Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

В. С. Климов

Дополнительные главы математического анализа

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению
Математика и компьютерные науки*

Ярославль
ЯрГУ
2013

УДК 517(075.8)
ББК В16я73
К49

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2013 года

Рецензенты:
кафедра высшей математики ЯГТУ;
доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа ЯГПУ Е.И. Смирнов

Климов, Владимир Степанович.
К 49 Дополнительные главы математического анализа: учебное пособие / В. С. Климов ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2013. — 128 с.

ISBN 978-5-8397-0970-6

Предназначено для студентов университетов, обучающихся по направлению 010200.62 Математика и компьютерные науки (дисциплина «Дополнительные главы математического анализа», цикл Б3), очной формы обучения.

УДК 517(075.8)
ББК В16я73

ISBN 978-5-8387-0970-6

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов дисциплины „Математический анализ", изучаемых студентами-математиками старших курсов и магистрантами университетов.

При исследовании задач современного нелинейного анализа возникает необходимость в использовании материала, разбросанного в сотнях монографий. Количество накопленных фактов здесь поистине необъятно. Столкнувшись в своей преподавательской и научной деятельности с этой проблемой, автор пришёл к выводу: следует написать ещё одну книгу!

Сформулирую цели, которых автор пытался достигнуть. Во-первых, хотелось бы познакомить читателя с основными идеями негладкого анализа. Во-вторых, представлялось желательным включить в рассмотрение не только экстремальные проблемы, но и более общие вопросы о критических значениях функций, соответствующих задачам на минимакс. Третья цель – пособие должно быть доступно студенту (или магистранту), знакомому лишь с основами математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. И, наконец, последняя цель – пособие не должно быть слишком большим.

Любой специалист, знакомый с обсуждаемым предметом, скажет, что достичь одновременно подобных целей невозможно. Автор излагает лишь конечномерные версии ряда результатов нелинейного анализа (иногда с неполными доказательствами). По этой причине в пособии совершенно не затрагиваются важные приложения к вариационному исчислению и математической физике. В ряде случаев автор ограничивается только указаниями монографий и статей обзорного характера, в которых можно найти тот или иной результат, приведённый в пособии. Подобные указания позволят читателю в случае необходимости более детально ознакомиться с результатом и рассмотреть его обобщения и применения. Цитированные монографии содержат также дополнительные ссылки на литературу.

Первая глава пособия посвящена элементам негладкого анализа и его приложениям к экстремальным задачам. Здесь приводятся основные положения субдифференциального исчисления Ф. Кларка. Центральное место в первой главе занимает правило множителей Лагранжа. Завершают главу теоремы об очистке и теорема Хелли.

Во второй главе рассматриваются проблемы, связанные с оценкой числа критических точек и критических значений негладких функций. В частности, устанавливается негладкий относительный вариант теоремы о перевале. Излагается конечномерная версия теории Люстерника – Шнирельмана. Существенную роль здесь играет понятие рода множества, введённое моим научным руководителем – профессором М. А. Красносельским.

Основное содержание третьей главы составляют геометрические приложения выпуклого и негладкого анализа. Изучаются числовые характеристики компактных подмножеств конечномерного пространства – радиус Чебышёва и диаметр множества. Вводится понятие ширины выпуклого компакта как функции направления, устанавливаются свойства этой функции. Чётность данной функции позволяет применить для её исследования изложенный во второй главе вариант теории Люстерника– Шнирельмана. Один из параграфов третьей главы посвящён задаче о нахождении экстремальных значений проекций полиэдра, заданного площадями граней и векторами внешних нормалей. Несмотря на свою наглядность, обсуждаемые геометрические вопросы в некоторых аспектах далеки от завершения. В особенности это касается вопросов вычислительного характера; даже для хорошо изученного трёхмерного пространства вопрос о нахождении достаточно эффективных алгоритмов вычисления геометрических величин не утратил своей актуальности. Содержащийся в пособии материал ориентирован прежде всего на читателя, желающего найти подходящие темы для курсовых, дипломных и других квалификационных работ. Несколько разделов третьей главы посвящёно задачам кусочно-линейной оптимизации (КЛиО). Основные приложения: приближения функций в метрике Чебышёва (дискретный и непрерывный варианты); задача о максимальном овалоиде, содержащемся в полиэдре; проблемы матричных игр и близкая к ним задача о существовании седловой точки у выпукло-вогнутой функции.

Активизации самостоятельной работы читателя призваны содействовать завершающие пособие три приложения. Содержащиеся в них задачи имеют различный уровень сложности: от самого простого до претендующего на проблемы для самостоятельного исследования.

В пособии принята автономная (в пределах каждой главы своя) нумерация секций, разбитых на отдельные пункты. Формулы (теоремы, упражнения и т. п.) нумеруются в пределах каждой секции. При ссылках внутри секции указывается лишь номер соответствующей формулы (теоремы и т. п.); в противном случае приводится и номер секции. Например, формула 2.3(1) – это формула (1) из секции 2.3; лемма 1.2.3 – это лемма 3 из секции 1.2.

Ряд разделов пособия обсуждался с коллегами из Ярославского государственного университета, а также с другими математиками. Особенно плодотворными были беседы с М. А. Красносельским и Н. А. Бобылёвым; в пособии учтены их многочисленные замечания и советы. Буду благодарен за указания на возможные ошибки в тексте, ответственность за которые автор полностью берёт на себя.

Климов В. С., доктор физико-математических наук

Основные обозначения:

$\bar{A}$ – замыкание множества A

$\overset{\circ}{A}$ – внутренность множества A

∂A – граница множества A

$A \times B$ – декартово произведение множеств A и B

$\varnothing$ – пустое множество

$\overset{def}{=}$ – равно по определению

$\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел

$\mathbb{R}^N$ – евклидово пространство размерности N

$|x|$ – длина (евклидова норма) вектора x

(x, y) – скалярное произведение векторов x, y

$\mathbb{B}$ – замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле

$\mathbb{B}(z, r)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке z

∇ – оператор градиента

$s(\cdot, A)$ – опорная функция множества A

$T_A(x)$ – касательный конус к множеству A в точке x

$N_A(x)$ – нормальный конус к множеству A в точке x

$K_A(x)$ – конус гиперкасательных к множеству A в точке x

$\varrho(x, A)$ – расстояние точки x до множества A

$\Lambda(Q)$ – совокупность липшицевых функций на множестве Q

$\Lambda_{loc}(Q)$ – совокупность локально липшицевых функций, определённых на множестве Q

$P(\mathbb{R}^N)$ – совокупность сублинейных функций на пространстве $\mathbb{R}^N$

$f'(x; v)$ – производная функции f по направлению $v \in \mathbb{R}^N$

$f^{\circ}(x; v)$ – производная Кларка функции f по направлению $v \in \mathbb{R}^N$

$\partial f(x)$ – градиент Кларка функции f в точке x

$epi\, f$ – надграфик функции f

$\Theta(Q_1, Q_2)$ – уклонение множества Q_1 от множества Q_2

$h(Q_1, Q_2)$ – хаусдорфово расстояние между множествами Q_1, Q_2

$Kv(\mathbb{R}^N)$ – совокупность непустых выпуклых компактов в $\mathbb{R}^N$

◀ – начало доказательства

▶ – конец доказательства

Глава 1

Критические точки

1.1 Основные понятия

1.1. Липшицевы функции и отображения. Ниже используются обозначения: $\mathbb{R}^N$ – арифметическое пространство размерности N, в котором стандартным образом введена евклидова структура, т. е. определено скалярное произведение (x, y) элементов x, y из $\mathbb{R}^N$; $|x| = \sqrt{(x, x)}$ – длина (евклидова норма) элемента x; $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leqslant 1\}$ – замкнутый шар радиуса 1 с центром в начале координат. Каждому множеству $Q \subset \mathbb{R}^N$ можно сопоставить функции

$$\varrho(x; Q) = \inf\{|x - y|, y \in Q\}, \tag{1}$$

$$s(x; Q) = \sup\{(x, y), y \in Q\}, \tag{2}$$

на пространстве $\mathbb{R}^N$ со значениями в расширенной действительной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Число $\varrho(x; Q)$ называют *расстоянием* от точки x до множества Q. Если $Q = \varnothing$, то полагают $\varrho(x; Q) \equiv +\infty$, в противном случае $0 \leqslant \varrho(x; Q) < \infty \, \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Равенство (2) определяет функцию $s(\cdot, Q)\colon \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$, называемую *опорной функцией* множества Q. Если $Q = \varnothing$, то полагают $s(x, Q) = -\infty$. Для $Q \neq \varnothing$ справедливы неравенства $-\infty < s(x, Q) \leqslant \infty \, \forall x \in \mathbb{R}^N$. Конечность функции $s(x, Q)$ при любом x из $\mathbb{R}^N$ эквивалентна ограниченности множества $Q \neq \varnothing$.

Опорная функция единичного шара $\mathbb{B}$ имеет вид $s(x, \mathbb{B}) = |x|$. Если $Q = \mathbb{B}(x_0, r) = x_0 + r\mathbb{B}$ – замкнутый шар радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^N$, то

$$s(x; Q) = (x, x_0) + r|x - x_0|$$

Замыкание и внутренность множества $Q \subset \mathbb{R}^N$ обозначим символами $\overline{Q}$, $\overset{\circ}{Q}$ соответственно. Напомним, что $\overline{Q}$ можно определить как пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество Q, а

$$\overset{\circ}{Q} \overset{def}{=} \mathbb{R}^N \setminus \overline{(\mathbb{R}^N \setminus Q)}.$$

Граница ∂Q множества Q определяется равенством

$$\partial Q \stackrel{def}{=} \bar{Q} \cap \overline{(\mathbb{R}^N \setminus Q)}$$

и состоит из тех элементов x, для которых

$$\mathbb{B}(x,r) \cap Q \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \mathbb{B}(x,r) \cap (\mathbb{R}^N \setminus Q) \neq \varnothing$$

при любом $r > 0$.

Первостепенную роль в задачах оптимизации играют компактные множества. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называют *компактным*, если из всякой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из E. Имеет место следующий критерий компактности.

Предложение 1.*Множество $E \subset \mathbb{R}^N$ компактно в том и только том случае, если E ограничено и замкнуто.*

Систему множеств называют *центрированной*, если любая её конечная подсистема имеет непустое пересечение.

Предложение 2. *Замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^N$ компактно в том и только в том случае, когда любая центрированая система замкнутых подмножеств множества E имеет непустое пересечение.*

Приведённые выше сведения хорошо известны (см., например, [4]-[6]). Наша цель заключалась не в разъяснении известных понятий, а в фиксации обозначений и терминологии.

Множества вида

$$M(c) := \ \{x \in X,\ f(x) \leqslant c\},\ \ (c \in \mathbb{R})$$

называют *нижними лебеговыми множествами* функции $f : X \to \mathbb{R}$. Функция f *полунепрерывна снизу* на множестве X, если все её нижние лебеговы множества замкнуты.

Лемма 1. *Непрерывная на замкнутом множестве X функция f полунепрерывна снизу.*

◀ Действительно, пусть $x_k \in M_c$ и $x_k \to a$ при $k \to \infty$. Тогда справедливо включение $x_k \in X$ и $f(x_k) \leqslant c$. Так как множество X замкнуто, то a принадлежит X. В силу непрерывности функции f имеем

$$f(a) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \leqslant c,$$

т. е. $f(a) \leqslant c,\ a \in M_c$. Это и приводит к требуемому результату. ▶

Функция действительного переменного

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

полунепрерывна снизу на прямой $\mathbb{R}$, но разрывна в точке 0. Значение полунепрерывных снизу функций для теории экстремальных задач выясняет

Теорема 1. (Теорема Вейерштрасса) *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена и полунепрерывна снизу на замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Пусть при некотором действительном c её нижнее лебегово множество $M(c)$ непусто и ограничено. Тогда функция f ограничена снизу на множестве X и существует точка $\bar{x}$ из X, для которой*

$$f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x).$$

◀ В рассматриваемом случае множество X непусто, поэтому число $d \stackrel{def}{=} \inf\{f(x), x \in X\} \in [-\infty, \infty)$. Фиксируем числовую последовательность c_k, для которой $c > c_k > d$ и $c_k \to d$ при $k \to \infty$. Множества $M(c_k)$ непусты $(c_k > d)$, замкнуты (функция f полунепрерывна снизу) и ограничены $(c > c_k)$. Система замкнутых множеств $M(c_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ центрирована, поскольку

$$\bigcap_{k=1}^{l} M(c_k) = M(\min_{1 \leqslant k \leqslant l} c_k) \neq \varnothing\,.$$

Согласно предложению 2 существует элемент $\overline{x}$, принадлежащий каждому из множеств $M(c_k), k \in \mathbb{N}$. В частности, $\overline{x} \in X$, $f(\overline{x}) \leqslant c_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем

$$d \leqslant f(\bar{x}) \leqslant \lim_{k \to \infty} c_k = d\,,$$

т. е. $f(\bar{x}) = d$.▶

Отображение $F\colon Q \to \mathbb{R}^N$ множества $Q \subset \mathbb{R}^N$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ удовлетворяет *условию Липшица*, если для некоторой постоянной L и любых элементов x, y из Q выполняется неравенство

$$F(x) - F(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Постоянная L называется *константой Липшица* отображения F на множестве Q. Совокупность всех липшицевых отображений из Q в $\mathbb{R}^N$ обозначается символом $\Lambda(Q, \mathbb{R}^N)$.

Отображение $F\colon Q \to \mathbb{R}^N$ называется *локально липшицевым* на множестве $Q \subset \mathbb{R}^N$, если для каждой точки x из Q найдётся такое положительное число δ, что сужение F на $Q \cap \mathbb{B}(x, \delta)$ принадлежит классу $\Lambda(Q \cap \mathbb{B}(x, \delta), \mathbb{R}^N)$. Совокупность всех локально липшицевых отображений из Q в $\mathbb{R}^N$ обозначим символом $\Lambda_{loc}(Q, \mathbb{R}^N)$.

При $N = 1$ пространство $\mathbb{R}^N$ будем отождествлять с действительной прямой $\mathbb{R}$. Ниже всюду полагаем $\Lambda(Q, \mathbb{R}) = \Lambda(Q), \Lambda_{loc}(Q, \mathbb{R}) = \Lambda_{loc}(Q)$. Отображение $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_N(x))$ из множества Q в пространство $\mathbb{R}^N$ принадлежит классу $\Lambda(Q, \mathbb{R}^N)$ $(\Lambda_{loc}(Q, \mathbb{R}^N))$ в том и только том случае, если каждая его компонента f_j $\quad (j = 1, 2, \cdots, N)$ принадлежит классам $\Lambda(Q)$ или $\Lambda_{loc}(Q)$ соответственно.

Класс липшицевых (локально липшицевых) отображений образует линейное пространство, т. е. замкнут относительно естественным образом определяемых операций сложения и умножения на действительные числа. Несложно проверяется и инвариантность соответствующих классов относительно суперпозиций.

Пусть на множестве $Q \subset \mathbb{R}^N$ задано семейство функций $f_t\colon Q \to \bar{\mathbb{R}}$; параметр t пробегает множество T произвольной природы. Функции $f_T(x)$ и $f^T(x)$, определяемые равенствами

$$f_T(x) \stackrel{def}{=} \inf_{t\in T} f_t(x) \quad (x \in Q), \tag{3}$$

$$f^T(x) \stackrel{def}{=} \sup_{t\in T} f_t(x) \quad (x \in Q), \tag{4}$$

называют *поточечным инфимумом (супремумом)* семейства функций $f_t (t \in T)$.

Лемма 2. *Пусть функции $f_t\colon Q \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условию Липшица на Q с константой L, не зависящей от $t \in T$. Пусть для некоторого x_0 из Q множество $\{f_t(x_0), t \in T\}$ ограничено в $\mathbb{R}$. Тогда определяемые равенствами (3), (4) функции f_T и f^T конечны на множестве Q и удовлетворяют условию Липшица с константой L.*

◀ Пусть $x \in Q, y \in Q, t \in T$. Справедливо неравенство

$$|f_t(x) - f_t(y)| \leqslant L|x - y|,$$

в частности, верна оценка

$$f_t(x) \leqslant f_t(y) + L|x - y|. \tag{5}$$

Положим в (5) $y = x_0$. В силу условий леммы справедливо неравенство $|f_t(x_0)| < M$, в котором постоянная M не зависит от t. Объединяя это неравенство с относящейся к случаю $y = x_0$ оценкой (5), приходим к соотношению

$$f_t(x) \leqslant M + L|x - x_0|,$$

влекущему конечность функции $f^T(x)$ для любого x из Q.

Так как $f_t(y) \leqslant f^T(y)\, \forall y \in Q$, то из (5) следует оценка

$$f_t(x) \leqslant f^T(y) + L|x - y| \quad \forall t \in T.$$

Правая часть в этой оценке не зависит от t, поэтому

$$f^T(x) = \sup_{t\in T} f_t(x) \leqslant f^T(y) + L|x - y|.$$

Поменяв в установленном нами неравенстве $f^T(x) \leqslant f^T(y) + L|x - y|$ элементы x, y местами, получаем $|f^T(x) - f^T(y)| \leqslant L|x - y|$. Результат, относящийся к функции f_T, устанавливается аналогично. ▶

Следствие 1. *Для любого непустого множества $Q \subset \mathbb{R}^N$ функция $\varrho(x, Q)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1.*

Следствие 2. *Для любого непустого ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^N$ его опорная функция $s(x,Q)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \sup\{|v|,\, v \in Q\}$.*

2. Проекция точки на множество. Пусть Q – непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$. Элемент z из X называется *проекцией* точки x на множество $Q \subset \mathbb{R}^n$, если $|x-z| = \varrho(x;Q) = inf\{|x-y|, y \in Q\}$

Теорема 2. *Если Q – замкнутое подмножество $\mathbb{R}^N$, то для каждого элемента x из $\mathbb{R}^N$ существует его проекция на Q.*

◀ Функция $f(y) = |x-y|$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$. Действительно, в силу неравенства треугольника имеем $|f(y') - f(y'')| \leqslant ||y'-x| - |y''-x|| \leqslant |y'-y''|$, что и влечёт непрерывность f. Все нижние лебеговы множества рассматриваемой функции ограничены. Поэтому теорема 2 вытекает из теоремы 1.▶

Единственности проекции может и не быть. Действительно, проекцией точки x на сферу $S(x,\rho) :=\ \{x \in \mathbb{R}^n,\ |y-x| = \rho > 0\}$ является любой элемент этой сферы.

