(x_0)$ производную $f'(x)$. Если эта функция дифференцируема в точке x_0, то производную от $f'(x)$ в точке x_0 называют второй производной в точке x_0 и обозначают символом $f''(x_0)$ (обозначение Лагранжа). Другие обозначения: $\frac{d^2f}{d^2x}(x_0)$ (Лейбниц), $(D^2f)(x_0)$ (Коши).

Понятие второй производной широко используется в механике. Например, если точка движется по прямой Ox и ее координаты есть функция $x(t)$ от времени t, то $x''(t_0)$ — ускорение точки в момент времени t_0. В частности, для равноускоренного движения $x(t) = x_0 + vt + \frac{at^2}{2}$, скорость $v(t) = x'(t) = v_0 + at$, ускорение $x''(t) = a$ постоянно.

Аналогичным образом вводятся производные высших порядков. Пусть, например, уже определены производные порядка $\leqslant n$. Если производная $f^{(n)}(x)$ порядка n функции f есть дифференцируемая в точке x_0 функция, то ее производную в точке x_0 называют производной порядка $n+1$ в той же точке и обозначают символом $f^{(n+1)}(x_0)$. Вычисление производных высших порядков сводится к последовательному вычислению первых производных. Условились считать, что $f^{(0)}(x) := f(x)$.

Если существует производная $f^{(n)}(x_0)$ порядка n функции f в точке x_0, то ее дифференциалом порядка n в этой точке называют функцию действительного переменного h, обозначаемую символом $d^nf(x_0;h) := f^{(n)}(x_0)h^n$ ($h\in\mathbb{R}$). Как и в случае $n=1$, независимую переменную h обозначают символом dx. В этих обозначениях дифференциал d^nf порядка n функции f в точке x_0 равен $f^{(n)}(x_0)(dx)^n$:

$$d^nf = f^{(n)}(x_0)(dx)^n = f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Если функция f определена лишь на правой (левой) полуокрестности точки x_0, то можно говорить лишь о правых (левых) производных функции f в точке x_0. В целях упрощения записи одностороннюю производную порядка n в точке x_0 будем обозначать обычным символом $f^{(n)}(x_0)$.

Промежутку $X \subset \mathbb{R}$ ($\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$) и натуральному числу n сопоставим совокупность $D^n(X)$ функций $f : X \to \mathbb{R}$, имеющих в каждой точке x из X конечные производные до порядка n включительно. Через $C^n(X)$ обозначим часть $D^n(X)$, состоящую из функций $f : X \to \mathbb{R}$, производные которых до порядка n включительно непрерывны на множестве X. Для единообразия класс $C(X)$ непрерывных на X функций обозначают символом $C^0(X)$.

2. Общие правила вычисления производных высших порядков

1^0. Производная любого порядка от суммы функций равна сумме производных; постоянный множитель можно выносить за знак дифференцирования:

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},\ (cu)^{(n)} = c(u)^{(n)}; \tag{1}$$

здесь и далее подразумевается, что производные считаются в некоторой точке x_0; простоты ради пишем $u^{(n)},\ v^{(n)}$ вместо $u^{(n)}(x_0),\ v^{(n)}(x_0)$ соответственно.

◀ Равенства (1) следуют из свойств производных первого порядка. ▶

2^0. Несколько подробнее остановимся на дифференцировании произведения. Если функции $u, v,\ n$ – раз дифференцируемы в точке x_0, то их произведение также n раз дифференцируемо в той же точке и

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{2}$$

где $a_0^n, a_1^n, \ldots, a_n^n$ — постоянные, не зависящие от функций u, v и выбора точки x_0. Равенство (2) устанавливается методом математической индукции по порядку n.

Для определения постоянных a_k^n положим в равенстве (2) $u(x) = x^m,\ v(x) = x^{n-m}$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$. Справедливы равенства

$$u^k(0) = \begin{cases} m!, & \text{если}\quad k = m \\ 0, & \text{если}\quad k \neq m \end{cases}, \qquad v^{(n-k)}(0) = \begin{cases} (n-m)!, & \text{если}\quad k = m \\ 0, & \text{если}\quad k \neq m \end{cases}.$$

Применяя равенство (2) с подобными функциями $u(x),\ v(x)$ при $x = 0$, приходим к равенству

$$n! = a_m^n m!(n-m)!$$

Следовательно, $a_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Формула (2) влечет за собой соотношение

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{3}$$

называемое правилом Лейбница дифференцирования произведения функций.

3^0. Если функция $\Phi : X \to \mathbb{R}$ есть суперпозиция функций $f : X \to \mathbb{R},\ g : Y \to \mathbb{R}$ $(f(X) \subset Y),\ n$ – раз дифференцируемых в точках $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ и $y_0 = f(x_0) \in \overset{\circ}{Y}$ соответственно, то функция $\Phi = g \circ f\ n$ – раз дифференцируема в точке x_0. Убедимся в этом при $n = 2$. В силу цепного правила дифференцирования имеем $\Phi'(x) =$

$= g'(f(x))f'(x)$. Произведение дифференцируемых функций есть дифференцируемая функция, поэтому функция $\Phi = g \circ f$ дважды дифференцируема в точке x_0 и

$$\Phi''(x_0) = g''(y_0)(f'(x_0))^2 + g'(y_0)f''(x_0). \tag{4}$$

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков [1].

4^0. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, а в некоторой ее окрестности непрерывна и строго монотонна, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда согласно правилу дифференцирования производная обратной к f функции $g = f^{-1}$ удовлетворяет равенству

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{5}$$

Из равенства (5) вытекает дифференцируемость функции g' в точке $y_0 = f(x_0)$ как суперпозиции функции $\frac{1}{f'(x)}$, дифференцируемой в точке x_0, и функции $g(y)$, дифференцируемой в точке y_0. Производная $g''(y_0)$ находится по правилу дифференцирования суперпозиции

$$g''(y_0) = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)'_{x=x_0} g'(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \cdot \frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}.$$

Проведенные рассуждения легко обобщаются на производные любого порядка.

5^0. Пусть функция $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ задана параметрически

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

где функция $\varphi(t)$ строго монотонна и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Предположим, что функции $\varphi(t), \psi(t)$ дважды дифференцируемы в точке $t_0 \in (\alpha, \beta)$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$. В этом случае $\varphi'(t) \neq 0$ в некоторой окрестности U точки t_0, для точек x из окрестности $V := \varphi(U)$ точки $x_0 = \varphi(t_0)$ справедливо (см. п. 12.4) равенство

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{6}$$

В этой формуле $f = \psi \circ \varphi^{-1}$, переменные x, t связаны равенством $x = \varphi(t)$, эквивалентным равенству $t = \varphi^{-1}(x)$. Функция $f'(x)$ дифференцируема в точке x_0 как суперпозиция функции $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, дифференцируемой в точке t_0, и функции $t = \varphi^{-1}(x)$, дифференцируемой в точке x_0. Таким образом,

$$f''(x_0) = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_{t=t_0} (\varphi^{-1})'(x_0) = \left.\frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}\right|_{t=t_0}. \tag{7}$$

Аналогичные формулы справедливы и для производных высших порядков.

Отметим, что дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности, отмеченным в п. 12.3 для первых дифференциалов. Применительно к дифференциалам второго порядка это связано с наличием в правой части равенства (4) ненулевого (вообще говоря) слагаемого $g'(y_0)f''(x_0)$.