Введём некоторые определения. *Отрезком* $[u,v]$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ называется множество $[u,v] := \{w \in \mathbb{R}^N, w = (1-\lambda)u + \lambda v,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ именуют *выпуклым*, если для любых точек u,v из Q соединяющий их отрезок $[u,v]$ содержится в Q. Например, выпуклы шары $B(a,\rho), U(a,\rho)$ и полупространство $\{x \in \mathbb{R}^n : (p,x) \leqslant h\}$, порождаемое ненулевым вектором p. Из определения ясно, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Теорема 3. *Если Q – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$, то для любого x из $\mathbb{R}^N$ существует не более чем одна проекция на множество Q.*

◀ Пусть z_1, z_2 – проекции точки x на Q. Тогда $|a-b_1| = |a-b_2| = \rho(a;X)$. Легко проверяется и геометрически очевидно тождество параллелограмма $|2x - z_1 - z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4|x-z_1|^2$. Если $z_1 \neq z_2$, то

$$\left| x - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| < |x - z_1| = \varrho(x,Q).$$

Так как множество Q выпукло, то $\frac{z_1+z_2}{2} \in Q$. Последнее неравенство противоречит определению $\varrho(x,Q)$.▶

Из теорем 2, 3 следует

Теорема 4. *Если X – выпуклое и замкнутое подмножество $\mathbb{R}^N$, то для любого элемента a из $\mathbb{R}^n$ существует и единственна его проекция на множество X.*

Задача 1. *Описать способ нахождения проекции на замкнутые шар и полупространство.*

Отображение, сопоставляющее каждому элементу x из $\mathbb{R}^N$ его проекцию на выпуклое замкнутое множество $Q \subset \mathbb{R}^N$, обозначим символом $\mathscr{P}_Q$. Изучение свойств оператора $\mathscr{P}_Q \to \mathbb{R}^N \to Q$ основывается на следующих утверждениях.

Лемма 3. *Для того чтобы функция* $\varphi(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ $(c_2 \geqslant 0)$ *достигала своего минимума на отрезке [0,1] в точке 0 необходимо и достаточно. чтобы выполнялось неравенство* $c_1 \geqslant 0$.

◀ В части достаточности лемма очевидна. Необходимость следует из того, что неравенство $\varphi(t) \geqslant \varphi(0) \quad \forall t \in (0,1]$ эквивалентно оценке $c_1 + c_2 t \geqslant 0$. Устремляя t к 0, приходим к требуемому неравенству.▶

Теорема 5. *Для того чтобы элемент* z *из* Q *был проекцией точки* x *на множество* Q*, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение*

$$(x - z, v - z) \leqslant 0 \quad \forall v \in Q. \tag{6}$$

◀ Необходимость. Пусть $z = \mathscr{P}_Q(x), v \in Q$. В силу выпуклости множества Q отрезок $[z, v]$, соединяющий точки z, v , принадлежит множеству Q ,т. е. $z + t(v - z) \in Q\, \forall t \in [0,1]$. Отсюда вытекает неравенство $|x - z - t(v - z)| \leqslant |x - z|\, \forall t \in [0,1]$. Поэтому функция

$$\varphi(t) = |x - z - t(v - z)|^2 = |x - z|^2 - 2t(x - z, v - z) + t^2 |v - z|^2$$

достигает своего минимума на отрезке [0,1] в точке 0. Согласно лемме 2 отсюда следует неравенство (6), что и доказывает теорему в части необходимости.

Достаточность доказывается с помощью тех же рассуждений, но проведённых в обратном порядке.▶

Следствие. *Для любых* x_1, x_2 *из* $\mathbb{R}^N$ *справедливы соотношения*

$$(\mathscr{P}_Q(x_1) - \mathscr{P}_Q(x_2), x_1 - x_2) \geqslant 0; \tag{7}$$

$$|\mathscr{P}_Q(x_1) - \mathscr{P}_Q(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2|. \tag{8}$$

◀ Пусть $z_i = \mathscr{P}_Q(x_i), i = 1, 2$. Из теоремы 5 вытекают неравенства

$$(x_1 - z_1, z_2 - z_1) \leqslant 0, \quad (x_2 - z_2, z_1 - z_2) \leqslant 0,$$

складывая которые приходим к соотношению

$$|z_1 - z_2|^2 \leqslant (x_1 - x_2, z_1 - z_2).$$

Теперь неравенство (7) очевидно. Для доказательства (8) достаточно применить неравенство

$$(x_1 - x_2, z_1 - z_2| \leqslant |x_1 - x_2||z_1 - z_2| \ , -$$

классическое неравенство Коши.▶

Соотношение (7) означает монотонность (в смыле Минти [25], [28], [37], [40] - [42]) оператора проектирования $\mathscr{P}_Q$. В силу 8 оператор метрического проектирования удовлетворяет условию Липшица с константой 1.

Остановимся ещё на одном следствии теоремы 5. Пусть $a \notin Q, b = \mathscr{P}_Q(a)$. Введём линейный функционал $l(v) = (b - a, v)$ $(v \in \mathbb{R}^n$. Соотношение (6) влечёт за собой неравенство $l(x) \leqslant l(b)\ \forall x \in Q$. Очевидно, l - ненулевой функционал, при этом

$$l(a) = (a-b, a) > (a-b, b) \geqslant l(x)\ x \in Q.$$

В частности, справедлива

Теорема 6. *Пусть точка a не принадлежит выпуклому и замкнутому подмножеству Q пространства $\mathbb{R}^N$. Тогда найдётся такой линейный функционал l, что $l(a) > \max\{l(x),\ x \in Q\}$.*

Если в условиях теоремы 6 $l(a) > c > \max\{l(x),\ x \in Q\}$, то множество Q и точка a лежат по разные стороны от гиперплоскости $l(x) = c$. Теорему 6 иногда именуют *теоремой о разделяющей гиперплоскости.* Из неё вытекает, например, что всякое замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^N$ есть пересечение содержащих его полупространств.

3. Теорема Фенхеля. Функцию $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ назовём *сублинейной*, если она обладает свойствами:

1) положительная однородность: $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^N$;

2) субаддитивность: $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Из свойств 1), 2) легко выводится свойство ограниченности сублинейной функции, выражаемое неравенством

$$p(x) \leqslant L|x|. \tag{9}$$

В самом деле, пусть $e_1, e_2, \cdots, e_N$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{R}^N$. Для любого элемента x из $\mathbb{R}^N$ справедливы соотношения

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_N, \text{ где } x_j = (x, e_j)\, j = 1, 2, \cdots, N,$$

$$p(x) \leqslant \sum_{j=1}^{N} |x_j||p(e_j)| \leqslant M \sum_{j=1}^{N} |x_j| \leqslant M\sqrt{N}|x| = L|x|,$$

в которых $M \overset{def}{=} \max\{|p(e_j|, j = 1, 2, \cdots, N\}, L = M\sqrt{N}$.

В свою очередь из (9) следует, что сублинейная функция принадлежит классу $\Lambda(\mathbb{R}^N)$. Действительно,

$$p(x) - p(y) \leqslant p(x-y) \leqslant L|x-y|.$$

Меняя x, y местами, получаем $|p(x) - p(y)| \leqslant L|x-y|$.

Напомним, что функция $f\colon Q \to \mathbb{R}$, определенная на выпуклом множестве $Q \subset \mathbb{R}^N$, называется *выпуклой,* если для любых x_0, x_1 из Q и числа λ из (0,1) справедливо неравенство

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leqslant (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1),$$

называемое неравенством Иенсена. Выпуклость функции $f\colon Q \to \mathbb{R}$ эквивалентна выпуклости её *надграфика* $epif$, определяемого соотношением

$$epif \overset{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\ x \in Q,\ y \geqslant f(x)\}.$$

Каждая сублинейная функция $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ выпукла и положительно однородна. Её надграфик $epi\, p$ есть выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$

Совокупность всех сублинейных функций, определённых на $\mathbb{R}^N$, обозначим через $P(\mathbb{R}^N)$. Очевидно, что $P(\mathbb{R}^N) \subset \Lambda(\mathbb{R}^N)$. Класс $P(\mathbb{R}^N)$ замкнут относительно операции сложения и умножения на неотрицательные числа; в этом случае говорят, что $P(\mathbb{R}^N)$ есть полулинейное пространство.

Опорная функция любого ограниченного подмножества пространства $\mathbb{R}^N$ есть сублинейный функционал. Обозначим через $Kv(\mathbb{R}^N)$ $\quad (Cv(\mathbb{R}^N))$ совокупность непустых выпуклых компактных (замкнутых) подмножеств пространства $\mathbb{R}^N$. Каждому компакту K класса $Kv(\mathbb{R}^N)$ сопоставим его опорную функцию $s(\cdot, K)$. Тем самым вводится отображение

$$s\colon Kv(\mathbb{R}^N) \to P(\mathbb{R}^N).$$

Важнейший факт теории сублинейных функционалов заключается в том, что каждый сублинейный функционал $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ есть опорная функция некоторого выпуклого компакта. Этот результат был впервые доказан, по-видимому, Фенхелем [55], [56] .

Введём следующее определение: элемент $x^* \in \mathbb{R}^N$ называется опорным к сублинейному функционалу $p\colon \mathbb{R}^N$, если для любого $v \in \mathbb{R}^N$ справедливо неравенство $(x^*, v) \leqslant p(v)$. Множество всех элементов x^*, опорных к p, обозначим через U_p.

Теорема 7 (В. Фенхель). *Для любой сублинейной функции $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ множество U_p есть непустой выпуклый компакт, опорная функция которого совпадает с функцией p.*

◀ Сопоставим сублинейной функции $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ её надграфик

$$epi\, p \overset{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^N, y \geqslant p(x)\}.$$

Пусть $v \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$. Точка $(v, p(v) - \varepsilon)$ не принадлежит замкнутому выпуклому множеству $epi\, p$. Используя теорему отделимости, можно указать элемент h из $\mathbb{R}^N$ и число c такие, что имеет место неравенство

$$sup\{(h,x) + cy, (x,y) \in epi\, p\} < (h,v) + c(p(v) - \varepsilon). \tag{10}$$

Левая часть (10) равна 0. Действительно, она не меньше нуля, поскольку элемент $(0,0) \in epi\, p)$. В то же время

$$(h,x) + cy \leqslant 0 \quad \forall (x,y) \in epip. \tag{11}$$

Это следует из конечности левой части (1.7). Таким образом, (1.7) влечёт за собой соотношение

$$0 < (h,v) + c(p(v) - \varepsilon). \tag{12}$$

Полагая в (1.8) $x = v$ и учитывая (11), приходим к неравенству $0 < -c\varepsilon$, откуда следует, что $c < 0$. Из (11) при $y = p(x)$ вытекает неравенство $p(x) \geqslant -\frac{1}{c}(h, x)$, т.е . $-h/c \in U_p$. Таким образом, U_p – непустое множество. Компактность и выпуклость множества U_p очевидны. Кроме того, в силу (11) $p(v) \leqslant -\frac{1}{c}h(v) + \varepsilon$, откуда в силу произвольности ε следует равенство

$$p(v) = \max\{(x^*, v), x^* \in U_p\}. \blacktriangleright$$

Следствие *Отображение* $s\colon Kv(\mathbb{R}^N) \to P(\mathbb{R}^N)$ *есть биекция, т. е. существует обратное к нему отображение* $\partial\colon P(\mathbb{R}^N) \to Kv(\mathbb{R}^N)$*, обладающее свойствами*

$$\partial s(\cdot, K) = K \quad \forall K \in Kv(\mathbb{R}^N), \tag{13}$$

$$s(\cdot, \partial p) = p \quad \forall p \in P(\mathbb{R}^N. \tag{14}$$

Способ определения отображения $\partial\colon P(\mathbb{R}^N) \to Kv(\mathbb{R}^N)$ вытекает из теоремы Фенхеля. Достаточно положить

$$\partial p \overset{def}{=} U_p. \tag{15}$$

Если Q, Q_1, Q_2 – непустые подмножества $\mathbb{R}^N$, то непусты и множества

$$\lambda Q \overset{def}{=} \{\lambda x, x \in Q\},$$

$$Q_1 + Q_2 \overset{def}{=} \{x_1 + x_2,\ x_1 \in Q_1,\ x_2 \in Q_2\},$$

называемые произведением Q на действительное число λ и алгебраической суммой множеств Q_1 и Q_2. Множество $Q + (-Q)$ содержит 0, но в случае неодноточечного множества Q не сводится к 0. Взаимное расположение непустых множеств Q_1, Q_2 из $\mathbb{R}^N$ можно охарактеризовать числами

$$\Theta(Q_1, Q_2) \overset{def}{=} \inf\{t > 0, \quad Q_1 \subset Q_2 + t\mathbb{B}\},$$

$$h(Q_1, Q_2) \overset{def}{=} \max \Theta(Q_1, Q_2), \Theta(Q_2, Q_1)\},$$

$$\varrho(Q_1, Q_2) \overset{def}{=} \inf\{|x_1 - x_2|, \quad x_1 \in Q_1, x_2 \in Q_2\}.$$

Используется терминология: $\Theta(Q_1, Q_2)$ – *уклонение* множества Q_1 от множества Q_2; $h(Q_1, Q_2)$ – *хаусдорфово расстояние* между множествами Q_1 и Q_2. Если Q_1, Q_2, Q – множества класса $Kv(\mathbb{R}^N)$, то справедливы соотношения [4]-[6], [8], [13], [15], [18]

$$s(\cdot, Q_1 + Q_2) = s(\cdot, Q_1) + s(\cdot, Q_2),$$

$$s(\cdot, \lambda Q) = \lambda s(\cdot, Q) \quad \forall \lambda \geqslant 0,$$

$$h(Q_1, Q_2) = \sup_{|v|=1} |s(v, Q_1) - s(v, Q_2)|,$$

означающие в частности, что отображение $s\colon Kv(\mathbb{R}^N) \to P(\mathbb{R}^N)$ не только взаимно однозначно, но в определённом смысле линейно и непрерывно. Включение

$$Q_1 \subset Q_2 \quad (Q_j \in Kv(\mathbb{R}^N), j = 1, 2)$$

эквивалентно неравенству

$$s(v, Q_1) \leqslant s(v, Q_2) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

– данное свойство позволяет говорить о монотонности отображения s.

1.4. Субдифференциал Кларка. Пусть $\mathscr{V}$ – некоторая окрестность точки x из $\mathbb{R}^N$ и $f \in \Lambda(\mathscr{V})$. *Обобщённой производной функции* f в точке x по направлению v называется число

$$f^\circ(x; v) = \overline{\lim_{y \to x, t \to +0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Конечность верхнего предела следует из предположения $f \in \Lambda(\mathscr{V})$. Если $y_i \in \mathbb{R}^N, v_i \in \mathbb{R}^N, t_i > 0$ и $y_i \to x$, $v_i \to v$, $t_i \to 0$ при $i \to \infty$, то

$$f^\circ(x; v) \geqslant \overline{\lim_{i \to \infty}} \frac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i}, \tag{16}$$

причём можно выбрать последовательности y_i, t_i так, чтобы при $v_i = v$ соотношение (16) становилось равенством.

Из определения производной по направлению легко выводится включение $f^\circ(x, \cdot) \in P(\mathbb{R}^N)$, поэтому $f^\circ(x, \cdot)$ есть опорная функция некоторого выпуклого компакта, обозначаемого символом $\partial f(x)$ и называемого *субдифференциалом Кларка* функции f в точке x. Таким образом,

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^N, (x^*, v) \leqslant f^\circ(x; v)\, \forall v \in \mathbb{R}^N\}, \tag{17}$$

$$f^\circ(x; v) = \max\{(x^*, v), x^* \in \partial f(x)\}. \tag{18}$$

Соотношения (17), (18) характеризуют связь между $\partial f(x)$ и $f^\circ(x; \cdot)$. Из (14) и (17), (18) вытекает, что введённное в предшествующем пункте отображение ∂ ставит в соответствие сублинейной функции p её субдифференциал Кларка в точке 0 и, таким образом, $\partial p = \partial p(0)$.

Остановимся на правилах вычисления субдифференциалов Кларка. Если функция $f\colon \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке окрестности $\mathscr{V}$ и градиентное отображение $y \to \nabla f(y)$ непрерывно в точке x, то $\partial f(x) = \nabla f(x)$. Условие непрерывности градиентного отображения может быть заменено более слабым предположением строгой дифференцируемости. Напомним соответствующее определение. Функция $f\colon \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ называют *строго дифференцируемой* в точке x (и пишут $f \in SD^1(x)$), если существует такой элемент x^*, при котором для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам $|x_1 - x| < \delta, |x_2 - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2) - (x^*, x_1 - x_2)| \leqslant \varepsilon |x_1 - x_2|.$$

В этой связи достаточно поучителен пример функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Функция f дифференцируема в 0 и $f'(0) = 0$, вместе с тем $\partial f(0) = [-1, 1] \neq \{0\}$.

Более обозримое определение субдифференциала Кларка может быть дано для выпуклых функций. Если $\overset{\circ}{Q} \neq \varnothing$ и $f \colon Q \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, то $f \in \Lambda_{loc}(\overset{\circ}{Q}$ ([4]-[6]). Для x из $\overset{\circ}{Q}$ имеет место равенство [4]-[6], [13], [18]

$$\partial f(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^N,\ f(y) - f(x) \geqslant (x^*, y - x) \quad \forall y \in Q\}. \tag{19}$$

Множество, находящееся в правой части (19), называют *субдифференциалом* функции f в точке x. Оно может быть непусто и для граничных точек множества Q.

Опишем способ вычисления субдифференциала Кларка, применимый к произвольной липшицевой функции. Пусть $\mathscr{U}$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, $f \in \Lambda_{loc}(\mathscr{U})$. Обозначим через $\mathscr{D}(f)$ множество точек дифференцируемости функции f. В силу теремы Радемахера [39] лебегова мера множества $\mathscr{U} \setminus \mathscr{D}(f)$ равна 0.

Предложение 2. [2] *Пусть $f \in \Lambda_{loc}(\mathscr{U})$, $x \in \mathscr{U}$, S – подмножество $\mathscr{U}$ нулевой меры. Тогда*

$$f^\circ(x; v) = \overline{\lim_{y \to x, y \mathscr{D}(f) \setminus S}} (\nabla f(y), v),$$

$$\partial f(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \ \overline{co} \left(\bigcup_{y \in B(x,\varepsilon) \cap \mathscr{D}(f)} \partial f(y) \right).$$

(Здесь и далее coM – выпуклая оболочка множества M, совпадающая с пересечением всех содержащих M выпуклых множеств, $\overline{co}M$ – наименьшее из замкнутых выпуклых и содержащих M множеств, называемое замкнутой выпуклой оболочкой множества M).

Предложение 2 позволяет вычислять обобщённые производные по направлению и субдифференциалы Кларка, используя обычные правила дифференцирования. Отметим равенства $s(\cdot, M) = s(\cdot, co\, M) = s(\cdot, \overline{co}M)$, верные для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^N$. Очевидно, что $M \subset co\, M \subset \overline{co}M$.

Функцию f класса $\Lambda_{loc}(\mathscr{U})$ называют *регулярной* в точке $x \in \mathscr{U}$, если для каждого v из $\mathbb{R}^N$ существует производная по направлению

$$f'(x; v) \overset{def}{=} \lim_{t \to +0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

и $f'(x;v) = f^\circ(x;v)$. Выпуклые функции регулярны в каждой точке области определения. Требование регулярности выполнено для строго дифференцируемых функций, в частности для непрерывно дифференцируемых функций. В общем случае функция может не иметь производной по направлению.

Приведем ряд правил исчисления субдифференциалов Кларка. Пусть $\mathscr{U}$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$; $f, f_t (t \in T, T$ – конечное множество) – функции класса $\Lambda_{loc}(\mathscr{U})$, функции f_T, f^T – поточечный инфимум и супремум семейства функций f_t, определяемые равенствами (3), (4) соответственно.

Предложение 3. [2]

1) Для любого числа λ

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x); \text{ при этом } (-f)^\circ(x;v) = f^\circ(x,-v).$$

2) Имеет место включение

$$\partial\left(\sum_{t\in T} f_t(x)\right) \subset \sum_{t\in T} \partial f_t(x),$$

причём для регулярных в точке x функций $f_t\,(t \in T)$ включение становится равенством.

3) Справедливы включения

$$\partial f_T(x) \subset co\left\{\bigcup_{t\in T_1(x)} \partial f_t(x)\right\}, \qquad \partial f^T(x) \subset co\left\{\bigcup_{t\in T(x)} \partial f_t(x)\right\},$$

где $T_1(x) = \{t \in T, f_t(x) = f_T(x)\}, T(x) = \{t \in T, f_t(x) = f^T(x)\}$. *Для регулярных в точке x функций $f_t \quad (t \in T)$ соответствующие включения могут быть заменены равенствами; в частности, это имеет место для выпуклых функций $f_t \quad (t \in T)$.*

4) Если функция $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ строго дифференцируема в точке $f(x)$ и $f(x) \in (\alpha,\beta)$, то

$$\partial(\varphi \circ f)(x) = \varphi'(f(x))\,\partial f(x)\,.$$

► Приведём схему доказательства третьего утверждения (применительно к функции $f^T(x) = \sup\limits_{t\in T} f_t(x)$). Основу доказательства составляет вытекающая из непрерывности функции f

Лемма 4. *Существует такое число $\delta > 0$, что если $|u - x| < \delta$, то $T(u) \subset T(x)$.*

Из элементарных свойств максимума следует неравенство

$$\frac{f^T(y+\lambda v) - f^T(y)}{\lambda} \leqslant \max_{t\in T(x)} \frac{f_t(y+\lambda v) - f_t(y)}{t}, \tag{20}$$

в котором v – произвольный, но фиксированный элемент из $\mathbb{R}^N$, $|y-x|<\delta$, число λ положительно и настолько мало, что $|y+\lambda v-x|<\delta$. В свою очередь (20) влечёт за собой неравенство

$$(f^T)^\circ(x;v) \leqslant \max_{t\in T(x)} f_t^\circ(x;v). \tag{21}$$

Аналитическое неравенство (21) эквивалентно геометрическому соотношению

$$\partial f^T(x) \subset co\left\{\bigcup_{t\in T(x)} \partial f_t(x)\right\}.$$

Для доказательства противоположного включения применим оценку

$$\frac{f^T(x+\lambda v)-f^T(x)}{\lambda} \geqslant \frac{f_t(x+\lambda v)-f_t(x)}{\lambda}; \tag{22}$$

где $t\in T(x), \lambda>0$ и достаточно мало. Устремляя λ к 0 и используя регулярность функций f_t в точке x, получаем равенства

$$\lim_{\lambda\to+0} \frac{f_t(x+\lambda v)-f_t(x)}{\lambda} = f_t'(x;v) = f_t^\circ(x;v). \tag{23}$$

Объединение (22) и (23) приводит к соотношениям

$$(f^T)^\circ(x;v) \geqslant f_t^\circ(x;v) \quad \forall t\in T(x), \qquad (f^T)^\circ(x;v) \geqslant \max_{t\in T(x)} f_t^\circ(x;v).$$

Следовательно, установлено равенство

$$f^T)^\circ(x;v) = \max_{t\in T(x)} f_t^\circ(x;v).$$

Тем самым доказано третье утверждение (для функции f^T). ►

Следствие. *Пусть функции $f_t\,(t\in T)$ строго дифференцируемы в точке $x\in\mathscr{U}$. Тогда функция f^T регулярна в точке x и имеет место равенство*

$$\partial f^T(x) = co\,\{\nabla f_t(x),\, t\in T(x)\},$$

эквивалентное соотношению

$$(f^T)^\circ(x;v) = \max_{t\in T(x)} (\nabla f_t(x), v) \quad \forall v\in\mathbb{R}^N.$$

В качестве полезного иллюстрирующего примера рассмотрим функции

$$f_1(x)=|x|, \quad f_2(x)=-|x|.$$

В этом случае $\partial f_1(0)=\mathbb{B}=\partial f_2(0)$, поэтому

$$\partial f_1(0)+\partial f_2(0)=2\mathbb{B}.$$

В то же время $f_1(x) + f_2(x) \equiv 0$, следовательно, $\partial(f_1 + f_2)(0) = \{0\} \neq \partial f_1(0) + \partial f_2(0)$.

Приведённый пример показывает, что слишком вольное обращение с производными Кларка может привести к ошибкам. Это замечание в полной мере относится и к правилам дифференцирования произведения и частного двух функций.

Предложение 4. *Пусть f_1, f_2 – липшицевы вблизи x функции. Тогда $f_1 f_2$ – липшицевая вблизи x функция и*

$$\partial(f_1 f_2)(x) \subset f_2(x)\partial f_1(x) + f_1(x)\partial f_2(x). \tag{24}$$

Если, кроме того, $f_1(x) \geqslant 0, f_2(x) \geqslant 0$ и обе функции f_1, f_2 регулярны в x, то их произведение $f_1 f_2$ регулярно в x и в соотношении (24) имеет место равенство.

Предложение 5. *Пусть f_1, f_2 – липшицевы вблизи x функции, причём $f_2(x) \neq 0$. Тогда f_1/f_2 – липшицевая вблизи x функция и*

$$\partial(f_1/f_2)(x) \subset \frac{f_2(x)\partial f_1(x) - f_1(x)\partial f_2(x)}{f_2^2(x)}. \tag{25}$$

Если, кроме того, $f_1(x) \geqslant 0, f_2(x) > 0$ и обе функции f_1, f_2 регулярны в x, то их частное $f_1.f_2$ регулярно в x и в соотношении (25) имеет место равенство.

Предложения 4, 5 вытекают из общих правил дифференцирования суперпозиции функций [2].

1.2 Регулярные и критические точки

1. Касательный и нормальный конусы. Пусть Q – непустое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$. Вектор v из $\mathbb{R}^N$ называют *касательным* к множеству Q в точке $x \in Q$, если для любой последовательности $x_i \in Q$, сходящейся к x и последовательности $t_i \in (0, \infty)$, монотонно убывающей и сходящейся к 0, существует последовательность $v_i \in \mathbb{R}^N$, сходящаяся к v, такая что $x_i + t_1 v_i \in Q$. Обозначим через $T_Q(x)$ совокупность касательных векторов к множеству Q в точке x. Как нетрудно видеть, множество $T_Q(x)$ замкнуто и

$$\lambda T_Q(x) + \mu T_Q(x) = T_Q(x) \tag{1}$$

для любых $\lambda > 0, \mu > 0$. В самом деле, пусть $v \in T_Q(x), w \in T_Q(x), t_i > 0, t_i \to 0$. Так как $v \in T_Q(x)$, то для любой последовательности $x_i \in Q$, сходящейся к x, найдётся сходящаяся к v последовательность v_i, для которой $x_i + t_i v_i \in Q$. Поскольку $w \in T_Q(x)$, то существует сходящаяся к w последовательность w_i такая, что $x_i + t_i(v_i + w_i) \in Q$. Следовательно, $v + w \in T_Q(x)$, т. е.

$$T_Q(x) + T_Q(x) = T_Q(x).$$

Для доказательства (1) достаточно учесть теперь очевидное равенство

$$\lambda T_Q(x) = T_Q(x) \quad (\lambda > 0).$$

Множество $T_Q(x)$ называют *касательным конусом* к множеству Q в точке x. Если $x \in \overset{\circ}{Q}$, то $T_Q(x) = \mathbb{R}^N$. Равенство $T_Q(x) = \mathbb{R}^N$ может иметь место и для x из ∂Q. Если $T_Q(x) \neq \mathbb{R}^N$, то $T_Q(x)$ содержится в некотором полупространстве $\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad (x,a) \leqslant 0\}$, где a – ненулевой вектор, образующий тупой угол с любым вектором x из $T_Q(x) \setminus \{0\}$.

Нормальный конус $N_Q(x)$ к множеству Q в точке x определяется равенством

$$N_Q(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \quad (v, x^*) \leqslant 0 \quad \forall v \in T_Q(x)\}.$$

Множество $N_Q(x)$ обладает аналогичным (1) свойством

$$\lambda N_Q(x) + \mu T_Q(x) = N_Q(x) \tag{2}$$

для любых $\lambda > 0, \mu > 0$. Оно замкнуто и содержит 0; $N_Q(x) \setminus \{0\}$ состоит из векторов, образующих с любым вектором из $T_Q(x) \setminus \{0\}$ тупой угол.

В некоторых случаях конусы $T_Q(x), N_Q(x)$ могут быть описаны достаточно просто.

Лемма 1. *Если Q – выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^N, x \in Q$, то*

$$T_Q(x) = \overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(Q - x)}, \tag{3}$$

$$N_Q(x) = \{x^* \in \mathbb{R}^N, (x^*, y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in Q\}. \tag{4}$$

◀ Пусть $v \in T_Q(x)$. Согласно определению касательного конуса $T_Q(x)$ существуют последовательности $t_i > 0, v_i \in \mathbb{R}^N$ такие, что $t_i \to 0, v_i \to v$ и $y_i = x_i + t_i v_i \in Q$. В частности,

$$v_i = \frac{y - x}{t_i} \in \bigcup_{\lambda>0} (Q - x), \quad v \in \overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(Q - x)},$$

следовательно, $T_Q(x)$ принадлежит правой части (3).

Обратно, пусть $v = \lambda(z - x), \lambda > 0, z \in Q, x_i \in Q, t_i > 0$ и $x_i \to x, t_i \to 0$. Положим $v_i = \lambda(z - x_i)$. Тогда $v_i \to v$ и $x_i + t_i v_i = x_i + t_i(z - x_i) \in Q$, если $t_i \lambda < 1$. Отсюда вытекает включение

$$\bigcup_{\lambda>0} \lambda(Q - x) \subset T_Q(x),$$

переходя в котором к замыканию, получаем (3). Соотношение (4) легко выводится из определения конуса $N_Q(x)$ и (3). ▶

Следствие. *Если $B(z,R)$ – замкнутый шар радиуса $R > 0$ с центром в точке $z \in Q$, $Q_1 = Q \cap B(z,R)$, то $N_Q(z) = N_{Q_1}(z)$ – свойство локальности конуса опорных функционалов.*

Далее множество Q часто будет задаваться соотношением

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N, \quad g(x) \leqslant 0\}, \tag{5}$$

где $g \in \Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Если $g(x) < 0$, то $x \in \overset{\circ}{Q}$, и $T_Q(x) = \mathbb{R}^N$, $N_Q(x) = \{0\}$. Установим структуру конусов $T_Q(x), N_Q(x)$ в предположении $g(x) = 0$.

Предложение 1 [2]. *Пусть множество Q определено равенством (2.5) с функцией g из $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Если $g(x) = 0, 0 \notin \partial g(x)$, то*

$$T_Q(x) \supset \{v \in \mathbb{R}^N,\ g^\circ(x;v) \leqslant 0\}, \tag{6}$$

$$N_Q(x) \subset \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \lambda\ \partial g(x); \tag{7}$$

для регулярной в точке x функции g в (2.6), (2.7) имеют место равенства.

Отметим, что условие $0 \notin \partial g(x)$ равносильно существованию элемента v из $\mathbb{R}^N$, для которого $g^\circ(x;v) < 0$. Это условие обеспечивает соотношения

$$\overset{\circ}{T}_Q(x) \neq \varnothing, \qquad \overset{\circ}{Q} \neq \varnothing.$$

Вектор v из $\mathbb{R}^N$ называется *гиперкасательной* к множеству Q в точке Q в точке $x \in Q$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$y + tw \in Q \quad \text{для всех } y \in B(x,\varepsilon) \cap Q, w \in B(v,\varepsilon), t \in (0,\varepsilon).$$

Множество всех гиперкасательных векторов к множество Q в точке x обозначим символом $K_Q(x)$.

Предложение 2 [2]. *Если $\overset{\circ}{T}_Q(x) \neq \varnothing$, то $K_Q(x) = \overset{\circ}{T}_Q(x)$ и отображение $y \to N_Q(y) \quad (y \in Q)$ замкнуто в точке x, т. е. если $x_i \in Q$, $x_i^* \in N_Q(x_i)$, $x_i \to x$, $x_i^* \to x^*$, то $x^* \in N_Q(x)$.*

2. Критические точки функций на телесных множествах. Отображение $A\colon M \subset \mathbb{R}^N \to Kv(\mathbb{R}^N)$ будем называть *многозначным отображением* множества M в пространство $\mathbb{R}^N$. Говорят, что отображение $A\colon M \to Kv(\mathbb{R}^N)$ *полунепрерывно сверху* в точке $x \in M$, если

$$\lim_{y \to x} \Theta(A(y), A(x)) = 0.$$

Если A полунепрерывно сверху в каждой точке множества M, то A называют *полунепрерывным сверху* на M. Обозначим через $S(M)$ совокупность полунепрерывных сверху отображений из M в $\mathbb{R}^N$.

Лемма 2. *Пусть* $M_0 \subset M \subset \overline{M}_0, A_0-$ *отображение, ставящее в соответствие каждой точке* x *из* M_0 *множество* $A_0(X) \subset \mathbb{R}^N$, *причём для каждого множества* $M_1 \subset M_0$ *множество*

$$A_0(M_1) \stackrel{def}{=} \bigcup_{x \in M_1} A_0(x)$$

ограничено. Тогда отображение

$$A(x) \stackrel{def}{=} \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} \left(\bigcup_{y \in B(x,\varepsilon) \cap M_0} A_0(y) \right), \tag{8}$$

принадлежит классу $S(M), A_0(x) \subset A(x) \, \forall x \in M_0$ *и для любого отображения* A_1 *класса* $S(M)$, *обладающего свойством* $A_0(x) \subset A_1(x) \, \forall x \in M_0$, *имеет место включение* $A(x) \subset A_1(x) \, \forall x \in M$.

Лемма 2 легко следует из определения класса $S(M)$. Достаточно заметить, что равенство (8) эквивалентно равенству

$$s(v, A(x)) = \lim_{y \to x} s(v, A_0(y)) \, \forall v \in \mathbb{R}^N. \tag{9}$$

Если в условиях леммы 2 $M = \overset{\circ}{M}$ и $A_0 \in S(M_0)$, то $A(x) = A_0(x) \forall x \in M_0$; в этой ситуации A естественно назвать *минимальным продолжением* отображения A_0 с M_0 на M.

Множество $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}^N$ назовём *конусом*, если оно выпукло, замкнуто и $\lambda \mathscr{K} = \mathscr{K} \, \forall \lambda > 0$. Вместе с $\mathscr{K}$ является конусом и множество

$$\mathscr{K}' \stackrel{def}{=} \{x^* \in \mathbb{R}^N, (x, x^*) \leqslant 0 \, \forall x \in \mathscr{K}\},$$

называемое *двойственным* конусом. Как известно, $(\mathscr{K}')' = \mathscr{K}$. В частности, двойственными друг к другу являются конусы $T_Q(x)$ и $N_Q(x)$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathscr{A} \in Kv(\mathbb{R}^N), \mathscr{K}$ *– конус в пространстве* $\mathbb{R}^N, \mathscr{M} = \mathscr{A} + \mathscr{K}$ *и* $0 \notin \mathscr{M}$. *Тогда существует вектор* v, *обладающий свойствами*

$$v \in \mathscr{K}', |v| = 1, s(v, \mathscr{A}) = \min_{u \in \mathscr{K}' \cap B} s(u, \mathscr{A}) = -d_M(0) < 0. \tag{10}$$

◀ Множество $\mathscr{M} = \mathscr{A} + \mathscr{K}$ замкнуто. Действительно, пусть $x_n \in \mathscr{M}$ и $x_n \to x$. Тогда $x_n = y_n + z_n$, где $y_n \in \mathscr{A}, z_n \in \mathscr{K}$. Поскольку $\mathscr{A}$ – компактное множество, то, не нарушая общности, можно считать последовательность y_n сходящейся к некоторому элементу y из $\mathscr{A}$. Но тогда

$$z_n = x_n - y_n \to z = x - y.$$

Очевидно, что $z \in \mathscr{K}, x = y + z \in \mathscr{M}$. Столь же просто устанавливается выпуклость множества $\mathscr{M}$. Следовательно, $\mathscr{M} \in Cv(\mathbb{R}^N)$.

Ввиду замкнутости множества $\mathscr{M}$ существует элемент w этого множества с наименьшей евклидовой нормой. В частности, при любом x из $\mathscr{M}$ функция

$$\varphi(t) = |w + t(x - w)|^2$$

достигает своего минимума на отрезке $[0, 1]$ в точке 0. Это влечёт за собой неравенство $\varphi'(0) \geqslant 0$, эквивалентное характеризующему элемент w соотношению

$$(w, x - w) \geqslant 0 \, \forall x \in \mathscr{M}; \tag{11}$$

при этом $|w| = d_{\mathscr{M}}(0) > 0$.

Положим $v = -w/|w|$. Из определения v и (11) вытекает неравенство

$$-|w| - (v, y) \geqslant (v, z) \, \forall y \in \mathscr{A}, z \in \mathscr{K}$$

Ввиду произвольности элементов $y \in \mathscr{A}, z \in \mathscr{K}$ получаем отсюда соотношение $-|w| \geqslant s(v, \mathscr{A}) + s(v, \mathscr{K})$. Неравенство $s(v, \mathscr{K}) < \infty$ возможно лишь в случае $v \in \mathscr{K}, s(v, \mathscr{K}) = 0$. Следовательно, $s(v, \mathscr{A}) \leqslant -|w|$.

Справедлива цепочка соотношений, в которой $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{R}^N; |z| \leqslant 1\}$ – замкнутый шар радиуса 1 с центром в нулевой точке:

$$\min_{u \in \mathscr{K}' \cap \mathbb{B}} s(u, \mathscr{A}) = \min_{u \in \mathscr{K} \cap \mathbb{B}} \max_{y \in \mathscr{A}} (u, y) \geqslant \max_{y \in \mathscr{A}} \min_{u \in \mathscr{K}' \cap \mathbb{B}} (u, y) =$$

$$= \max_{x \in \mathscr{M}} \min_{u \in \mathscr{K} \cap \mathbb{B}} (u, x) \geqslant \max_{x \in \mathscr{M}} \min_{u \in \mathbb{B}} (u, x) = \max_{x \in \mathscr{M}} (-|x|) = -|w|.$$

Поскольку $s(v, \mathscr{A}) = -|w|$, то v минимизирует функцию $s(\cdot, \mathscr{A}$ на множестве $\mathscr{K}' \cap B$ и $s(v, \mathscr{A}) = -|w|$ ►.