3. Частные правила вычисления производных высших порядков

Приведем таблицу производных порядка n от функций $x^\alpha,\ e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ \ln|x|$.

$$I)\ (x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}; \quad II)\ (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$III)\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right); \qquad IV)\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right);$$

$$V)\ (\ln|x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}.$$

Эти равенства справедливы в области определения соответствующих функций. Например, если α — натуральное число, то равенство $I)$ справедливо для всех действительных x. В этом случае производные порядка $n>\alpha$ равны 0. Формулы $I)-V)$ доказываются методом математической индукции.

Приведенную таблицу можно расширить, включив в нее, например, производные от гиперболических функций, обратных тригонометрических функций и т.д. (см., например, [18]). Здесь полезны общие правила дифференцирования, позволяющие находить производные суперпозиции функций, обратной функции и т.д. Иногда общие правила дифференцирования сочетают с вычислениями соответствующих пределов.

В качестве примера рассмотрим функцию

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{если} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x=0 \end{cases}. \tag{8}$$

Как нетрудно видеть,

$$\Phi_0^{(n)}(x) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ при } x\neq 0,$$

где Q_n — некоторый многочлен степени n. Производные в точке 0 считаются непосредственно. Например,

$$\Phi_0'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\Phi_0(x)-\Phi_0(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Предполагая равенство $\Phi_0^{(n)}(0)=0$ доказанным для $n=k$, установим его истинность при $n=k+1$. Имеем

$$\Phi_0^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\Phi_0^{(k)}(x)-\Phi_0^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,Q_k\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

В силу математической индукции $\Phi_0^{(n)}(0)=0\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

§16. Формула Тейлора[21]

1. Касание функций порядка n

Определение 1. *Две функции f, g, определенные на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, имеют касание порядка n в точке x_0, если $f(x) - g(x) = 0((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$, что эквивалентно равенству*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{1}$$

Касание порядка 0 равносильно равенству $f(x_0) = g(x_0)$. Для исследования условий касания положительного порядка n полезна

Лемма 1. *Пусть $\psi : U(x_0) \to \mathbb{R}$ — функция, дифференцируемая n раз в точке x_0. Тогда равенство $\psi(x) = o((x - x_0)^n)$ эквивалентно условиям*

$$\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \ldots = \psi^{(n)}(x_0). \tag{2}$$

◀ Пусть выполняются условия (2). Последовательное применение правила Лопиталя влечет равенства

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\psi'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{\psi^{(n-1)}(x)}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot (x - x_0)} = \psi^{(n)}(x_0) = 0,$$

что и доказывает достаточность условия (2).

Необходимость (2) устанавливается индукцией по числу n. Равенство $\psi(x) = o((x - x_0))$ влечет за собой соотношения $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$ (по определению дифференцируемости функции f в точке x_0). Предположим теперь, что при $n = k$ необходимость условий (2) для справедливости равенства $\psi(x) = o((x - x_0)^n)$ уже установлена. Если теперь $\psi(x) = o((x - x_0)^{k+1})$, то (по индуктивному предположению) $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \ldots = \psi^{(k)}(x_0) = 0$, и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = 0.$$

Снова применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\psi(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\psi'(x)}{(k+1)(x - x_0)^k} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{\psi^{(k)}(x)}{(k+1)!(x - x_0)} = \frac{\psi^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}.$$

Из двух последних соотношений вытекает равенство $\psi^{(k+1)}(x_0) = 0$, что и доказывает справедливость индуктивного предположения. ▶

---

[21] Б. Тейлор (1685 - 1731 гг.) — английский математик

Следствие 1. *Если разность двух функций f, g n раз дифференцируема в точке x_0, то функции f, g имеют касание порядка n в том и только в том случае, если*

$$(f-g)^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Например, если $f(x) - g(x) = \Phi_0(x - x_0)$ ($x \in U(x_0)$, функция Φ_0 определена равенством (15.8)), то функции $f(x), g(x)$ имеют касание любого порядка n.

Следствие 2. *Пусть функции $f, g : U(x_0) \to \mathbb{R}$ n раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда f, g имеют в точке x_0 касания порядка n в том и только в том случае, если*

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

◀ В рассматриваемом случае $(f-g)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - g^{(k)}(x_0)$, поэтому равенства (3), (4) эквивалентны. ▶

Пример. Пусть функция $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0. Тогда функции $f(x)$ и $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ имеют в точке x_0 касание порядка 1. В данном случае график функции $y = g(x)$ совпадает с касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Этот пример мотивирует принятую терминологию [11].

2. Локальная формула Тейлора

Определение 2. *Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ — функция, n раз дифференцируемая в точке x_0. Многочленом Тейлора для функции f в точке x_0 называется многочлен $P_n(x)$ степени n, имеющий с функцией f касание порядка n в точке x_0.*

Поскольку функция f и многочлен $P_n(x)$ имеют в точке x_0 касание порядка n, то справедливы равенства

$$P_n(x_0) = f(x_0),\ P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Как и всякий многочлен степени n, $P_n(x)$ допускает представление

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n.$$

Последовательное дифференцирование приводит к равенствам

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + \ldots + nc_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$\ldots$$

$$P_n^{(k)}(x) = k!c_k + (k+1)\ldots 2c_{k+1}(x - x_0) + \ldots + n(n-1)\cdots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k},$$

$$\ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n!\, c_n.$$

Полагая в этих равенствах $x = x_0$, приходим к соотношениям

$$c_0 = P_n(x_0) = f(x_0),\ k!\, c_k = P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + \ldots &+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned} \tag{6}$$

Разность $r_n(x) := f(x) - P_n(x)$ называют остатком (или n-ым остаточным членом) формулы Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x). \tag{7}$$

Равенство (7) фактически является определением остаточного члена.

В силу (5) $r_n(x_0) = r'_n(x_0) = \ldots = r_n^n(x_0) = 0$. Согласно лемме 1 это влечет равенство

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n), \tag{8}$$

называемое представлением n-го остаточного члена в форме Пеано[22].

Вытекающее из (7), (8) соотношение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + 0((x - x_0)^n) \tag{9}$$

именуют локальной формулой Тейлора.

3. Глобальная формула Тейлора

Лемма 2. *Пусть* $I := [0, 1]$, $\overset{\circ}{I} := (0, 1)$. *Пусть функция* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *принадлежит* $C^n(I) \cap D^{n+1}(\overset{\circ}{I})$ *при некотором целом* $n \geqslant 0$. *Пусть* $p > 0$. *Тогда найдется такое число* θ *из* $\overset{\circ}{I}$, *что*

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{n!p}(1 - \theta)^{n+1-p}\, \varphi^{(n+1)}(\theta). \tag{10}$$

◀ Введем в рассмотрение функции F, G, определенные на отрезке I равенствами

$$F(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!}(1 - t)^k, \qquad G(t) := (1 - t)^p.$$

[22] Д. Пеано (1858 - 1932 гг.) — итальянский математик

Функции $F, G : I \to \mathbb{R}$ принадлежат классу $C(I) \cap D^1(\overset{\circ}{I})$; при этом

$$\begin{gathered} F'(t) = \frac{\varphi^{n+1}(t)}{n!},\ G'(t) = -p(1-t)^{p-1} \quad (t \in \overset{\circ}{I}) \\ F(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!},\ F(1) = \varphi(1),\ G(0) = 1,\ G(1) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Применяя к паре функций $F, G : I \to \mathbb{R}$ теорему о среднем Коши (см. § 13), получаем

$$\frac{F(1) - F(0)}{G(1) - G(0)} = \frac{F'(\theta)}{G'(\theta)}$$

при некотором θ из $(0, 1)$. Учитывая (11), получаем отсюда равенство (10). ►

Теорема 1. *Пусть X — промежуток действительной оси, $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $C^n(X) \cap D^{n+1}(\overset{\circ}{X})$ при некотором целом $n \geqslant 0$. Пусть $p > 0$.*

Тогда при любых x, x_0 из множества X остаток $r_n(x)$ в формуле Тейлора (7) допускает представление

$$r_n(x) = \frac{1}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}, \tag{12}$$

где $\theta \in (0, 1)$, θ может зависеть от x, x_0 и p, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$.