Следствие. *Включение* $0 \in \mathscr{A} + \mathscr{K}$ *эквивалентно неравенству*

$$s(u, \mathscr{A}) \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathscr{K}'.$$

Зафиксируем такое замкнутое множество $Q \subset \mathbb{R}^N$ с непустой внутренностью $\mathring{Q}$, что $K_Q(x) \neq \varnothing$ для любого x из Q. Отсюда следует равенство $Q = \overline{\mathring{Q}}$: для любой точки $x \in Q$ существует последовательность x_i из $\mathring{Q}$, сходящаяся к x.

Пусть $M \subset Q, M \neq \varnothing, A$ – отображение класса $S(M)$. Элемент x из M назовём *особой точкой* отображения A, если $0 \in A(x) + N_Q(x)$. Очевидно, что x – особая точка отображения A в том и только том случае, если

$$s(u, A(x)) \geqslant 0 \, \forall u \in T_Q(x). \tag{12}$$

Неравенство (12) для $x \in \mathring{Q}$ эквивалентно включению $0 \in A(x)$. Аналогичное утверждение верно в случае $A(x) \subset -T_Q(x)$.

Введённое выше понятие особой точки естественным образом появляется при исследовании положений равновесия механической системы с конфигурационным пространством Q в поле сил $F(x) = A(x)(x \in Q)$. Известный принцип виртуальных перемещений [52] означает, что положения равновесия в поле сил A совпадают с особыми точками отображения A. Далее основное внимание уделяется задачам с потенциальным оператором A.

Предложение 3. *Пусть $U = \overset{\circ}{U}$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, $f \in \Lambda_{loc}(U)$. Тогда градиентное отображение $x \to \partial f(x)$ принадлежит классу $S(U)$.*

Предложение 3 следует из установленных в [2] результатов. Там же показано, что если функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L, то $|x^*| \leqslant L\, \forall x^* \in \partial f(x)$, $x \in U$ и, таким образом, отображение ∂f ограничено на U.

Это замечание вместе с леммой 2 позволяет определить обобщеный градиент функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$ на границе множества Q. В самом деле, согласно предложению 3 градиентное отображение $\partial f\colon \overset{\circ}{Q} \to Kv(\mathbb{R}^N)$ принадлежит классу $S(\overset{\circ}{Q})$. Сохраним обозначение ∂f за его минимальным продолжением с $\overset{\circ}{Q}$ на Q. Таким образом,

$$\partial f(x) = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{co} \left(\bigcup_{y \in \overset{\circ}{Q} \cap B(x,\epsilon)} \partial f(y) \right) \qquad (x \in Q). \tag{13}$$

Положим $f^\circ(x,v) \overset{def}{=} s(v, \partial f(x)) \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^N)$. Равенство (13) эквивалентно соотношению

$$f^\circ(x;v) = \lim_{y \to x, y \in \overset{\circ}{Q}} f^\circ(y;v) \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^N). \tag{14}$$

Соотношение (14) может быть положено в основу определений $\partial f(x)$ и $f^\circ(x;v)$. Из (1.11) вытекает

Лемма 4. *Пусть $f \in \Lambda_{loc}(U), x(\cdot)\colon (\alpha,\beta) \to Q$ – векторная функция, дифференцируемая в точке $t \in (\alpha,\beta)$. Тогда справедлива оценка*

$$D^* f(x(t)) \leqslant f^\circ(x(t), x'(t)), \tag{15}$$

в которой $D^* f(x(t))$ – верхняя правая производная функции $f(x(t))$ в точке t.

Напомним, что верхней правой производной действительнозначной функции φ в точке t называют число

$$D^*\varphi(t) \overset{def}{=} \varlimsup_{h \to +0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Критической точкой функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$ назовём особую точку градиентного отоображения ∂f. Таким образом, x – критическая точка функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$, если $0 \in \partial f(x) + N_Q(x)$. Это эквивалентно неравенству $f^\circ(x;v) \geqslant 0\, \forall v \in T_Q(x)$. Число $f(x)$ – значение функции f в критической точке x – назовём *критическим значением* функции f. Точки множества Q, не являющиеся критическими точками, будем называть *регулярными* точками f. Число c назовём *регулярным* значением функции f, если поверхность уровня $\{x \in Q, f(x) = c\}$ не содержит критических точек этой функции.

Теорема 1. *Если x – точка локального минимума функции $f \in \Lambda_{loc}(Q)$, то x – критическая точка функции f.*

◀ Если x – точка локального минимума функции $f\colon Q \to \mathbb{R}$, то $f(y) \geqslant f(x)$ при $y \in Q \cap B(x, \delta)$, где δ – некоторое положительное число. Фиксируем v из $T_Q(x)$ и положительную бесконечно малую последовательность t_i. Существует последовательность $v_i \in \mathbb{R}^N$, сходящаяся к v и такая, что $x + t_i v_i \in Q \, \forall i \in \mathbb{N}$. Так как x – точка локального минимума функции f, то $f(x + t_i v_i) \geqslant f(x)$ при больших i. Из (1.11) следует неравенство $f^\circ(x; v) \geqslant 0$. Ввиду произвольности элемента v из $T_Q(x)$ приходим к неравенству $f^\circ(x; v) \geqslant 0 \, \forall v \in T_Q(x)$. Следовательно, x – критическая точка функции f. ▶

Если x – точка локального максимума функции f из $\Lambda_{loc}(Q)$ и $x \in \overset{\circ}{Q}$, то x – критическая точка функции f. Действительно, в этом случае

$$T_Q(x) = -T_Q(x) = \mathbb{R}^N$$

и вытекающее из теоремы 2.1 неравенство

$$-f^\circ(x; v) \geqslant 0 \, \forall v \in T_Q(x)$$

влечёт за собой оценку

$$f^\circ(x; v) \geqslant 0 \, \forall v \in T_Q(x).$$

В общем случае граничная точка максимума не является критической. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть линейную функцию

$$f(x) = (p, x) \, (p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$$

на шаре $B = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leqslant 1\}$.

Теорема 2. *Если $Q \in Cv(\mathbb{R}^N)$, $f\colon Q \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, то критическая точка функции f реализует её абсолютный минимум.*

◀ Пусть x – критическая точка функции f, $y \in Q, x^* \in \partial f(x)$. Тогда в силу (1.19) верно неравенство

$$f(y) - f(x) \geqslant (x^*, y - x).$$

Поскольку Q – выпуклое множество, то $y - x \in T_Q(x)$, следовательно,

$$f^\circ(x; y - x) \geqslant 0.$$

Ввиду произвольности x^* из $\partial f(x)$ мы можем считать, что

$$(x^*, y - x) = f^\circ(x; y - x) \geqslant 0.$$

Таким образом,

$$f(y) - f(x) \geqslant 0 \, \forall y \in Q \, ,$$

т. е. x – точка абсолютного минимума функции f на множестве Q. ►

Предположения выпуклости в теореме 2 существенны. В общем случае множество точек экстремума составляет лишь часть множества критических точек. Важную роль в приложениях играют, в частности, критические точки минимаксного типа; их изучению посвящена глава 2.

Обозначим через $\mathscr{C}(f, Q)$ множество критических точек функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$. Структура множества $\mathscr{C}(f, Q)$ может быть достаточно сложной. Без труда устанавливается замкнутость $\mathscr{C}(f; Q)$. Этот факт может быть выведен из более общего утверждения.

Лемма 5. *Пусть* $M = \overline{M} \subset Q, A \in S(M)$. *Тогда множество особых точек отображения* A *замкнуто.*

◄ Пусть $x_i \, (i = 1, 3, \cdots)$ – особые точки отображения A класса $S(M)$ и $x_i \to x \in M$. Поскольку $0 \in A(x_i) + N_Q(x_i)$, то существуют такие элементы $x_i \in A(x_i), y_i \in N_Q(x_i)$, что $x_i^* + y_i^* = 0$. Без ограничения общности можно считать последовательность x_i^* сходящейся к некоторому элементу x^* из $A(x)$. Но тогда и последовательность y_i^* сходится к элементу $y^* = -x^*$. Ввиду замкнутости отображения N_Q (предложение 2.2) $y^* \in N_Q(x)$, поэтому $0 \in A(x) + N_Q(x)$.►

Принятое выше предположение $\overset{\circ}{Q} \neq \varnothing$ может быть ослаблено. Достаточно, например, чтобы Q было телесным относительно минимального линейного многообразия, содержащего множество Q. В этом случае Q называют относительно телесным множеством; его относительную внутренность обозначают символом riQ. Относительно телесным является любое выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$. Легко привести примеры невыпуклых множеств с непустой относительной внутренностью.

1.3 Правило множителей Лагранжа

1. Основная теорема. Результаты предшествующего параграфа распространяются на более сложную задачу с дополнительными ограничениями типа равенств и неравенств

$$g_0(x) \to \min, \qquad x \in Q \, , \tag{1}$$

$$g_i(x) = 0 \qquad (i \in I_0) \, , \tag{2}$$

$$g_i(x) \leqslant 0 \qquad (i \in I_+) \, . \tag{3}$$

Здесь I_0, I_+ – непересекающиеся множества натуральных чисел (не исключается случай, когда одно из этих множеств пусто), функции g_i определены на выпуклом замкнутом и телесном множестве Q. Для формулировки аналогов теорем 2.1, 2.2 введём некоторые понятия и обозначения. Ниже $I = I_0 \cup I_+, I_1 = \{0\} \cup I$. Ненулевой набор $\Lambda = (\lambda_i)|_{i \in I_1}$ назовём *допустимым*, если

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad (i \in \{0\} \cup I_+) \, .$$

Допустимый набор Λ будем именовать *нормированным*, если его длина

$$|\Lambda| \stackrel{def}{=} \left(\sum_{i\in I_1} \lambda_i^2\right)^{1/2} = 1\,.$$

Введём в рассмотрение множество

$$X = \{x \in Q,\, g_i(x) = 0\,(i \in I_0), \quad g_i(x) \leqslant 0\,(i \in I_+\}).$$

Задача (1) - (3) может быть записана в стандартной форме

$$g_0(x) \to \min, \qquad x \in X. \tag{4}$$

Это позволяет обычным способом ввести понятия решения и локального решения задачи (1) - (3). Именно, элемент z из X называют решением задачи (1) - (3), если $g(z) \leqslant g(x)\,\forall x \in X$, и локальным решением данной задачи, если $g(z) \leqslant g(x)\,\forall x \in X \cap B(z,\delta)$ при некотором $\delta > 0$.

Полезно заметить, что совокупность ограничений (2), (3) можно задать одним ограничением типа равенства. Введём в рассмотрение функцию

$$h(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & (t \geqslant 0) \\ 0, & (t < 0)\,. \end{cases}$$

Функция $h(t)$ дифференцируема и

$$h'(t) = \begin{cases} t, & (t \geqslant 0) \\ 0, & (t < 0)\,. \end{cases}$$

Производная $h'(t)$ непрерывна на всей оси. Положим

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i\in I_0} g_i^2(x) + \sum_{i\in I_+} h(g_i(x))\,. \tag{5}$$

Функция Φ определена на множестве Q. Как нетрудно видеть, равенство $\Phi(x) = 0$ эквивалентно соотношениям (3.2), (3.3).

Всюду далее $g_i(i \in I_1)$ – функции класса $\Lambda_{loc}(Q)$. Элемент x из Q называют *экстремалью* задачи (3.1) - (3.3), если существут такой допустимой набор $\Lambda = (\lambda_i) \quad (i \in I_1)$, что справедливо *условие стационарности*

$$0 \in \sum_{i\in I_1} \lambda_i \partial g_i(x) + N_Q(x), \tag{6}$$

и выполнено *условие дополнительной нежёсткости*

$$\lambda_i g_i(z) = 0 \qquad (i \in I_+). \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть z – решение задачи (1) - (3), функции g_i принадлежат классу $\Lambda_{loc}(Q)$. Тогда z – экстремаль задачи* (1)- (3).

◀Вначале будем считать, что Q – компактное выпуклое множество. В предположениях теоремы определяемая равенством (5) функция Φ принадлежит классу $\Lambda_{loc}(Q)$. Справедливо включение

$$\partial\Phi(x) \subset \sum_{i\in I_1} \mu_i \partial g_i(x),$$

в котором $\mu_0 = 1, \quad \mu_i = g_i(x) \quad (i \in I_0), \quad \mu_i = h'(g_i(x)) \quad (i \in I_+)$.

Каждому натуральному числу ν поставим в соответствие функцию

$$\Phi_\nu(x) \stackrel{def}{=} g_0(x) + \nu\Phi(x) + \frac{|x-z|^2}{2}$$

и экстремальную задачу

$$\Phi_\nu(x) \to \min, \quad x \in Q\,. \tag{8}$$

Из теоремы Вейерштрасса вытекает существование решения x^ν задачи (8). Имеет место неравенство $\Phi_\nu(x^\nu) \leqslant \Phi_\nu(z)$ или более побробно

$$g_0(x_\nu) + \nu\Phi(x^\nu) + \frac{|x^\nu - z|^2}{2} \leqslant g_0(z)\,. \tag{9}$$

В частности, из (9) вытекает оценка $\nu\Phi(x^\nu) \leqslant g_0(z) - g_0(x^\nu)$ и равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \Phi(x^\nu) = 0\,.$$

Последовательность x^ν принадлежит Q. Если $\bar z$ – предельная точка этой последовательности, то $\bar z \in Q$ и $\Phi(\bar z) = 0$. Из (9) следует неравенство

$$g_0(\bar z) + \frac{|\bar z - z|^2}{2} \leqslant g_0(z)\,.$$

С другой стороны, поскольку z – решение задачи (1)-(3), то $g_0(z) \leqslant g_0(\bar z)$, поэтому $\bar z = z$. Всякая предельная точка последовательности x^ν совпадает с z. Это означает, что $x^\nu \to z$.

Так как x^ν – решение задачи (8), то $0 \in \partial\Phi'_\nu(x^\nu) + N_Q(x^\nu)$. Отсюда вытекает включение

$$-\sum_{i\in I_1} \mu_i^\nu a_i^\nu - (x^\nu - z) \in N_Q(x^\nu)\,, \tag{10}$$

где $a_i^\nu \in \partial g_i(x^\nu) \quad (i \in I_1,\, \nu \in \mathbb{N})$,

$$\mu_0^\nu = 1, \quad \mu_i^\nu = g_i(x^\nu) \quad (i \in I_0), \quad \mu_i^\nu = h'(g_i(x^\nu)) \quad (i \in I_+)\,. \tag{11}$$

Положим

$$K_\nu = \left(\sum_{i\in I_1}(\mu_i^\nu)^2\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $K_\nu \geqslant 1$. Разделив (10) на K_ν, приходим к включению

$$-\sum_{i\in I_1}\lambda_i^\nu a_i^\nu - \frac{1}{K_\nu}(x^\nu - z) \in N_Q(x^\nu)\,, \tag{12}$$

в котором

$$\lambda_i^\nu = \frac{\mu_i^\nu}{K_\nu}\,, \quad \sum_{i\in I_1}(\lambda_i^\nu)^2 = 1\,. \tag{13}$$

При любом i последовательность $\lambda_i^\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$ ограничена. Также являются ограниченными и векторные последовательности $a_i^\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$. Не нарушая общности, можно считать, что

$$\lambda_i^\nu \to \lambda_i, \quad a_i^\nu \to a_i \quad \forall i$$

при $\nu \to \infty$. Из (13) вытекает равенство

$$\sum_{i\in I_1}\lambda_i^2 = 1\,,$$

в силу которого хотя бы одно из чисел λ_i отлично от нуля. Поскольку $a_i^\nu \in \partial g(x^\nu)$ и $x^\nu \to z, a_i^\nu \to a_i$, то $a_i \in \partial g_i(z)\,\forall i \in I_1$.

Переходя в (12) к пределу при $\nu \to \infty$, получаем включение

$$-\sum_{i\in I_1}\lambda_i\; a_i \in N_Q(z)\,. \tag{14}$$

Если $g_i(z) = 0$, то, очевидно, $\lambda_i g_i(z) = 0$ и условие (7) выполнено. Если же $g_i(z) < 0$, то $g_i(x^\nu) < 0$ при достаточно больших ν, следовательно,

$$\lambda_i^\nu = \frac{\nu}{K_\nu}\; h'(g_i(x^\nu)) = 0\,,$$

поэтому условие (7) выполнено и в этом случае.

В силу (13)

$$\lambda_0^\nu = \frac{1}{K_\nu} \geqslant 0, \quad \lambda_i^\nu \geqslant 0 \quad (i \in I_+)\,,$$

поэтому $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_i \geqslant 0 \forall i \in I_+$. Это означает, что набор $\Lambda = (\lambda_i)\big|_{i\in I_1}$ является искомым. Теорема в случае компактного множества Q доказана (и даже в более сильной формулировке – набор Λ оказался нормированным).

Случай неограниченного множества Q легко сводится к рассмотренному. Достаточно заменить множество Q множеством $Q_1 = Q \cap B(z, 1)$ и воспользоваться равенством $N_{Q_1}(z) = N_Q(z)$, вытекающим из свойства локальности нормального конуса (см. § 2).▶

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существуют такой допустимый набор $\Lambda = (\lambda_i)$ и такие векторы $a_i \in \partial g_i(z)\,(i \in I_1)$, что справедливы условия дополнительной нежёсткости и элемент z является решением экстремальной задачи*

$$\sum_{i\in I_1} \lambda_i(a_i, v) \to \min, \quad v \in Q\,. \tag{15}$$

Числа λ_i называют *множителями Лагранжа*, а сам переход от задачи (1)-(3) к задаче (15) – *правилом множителей Лагранжа.* С иными версиями этого правила и с другими доказательствами теоремы 1 и более общих утверждений можно познакомиться, например, в [1], [5], [10], [19], [25].

2. Обсуждение правила множителей Лагранжа. Варианты теоремы 1 сохраняются, если одно из множеств I_0, I_+ пусто. Например, верна

Теорема 2. *Пусть z – решение задачи (3.1), (3.3). Тогда найдутся такие неотрицательные числа $\lambda_i\,(i \in \{0\} \cup I_+$, не все равные нулю, что выполнены соотношение (6) с $I_1 = \{0\} \cup I_+$ и условия дополняющей нежёсткости (7).*

Полезно следующее дополнение к теореме 2.

Теорема 3. *Пусть функции $g_i\,(i \in \{0\} \cup I_+$ выпуклы, $\lambda_i \geqslant 0\,(i \in I_+), \lambda_0 > 0$. Пусть*

$$z \in Q, \qquad g_i(z) \leqslant 0, \quad \lambda_i g_i(z) = 0 (i \in I_+)$$

и z есть решение задачи (15) с $I_1 = \{0\} \cup I_+$. Тогда z является решением задачи (3.1), (3.3).

◀ Функция

$$g(x) = \sum_{i\in\{0\}\cup I_+} \lambda_i g_i(x)$$

выпукла как неотрицательная линейная комбинация выпуклых функций. Поскольку z есть решение задачи (15), то $-g'(z) \in N_Q(z)$. В силу теоремы 2 $g(x) \geqslant g(z) \forall x \in Q$. Используя это неравенство и условие дополнительной нежёсткости, получаем последовательно соотношения

$$\sum_{i\in\{0\}\cup I_+} \lambda_i g_i(x) \geqslant \sum_{i\in\{0\}\cup I_+} \lambda_i g_i(z) = \lambda_0 g_0(z) \quad (x \in Q).$$

Из этого соотношения вытекает, что если $x \in Q$ и $g_i(x) \leqslant 0 \quad (i \in I_+)$, то $\lambda_0 g_0(x) \geqslant \lambda_0 g_0(z)$. Поскольку $\lambda_0 > 0$, то z – решение задачи (3.1), (3.3). ▶

В качестве множества Q можно взять всё пространство $\mathbb{R}^N$. В приложениях Q – множество, имеющее достаточно простую структуру, что позволяет без труда описать конус опорных функционалов $N_Q(z)$. В качестве примера рассмотрим случай, когда множество Q определено равенством

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n, \Phi_1(x) \leqslant 0, \cdots, \Phi_p(x) \leqslant 0\}\,,$$

где $\Phi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклые дифференцируемые функции. Пусть $z \in Q$ и множество $I(z) = \{i,\, \Phi_i(z) = 0\}$ непусто. При достаточно необременительных предположениях любой линейный функционал из $N_Q(z)$ допускает представление

$$l = \sum_{i \in I(z)} \lambda_i \Phi_i'(z)\,, \tag{16}$$

в котором λ_i – неотрицательные числа. Например, формула (16) справедлива, если функции Φ_i аффинны или выполнено условие сильной совместности: существует элемент $\bar{v}$, для которого $\Phi_i(\bar{v}) < 0 \forall i$ (более общие факты доказываются ниже). В частности, представление (16) можно применить к случаю, когда Q есть прямое произведение отрезков действительной оси (именно этот частный случай важен во многих конструкциях).

Предположение о замкнутости множества Q на самом деле является лишним. Ценою некоторого усложнения в доказательстве можно от этого предположения избавиться [2], [9], [13], [17].

В правиле множителей Лагранжа возможна ситуация, когда $\lambda_0 = 0$. Это означает, что в необходимом условии минимума отсутствует сама минимизируемая функция g_0. Любое предположение, гарантирующее неравенство $\lambda_0 > 0$, называют [13], [19] *условием регулярности* данных задачи (1)-(3). Регулярность ограничений (2), (3) позволяет в правиле множителей Лагранжа взять λ_0, равным 1.

Не обсуждая здесь вопрос о регулярности ограничений (2), (3) с максимальной общностью, ограничимся случаем, когда $Q = \mathbb{R}^N$, $I_0 = \varnothing$ (ограничения типа равенств (2) отсутствуют), а функции $g_i \to \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\,(i \in I_+)$ выпуклы. Сильная совместность ограничений (5) гарантирует неравенство $\lambda_0 > 0$. Именно, пусть существует элемент $\bar{v}$ из Q, для которого $g_i(\bar{v}) < 0$. Предположение $\lambda_0 = 0$ влечёт за собой неравенство

$$\sum_{i \in I_+} \lambda_i (a_i, (\bar{v} - z)) \geqslant 0\,, \tag{17}$$

в котором $a_i \in \partial g_i(z)\,(i \in I_+)$ и хотя бы одно из чисел λ_i положительно. Поскольку $g_i(\bar{v}) < 0 \forall i$, то

$$\sum_{i \in I_+} \lambda_i g_i(\bar{v}) < 0\,.$$

С другой стороны, имеют место оценки

$$\sum_{i \in I_+} \lambda_i g_i(\bar{v}) \geqslant \sum_{i \in I_+} \lambda_i g_i(\bar{z}) + \sum_{i \in I_+} \lambda_i (a_i, (\bar{v} - z)) \geqslant 0\,,$$

вытекающие из (7), (17). Полученное противоречие доказывает неравенство $\lambda_0 > 0$.

Предположение $g_i(\bar{v}) < 0\,\forall i \in I_+$ называют *условием Слейтера*. Оно гарантирует включение $\bar{v} \in \overset{\circ}{Q}$ и в определённом смысле устойчивую совместность ограничений (2).

Лемма 1. *Пусть функции $g_i\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}\,(i \in I)$ выпуклы и выполнено условие Слейтера. Пусть множество Q определено соотношением*

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N, g_i(x) \leqslant 0,\, (i \in I)\}.$$

Пусть $z \in Q$ и множество $I(z) = \{i \in I,\, g_i(z) = 0\}$ непусто. Тогда любой линейный функционал l из $N_Q(z)$ допускает представление

$$l = \sum_{i \in I(z)} \lambda_i a_i\,, \tag{18}$$

в котором $a_i \in \partial g_i(z), \lambda_i$ – неотрицательные числа.

◀ Если $l \in N_Q(z)$, то элемент z есть решение экстремальной задачи

$$-l(x) \to \min,\, x \in Q.$$

Применим к данной задаче правило множителей Лагранжа. В рассматриваемом случае это приводит к соотношениям

$$-\lambda_0 l + \sum_{i \in I} \lambda_i a_i, \text{ в которых } a_i \in \partial g_i(z),\, \lambda_i \geqslant 0,\, \lambda_i g_i(z) = 0. \tag{19}$$

Условие Слейтера влечёт за собой неравенство $\lambda_0 > 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Из (19) очевидным образом следует (18). ▶

1.4 Теоремы об очистке

1. Задача на минимакс (необходимые условия). Пусть f – функция, определённая на множестве $X \subset \mathbb{R}^N$. Напомним, что её надграфиком (эпиграфом) называют подмножество $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$, обозначаемое символом $epi f$ и определяемое равенством

$$epi f := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, x \in X,\, y \geqslant f(x) \right\}.$$

Лемма 1. *Задача*

$$f(x) \to \min, \quad x \in X \tag{1}$$

эквивалентна задаче

$$y \to \min, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in epi f \tag{2}$$

в следующем смысле: если z – решение задачи (1), то вектор с компонентами $z, f(z)$ есть решение задачи (2), верно и обратное: первая компонента решения задачи (2) есть решение задачи (1)

◀ Доказательство предоставляется провести самостоятельно; геометрически факт совершенно очевиден. ▶

Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^N$ задано семейство функций $f_t : X \to \mathbb{R}$ $(t \in T)$, T – конечное множество индексов. Функция

$$f(x) = \max_{t \in T} f_t(x)$$

также определена на множестве X. Задача минимизации функции f на множестве X записывается в виде

$$\max_{t \in T} f_t(x) \to \min, \quad x \in X \tag{3}$$

и называется *задачей на минимакс*. Она может быть сведена к задаче на условный экстремум. Сопоставим задаче (3) задачу

$$y \to \min, \tag{4}$$

$$f_t(x) - y \leqslant 0,\ x \in X,\ t \in T. \tag{5}$$

Лемма 2. *а) Если z – решение задачи (3), то $\begin{pmatrix} z \\ f(z) \end{pmatrix}$ – решение задачи (4),(5); б) если $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$ – решение задачи (4),(5), то z – решение задачи (13) и $y = f(z)$.*

◀Из определения функции f вытекает равенство

$$epi f \ = \bigcap_{t \in T} epi f_t \,.$$

Теперь доказываемое утверждение следует из леммы 1.▶

Теорема 1. *Пусть X – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^N, z$ – решение задачи (3) и функции $f_t \in \Lambda_{loc}(X)$. Пусть $J(z) := \{t \in T, f_t(z) = f(z)\}$. Тогда существуют такие неотрицательные числа μ_j ($j \in J(z)$, что выполнены соотношения*

$$\sum_{j \in J(z)} \mu_j a_j = 0, \quad \sum_{j \in J(z)} \mu_j = 1, \tag{6}$$

в которых $a_j \in \partial f_j(z)\,(j \in J(z))$.

◀ Определим на множестве $X \times \mathbb{R}$ функции $g_0(x, y) = y$, $g_t(x, y) = f_t(x) - y$ $(t \in T)$. Задача (4),(5) может быть записана в виде

$$g_0(x, y) \to \min, \tag{4$'$}$$

$$g_i(x, y) \leqslant 0, \quad t \in T. \tag{22$'$}$$

Функции $g_i(x,y)$ локально липшицевы. При этом

$$\partial g_0(x,y) = (0,1),\ \partial g_t(x,y) = (\partial f_t(x), -1)\ (t \in T).$$

В рассматриваемой ситуации выполнено условие регулярности (доказать самостоятельно). Следовательно, существуют неотрицательные числа λ_t $(t \in T)$, удовлетворяющие соотношениям

$$a_0 + \sum_{t\in T} \hat{\lambda}_t a_t = 0, \tag{7}$$

$$\lambda_t g_t(z, f(z)) = 0\ (t \in T), \tag{8}$$

в которых $a_i \in \partial g_i(z, f(z))$. Из условия (8) вытекает, что $\lambda_t = 0$, если $f_t(z) < f(z)$. Равенство (7) влечёт соотношения (6) с $\mu_j = \lambda_j$. Достаточно спроектировать (7) на $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}$ сответственно. Проектирование на $\mathbb{R}^N$ влечёт первое из соотношений (6), проектирование на $\mathbb{R}$ приводит ко второму из равенств (6).▶

2. Теоремы об очистке. Напомним следующие обозначения: coM – выпуклая оболочка множества M, $conM$ – коническая оболочка множества A. Читателю предлагается в качестве самостоятельного упражнения

Задача 1. *Пусть отображение* Φ *сопоставляет* x *из* $\mathbb{R}^N$ *элемент* $\Phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ *из* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. *Доказать эквивалентность следующих включений:* $x \in co\,M$ *и* $\Phi(x) \in con\,\Phi(M)$.

Ниже будет использоваться

Лемма 1 (Лемма Каратеодори). *Любой ненулевой элемент* a *из* $con\,A$ *допускает представление*

$$a = \sum_{i\in J} \mu_i a_i\,,$$

в котором $a_i \in A$, $\mu_i > 0\ \forall i \in J$ *и система векторов* a_i $(i \in J)$ *линейно независима.*

◀ Поскольку $a \in con\,A$, то a есть коническая комбинация элементов a_i из A, т. е.

$$a = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i\,,$$

где $\lambda_i > 0\ \forall i \in I$. Если система векторов a_i $(i \in I)$ линейно независима, то всё доказано. В противном случае найдутся числа t_i $(i \in I)$, одно из которых положительно, такие что

$$\sum_{i\in I} t_i a_i \ = \ 0\,.$$

Очевидно равенство

$$a = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \lambda t_i) a_i\,.$$

Если $\lambda = \min\{\lambda_i/t_i\}$ $(t_i > 0)$, то все числа $\lambda_i - \lambda t_i$ неотрицательны и хотя бы одно из них равно 0. Это даёт возможность представить a в виде конической комбинации системы элементов a_i $(i \in I_1)$, где I_1 – собственное подмножество I. Так как I – конечное множество, то после конечного числа шагов придём к требуемому результату.▶

Следствие 1. *Любой элемент из* $\operatorname{con} A$ *есть коническая комбинация не более чем* N *элементов из* $A \subset \mathbb{R}^N$.

Следствие 2. *Любая точка из выпуклой оболочки множества* $M \subset \mathbb{R}^N$ *есть выпуклая комбинация не более чем* $N+1$ *точек из* M.

◀ В пространстве $\mathbb{R}^N$ всякая линейно независимая система содержит не более N элементов. Это замечание влечёт за собой следствие 1. Доказательство следствия 2 опирается на результат приведённнной в начале этого пункта задачи. ▶

Далее рассматривается задача выпуклой оптимизации

$$f_0(x) \to \min\,, \tag{8}$$

$$f_t(x) \leqslant 0, \quad (i \in T,\, x \in \mathbb{R}^N)\,. \tag{9}$$

Здесь f_0 и $f_t(t \in T)$ – выпуклые функции, определенные и конечные на всём пространстве $\mathbb{R}^N$, T – конечное множество. Предполагается, что решение z задачи (8),(9) существует.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие Слейтера. Тогда существует такое подмножество* T_+ *множества* T*, что*

1) z *реализует абсолютный минимум функции* f_0 *при условиях*

$$f_t(x) \leqslant 0, \quad (t \in T_+,\, x \in \mathbb{R}^N)\,. \tag{9_+;}$$

2)$f_t(z) = 0$ $(t \in T_+)$;

3) $|T_+| \leqslant N$, *т. е. множество* T_+ *содержит не более* N *элементов.*

◀ В силу результатов 1.3 существуют такие неотрицательные числа λ_t $(t \in T)$, что справедливо условие стационарности

$$a_0 + \sum_{t \in T} \lambda_i a_t = 0, \tag{10}$$

в котором $a_t \in \partial f_t(z), \quad (t \in \{0\} \cup T)$, и условие дополнительной нежёсткости

$$\lambda_t f_t(z) = 0 \quad (t \in T). \tag{11}$$

Из (11) следует, что если $f_t(z) < 0$, то $\lambda_t = 0$. Заменяя в случае необходимости множество T более узким множеством, можно считать, что в (10),(11) $\lambda_t > 0$, $f_t(z) = 0$. Согласно лемме Каратеодори существует такое множество $T_+ \subset T$, что

$$1) - a_0 = \sum_{t \in T_+} \mu_t a_t;$$

2) $\mu_t > 0$; $(t \in T_+)$; 3) $|T_+| \leqslant N$. Множество T_+ является искомым. Действительно, справедливы соотношения

$$a_0 + \sum_{t \in T} \mu_t a_t = 0, \tag{3_+}$$

$$\mu_t > 0, \mu_t f_t(z) = 0. \ (t \in T_+) \tag{11_+}$$

Из $(10_+), (11_+)$ и теоремы 1 вытекает, что z есть решение задачи (1),(2_+). Другие утверждения теоремы очевидны. ▶

Теорема 2 означает, что решение задачи (8),(9) является решением аналогичной ей задачи (8),(9_+), но с меньшим числом ограничений; при этом $|J| \leqslant N$, т. е. число новых ограничений не превосходит N. Это замечание отчасти проясняет смысл термина "очистка"(отбрасывание некоторых ограничений).

Вторая теорема об очистке относится к задаче на минимакс

$$f(x) = \max_{t \in T} f_t(x) \to \min, \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{12}$$

Здесь T – конечное множество. Для задачи (12) в п. 1 сформулированы необходимые условия минимума (теорема 1). В случае выпуклых функций f_t $(t \in T)$ соответствующие условия оказываются достаточными. Более точно, имеет место

Лемма 2. *Пусть функции* $f_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *выпуклы,* $z \in \mathbb{R}^N$ *и*

$$J(z) = \{t \in T, f_t(z) = f(z)\}.$$

Пусть существуют такие неотрицательные числа μ_t $(t \in J(z)$, *что*

$$0 \in \sum_{t \in J(z)} \mu_t \partial f_t(z), \quad \sum_{t \in J(z} \mu_t = 1. \tag{13}$$

Тогда z есть решение задачи (12).

◀ Первое из соотношений(13) означает, что z минимизирует функцию

$$\sum_{t \in J(z)} \mu_t f_t(x) \tag{14}$$

на множестве $\mathbb{R}^N$. Теперь имеем последовательно (пояснения ниже)

$$f(x) = \sum_{j \in J(z)} \mu_j f(x) \geqslant \sum_{j \in J(z)} \mu_j f_j(x) \geqslant \sum_{j \in J(z)} \mu_j f_j(z) = f(z).$$

Комментарий к цепи соотношений: вначале используется второе из соотношений (13), далее оценка $f(x) \geqslant f_j(x)$, затем то, что элемент z минимизирует функцию (14), и,наконец, применяются равенства $f_j(z) = f(z) \ \forall j \in J(z)$.▶

Теорема 3. *Пусть функции* $f_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $(t \in T)$ *выпуклы и* z *– решение задачи (12).*

Тогда найдётся множество $T_+ \subset J(z) := \{t \in T, f_t(z) = f(z)\}$, *содержащее не более чем* $N+1$ *элементов и такое, что* z *является решением задачи*

$$\max_{t \in T_+} f_t(x) \to \min, \quad (x \in \mathbb{R}^N); \tag{12_+}$$

◀ В силу теоремы 1 найдутся такие числа $\mu_t \geqslant 0$, $j \in J(z)$, что

$$(0,\ 1) \in \sum_{t \in J(z)} \mu_j(\partial f_t(z), 1).$$

Согласно лемме Каратеодори существуют множество $T_+ \subset J(z)$ и числа $\nu_i \geqslant 0$ $(i \in T_+)$ такие, что

$$(0,\ 1) \in \sum_{t \in T_+} \nu_t(\partial f_t, 1), \tag{15}$$

множество T_+ содержит не более чем $N+1$ элемент. Равенство (8) означает, что z есть решение задачи (12_+). ▶

4. Теорема Хелли. К теоремам об очистке близка теорема Хелли. Её доказательства и многочисленные применения хорошо известны [4]-[6], [11]- [16], [18], [34]-[35].

Теорема 4. (Теорема Хелли). *Пусть* A_i, $i \in I$ *– семейство замкнутых выпуклых подмножеств пространства* $\mathbb{R}^n$, *по крайней мере одно из которых компактно. Если любое подсемейство из* $(N+1)$ *множеств* A_i *имеет непустое пересечение, то и всё семейство имеет непустое пересечение.*

◀ Пусть вначале $|I| < \infty$. Функции $f_i(x) := d_A^2(x)$ выпуклы. Если A_{i_0} - компактное множество, то все нижние лебеговы множества функции f_{i_0} ограничены. Поэтому также ограничены нижние лебеговы множества функции $f(x) = \max\{f_i(x),\ i \in I\}$. Следовательно, функция f достигает своего минимума на $\mathbb{R}^n$ в некоторой точке z. В силу второй теоремы об очистке найдётся множество I_+, содержащее не более $N+1$ элементов и такое, что z реализует минимум функции $f_+(x) = \max\{f_i(x),\ i \in I_+\}$ и $f(z) = f(z)$. Поскольку $|I_+| \leqslant N+1$, то множества A_i $(i \in I_+)$ имеют общую точку, а минимальное значение функции f_+ на $\mathbb{R}^N$ равно 0. Следовательно, $f(z) = f_+(z) = 0$. Это эквивалентно доказываемому утверждению в случае $|I| < \infty$.

Пусть теперь I – бесконечное множество. Из доказанного выше вытекает, что система замкнутых подмножеств $A_i \cap A_{i_0}$ компакта A_{i_0} образует центрированную систему и, следовательно (см. [13]), имеет непустое пересечение.▶

Задача 2. *Пусть* $A_1, \dots, A_p$ $(p > n+1)$ *– выпуклые множества в* $\mathbb{R}^n$. *Доказать, что если каждые* $n+1$ *из них имеют общую точку, то все эти множества имеют общую точку (один из многочисленных вариантов теоремы Хелли).*

Глава 2

Минимаксные критические значения

2.1 Аппроксимации многозначных отображений

1. Невырожденные векторные поля. В пределах этой главы Q – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$. Предполагается, что $\overset{\circ}{Q} \neq \varnothing$ и для любого x из Q множество $K_Q(x)$ всех гиперкасательных непусто. Как и выше, $T_Q(x)$ и $N_Q(x)$ – касательный и нормальный конусы к множеству Q в точке x.