◄ Для доказательства равенства (12) достаточно положить $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ $(t \in I = [0, 1])$ и

$$\varphi(0) = f(x_0),\ \varphi^{(k)}(t) = f^{(k)}(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)^k \ (k = 1, \ldots, n+1). \tag{13}$$

Очевидно, что соотношения (10), (13) влекут за собой равенство (12). ►

Равенство (12) называют представлением остаточного члена в форме Шлемильха-Роша[23]. Объединение (7) и (12) приводит к формуле

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}, \tag{14}$$

именуемой глобальной формулой Тейлора.

При $p = 1$ формула (12) приводит к равенству

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1} \tag{15}$$

$(0 < \theta < 1,\ c = x_0 + \theta(x - x_0))$. Это форма Коши представления остаточного члена в формуле Тейлора.

[23] О. Шлемильх (1823 - 1901 гг.) — немецкий математик; Э. Рош (1820 - 1883 гг.) — французский математик

При $p = n + 1$ формула (12) влечет за собой равенство

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{16}$$

$(0 < \theta < 1,\ c = x_0 + \theta(x - x_0))$. Это форма Лагранжа представления остаточного члена в формуле Тейлора.

Равенства (12), (15), (16) позволяют более точно судить о величине остатка, чем имеющая качественный характер формула (8). Точку x_0 называют центром разложения функции f по формуле Тейлора. Если $x_0 = 0$, то варианты формул (9), (14) именуют формулами Маклорена[24].

§17. Ряд Тейлора

1. Определение ряда Тейлора

Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на промежутке $X \subset \mathbb{R}$, имеющая производные любого порядка $n \in \mathbb{N}$ в некоторой точке x_0 из $\overset{\circ}{X}$. В этом случае при любом натуральном n функции f можно сопоставить многочлен Тейлора порядка n

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

и остаточный член

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \qquad (x \in X).$$

Если при некотором x из множества X последовательность $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{1}$$

сходится и его сумма равна $f(x)$.

Ряд (1) называют рядом Тейлора функции f, x_0 — центром разложения. Ряд (1) заведомо сходится при $x = x_0$; все слагаемые $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (x - x_0)^k$ этого ряда при $k \geqslant 1$ и $x = x_0$ нулевые. Однако может случиться, что других точек сходимости ряда (1) нет. Действительно, может быть построена (см., например, [7]) бесконечно дифференцируемая на всей прямой функция f, для которой $f^{(k)}(x_0) = (k!)^2$ $(k \in \mathbb{N})$. Соответствующий ей ряд Тейлора сходится лишь при $x = x_0$ — это легко выводится из признака Даламбера.

Если ряд Тейлора (1) сходится при $x \neq x_0$, то его сумма может и не совпадать с $f(x)$. Пусть, например,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

[24] К. Маклорен (1698 - 1746 гг.) — шотландский математик

$x_0 = 0$. Как показано в п. 15.3, функция f бесконечно дифференцируема на всей прямой $\mathbb{R}$ и $f(0) = f^{(k)}(0) = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Таким образом, ряд Тейлора в данном случае состоит только из нулевых слагаемых и его сумма тождественно равна 0, в то время как $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Приведем достаточное условие для справедливости равенства

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ в каждой точке z множества $\overset{\circ}{X}$ имеет производные $f^{(k)}(z)$ любого порядка k ($k \in \mathbb{N}$) и*

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant M < \infty, \tag{3}$$

постоянная M не зависит от k из $\mathbb{N}$ и z из $\overset{\circ}{X}$.

Тогда для любых точек x из X и x_0 из $\overset{\circ}{X}$ справедливо равенство (2).

◀ Фиксируем x из X, x_0 из $\overset{\circ}{X}$. Воспользуемся формой Лагранжа представления остаточного члена $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, согласно которой

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ $(0 < \theta < 1)$. В силу (3) $|f^{(k)}(z)| \leqslant M \ \forall\ k \in \mathbb{N},\ z \in \overset{\circ}{X}$, поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}. \tag{4}$$

Правая часть (4) стремится к 0 при $n \to \infty$ (см. п. 4.2). Следовательно, $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, что и приводит к равенству (2). ▶

При $x_0 = 0$ ряд (1) называют рядом Маклорена. В этом случае элементы ряда (1) имеют особенно простой вид — совпадают с функциями $c_k x^k$. Вместе с тем случай $x_0 \neq 0$ сдвигом переменной x сводится к этому частному случаю. Оставшаяся часть параграфа посвящена изучению разложений в ряды Маклорена некоторых элементарных функций.

2. Ряды Маклорена функций $\mathbf{e^x}$, $\cos \mathbf{x}$, $\sin \mathbf{x}$

Функция $\exp x = e^x$ бесконечно дифференцируема на всей прямой. Если $|x| < a < \infty$, то

$$|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^a,$$

т.е. все производные функции $\exp x$ равномерно ограничены на интервале $(-a, a)$. Поэтому функция $f(x) = \exp x$ удовлетворяет предположениям теоремы 1 с $X = (-a, a)$. В качестве a можно брать любое положительное число, следовательно, равенство (2) верно для произвольных x, x_0. При $x_0 = 0$, $f(x) = \exp x = e^x$, равенство (2) влечет за собой разложение

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{5}$$

экспоненты e^x в степенной ряд. Равенство (5) справедливо при любом x.

Для функций $f(x) = \cos x$ и $f(x) = \sin x$ имеем $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ и всех x, поэтому к каждой из них применима теорема 1 с $X = \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$. Равенство (2), примененное к случаям $x_0 = 0,\ f(x) = \cos x$ и $f(x) = \sin x$, приводит к разложениям

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{7}$$

верным для любого действительного числа x. При $x \neq 0$ ряды (6), (7) являются знакочередующимися. Из результатов § 5 вытекают оценки

$$\left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\ ,$$

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\ ,$$

позволяющие судить о скорости сходимости рядов (6), (7).

Иногда равенства (5)-(7) принимают в качестве определения функций e^x, $\cos x$, $\sin x$. Этот способ позволяет, например, избежать ссылок на геометрически очевидные свойства тригонометрических функций. Однако последовательная реализация подобного подхода требует достаточно продвинутой теории рядов.

3. Биномиальный ряд

Функция $f(x) = (1 + x)^\alpha$ $(x > -1,\ \alpha \in \mathbb{R})$ бесконечно дифференцируема и

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha - k} \qquad (x > -1,\ k \in \mathbb{N}).$$

Ряд Маклорена для этой функции имеет вид

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!} x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} x^k, \tag{8}$$

где

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} := 1,\ \begin{pmatrix} k \\ \alpha \end{pmatrix} := \frac{\alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!} \qquad (k \in \mathbb{N}). \tag{9}$$

Ряд (8) называют биномиальным.

Если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то $\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = 0$ при $k > m$ и $f^{(m+1)}(x) \equiv 0\ \forall\ x$. В этом случае функция $f(x) = (1+x)^m$ является многочленом степени m. Из формулы Лагранжа представления остаточного члена вытекает равенство $r_m(x) = 0$. Возникающее в этой ситуации соотношение

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array} \right) x^k \tag{10}$$

принято называть биномом Ньютона. Оно справедливо при любых действительных x.

Равенство (10) было известно и предшественникам Ньютона. Заслугой Ньютона является обобщение равенства (10) на произвольные действительные показатели α. Ниже α отлично от нуля и натурального числа. В этом случае все биномиальные коэффициенты $\left(\begin{array}{c} k \\ \alpha \end{array} \right)$ отличны от нуля.

При фиксированном $x \neq 0$ все элементы $a_k = \left(\begin{array}{c} k \\ \alpha \end{array} \right) x^k$ ряда (8) отличны от 0. Существует предел

$$D := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x|.$$

В силу признака Даламбера (см. § 5) ряд (8) сходится при $|x| < 1$ и расходится, если $|x| > 1$; случай $|x| = 1$ требует отдельного рассмотрения.

Установим равенство

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} k \\ \alpha \end{array} \right) x^k \qquad (|x| < 1). \tag{11}$$

Воспользуемся формулой Тейлора

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} k \\ \alpha \end{array} \right) x^k + r_n(x)$$

с остатком $r_n(x)$ в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{\alpha-n}x^{n+1},$$

где постоянная $\theta \in (0,1)$ и может зависеть от n и x. Таким образом, остаток $r_n(x)$ есть произведение трех множителей

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n, \ \alpha x(1+\theta x)^\alpha, \ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n.$$

Поскольку $x > -1$ и $0 < \theta < 1$, то $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$ и

$$0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n < 1.$$

Второй множитель $\alpha x(1+\theta x)^\alpha$ заключен между $|\alpha x|(1-|x|)^\alpha$ и $|\alpha x|(1+|x|)^\alpha$, и эти величины не зависят от n. Третий множитель $\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n$ является n–ым членом ряда Маклорена для функции $(1+x)^{\alpha-1}$, поэтому он сходится к 0 при $n \to \infty$ и любом x из $(-1,1)$. Таким образом, $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, что и доказывает равенство (11).

Для некоторых показателей α равенство (11) остается верным и для $x = -1, 1$. Более полное исследование этого вопроса проводится в главе 6.

4. Ряд Маклорена логарифмической функции

Функция $f(x) = \ln(1+x)$ бесконечно дифференцируема на луче $(-1, \infty)$ и

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ряд Маклорена этой функции имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k. \tag{12}$$

Его область сходимости совпадает с промежутком $(-1, 1]$. Действительно, применяя к ряду (12) признак Даламбера, получаем следующее: ряд (12) сходится при $|x| < 1$ и расходится, если $|x| > 1$. Сходимость ряда (12) при $x = 1$ вытекает из признака Лейбница (см. § 5). При $x = -1$ его расходимость следует из расходимости гармонического ряда $\sum \frac{1}{k}$.

Имеет место равенство

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \qquad (-1 < x \leqslant 1). \tag{13}$$

Для доказательства (13) при $x \in [0, 1]$ можно воспользоваться формулой Лагранжа (см. § 16), согласно которой

$$r_n(x) := \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \frac{(-1)^n}{n+1}(1+\theta x)^{-n-1} x^{n+1} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

здесь $\theta \in (0, 1)$. Отсюда получаем оценку $|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$; в частности, $r_n(x) \to 0$, что и доказывает (13) для x из $[0, 1]$.

Пусть теперь $-1 < x < 0$. Представим остаток $r_n(x)$ в форме Коши

$$r_n(x) = (-1)^n (1-\theta)^n (1+\theta x)^{-n-1} x^{n+1} \qquad (-1 < x < 0).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным в предшествующем пункте, приводят к оценке $|r_n(x)| \leqslant |x|^n (1-|x|)^{-1}$. Следовательно, $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. (13) верно и для x из $(0, 1)$. Заменяя в равенстве (13) x на $-x$, приходим к равенству

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad (-1 \leqslant x < 1). \tag{14}$$

Если из (13) вычесть (14), то получим формулу

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \qquad (-1 < x < 1). \tag{15}$$

Поскольку любое положительное число a допускает представление $a = \frac{1+x}{1-x}$ с x из интервала $(-1, 1)$, то формула (15) позволяет вычислить $\ln a$ при каждом $a > 0$.

Полагая в (15) $x = \frac{1}{2n+1}$, получаем

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}. \tag{16}$$

Ряд (16) достаточно быстро сходится. Это позволяет, отправляясь от равенства $\ln 1 = 0$, находить натуральные логарифмы чисел $2, 3$ и т.д.

Разложения (5)-(8) можно использовать для вычисления значений функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $(1+x)^\alpha$. Например,

$$\sqrt[3]{10} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{1/3} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\begin{array}{c} k \\ 1/3 \end{array}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k;$$

полезно учесть, что ряд в правой части является знакочередующимся.

§18. Приложения дифференциального исчисления к исследованию функций

1. Условия экстремума

В п. 1-6 X — промежуток действительной прямой, $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$. В § 13 были введены понятие точки локального внутреннего экстремума функции $f : X \to \mathbb{R}$, в частности, понятие локального внутреннего минимума (максимума) функции f.

Теорема 1. *Для того, чтобы точка x_0 из $\overset{\circ}{X}$ была точкой внутреннего экстремума функции $f : X \to \mathbb{R}$, необходимо выполнение одного из двух условий: либо функция f не имеет производной в точке x_0, либо $f'(x_0) = 0$.*

◀ Теорема 1 вытекает из теоремы Ферма (см. п. 13.1). ▶

Указанное в теореме 1 необходимое условие экстремума не является достаточным. Например, если $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$, то $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не доставляет экстремума функции f. Аналогично, функция $f(x) = 2x - |x|$ не имеет в нуле ни производной, ни экстремума.

Теорема 2. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0 из $\overset{\circ}{X}$ и дифференцируема в проколотой окрестности $D(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ точки x_0. Тогда справедливы утверждения:*

а) если $f'(x) < 0 \; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x - 0)$ и $f'(x) > 0 \; \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то

$$f(x) > f(x_0) \; \forall\, x \in D(x_0, \delta); \tag{1}$$

б) если $f'(x) > 0 \; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x - 0)$ и $f'(x) < 0 \; \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то

$$f(x) < f(x_0) \; \forall\, x \in D(x_0, \delta); \tag{2}$$

в) если же $f'(x) > 0\ \forall\ x \in D(x_0, \delta)$ (или $f'(x) < 0\ \forall\ x \in D(x_0, \delta)$), то функция f не имеет экстремума в точке x_0.