Отображение $A\colon M \subset Q \to Kv(\mathbb{R}^N)$ класса $S(M)$ порождает *многозначное векторное (м.в.) поле* $x \to A(x)$. При любом x из M множество $A(x) + N_Q(x)$ замкнуто, поэтому на множестве M определена скалярная функция

$$\Delta_A(x) \overset{def}{=} \Theta(\{0\}, A(x) + N_Q(x)) =$$

$$= \min\{|x^* + y^*|, x^* \in A(x), y^* \in N_Q(x)\}. \tag{1}$$

Лемма 1. *Если $A \in S(M)$, $\overline{M} = M$, то функция $\Delta_A\colon M \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу в следующем смысле: множество $\{x \in M, \Delta_M(x) \leqslant c\}$ замкнуто при любом $c \in \mathbb{R}$.*

◀ Пусть $x_n \in M, \Delta_A(x_n) \leqslant c, x_n \to x \in M$. Фиксируем x_n^* из $A(x_n), y_n^*$ из $N_Q(x_n)$ так, чтобы $|x_n^* + y_n^*| = \Delta_A(x_n)$. Последовательность x_n^* ограничена, поскольку $x_n \to x, x_n^* \in A(x_n)$ и A – полунепрерывное сверху многозначное отображение. Но тогда и y_n^* – ограниченная последовательность. Не нарушая общности можно считать, что $x_n \to x^*, y_n^* \to y^*$. Ввиду замкнутости отображений A, N_Q справедливы включения $x^* \in A(x), y^* \in N_Q(x)$. Имеем, далее,

$$\Delta_A(x) \leqslant |x^* + y^*| = \lim_{n\to\infty} |x_n^* + y_n^*| = \lim_{n\to\infty} \Delta_A(x_n) \leqslant c. \ ▶$$

Из леммы 1.2.3 следует, что равенство $\Delta_A(x) = 0$ эквивалентно включению $0 \in A(x) + N_Q(x)$. Таким образом, особые точки векторного поля A класса $S(M)$ характеризуются равенством $\Delta_A(x) = 0$. Поле A класса $S(M)$ называют *невырожденным* на M, если M не содержит его особых точек, т. е. $\Delta_A(x) > 0$ $\forall x \in M$. Совокупность невырожденных на M полей A класса $S(M)$ обозначим символом $S_0(M)$.

Лемма 2. *Пусть M – непустое компактное подмножество множества Q и $A \in S_0(M)$. Тогда*

$$\Delta_A(x) > \rho > 0 \, \forall x \in M\,. \tag{2}$$

◀ Функция Δ_A достигает своего минимума на M в некоторой точке x_0. Поскольку $A \in S_0(M)$, то $\Delta_A(x_0) > 0$. Достаточно взять ρ из интервала $(0, \Delta_A(x_0))$. ▶

Полунепрерывное сверху отображение $A\colon M \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^N)$ назовём *деформацией* поля $A_0 = A(\cdot, 0)$ в поле $A_1 = A(\cdot, 1)$. В этом случае говорят, что деформация $A(\cdot,\cdot)$ соединяет поля A_0 и A_1. Если

$$A(x,\lambda) = (1-\lambda)A_0(x) + \lambda A_1(x) \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x \in M),$$

то соответствующая деформация называется линейной.

Векторные поля A_0 и A_1 называют *гомотопными* на M, если существует соединяющая их деформация $A(x,\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ x \in M)$, удовлетворяющая требованию невырожденности:

$$A_\lambda = A(\cdot,\lambda) \in S_0(M) \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Отношение гомотопности векторных полей рефлексивно (каждое векторное поле гомотопно самому себе), симметрично (если поле A_0 гомотопно полю A_1, то поле A_1 гомотопно полю A_0) и транзитивно (если A_0 гомотопно A_1, а A_1 гомотопно A_2, то A_0 гомотопно A_2). Поэтому множество $S_0(M)$ представимо в виде объединения непересекающихся между собой классов гомотопных векторных полей.

Лемма 3. *Пусть M – непустое компактное подмножество Q*

$$A\colon M \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^N)$$

– невырожденная деформация. Тогда

$$\Delta_{A_\lambda}(x) > \rho \quad \forall x \in M,\, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{3}$$

◀ Покажем, как лемма 3 может быть сведена к лемме 2.

Положим $M' = M \times [0,1], Q' = Q \times \mathbb{R}, A'(x,\lambda) = (A(x,\lambda),\lambda)$. Очевидно, что $A' \in S(M')$. Пара (x,λ) есть особая точка поля A', если и только если x – особая точка поля $A_\lambda = A(\cdot,\lambda)$. Включение $A' \in S_0(M')$ эквивалентно невырожденности деформации A_λ на M. Теперь ясно, что (3) есть следствие леммы 2, применённой к оператору $A'\colon M' \to Kv(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$. ▶

2. Остроугольные аппроксимации. Квалифицированная невырожденность векторного поля класса $S(M)$ позволяет строить однозначные липшицевы поля, образующие с исходным равномерно острый (тупой) угол.

Теорема 1. *Пусть A – м.в. поле класса $S(M)$, функция Δ_A удовлетворяет оценке (2). Тогда существует векторное поле $v\colon M \to \mathbb{R}^N$ класса $\Lambda_{loc}(M, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющее соотношениям*

$$v(x) \in K_Q(x) \cap \mathbb{B}, \quad (x^*, v(x)) < -\rho \quad \forall\, x \in M, x^* \in A(x). \tag{4}$$

◀ Фиксируем элемент y из множества M. Из леммы (3) вытекает существование вектора $h(y)$ из $K_Q(x) \cap \mathbb{B}$, для которого $(y^*, h(y)) < -\rho \qquad \forall y^* \in A(y)$. В силу определения конуса $K_Q(y)$ и полунепрерывности сверху отображения A существует окрестность $V(y)$ точки y, удовлетворяющая условиям

$$h(y) \in K_Q(x) \cap \mathbb{B}, \quad (x^*, h(y)) < -\rho \quad \forall x^* \in A(x),\, x \in V(y) \cap M. \tag{5}$$

Подобную окрестность можно указать для любой точки y из M. В итоге получим систему из открытых множеств $V(y)$, образующих покрытие множества M, и соответствующую систему векторов $h(y)\,(y \in M)$. Используя теорему Стоуна о паракомпактности [42], можно в открытое покрытие V_y вписать локально конечное покрытие $U_\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$. Это означает, что каждое множество U_γ содержится в некотором множестве $V(y_\gamma)$ и для каждой точки x из M существует окрестность $W(x)$, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств U_γ.

Введём функции $\varphi_\gamma, \psi_\gamma$ на Q, полагая

$$\psi_\gamma(x) = \Theta(x, Q \setminus U_\gamma), \quad \varphi_\gamma(x) = \psi_\gamma(x) \bigg/ \left(\sum_{\alpha \in \Gamma} \psi_\alpha(x)\right).$$

Функции $\varphi_\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$ обладают следующими свойствами:

$$0 \leqslant \varphi_\gamma(x), \qquad \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi_\gamma(x) = 1 \qquad \forall x \in Q;$$

$\varphi_\gamma(x) = 0$, если $x \in Q \setminus U_\gamma$; $\varphi_\gamma \in \Lambda_{loc}(Q) \quad \forall \gamma \in \Gamma$. Определим векторное поле $v = v(x)\,(x \in M)$ равенством

$$v(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi_\gamma(x) h(y_\gamma);$$

элемент y_γ выбран из условия $U_\gamma \subset V(y_\gamma)$, вектор $h(y_\gamma)$ обладает свойствами (5) с $y = y_\gamma$. Отображение $v\colon M \to \mathbb{R}^N$ удовлетворяет соотношениям (4). Действительно, фиксируем x из M. Так как $v(x)$ есть выпуклая комбинация векторов $h(y_\gamma)$, то (5) влечёт за собой (4). Существует окрестность W точки x, пересекающаяся лишь с конечным числом множеств U_γ. Если $z \in W$, то

$$v(z) = \sum_{W \cap U_\gamma \neq \varnothing} \varphi_\gamma(z) h(y_\gamma).$$

Из этого равенства следует включение $v \in \Lambda_{loc}(M, \mathbb{R}^N)$. ▶

Лемма 4. *Пусть M – непустое компактное подмножество множества Q, $A \in S_0(M)$. Тогда существует непрерывное векторное поле $w\colon M \to \mathbb{R}^N$, обладающее свойствами*

$$-w(x) \in K_Q(x) \cap \mathbb{B}, \quad (x^*, w(x)) > 0 \quad \forall x \in M, x^* \in A(x). \tag{6}$$

◀ Требуемое утверждение вытекает из леммы 2 и теоремы 1. Векторное поле w можно определить равенством $w(x) = -v(x)$, где v – векторное поле из теоремы 1. ▶

Лемму 4 естественно назвать *леммой об остроугольной аппроксимации*, поскольку второе из соотношений (6) означает, что поле $w(x)$ образует острый угол с полем $A(x)$. Из теоремы 1 и леммы 4 с помощью конструкции, применённой при доказательстве леммы 3, вытекают их параметрические варианты.

Теорема 2. *Пусть $M' = M \times [0,1], A\colon M' \to Kv(\mathbb{R}^N$ – невырожденная деформация и справедлива оценка (3). Тогда существует векторное поле $v\colon M' \to \mathbb{R}^N$ класса $\Lambda_{loc}(M', \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющее соотношениям*

$$v(x,\lambda) \in K_Q(x) \cap \mathbb{B},\ (x^*, v(x,\lambda)) < -\rho \quad \forall\, (x,\lambda) \in M', x^* \in A(x,\lambda). \tag{7}$$

Лемма 5. *Пусть M – непустое компактное подмножество множества Q, $A\colon M \times [0,1] \to Kv(\mathbb{R}^N)$ – невырожденная деформация. Тогда существует непрерывное векторное поле $w\colon M' = M \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$, обладающее свойствами*

$$-w(x,\lambda) \in K_Q(x) \cap \mathbb{B},\ (x^*, w(x,\lambda)) > 0 \quad \forall (x,\lambda) \in M', x^* \in A(x,\lambda). \tag{8}$$

Очевидно, что (7) и (8) суть параметрические варианты (4) и (6) соответственно. Разумеется, остроугольные аппроксимации $w(x)$ и $w(x,\lambda)$ полей $A(x)$ и $A(x,\lambda)$ могут быть определены и отличными от описанного выше способами.

3. Оператор сдвига по траекториям. Векторное поле $F\colon Q \to \mathbb{R}^N$ назовём *касательным*, если $F(z) \in T_Q(z)\,\forall z \in Q$. Обозначим через $\Lambda T(Q)$ совокупность локально липшицевых на Q касательных векторных полей. Далее будет часто рассматриваться поле вида

$$F(z) = g(z)v(z) \quad (z \in Q), \tag{9}$$

где $g\colon Q \to \mathbb{R}$ – неотрицательная локально липшицева ограниченная функция, равная 0 на $Q \setminus M, v$ – поле, удовлетворяющее на множестве $M \subset Q$ требованиям теоремы 1 и произвольным образом продолженная на $Q \setminus M$. Способ продолжения v на множество $Q \setminus M$ не играет роли, так как функция g на этом множестве равна 0. Поле (9) принадлежит классу $\Lambda T(Q)$.

Предложение 1. *Пусть $F \in \Lambda T(Q)$. Тогда для x из множества Q задача Коши*

$$y' = F(y), \quad y(0) = x$$

имеет единственное решение $y(t) = \mathscr{U}_t x\,(t \geqslant 0)$, причём $\mathscr{U}_t(x) \in Q\,\forall t \geqslant 0$ и отображение $(x,t) \to \mathscr{U}_t(x)$ непрерывно по совокупности переменных.

Предложение 1 вытекает из известных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [32]). Отображения $\mathscr{U}_t\colon Q \to Q$ называют *операторами сдвига* по траекториям дифференциального уравнения $y' = F(y)$. Они непрерывны и обладают свойствами

$$\mathscr{U}_0 = \mathscr{E}, \quad \mathscr{U}_{t_1+t_2} = \mathscr{U}_{t_1}\mathscr{U}_{t_2} \quad (t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0). \tag{10}$$

Здесь и далее $\mathscr{E}$ – оператор тождественного преобразования. Соотношения (10) означают, что семейство операторов сдвига $\mathscr{U}_t\colon Q \to Q\,(t \geqslant 0)$ образуют полугруппу. Векторное поле F называют генератором этой полугруппы. Оно связано с полугруппой $\mathscr{U}_t$ равенством

$$\lim_{t\to+0} \frac{\mathscr{U}_t x - x}{t} = F(x)\,\forall x \in Q.$$

Условие ограниченности поля F можно заменить менее жёсткими предположениями одностороннего характера, гарантирующими нелокальную разрешимость задачи Коши [32].

2.2 Понижающие деформации

1. Направление спуска. В силу результатов 1.2 функция f класса $\Lambda_{loc}(Q)$ порождает многозначное полунепрерывное сверху отображение

$$\partial f\colon Q \to Kv(\mathbb{R}^N),$$

сопоставляющее каждой точке x из Q субдифференциал Кларка $\partial f(x)$ функции f в этой точке. Очевидно, что особые точки поля ∂f совпадают с критическими точками функции f. Мерой регулярности точки x может служить величина

$$\mathbf{d}_f(x) \overset{def}{=} \Delta_{\partial f}(x) = \min\{|x^* + y^*|,\, x^* \in \partial f(x),\, y^* \in N_Q(x)\}. \tag{1}$$

Согласно лемме 2.1 функция $\mathbf{d}_f\colon Q \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу. Если M – компактное подмножество множества Q, не содержащее критических точек функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$, то

$$\mathbf{d}_f(x) > \rho(M) > 0 \quad \forall x \in M. \tag{2}$$

Очевидно, что (2) есть вариант оценки (1.2).

Неравенство (2) влечёт за собой существование векторного поля v класса $\Lambda_{loc}(M, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющего соотношениям

$$v(x) \in K_Q(x) \cap \mathbb{B}, \qquad f^\circ(x; v(x)) < -\rho(M) < 0, \tag{3}$$

представляющим естественный аналог (1.4). Как и в теореме 1.1, множество M может быть некомпактным. Неравенство $f^\circ(x; v(x)) < -\rho(M)$ означает, что сдвиг точки x в направлении $v(x)$ квалифицированным образом уменьшает значение функции f.

Лемма 1. *Пусть f – функция класса $\Lambda_{loc}(Q)$, функция $\mathbf{d}_f$ определена равенством (1), $M \subset Q$ и $\mathbf{d}_f(x) > \rho_0 \quad \forall x \in M$. Пусть $(M_1 + s_0\mathbb{B} \subset M$ при некотором $s_0 \geqslant 0$.*

Тогда

$$\inf\{f(y), y \in M\} \leqslant \inf\{f(x), x \in M_1\} - \rho_0 s_0. \tag{4}$$

◀ Нетривиален случай, когда $s_0 > 0, \rho_0 > 0$. Фиксируем $\rho(M)$ из интервала $(0, \rho_0)$. Построим векторное поле v класса $\Lambda_{loc}(M, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющее соотношениям (3). Обозначим через $\mathscr{U}_t(x)$ решение задачи Коши

$$y' = v(y), \qquad y(0) = x.$$

Оператор сдвига $\mathscr{U}_t\,(t \geqslant 0)$ определён на множестве M_1 для $t < s_0$. Действительно,

$$|\mathscr{U}_t(x) - x| \leqslant \int\limits_0^t |v\left(\mathscr{U}_s(x)\right)|\, ds < s_0,$$

Поэтому $\mathscr{U}_t(x) \in M_1 + s_0\mathbb{B} \subset M$ и, таким образом, траектория $\mathscr{U}_t(x)$ не выходит за пределы множества M при $0 \leqslant t < s_0$.

Функция $\varphi(t) = f(\mathscr{U}_t(x))\,(x \in M_1, 0 \leqslant t < s_0)$ принадлежит классу $\Lambda_{loc}(0, s_0)$, поэтому почти всюду $\varphi'(t) = D^*\varphi(t)$. Справедливы соотношения

$$\inf\{f(y),\, y \in M\} \leqslant f(\mathscr{U}_t(x)) = \varphi(t) = \varphi(0) + \int\limits_0^t \varphi'(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant f(x) + \int\limits_0^t f^\circ\left(\mathscr{U}_s(x), \frac{d}{ds}\mathscr{U}_s(x)\right) ds \leqslant f(x) - \rho(M)t,$$

в которых $x \in M_1$, $0 \leqslant t < s_0$. Первое из неравенств следует из включения $\mathscr{U}_t x \in M$, второе вытекает из (1.2.15), заключительное неравенство выводится из (3). Так как x из M_1, $t < s_0$, $\rho(M) < \rho_0$ могут быть произвольными, то полученная оценка влечёт за собой (4). ▶

Следствие. *Пусть $M_1 \subset Q$ – компактное множество, не содержащее критических точек функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$. Тогда для любой окрестности W множества M_1 имеет место оценка*

$$\inf\{f(y), y \in W \cap Q\} < \inf\{f(x), x \in M_1\}. \qquad (5).$$

◀ Достаточно применить лемму 1 к множеству $M = (M_1 + \delta\mathbb{B}) \cap Q$, где $\delta > 0$ и достаточно мало.▶

При доказательстве леммы 1 используется спуск вдоль траекторий некоторого диффкеренциального уравнения. В некоторых случаях конструкция понижающей деформации может быть существенно проще.

Лемма 2. *Пусть $M_1 \subset Q$ – компактное множество, $v_1 \colon M_1 \to \mathbb{R}^N$ – непрерывное векторное поле, причём $v_1(x) \in K_Q(x)\, \forall x \in M_1$. Тогда существует такая константа s_1, что $x + sv_1(x) \in Q\, \forall x \in M_1, 0 \leqslant s < s_1$.*

◀ В силу определения конуса гиперкасательных для каждого x из M_1 существует окрестность $V(x)$ и число $s(x) > 0$ такие, что

$$y + sv_1(y) \in Q \quad \forall y \in V(x) \cap Q,\, 0 \leqslant s \leqslant s(x).$$

Поскольку M_1 – компактное множество, то

$$M_1 \subset \bigcup_{i \in I} V(x_i),$$

где I – конечное множество, $x_i \in M_1$. Число $s_1 = \min\{s(x),\, i \in I\}$ является искомым. ▶

Если компактное множество $M_1 \subset \mathbb{R}^N$ не содержит критических точек функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$, то найдётся такое $\delta > 0$, что множество $M = (M_1 + \delta\mathbb{B}) \cap Q$ также не содержит критических точек. Поэтому имеет место оценка (6.2) и может быть построено векторное поле v класса $\Lambda_{loc}(M, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющее соотношению (6.3). В силу леммы 6.2 существует такая константа s_1, что

$$x + sv(x) \in M \quad \forall x \in M,\, 0 \leqslant s \leqslant s_1.$$

Справедлива оценка

$$f(x + sv(x)) - f(x) \leqslant -\rho(M)s \quad \forall x \in M_1,\, 0 \leqslant s \leqslant s_1. \tag{6}$$

Для её доказательства достаточно учесть, что производная функции $\varphi(s) = f(x + sv(x))$ почти всюду на интервале $(0, s_1)$ удовлетворяет оценке $\varphi'(s) \leqslant -\rho(M)$. В данном случае деформация $U(s)$, понижающая значения функции f, определяется равенством $U(s)x = x + sv(x)$.