◀ Теорема вытекает из установленной в § 13 связи между знаком производной и характером монотонности функции. Докажем, например, утверждение а). Поскольку $f'(x) < 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то функция f строго убывает на $(x_0 - \delta, x_0)$, поэтому $f(x) > f(x_0)\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$ Аналогично, так как $f'(x) > 0\ \forall\ x \in \in (x_0, x_0 + \delta)$, то функция f строго возрастает на $(x_0, x_0 + \delta)$, поэтому $f(x) > f(x_0)$ $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тем самым утверждение а) доказано. Остальные утверждения устанавливаются аналогично. ▶

Иногда теорему 2 формулируют короче: если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ функции f меняет знак с $-$ на $+$ (с $+$ на $-$), то x_0 — точка локального минимума (максимума) функции f. Если же при переходе через точку x_0 $f'(x)$ не меняет знака, то экстремума в этой точке нет.

При выполнении (1) говорят, что x_0 — точка строгого локального минимума функции f. Если же имеет место (2), то x_0 — точка строгого локального максимума f. Точку x_*, в которой $f'(x_*) = 0$, именуют критической (стационарной) точкой функции f; иногда x_* называется точкой, подозрительной на экстремум.

Условия экстремума, даваемые теоремой 2, лишь достаточны. Они не являются необходимыми, как показывает пример функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет строгий локальный минимум в точке $x_0 = 0$, однако ни в одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ ее производная $f'(x) = 4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ не сохраняет знак.

Теорема 3. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности $U(x_0, \delta) \subset X$ $(\delta > 0)$ точки x_0 все производные до порядка $m - 1$ включительно, а в точке x_0 производную порядка $m \geqslant 2$, причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0,\ f^{(m)}(x_0) \neq 0. \tag{3}$$

Тогда

а) если m — четное число и $f^{(m)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума функции f;

б) если m — четное число и $f^{(m)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка строгого максимума функции f;

в) если m — нечетное число, то x_0 не является точкой экстремума.

◀ Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. В рассматриваемом случае формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + r_m(x), \tag{4}$$

остаток $r_m(x) = 0((x - x_0)^m)$. Фиксируем настолько малое положительное число $\delta > 0$, что

$$|r_m(x)| \leqslant \frac{|f^{(m)}(x_0)|}{(m!) \cdot 2}|x - x_0|^m \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta). \tag{5}$$

Из соотношений (4), (5) вытекает равенство

$$\operatorname{sgn}\,[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sgn}\,[f^{(m)}(x_0)(x - x_0)^m] \quad \forall\, x \in D(x_0, \delta).$$

Теперь доказываемое утверждение очевидно. ▶

2. Примеры

Пример 1 (Задача о консервной банке). Среди прямых цилиндров фиксированного объема $V > 0$ найти цилиндр с наименьшей полной поверхностью S.

Обозначим через x, h радиус основания и высоту цилиндра соответственно. Тогда

$$V = \pi x^2 h,\ S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}.$$

Задача сводится к минимизации функции

$$S(x) := 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

на луче $X := (0, \infty)$. Функция $S : X \to \mathbb{R}$ всюду дифференцируема и имеет единственную стационарную точку

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Как нетрудно видеть, производная $S'(x) < 0$ при $0 < x < x_0$ и $S'(x) > 0$ при $x > x_0$, поэтому x_0 — точка минимума функции $S(x)$ на всем луче X. Осевое сечение оптимального по размеру цилиндра представляет квадрат.

Пример 2 (Задача о преломлении света в геометрической оптике). Пусть в плоскости Oxy имеются однородные среды I и II (см. рис. 3), разделенные прямой $y = 0$. В первой среде свет распространяется со скоростью v_1, во второй — со скоростью v_2. Необходимо определить, по какому пути должен идти свет, чтобы за кратчайшее время попасть из точки A среды I в точку B среды II. В однородной среде свет распространяется прямолинейно, поэтому время распространения света

$$T = \frac{AC}{v_1} + \frac{CB}{v_2},$$

где C — точка линии раздела $y = 0$. Введем координаты x, y так, чтобы точки A, B, C имели координаты $(0, a),\ (h, -b),\ (x, 0)$ соответственно $(a > 0, b > 0, h > 0)$. Время распространения света $T = T(x)$ есть функция аргумента x, совпадающего с абсциссой точки C. Оно определено равенством

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (x - h)^2}}{v_2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

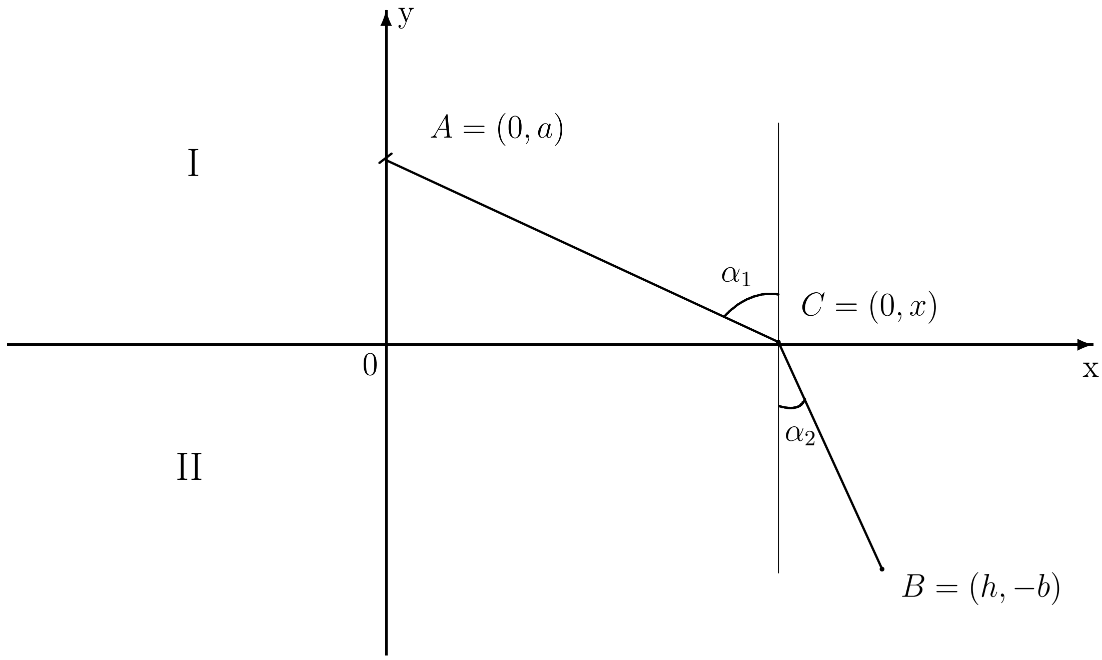

Рис. 3

Функция $T(x)$ дифференцируема, ее производная

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-h}{v_2\sqrt{b^2+(x-h)^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

строго возрастает. Стационарная точка x_0 функции f единственна и удовлетворяет соотношению

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{x_0^2+a^2}} = \frac{h-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(x_0-h)^2}},$$

совпадающему с законом преломления света Снеллиуса[25]

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

(см. рис. 3). Поскольку $T'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $T'(x) > 0$ при $x > x_0$, то точка x_0 минимизирует функцию $T(x)$ на прямой $\mathbb{R}$. Впервые связь закона преломления света и соответствующей экстремальной задачи описана в работах П. Ферма.

Пример 3 (Неравенство Юнга[26]). Пусть $b > 0,\ 1 < p < \infty$. Установим равенство

$$\max_{x>0}\left(bx - \frac{x^p}{p}\right) = \frac{b^q}{q}, \tag{6}$$

где $q := \frac{p}{p-1} \in (1, \infty)$. Функция $f(x) = bx - \frac{x^p}{p}(0 \leqslant x < \infty)$ всюду дифференцируема, ее производная $f'(x) = b - x^{p-1}$ строго убывает и обращается в 0 в единственной точке $x_0 = \sqrt[p-1]{b}$, реализующей максимум функции f на луче $[0, \infty)$. Как нетрудно видеть, $f(x_0) = \frac{b^q}{q}$, что и доказывает равенство (6).

---

[25] В. Снеллиус (1580 - 1626 гг.) — голландский астроном и математик

[26] У. Юнг (1863 - 1942 гг.) — английский математик

Непосредственным следствием (6) является неравенство Юнга

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{7}$$

в котором a, b неотрицательные числа. Знак равенства в (7) имеет место лишь при $a = \sqrt[p-1]{b}$, что эквивалентно равенству $a^p = b^q$.

Неравенство Юнга в свою очередь влечет за собой неравенство Гельдера[27]

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}, \tag{8}$$

где x_k, y_k $(k = 1, \ldots, n)$ — произвольные действительные числа, $1 < p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

Для доказательства (8) положим

$$A := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \qquad B := \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}.$$

Если хотя бы одна из величин A, B равна 0, то (8) становится равенством, поскольку левая и правая части (8) равны 0.

Пусть $A > 0, B > 0$. При любом положительном λ справедливы вытекающие из (7) соотношения

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lambda^p |x_k|^p}{p} + \frac{|y_k|^q}{\lambda^q q}\right) = \frac{\lambda^p A^p}{p} + \frac{B^q}{q\lambda^q}. \tag{9}$$

Если $(\lambda A)^p = \left(\frac{B}{\lambda}\right)^q$, то правая часть (9) равна AB, что и приводит к неравенству Гельдера (8).

3. Определение и простейшие свойства выпуклых функций

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют выпуклой, если при любых x_0, x_1 из X и любого числа λ из $(0, 1)$ имеет место неравенство

$$f[(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1] \leqslant (1-\lambda) f(x_0) + \lambda f(x_1). \tag{10}$$

Соотношение (10) называют неравенством Иенсена[28]. Его геометрический смысл следующий: точки любой дуги графика функции $y = f(x)$ лежат под хордой, стягивающей эту дугу. Действительно, левая часть (10) есть ордината точки $M_\lambda = (x_\lambda, f(x_\lambda))$ $(x_\lambda := (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1)$, $0 < \lambda < 1$, правая часть (10) есть ордината точки N_λ (см. рис. 4). Если при $x_0 \neq x_1$ неравенство (10) является строгим, то функцию f называют строго выпуклой на множестве X.

Любая линейная функция $f(x) = kx + b$ выпукла. Для нее (10) превращается в равенство, поэтому она не является строго выпуклой.

---

[27] О.Л. Гельдер (1859 - 1937 гг.) — немецкий математик

[28] И.Л. Иенсен (1859 - 1925 гг.) — датский математик

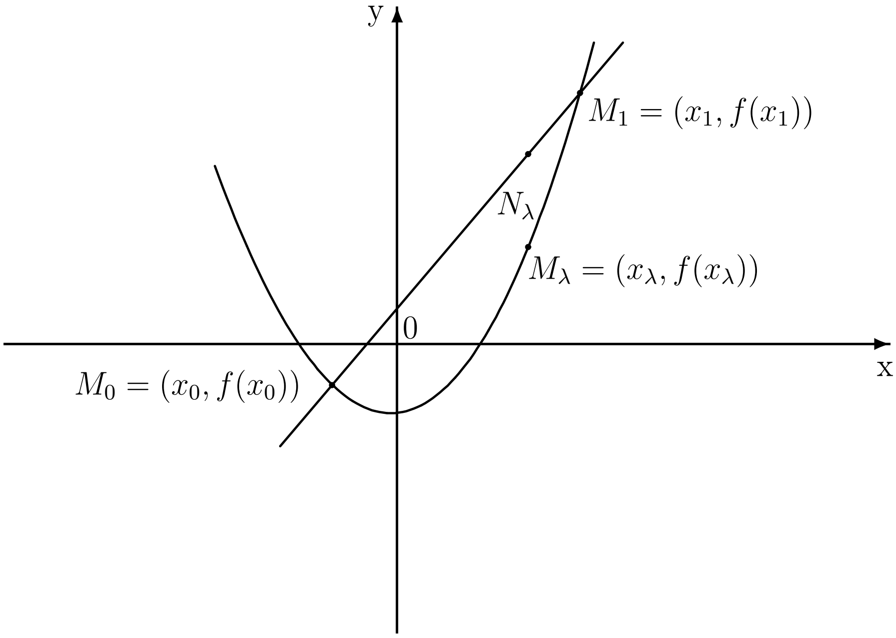

Рис. 4

Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла на $\mathbb{R}$. Действительно, пусть $x_0 \neq x_1$, $\lambda \in (0,1)$. Тогда

$$[(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1]^2 = (1-\lambda)^2 x_0^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_0x_1 + \lambda^2 x_1^2 <$$
$$< (1-\lambda)^2 x_0^2 + \lambda(1-\lambda)(x_0^2 + x_1^2) + \lambda^2 x_1^2 = (1-\lambda)x_0^2 + \lambda x_1^2$$

в силу неравенства $2x_0x_1 < x_0^2 + x_1^2$.

Отметим некоторые свойства класса выпуклых функций.

1°. Произведение выпуклой функции на положительную постоянную есть выпуклая функция.

2°. Сумма двух выпуклых функций есть выпуклая функция.

◀ Свойство 1° вытекает из того, что неравенства можно умножать на положительные числа. Свойство 2° следует из того, что неравенства одного типа можно складывать. ▶

Пусть имеется семейство функций $f_t : X \to \mathbb{R}$, зависящее от параметра $t \in T$, где T — множество произвольной природы (множество T может быть и конечным, и бесконечным). Предположим, что при любом x_0 из X числовое множество $\{f_t(x_0)\}_{t\in T}$ ограничено сверху. В этом случае $\sup\limits_{t\in T}\{f_t(x_0)\}$ конечен при каждом x_0 из X. Функцию

$$\overline{f}(x) := \sup_{t\in T}\{f_t(x)\} \ (x \in X) \tag{11}$$

называют поточечным супремумом семейства функций f_t $(t \in T)$.

3°. Поточечный супремум семейства выпуклых функций есть выпуклая функция.

◀ Действительно, пусть каждая функция $f_t : X \to \mathbb{R}$ $(t \in T)$ выпукла, функция $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$ определена равенством (11). Тогда при любых x_0, x_1 из X и любого числа λ из $(0,1)$ справедливы неравенства

$$f_t[(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1] \leqslant (1-\lambda)f_t(x_0) + \lambda f_t(x_1) \leqslant$$
$$\leqslant (1-\lambda)\overline{f}(x_0) + \lambda\overline{f}(x_1).$$

Переходя к sup по t в левой части этого неравенства, получаем

$$\overline{f}((1-\lambda)x_0+\lambda x_1)\leqslant(1-\lambda)\overline{f}(x_0)+\lambda\overline{f}(x_1),$$

т.е. $\overline{f}:X\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция. ►

Следствие. *Поточечный супремум любого семейства линейных функций есть выпуклая функция.*

4. Критерии выпуклости дифференцируемых функций

Теорема 4. *Пусть $f\in C(X)\cap D^1(\overset{\circ}{X})$. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) $f:X\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция; 2) для любых x из X, x_0 из $\overset{\circ}{X}$ имеет место неравенство*

$$f(x)-f(x_0)\geqslant f'(x_0)(x-x_0);\tag{12}$$

3) $f':\overset{\circ}{X}\to\mathbb{R}$ — возрастающая функция.