Оценки типа (6) могут оказаться полезными при исследовании сходимости градиентных методов минимизации негладких функций.

2. Теорема об изотопии. Обозначим через $\Lambda_0(Q)$ часть класса $\Lambda_{loc}(Q)$, состоящую из функций, удовлетворяющих условию (C_0); всякая последовательность $x_n \in Q$, для которой

$$|f(x_n)| \leqslant const, \quad \mathbf{d}_f(x_n) \to 0,$$

ограничена. Для гладких функций такого рода условия компактности использовались многими авторами (см., например, [40]-[42] и приведённую там литературу). Условие (C_0) очевидным образом выполняется, если $f \colon Q \to \mathbb{R}$ – растущая функция.

Пусть Q_0 – замкнутое подмножество Q. Непрерывное отображение

$$U\colon Q\times[0,1]\to Q$$

будем называть Q_0-*изотопией* пространства Q, если

$$U(x,t)=x \quad \forall (x,t)\in (Q_0\times[0,1])\cup(Q\times\{0\})$$

и при любом t из отрезка [0,1] отображение $U_t=U(\cdot,t)$ есть гомеоморфизм Q на $U_t(Q)\subset Q$. Условие (C_0) позволяет конструировать Q_0 - изотопии, понижающие значения функции f класса $\Lambda_0(Q)$, В качестве Q_0 можно взять множество

$$Q_0=\{x\in Q, f(x)\notin(c-d_1,c+d_1)\}, \tag{7}$$

где $c\in\mathbb{R}, d_1>0$. Наряду с (7) далее рассматривается случай $Q_0=\varnothing$.

Положим

$$\mathscr{K}_f^c=\{x\in Q: f(x)=c,\, \mathbf{d}_f(x)=0\}. \tag{8}$$

Для функции f класса $\Lambda_0(Q)$ множество $\mathscr{K}_f^c$ есть компакт. Соотношение $\mathscr{K}_f^c=\varnothing$ эквивалентно регулярности числа c; критические значения c функции f характеризуются соотношением $\mathscr{K}_f^c\neq\varnothing$.

Теорема 1. *Пусть $f\in\Lambda_0(Q), c\in\mathbb{R}, V$ – окрестность множества $\mathscr{K}_f^c$, определённого равенством (8). Тогда существуют такие константы $d_1>d$ и такая Q_0-изотопия U_t пространства Q (множество Q_0 определено равенством (7)), что*

1)$f(U_t(x))\leqslant f(U_s(x)) \quad \forall x\in Q, 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$;

2)$f(U_1(x))\leqslant c-d$, если $x\in Q\setminus V$ и $f(x)\leqslant c+d$;

3)$f(U_1(x)\leqslant c-d$, если $\mathscr{K}_f^c=\varnothing$ и $f(x)\leqslant c+d$;

4) если Q симметрично относительно 0 и f – чётная функция, то $U_t\colon Q\to Q\,(0\leqslant t\leqslant 1)$ – нечётное отображение.

◀ Вначале рассмотрим случай $\mathscr{K}_f^c\neq\varnothing$. Положим

$$V_\varepsilon\overset{def}{=}\{x\in Q, \Theta(x,\mathscr{K}_f^c)<\varepsilon\}.$$

Достаточно доказать утверждение теоремы с $V=V_\varepsilon$ при некотором ε из $(0,1)$.

Из условия (C_0) легко выводится существование таких положительных констант d_1,ρ, что

$$d_f(x)>\rho,\;\; c-d_1\leqslant f(x)\leqslant c+d_1,\, x\in Q\ \setminus V_{\varepsilon/2}.$$

Обозначим через d положительную константу, удовлетворяющую неравенствам $d<d_1, d<\rho\varepsilon/6$. Пусть g_1,g_2 – бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции, причём

$$g_1(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t\in[c-d,c+d],\\ 0, & \text{если}\, t\notin(c-d_1,c+d_1),\end{cases}\; g_2(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\leqslant\varepsilon/2,\\ 1, & \text{если } t\geqslant 2\varepsilon/3,\end{cases}$$

$$0 \leqslant g_1(t) \leqslant 1\,\forall t \in (c-d_1, c+d_1), \qquad 0 < g_2(t) \leqslant 1\,\forall t > \varepsilon/2.$$

Положим $h(x) \stackrel{def}{=} \Theta(x\mathscr{K}_f^c)$,

$$M \stackrel{def}{=} \left\{x \in Q, c-d_1 < f(x) < c+d_1,\ h(x) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Фиксируем векторное поле $v\colon M \to \mathbb{R}^N$ класса $\Lambda_{loc}(M, \mathbb{R}^N)$, удовлетворяющее соотношениям (3) с $\rho(M) = \rho > 0$. Введём отображение $F\colon Q \to \mathbb{R}^N$, полагая $F(x) = g_1(f(x))g_2(h(x))v(x)$. Векторное поле v распространяется на $Q \setminus M$ произвольным образом. Поскольку $g_1(f(x))g_2(h(x)) = 0$ на $Q \setminus M$, то выбор распространения несуществен. Из свойств функций g_1, g_2 и векторного поля v вытекают соотношения

$$f^\circ(x; F(x)) \leqslant 0\,\forall x \in Q, \tag{9}$$

$$f^\circ(x; F(x)) < 0\,\forall x \in M, \tag{10}$$

$$f^\circ(x; F(x)) \leqslant -\rho, \text{ если } c-d < f(x) < c+d \text{ и } h(x) \geqslant \frac{2\varepsilon}{3} \tag{11}$$

и включение $F(x) \in \mathbb{B}$.

Обозначим через $U_t\,(t \geqslant 0)$ оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения $y' = F(y)$. Согласно предложению 1.1

$$U_t(x) \in Q\,\forall x \in Q, t \geqslant 0,$$

отображение $(x,t) \to U_t(x)$ непрерывно по совокупности переменных. Очевидно равенство $U_0(x) = x\,\forall x \in Q$. Так как $F(x) = 0\,\forall x \in Q_0$, то $U_t(x) = x\,\forall x \in Q_0$. Покажем, что константы d_1, d и отображение $U_t\colon Q \to Q\,\forall t \in [0,1]$ удовлетворяют требованиям теоремы 1.

Свойство 1) вытекает из (9). Действительно, на отрезке [0,1] функция $\varphi(t) = f(U_t(x))\,(x \in Q)$ убывает, поскольку

$$D^*\varphi(t) = f^\circ\left(U_t(x), \frac{d}{dt}U_t(x)\right) \leqslant f^\circ\left(U_t(x), F(U_t(x))\right) \leqslant 0.$$

Проверим свойство 2). Пусть $z \in Q \setminus V$ и $f(z) \leqslant c+d$. Так как $|F(x)| \leqslant 1$, то $\varepsilon \geqslant 3|z - U_t(z)|$ при $t \leqslant \varepsilon/3$, следовательно, $h(U_t(z)) \geqslant 2\varepsilon/3$. Покажем, что $f(U_{\varepsilon/3}z) \leqslant c-d$. В предположении противного справедливы неравенства

$$c-d < f(U_t(z)) < c+d, \quad f^\circ\left(U_t(x), F(U_t(x))\right) \leqslant -\rho$$

(оценка (11)). В силу формулы Ньютона – Лейбница получаем

$$c-d \leqslant f(U_{\varepsilon/3}(z)) = f(z) + \int\limits_0^{\varepsilon/3} \frac{d}{dt} f(U_t(z))\,dt \leqslant f(z) +$$

$$+\int\limits_0^{\varepsilon/3} f^0(U_t(z), F(U_t(z))\,dt \leqslant c+d-\rho\varepsilon, \qquad (12)$$

следовательно, $d \geqslant \rho\varepsilon/6$, что противоречит способу выбора числа d.

Третье свойство доказывается по той же схеме. В случае $\mathscr{K}_f^c = \varnothing$ можно положить $V = V_\varepsilon = \varnothing$, отображение F определить равенством $F(x) = g_1(f(x))v(x)$; искомая изотопия U_t задаётся так же, как и в случае $\mathscr{K}_f^c \neq \varnothing$.

Если Q – симметричное относительно 0 подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, f – чётная функция, то поля v, F можно сконструировать так, чтобы они были нечётными. Отсюда следует четвёртое свойство определённого выше семейства отображений $U_t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$. ►

Условие (C_0) позволяет установить оценку типа (5) для некомпактного множества M_1.

Теорема 2. *Пусть M_1 – замкнутое подмножество Q, не содержащее критических точек функции f класса $\Lambda_0(Q)$. Если функция f ограничена снизу на M_1, то для любого $\delta > 0$ справедлива оценка (5), в которой $W = V(M_1, \delta)$.*

◄ Пусть $c = \inf\{f(x),\, x \in M_1\}$ и $\mathscr{K}_f^c \neq \varnothing$. Множество $\mathscr{K}_f^c$ компактно и не пересекается с M_1, поэтому $\rho(\mathscr{K}_f^c, M_1) > 0$. Фиксируем числа $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0,\delta)$, $\varepsilon < \rho(\mathscr{K}_f^c, M_1)$. Пусть $V_t = \{x \in Q, \Theta(x, \mathscr{K}_f^c) < t\}$. Подберём константы $d_1 > 0, \rho > 0, d_1 > d > 0$ так, чтобы $d_f(x) > \rho$, если $c - d_1 < f(x) < c + d_1$, $x \in Q \setminus V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, $d < \rho\varepsilon/6$. Если $U_t\,(t \geqslant 0)$ – семейство гомеоморфизмов, определённое в процессе доказательства теоремы 6.1, $x \in M_1$ и $f(x) < c+d$, то $U_t(x0 \in W\ V_{\frac{2\varepsilon}{3}}$ при $t \geqslant \varepsilon/3$. В силу (12) справедливы неравенства

$$f(U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) \leqslant c+d-\rho\varepsilon/3 < c-d,$$

следовательно,

$$\inf\{f(y),\, y \in W \cap Q\} \leqslant f(U_{\varepsilon/3}(x)) < c.$$

В случае $\mathscr{K}_f^c \neq \varnothing$ теорема доказана. Если c – регулярное значение функции f, то можно считать $V_t = \varnothing$. Дальнейшая часть доказательства остаётся без изменений. ►

Условие ограниченности снизу функции f и включение $f \in \Lambda_0(Q)$ выполняются для растущей на множестве Q функции f класса $\Lambda_{loc}(Q)$.

2.3 Минимаксный принцип

1. Формулировка и доказательство принципа. Пусть $Q_1 \subset Q$, $\overline{Q}_1 = Q_1$; случай $Q_1 = \varnothing$ не исключается. Совокупность $\mathfrak{A}$ компактных подмножеств множества Q назовём Q_1- *изотопическим классом*, если для любого компакта $A \in \mathfrak{A}$ и любой Q_1- изотопии $U_t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ пространства Q справедливо включение

$U_t(A) \in \mathfrak{A}\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Иначе говоря, класс $\mathfrak{A}$ инвариантен относительно Q_1-изотопий пространства Q. Пусть $f \in \Lambda_{loc}(Q)$.

Каждому Q_1 – изотопическому классу $\mathfrak{A}$ сопоставим число

$$c_f(\mathfrak{A}) = \inf_{A\in\mathfrak{A}} \max_{x\in A} f(x). \tag{1}$$

Очевидно, что $-\infty \leqslant c_f(\mathfrak{A}) < \infty$ и $c_f(\mathfrak{A}) > -\infty$, если функция f ограничена снизу на множестве Q. Положим

$$\mu_f(Q_1) = \sup\{f(x),\, x \in Q_1\}.$$

Как обычно, считается, что $\mu_f(\varnothing) = -\infty$ и $\mu_f(Q_1) = \infty$, если функция f не ограничена сверху на множестве Q_1.

Справедлив следующий вариант минимаксного принципа [22], [36], [40] - [42].

Теорема 1. *Пусть $f \in \Lambda_0(Q)$ и*

$$c_f(\mathfrak{A}) > \mu_f(Q_1). \tag{2}$$

Тогда $c_f(\mathfrak{A})$ – критическое значение функции f.

◀ В предположении противного согласно теореме 2.1 существуют константы $d_1 > d > 0$ и Q_0 – изотопия U_t пространства Q, обладающие свойствами 1) - 3) при $c = c_f(\mathfrak{A})$; множество Q_0 определено равенством (2.7). Можно считать, что $d_1 < g_f(\mathfrak{A}) - \mu_f(Q_1)$. Это предположение обеспечивает включение $Q_1 \subset Q_0$, в частности, $U_t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ есть Q_1 – изотопия пространства Q. Фиксируем компакт A из $\mathfrak{A}$, для которого $\max\{f(x),\, x \in A\} < c + d$. Тогда $U_t(A) \in \mathfrak{A}$, но в силу третьего свойства семейства гомеоморфизмов U_t справедлива оценка

$$\max\{f(x), x \in U_1(A)\} \leqslant c - d.$$

Противоречие. ▶

Теорема 2. *Пусть $f \in \Lambda_0(Q)$ и*

$$c = \inf\{f(x), x \in Q\} > -\infty.$$

Тогда c – критическое значение функции f; в частности, f достигает своего минимума на множестве Q.

◀ Следует положить $Q_1 = \varnothing$, в качестве $\mathfrak{A}$ взять совокупность точек из Q.▶

Теорема 3. *Пусть $f \in \Lambda_0(Q)$ и*

$$c = \inf\{f(x), x \in Q\} > -\infty.$$

Пусть x_1 – критическая точка функции f и $f(x_0) \leqslant f(x_1)$ для некоторого $x_0 \neq x_1$. Тогда f имеет не менее двух критических точек.

◀ Пусть x_2 реализует абсолютный минимум функции f на множестве Q. Если $f(x_2) < f(x_1)$, то x_1, x_2 – критические точки и $x_2 \neq x_1$. Если $f(x_1) = f(x_2)$, то x_1, x_0 – две критические точки.▶

Критические значения, соответствующие двум различным изотопическим классам, могут совпадать, так что число последних, вообще говоря, больше числа различных критических точек. В связи с этим были введены специальные изотопические классы, обладающие следующим свойством: если каким-то двум из них соответствует одно и то же критическое значение, то этому значению соответствует бесконечно много критических точек.

Впервые для подобной цели был использован инвариант, названный *категорией* [36]. При исследовании критических точек функций, инвариантных относительно некоторой группы преобразований, оказалось удобным введённое М. А. Красносельским понятие *рода* [31, 33]. Это понятие достаточно подробно анализируется в следующем разделе.

Приведём вариант теоремы 1 для чётных функционалов, заданных на симметричном относительно 0 множестве $Q \subset \mathbb{R}^N$. Пусть Q_1 – симметричное относительно 0 замкнутое множество и $Q_1 \subset Q$. Класс $\mathfrak{A}$ симметричных относительно 0 компактных подмножеств множества Q назовём SQ_1- изотопическим классом, если для любого компакта $A \in \mathfrak{A}$ и любой нечётной Q_1- изотопии $U_t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ пространства Q справедливо включение $U_t(A) \in \mathfrak{A}\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Иначе говоря, класс $\mathfrak{A}$ инвариантен относительно нечётных Q_1- изотопий.

Теорема 4. *Пусть $f\colon Q \to \mathbb{R}$ – чётная функция класса $\Lambda_0(Q); \mathfrak{A} - SQ_1$ – изотопический класс компактов. Если имеет место оценка (7.1), то $c_f(\mathfrak{A})$ – критическое значение функции f.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Единственное различие связано с нечётностью изотопии $U_t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$, обеспечиваемой теоремой 6.1. Следует отметить, что если x – критическая точка чётной функции f, то и $-x$ есть также критическая точка той же функции. Таким образом, можно говорить о парах взаимно противоположных критических точек.

2. Теорема о перевале. В пределах этого пункта Q – *линейно связное* множество. Это означает, что для любых точек x_0, x_1 из Q существует непрерывное отображение $\varphi\colon [0,1] \to Q$, для которого $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$. Все выпуклые множества линейно связны. Если $N = 1$, то линейно связное множество $Q \subset \mathbb{R}^N$ выпукло; в случае $N > 1$ это уже не так.

Теорема 5. *Пусть Q – линейно связное множество, $f \in \Lambda_0(Q)$. Пусть существуют открытое множество $V \subset \mathbb{R}^N$, элементы x_0, x_1 из Q и число m, такие что $x_1 \in V$, $x_0 \notin V$ и*

$$f(x) \geqslant m > f(x_1) \geqslant f(x_0) \quad \forall x \in \partial V \cap Q.$$

Тогда функция f имеет критическое значение $c \geqslant m$.

◀ Пусть $m > k > f(x_1), Q_1 \overset{def}{=} \{x \in Q, f(x) \leqslant k\}$. Обозначим через Φ совокупность непрерывных отображений $\phi\colon [0,1] \to Q$, для которых $\phi(0) = x_0, \phi(1) = x_1$. Для любого отображения ϕ из Φ его область значений $A = \phi([0,1])$ есть компакт. Совокупность множеств вида $A = \phi([0,1])\,(\phi \in \Phi)$ обозначим символом $\mathfrak{A}$.

Если $A \in \mathfrak{A}$, то $\max\{f(x), x \in A\} < m$, поскольку ввиду линейной связности множества Q пересечение $A \cap \partial V \cap Q$ непусто. В частности, $c_f(\mathfrak{A}) \geqslant m > k \geqslant \mu_f(Q_1)$, где числа $c_f(\mathfrak{A}), \mu_f(Q_1)$ определены так же, как в теореме 7.1. Из неравенства $k > f(x_1)$ следует инвариантность класса $\mathfrak{A}$ относительно Q_1- изотопий пространства Q. В силу теоремы 7.1 число $c = c_f(\mathfrak{A})$ – критическое значение функции f. ▶

Утверждения подобного рода называют [37], [42], [49] *теоремами о перевале.* Представляют интерес варианты теоремы 5, в которых априори не предполагается существование открытого множества V с требуемыми свойствами. Приведём здесь один результат.

Связное множество $\mathfrak{N} \subset Q$ реализует локальный минимум функции

$$f\colon Q \to \mathbb{R},$$

если

$$f(y) \geqslant f(x), \text{ если } y \in V \cap Q,\ x \in \mathfrak{N},$$

где V – некоторая окрестность множества $\mathfrak{N}$. Из определения ясно, что функция f принимает на $\mathfrak{N}$ постоянное значение $f(\mathfrak{N})$ и число $f(\mathfrak{N})$ – критическое значение функции f.