◄ 1) ⇒ 2). Пусть $x_0\in\overset{\circ}{X},\ x\in X$. В силу неравенства Иенсена имеем

$$f[x_0+\lambda(x-x_0)]\leqslant(1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x),\qquad\forall\,\lambda\in(0,1)$$

что эквивалентно неравенству

$$\frac{f[x_0+\lambda(x-x_0)]-f(x_0)}{\lambda}\leqslant f(x)-f(x_0).$$

Переходя к пределу при $\lambda\to0$, получаем (12).

2) ⇒ 3). Пусть $x_0,\ x_1\in\overset{\circ}{X},\ x_0<x_1$. В силу (12)

$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant f'(x_0)(x-x_0).$$

Меняя местами $x_0,\ x_1$, получаем

$$f(x_0)-f(x_1)\geqslant f'(x_1)(x_0-x_1).$$

Складывая два последних неравенства, приходим к оценке

$$0\geqslant f'(x_0)(x_1-x_0)+f'(x_1)(x_0-x_1)=(f'(x_1)-f'(x_0))(x_0-x_1),$$

равносильной возрастанию функции $f':\overset{\circ}{X}\to\mathbb{R}$.

3) ⇒ 1). Пусть $x_0,\ x_1\in X$ и $x_0<x_1,\ x_\lambda:=(1-\lambda)x_0+\lambda x_1$ $(0<\lambda<1)$. В силу формулы конечных приращений

$$f(x_\lambda)-f(x_0)=\lambda f'(c_1)(x_1-x_0),\ f(x_\lambda)-f(x_1)=(1-\lambda)f'(c_2)(x_0-x_1),$$

где $x_0<c_1<x_\lambda<c_2<x_1$. Умножим первое из этих равенств на $1-\lambda$, второе — на λ, и сложим. В итоге получим равенство

$$f(x_\lambda)-(1-\lambda)f(x_0)-\lambda f(x_1)=\lambda(1-\lambda)(x_1-x_0)(f'(c_1)-f'(c_2)).$$

Поскольку $\lambda(1-\lambda)(x_1-x_0)>0$, а $f'(c_1)-f'(c_2)\leqslant 0$ (в силу возрастания функции $f':\overset{\circ}{X}$), то

$$f(x_\lambda)-(1-\lambda)f(x_0)-\lambda f(x_1)\leqslant 0.$$

Последнее неравенство влечет за собой неравенство (9). Импликация 3) $\Rightarrow$ 1), а вместе с ней и теорема 4 доказана. ▶

Если $f\in D^2(\overset{\circ}{X})$, то возрастание функции $f':\overset{\circ}{X}\to\mathbb{R}$ равносильно неравенству $f''(x)\geqslant 0\ \forall\ x\in\overset{\circ}{X}$. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть $f\in C(X)\cap D^2(\overset{\circ}{X})$. Тогда выпуклость функции $f:X\to\mathbb{R}$ эквивалентна неравенству $f''(x)\geqslant 0\ \forall\ x\in\overset{\circ}{X}$.*

Аналогичные теоремам 4, 5 утверждения верны и для строго выпуклых функций. Например, строгая выпуклость функции f класса $C(X)\cap D^1(\overset{\circ}{X})$ эквивалентна строгому возрастанию на $\overset{\circ}{X}$ ее производной f'. В частности, строго выпуклы функции $|x|^p$ $(x\in\mathbb{R},\ p>1)$, a^x $(x\in\mathbb{R},\ a>0,\ a\neq 1)$, $-\ln x$ $(x>0)$. Функция $|x|$ $(x\in\mathbb{R})$ выпукла, так как $|x|=\max\{x,-x\}$; в данном случае строгой выпуклости нет.

Неравенство (12) имеет простой геометрический смысл. Оно означает, что график выпуклой функции $y=f(x)$ расположен выше любой касательной к этому графику. Из (12) вытекает равенство

$$f(x)=\sup_{x\in\overset{\circ}{X}}\{f(t)+f'(t)(x-t)\}\,,$$

т.е. в условиях теоремы 4 функция f есть поточечный супремум семейства линейных функций $f_t(x):=f(t)+f'(t)(x-t)$ $(t\in\overset{\circ}{X})$.

5. Обобщенное неравенство Иенсена

Теорема 6. *Пусть $f:X\to\mathbb{R}$ — выпуклая функция. Пусть $x_k\in X,\ \lambda_k\geqslant 0$ $(k=1,\ldots,n)$ и $\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1$. Тогда справедливо неравенство*

$$f(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\ldots+\lambda_nf(x_n). \tag{13}$$

◀ При $n=1$ неравенство (13) очевидно, при $n=2$ оно эквивалентно (10). Докажем, что если (13) верно для $n=m$, то оно справедливо и для $n=m+1$. Пусть, для определенности, $0<\lambda_{n+1}<1$. Тогда $\lambda:=\lambda_1+\ldots+\lambda_m=1-\lambda_{m+1}\in(0,1)$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda}+\ldots+\frac{\lambda_m}{\lambda}=1$. Используя выпуклость функции f, имеем

$$f(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m+\lambda_{m+1}x_{m+1})=f\left(\lambda\left(\frac{\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m}{\lambda}\right)+\lambda_{m+1}x_{m+1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lambda f\left(\frac{\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m}{\lambda}\right)+\lambda_{m+1}f(x_{m+1}).$$

Далее, в силу индуктивного предположения справедливо неравенство

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \ldots + \frac{\lambda_m}{\lambda}x_m\right) \leqslant \frac{\lambda_1}{\lambda}f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_m}{\lambda}f(x_m).$$

Объединяя установленные неравенства, получаем

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{m+1}x_{m+1}) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_{m+1}f(x_{m+1}).$$

В силу принципа математической индукции неравенство (13) верно для любого натурального числа n. ▶

Неравенство (13) называют обобщенным неравенством Иенсена.

Пример 4. Функция $f(x) = -\ln x$ выпукла на луче $(0, \infty)$, поэтому в силу (13)

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln x_k \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right),$$

или

$$x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

где $\lambda_k > 0,\ x_k > 0\ (k = 1, \ldots, n),\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. В частности, если $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$, то

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Пример 5. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа. Их средним порядка $\alpha > 0$ называют число

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

Имеет место неравенство

$$M_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leqslant M_\beta(x_1, \ldots, x_n) \tag{14}$$

при $0 < \alpha < \beta$. Вначале докажем (14) при $\alpha = 1,\ \beta = p > 1$. Поскольку функция $f(x) = x^p$ выпукла на $[0, \infty)$, то в силу неравенства (13) с $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ имеем

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)^p \leqslant \frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}.$$

Это неравенство равносильно оценке

$$M_1(x_1, \ldots, x_n) \leqslant M_p(x_1, \ldots, x_n). \tag{15}$$

Из (15) легко следует (14) при $\beta > \alpha$. Достаточно в неравенстве (15) заменить x_k на x_k^α $(k = 1, \ldots, n)$ и положить $p = \frac{\beta}{\alpha}$.

6. Вогнутые функции и точки перегиба

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют вогнутой, если противоположная к ней функция $g = -f$ выпукла на множестве X. Из этого определения следует, что вогнутость функции $f : X \to \mathbb{R}$ эквивалентна неравенству

$$f[(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1] \geqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1),$$

в котором $x_0,\ x_1 \in X,\ 0 < \lambda < 1$. Все свойства вогнутых функций выводятся из аналогичных свойств выпуклых функций. Например, имеют место аналитические критерии вогнутости функции. Для функции f класса $C(X) \cap D^1(\overset{\circ}{X})$ вогнутость функции f эквивалентна убыванию функции $f' : \overset{\circ}{X} \to \mathbb{R}$.

Функцию $f : X \to \mathbb{R}$ называют строго вогнутой, если противоположная к ней функция $g = -f$ строго выпукла на множестве X. Строгая вогнутость функции f класса $C(X) \cap D^1(\overset{\circ}{X})$ эквивалентна строгому убыванию функции $f' : \overset{\circ}{X} \to \mathbb{R}$. Например, функции x^p $(0 < p < 1,\ x > 0)$, $\ln x$ $(x > 0)$ строго вогнуты.

При построении графиков функций существенную роль играют точки перегиба. Пусть функция f определена на некоторой окрестности $U(x_0, \delta)$, $(\delta > 0)$ точки x_0. Если на одной из полуокрестностей $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta)$ функция f строго выпукла, а на другой — строго вогнута, то точку $M_0 = (x_0, f(x_0))$ называют точкой перегиба графика функции f.

Теорема 7. *Пусть функция $f : U(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема в точке x_0. Если $M_0 = (x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

◀ Действительно, пусть $f \in D^1(U(x_0, \delta))$ и (для определенности) строго выпукла на $(x_0 - \delta, x_0)$ и строго вогнута на $(x_0, x_0 + \delta)$. Тогда функция $f' : U(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$ строго возрастает на $(x_0 - \delta, x_0)$ и строго убывает на $(x_0, x_0 + \delta)$. Поэтому x_0 есть точка локального максимума функции $f' : U(x_0, \delta) \to \mathbb{R}$. В силу теоремы Ферма x_0 — критическая точка этой функции, т.е. $f''(x_0) = 0$. ▶

Теорема 8. *Пусть $f \in D^2(U(x_0, \delta))$. Если функция $f''(x)$ принимает значения разных знаков на полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$, то $M_0 = (x_0, f(x_0))$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$.*

◀ Действительно, если $f''(x) > 0$ на полуокрестности $(x_0 - \delta, x_0)$, то функция f строго выпукла на ней. Аналогично, условие $f''(x) < 0\ \forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta)$ влечет за собой строгую вогнутость f на полуокрестности $(x_0, x_0 + \delta)$. Это и приводит к требуемому в рассматриваемом случае. ▶

Теорема 8 содержит достаточное условие точки перегиба. Оно выполнено, например, если функция f трижды дифференцируема в точке x_0 и $f'''(x_0) \neq 0$.

Пример 6. Пусть $f(x) = \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$. Тогда точки $M_0 = (n\pi, 0)$ являются точками перегиба синусоиды $y = \sin x$. Действительно, $f''(x) = -\sin x$ и $f''(n\pi) = 0$. При переходе через точки $n\pi$ функция $f''(x)$ меняет знак, что согласно теореме 8 является достаточным признаком точки перегиба.

7. Асимптоты графика функции

Пусть функция f определена при достаточно больших x $(x > a)$. Если найдутся такие числа k, b, что

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0, \tag{16}$$

то прямую $y = kx+b$ называют наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (при $x \to \infty$).

Теорема 9. *Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b. \tag{17}$$

◀ **Необходимость.** Если выполнено (16), то разность $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ бесконечно мала при $x \to +\infty$, следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Достаточность. Если существуют пределы (17), то разность $\alpha(x) = f(x)-kx-$ $-b$ является бесконечно малой при $x \to \infty$. Это эквивалентно равенству (16). ▶

Замечание 1. Аналогично определяется наклонная асимптота графика функции $y{=}f(x)$ и для случая $x{\to} -\infty$. Справедлив соответствующий аналог теоремы 9.

Пример 7. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет наклонные асимптоты при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, задаваемые уравнениями

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1,\ y = -\frac{\pi}{2}x - 1$$

соответственно. Пусть, например, $x \to \infty$. Тогда

$$k = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},\ b = \lim_{x\to+\infty} x \left[\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \Big/ \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = -1.$$

Замечание 2. Для нахождения пределов, фигурирующих в равенствах (17), можно использовать правило Лопиталя. Например, $k = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, если этот предел существует.

Говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)$$

равен $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 8. График функции $y = \operatorname{tg} x$ имеет вертикальные асимптоты $x = \pi/2 + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

8. Построение графиков функций

Выше изложены способы нахождения промежутков возрастания и убывания, выпуклости и вогнутости функции, точек экстремума и точек перегиба, наклонных и вертикальных асимптот ее графика. Они позволяют провести достаточно полное исследование функции и построить ее график.

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на промежутке X и имеет конечные производные $f'(x), f''(x)$ на X за исключением отдельных точек. Методами дифференциального исчисления можно установить ряд характерных точек графика функции $y = f(x)$.

Приведем рекомендации общего характера относительно построения графика функции.

1°. Указать область определения функции, определить точки пересечения графика с осями координат.

2°. Отметить специфические особенности функции (например, четность, нечетность, периодичность, непрерывность, сходство и связь с известными функциями).

3°. Изучить поведение функции при стремлении независимой переменной к точкам разрыва или граничным точкам области определения (включая точки $\pm\infty$ в случае неограниченного множества X), в частности, найти асимптоты, если они существуют.

4°. Определить точки экстремума и интервалы монотонности функции.

5°. Указать точки перегиба и промежутки выпуклости (вогнутости) функции.

6°. Вычислить значения функции в характерных точках, упомянутых выше, а также для большей точности и в некоторых промежуточных точках.

Полученной в результате выполнения этих рекомендаций информации о функции f во многих случаях достаточно для построения ее графика.

Литература

I. Основные учебники по математическому анализу

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. I. Изд. 4-е, перераб. и доп. 1982; Ч. II. Изд. 2-е, стереотип. 1980. М.: Наука.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. I-III. М.: Высшая школа, 1981.

5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. I, II. М.: Наука, 1990.

II. Дополнительная литература

6. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.: Гостехиздат, 1948.

7. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

8. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Фазис, 1997; Ч. II. М.: Наука, 1990.

9. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.

10. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Ч. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1993, 1995.

11. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

12. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.

13. Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

14. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

15. Соболев В.И., Покорный В.В., Аносов В.И. Краткий курс математического анализа. Ч. I. Воронеж, 1983; Ч. II. Воронеж, 1984.

16. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

17. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

18. Фихтенгольц Г.М. Курс математического анализа. Т. I-III., М.: Физматгиз, 1962.

19. Шварц Л. Анализ. Т. I, II. М.: Мир, 1972.

20. Шилов Г.Е. Математический анализ, функции одного переменного. М.: Наука, 1969; Он же. Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.