Теорема 6. *Пусть c – критическое значение функции f класса $\Lambda_0(Q)$ и множество $\mathscr{K}_f^c = \{x \in Q, f(x) = c,\ d_f(x) = 0\}$ реализует локальный минимум функции f. Если множество $\{x \in Q, f(x) \leqslant c\} \setminus \mathscr{K}_f^c$ непусто, то f имеет критическое значение $c_1 > c$.*

◀ Поскольку $f \in \Lambda_0(Q)$, то множество $\mathscr{K}_f^c$ есть компакт. Положим

$$V_t \stackrel{def}{=} \{x \in Q : \Theta(x, \mathscr{K}_f^c) < t\}.$$

Фиксируем число $\tau > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(y) \geqslant c \,\forall y \in V_\tau$. Если $x \in V \setminus \mathscr{K}_f^c$ и $d_f(x) = 0$, то x – критическая точка и $f(x) \geqslant c$. Равенство $f(x) = c$ невозможно, поскольку $x \notin \mathscr{K}_f^c$. Следовательно, $f(x) > c$ и $f(x)$ – критическое значение.

Осталось рассмотреть случай, когда множество $V_\tau \setminus \mathscr{K}_f^c$ не содержит критических точек. Пусть

$$x_0 \in \{x \in Q, f(x) \geqslant c\} \setminus \mathscr{K}_f^c,$$

$$0 < t < \tau - \delta, \quad \delta > 0, \quad t < \Theta(x_0, \mathscr{K}_f^c),$$

$$M_1 \stackrel{def}{=} \{x \in Q : \Theta(x, \mathscr{K}_f^c) = t\}.$$

Применяя теорему 2, получаем

$$c = \inf\{f(x),\ x \in V_t\} < \inf\{f(x),\ x \in M_1\}.$$

Если считать

$$V = \{x \in Q : \Theta(x, \mathscr{K}_f^c) < t\}, \quad x_1 \in \mathscr{K}_f^c, \quad m = \inf\{f(x) : x \in M_1\},$$

то выполнены условия теоремы 5, согласно которой f имеет критическое значение, не меньше m. ▶

Из теоремы 6 вытекает достаточное условие абсолютного минимума функции f класса $\Lambda_0(Q)$.

Теорема 7. *Пусть функция f класса $\Lambda_0(Q)$ имеет единственное критическое значение, причём множество $\mathscr{K}_f^c$ реализует локальный минимум функции f. Тогда c – минимальное значение функции f на множестве Q.*

◀ Действительно, неравенство $f(x_0) < c$ согласно теореме 6 влечёт за собой существование большего чем c критического значения функции f. ▶

Следствие. *Пусть функция f класса $\Lambda_0(Q)$ имеет единственную критическую точку x_1, реализующую локальный минимум функции f. Тогда x_1 – точка абсолютного минимума функции f.*

Теорема 8. *Пусть x_1 – изолированная критическая точка, реализующая локальный минимум функции f и*

$$-\inf\{f(x),\, x \in Q\} < f(x_1). \tag{3}$$

Тогда функция f имеет три различных критических значения, среднее из которых равно $f(x_1)$.

◀ В силу (3) функция f ограничена снизу. Согласно теореме 2 она достигает абсолютного минимума на множестве Q в некоторой точке x_2 из Q. Очевидно, что $f(x_2) < f(x_1)$ и $f(x_2)$ – критическое значение функции f. Существование большего чем $f(x_1)$ критического значения вытекает из теоремы 6.▶

Следствие. *Пусть x_1 – точка локального минимума пастущей на множестве Q функции f класса $\Lambda_0(Q)$. Если $f(x_0) < f(x_1)$ для некоторого x_0 из Q, то функция f имеет не менее трёх критических точек.*

◀ В самом деле можно считать, что x_1 – изолированная критическая точка функции f. Поскольку f – растущая на Q функция, то f достигает своего минимума на Q и, следовательно, справедлива оценка (7.3). Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 6.▶

2.4 Критические точки чётных функций

1. Род множества. Пусть $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ – совокупность замкнутых и симметричных относительно 0 подмножеств $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. *Родом* непустого множества F класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ называется [31], [45] наименьшее натуральное число n , для которого найдётся n замкнутых множеств $F_1, \dots, F_n$, удовлетворяющих условиям

$$F_i \cap (-F_i) = \varnothing \quad (i = 1, \dots, n), \quad F = \bigcup_{i=1}^{n} (F_i \cup (-F_i)). \tag{1}$$

Род множества F обозначают символом $\gamma(F)$. Полагают $\gamma(\varnothing) = 0$.

Лемма 1. *Род непустого множества класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ равен наименьшему из натуральных чисел n, для которых существует нечётное непрерывное отображение из F в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

◀ Пусть $F_i\,(i = 1, \dots, n)$ – замкнутые множества, удовлетворяющие условиям (1). Определим функции $\varphi_i \colon F \to \mathbb{R}\,(i = 1, \dots, n)$ равенствами

$$\varphi_i(x) = \frac{\Theta(-x, F_i) - \Theta(x, F_i)}{\Theta(-x, F_i) + \Theta(x, F_i)}.$$

Как нетрудно проверить, функции φ_i непрерывны и нечётны на множестве F, $|\varphi_(x)| \leqslant 1$ и

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in F_i \\ -1, & \text{если } x \in -F_i. \end{cases}$$

При любом x из множества F справедливо соотношение

$$\max\{|\varphi_i(x)|,\, i = 1, \dots, n\} = 1,$$

из которого непосредственно следует, что определяемое равенством

$$\Phi(x) \stackrel{def}{=} (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

отображение $\Phi \colon F \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ нечётно и непрерывно.

Предположим теперь, что нечётное непрерывное отображение

$$\Psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_k(x))$$

множества F класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ в пространство $\mathbb{R}^k$ не обращается в нуль. Аналогичным свойством обладает отображение

$$\Psi_0(x) = \Psi(x) \big/ \max\{|\psi_1(x)|, \dots, |\psi_k(x)|\},$$

переводящее F в границу k-мерного куба

$$C = \{t = \{t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k,\, |t_i| \leqslant 1,\, i = 1, \dots, k\}.$$

Пусть $C_i = \{t \in C,\, t_i = 1\}$ есть i-я верхняя грань куба $C\,(i = 1, \dots, k)$, $F_i = \Psi_0^{-1}(C_i)$. Очевидно, что F_i – замкнутое подмножество F. Справедливы равенства вида (1) с $n = k$, показывающие, что $\gamma(F) \leqslant k$. ▶

В силу леммы 1 неравенство $\gamma(F) \leqslant n$ эквивалентно существованию нечётного непрерывного отображения множества F в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. В частности, $\gamma(F) \leqslant N$ для любого множества F класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$. Для оценки снизу рода множества полезно вытекающее из теоремы Борсука об антиподах [36] следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ – ограниченная симметричная окрестность точки 0 в $\mathbb{R}^n$, $\partial\mathfrak{G}$ – её граница, $\Phi \colon \partial\mathfrak{G} \to \mathbb{R}^{n-1}$ – нечётное непрерывное отображение. Тогда $\Phi(x_0) = 0$ для некоторого элемента x_0 из $\partial\mathfrak{G}$.*

Ряд свойств рода суммируется в следующем утверждении.

Лемма 2. *Пусть K_1, K_2, F – множества класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$.*

1. Если существует нечётное непрерывное отображение $\Phi\colon K_1 \to K_2$, то $\gamma(K_1) \leqslant \gamma(K_2)$.

2. Если $K_1 \subset K_2$, то $\gamma(K_1) \leqslant \gamma(K_2)$.

3. Если Φ – нечётный гомеоморфизм множеств K_1 и K_2, то $\gamma(K_1) = \gamma(K_2)$.

4. $\gamma(K_1 \cup K_2) \leqslant \gamma(K_1) + \gamma(K_2)$.

5. $\gamma(\overline{K_1 \setminus K_2} \geqslant \gamma(K_1) - \gamma(K_2)$.

6. Если F – компакт, то F имеет такую окрестность V, что $\overline{V} \in \Sigma(\mathbb{R}^N)$ и $\gamma(\overline{V}) = \gamma(F)$.

7. Если существует нечётный гомеоморфизм Ψ множества F и границы ограниченной симметричной окрестности 0 в $\mathbb{R}^n$, то $\gamma(F) = n$.

8. Если E – подпространство пространства R^N, $dimE$ – размерность пространства E и $\gamma(F) > N - dimE$, то $F \cap E \neq \varnothing$.

◀ Установим первое свойство рода. Пусть $\gamma(K_2) = n$. Согласно лемме 1 существует нечётное непрерывное отображение $\Psi\colon K_2 \to \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Очевидно, что $\Psi \circ \Phi$ есть нечётное непрерывное отображение множества K_1 в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, поэтому $\gamma(K_1) \leqslant n = \gamma(K_2)$. Свойство 1 рода доказано; второе и третье свойства очевидным образом следуют из первого.

Свойство 4 вытекает из определения рода. Свойство 5 содержится в предшествующем, поскольку $K_1 \subset K_2 \cup \left(\overline{K_1 \setminus K_2}\right)$.

Пусть F – компакт класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ и $\gamma(F) = n$. По определению рода найдутся n замкнутых множеств $F_1, \ldots, F_n$, удовлетворяющих условиям (8.1). Каждое из множеств F_i есть компакт и $\rho(F_i, -F_i) > 0\,(i = 1, \cdots, n)$. Фиксируем положительное число δ, удовлетворяющее неравенствам

$$2\delta < \rho(F_i, -F_i) \quad \forall i, \quad \delta < \Theta(0, F).$$

Введём множества $U_i \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N, \quad \Theta(x, F_i) < \delta\}\,(i = 1, \ldots, n)$. Как нетрудно проверить, каждое из множеств U_i открыто,

$$-U_i = \{x \in \mathbb{R}^N,\, \Theta(x, -F_i) < \delta\} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\overline{U}_i \cup (-\overline{U}_i) \in \Sigma(\mathbb{R}^N, \quad \overline{U}_i \cap (-\overline{U}_i) = \varnothing, \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и $\gamma(\overline{U}_i \cup (-\overline{U}_i) = 1 \quad \forall i$. Множество

$$U \stackrel{def}{=} \bigcup_{i=1}^{N} (U_i \cup (-U_i))$$

есть окрестность множества F и

$$\gamma(\overline{U}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \gamma(\overline{U}_i \cup (-\overline{U}_i)) \leqslant n.$$

С другой стороны, $\gamma(\overline{U}) \geqslant \gamma(F) = n$, что и доказывает свойство 6.

Из предложения 1 следует, что если $\partial\mathfrak{G}$ – граница ограниченной симметричной окрестности 0 в $\mathbb{R}^n$, то $\gamma(\partial\mathfrak{G}) = n$. Из этого равенства и свойства 3 рода легко выводится свойство 7.

Пусть E – подпространство пространства $\mathbb{R}^N$, $\mathscr{P}\colon \mathbb{R}^N \to E$ – оператор ортогонального проектирования на пространство E. Тогда $\mathscr{I} - \mathscr{P}$ есть оператор ортогонального проектирования на пространство $E^{\perp}$ – ортогональное дополнение к пространству E. Если $\gamma(F) > N - dim E$, то непрерывное и нечётное отображение $\mathscr{I} - \mathscr{P}\colon F \to E^{\perp}$ обращается в нуль на некотором элементе x^* из множества F. Очевидно, что $x^* \in F \cap E$, следовательно, $F \cap E \neq \varnothing$. Свойство 8 установлено. ►

Если $\mathbb{R}^N$ есть попространство более широкого пространства $\mathscr{E}$, то класс $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ составляет собственную часть класса $\Sigma(\mathscr{E})$. Род множества из $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ совпадает с родом этого множества, рассматриваемого как элемент $\Sigma(\mathscr{E})$.

Род пересечения сферы $\partial\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^N,\, |x| = 1\}$ с k-мерным подпространством пространства $\mathbb{R}^N$ равен k. Таким образом род множества из $\sum(\mathbb{R}^N)$ может принимать любые целые значения от 1 до N.

Род любого конечного множества класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ равен 1. Могут существовать бесконечные множества рода 1. Например, множество

$$F_p(x) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N,\, |(x,p)| = 1\} \qquad (p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$$

принадлежит классу $\Sigma(\mathbb{R}^N)$ и $\gamma(F_p) = 1$, поскольку нечётное отображение $x \to (x,p)$ не обращается в нуль на F_p.

2. Критические точки. В этом пункте Q – симметричное относительно 0 подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющее условиям, введённым в начале главы. Обозначим через $\Sigma_n(Q)$ класс компактных и симметричных относительно 0 подмножеств Q, род которых не меньше n. Компактное множество K класса $\Sigma(\mathbb{R}^N$ входит в $\Sigma_n(Q)$, если $K \subset Q$ и любое нечётное непрерывное отображение из K в $\mathbb{R}^{n-1}$ обращается в нуль на некотором элементе из K. Очевидно, что

$$\Sigma_{n+1} \subset \Sigma_n(Q),\, \Sigma_1(Q) \neq \varnothing \,\text{и}\, \Sigma_m(Q) = \varnothing \,\text{при}\ \ m > \gamma(Q).$$

Фиксируем симметричное относительно 0 замкнутое множество $Q_1 \subset Q$. Как нетрудно видеть, класс $\Sigma_n(Q)$ инвариантен относительно нечётных Q_1- изотопий пространства Q.

Чётной функции f класса $\Lambda_0(Q)$ сопоставим числа

$$c_n(f) \stackrel{def}{=} \inf_{K \in \Sigma_n(Q)} \max_{x \in K} f(x) \quad (n = 1, \ldots, \gamma(Q)), \tag{2}$$

$$\mu_f(Q_1) = \sup\{f(x),\, x \in Q_1\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in \Lambda_0(Q)$, числа $c_n(f), \mu_f(Q_1)$ определены равенствами (2), (3),*

$$c_n(f) = \cdots = c_{n+p}(f) = c > \mu_f(Q_1).$$

Пусть $\mathscr{K}_f^c = \{x \in Q,\ f(x) = c,\ d_f(x) = 0\}$ *– множество критических точек функции* f*, принадлежащих поверхности уровня* $f(x) = c$*, причём* $0 \notin \mathscr{K}_f^c$*. Тогда*

$$\gamma(\mathscr{K}_f^c) \geqslant p + 1.$$

◀ Из теоремы 2.3.4 следует непустота множества $\mathscr{K}_f^c$. Так как f – чётная функция класса $\Lambda_0(Q)$, то $\mathscr{K}_f^c$ – симметричное относительно 0 компактное множество, не содержащее (в силу условий теоремы) точки 0. Фиксируем окрестность V компакта $\mathscr{K}_f^c$, числа $d_1 > d > 0$ и нечётную Q_0 изотопию пространства Q так, чтобы выполнялись иребования:

$$\overline{V} \in \Sigma_(\mathbb{R}^N),\ \gamma(\overline{V}) = \gamma(\mathscr{K}_f^c)),\ d_1 < c - \mu_f(Q_1),$$

справедливо утверждение 2 теоремы 2.2.1. Неравенство $d_1 < c - \mu_f(Q_1)$ влечёт за собой включение $Q_1 \subset Q_0$, поэтому U_t – нечётная Q_1 – изотопия пространства Q.

Пусть $K \in \Sigma_{n+p}(Q)$ и $\max\{f(x), x \in K\} < c + d$. Тогда

$$\max\{f(y), \quad y \in U_1(K \setminus V)) < c - d,$$

следовательно,

$$\gamma(K \setminus V) \leqslant \gamma(U_1(K \setminus V)) < n - 1.$$

Согласно пятому свойству рода

$$\gamma(\overline{K \setminus \bar{V}}) \geqslant \gamma(K) - \gamma(\overline{V}) \geqslant n + p - \gamma(\mathscr{K}_f^c).$$

Доказываемая оценка $\gamma(\mathscr{K}_f^c) \geqslant p+1$ следует из неравенства $\gamma(K \setminus V) < n-1$. ▶

Теорема 1 гарантирует не только существование критического множества, но и его (в определённом смысле) массивность. Если в условиях теоремы 1 $p \geqslant 1$, то $\gamma(\mathscr{K}_f^c) \geqslant 2$ и множество $\mathscr{K}_f^c$ бесконечно. Иначе говоря, каждому кратному критическому значению соответствует бесконечное число пар противоположных критических точек.

Если $0 \in Q$, то 0 – критическая точка функции f. В этом случае представляет интерес задача о ненулевых критических точках. Будем предполагать, что $f(0) = 0$. Для оценки числа пар ненулевых критических точек введём числа

$$i_1(f) = \lim_{t \to -0} \gamma\{x \in Q, f(x) \leqslant t\}, \tag{3}$$

$$i_2(f) = \lim_{t \to -\infty} \gamma\{x \in Q, f(x) \leqslant t\}. \tag{4}$$

Существование пределов, фигурирующих в (3), (4), легко выводится из второго свойства рода. Очевидно, что $0 \leqslant i_2(f) \leqslant i_1(f) \leqslant \gamma(Q)$. Легко привести примеры функций класса $\Lambda_0(Q)$, для которых $i_2(f) = 0, i_1(f) = \gamma(Q) = N$.

Теорема 2. *Каждая чётная функция* f *класса* $\Lambda_0(Q)$ *имеет не менее* $i_1(f) - i_2(f)$ *пар критических точек, соответствующих отрицательным критическим значениям.*

◀ Пусть натуральное число m удовлетворяет неравенствам

$$i_2(f) < m \leqslant i_1(f). \tag{5}$$

Так как $i_1(f) \geqslant m$, то существует такое $t < 0$, что

$$\gamma(\{x \in Q, f(x) \leqslant t\}) \geqslant m.$$

Множество $\{x \in Q, f(x) \leqslant t\}$ принадлежит $\Sigma(\mathbb{R}^N)$. Функция f на этом множестве не превосходит t. Отсюда следует оценка $c_m(f) > -\infty = \mu_f(\varnothing)$. В силу теоремы 1, относящейся к случаю $Q_1 = \varnothing$, число $c_m(f)$ – критическое значение функции f.

Таким образом, каждому натуральному числу m, удовлетворяющему неравенству (5), соответствует отрицательное критическое значение функции f. Если два таких критических значения совпадают, то f имеет бесконечное число критических точек, соответствующих отрицательным критическим значениям. Если все критические значения различны, то их число не меньше $i_1(f) - i_2(f)$. Поэтому f имеет не менее $i_1(f) - i_2(f)$ пар критических точек, в которых f принимает отрицательные критические значения. ▶

Аналогичное теореме 2 утверждение имеет место для положительных критических значений. Введём в рассмотрение числа

$$j_1(f) = \lim_{t\to\infty} \gamma\{x \in Q, f(x) \leqslant t\},$$
$$j_2(f) = \lim_{t\to+0} \gamma\{x \in Q, f(x) \leqslant t\}.$$

Теорема 3. *Каждая чётная функция f класса $\Lambda_0(Q)$ имеет не менее $j_1(f)-j_2(f)$ пар критических точек, соответствующих положительным критическим значениям.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Сформулируем более обозримые условия существования ненулевых критических точек чётных функций и способы оценки их количества.

Теорема 4. *Пусть f – чётная функция класса $\Lambda_0(Q)$, f ограничена снизу. Пусть существует такое подпространство E пространства $\mathbb{R}^N$, $dimE = M \leqslant$ и число $\rho > 0$, что $\rho\mathbb{B} \subset Q$ и*

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in E \cap \rho\mathbb{B}. \tag{6}$$

Тогда функция f имеет не менее M пар критических точек, соответствующих отрицательным критическим значениям.

▶ Так как f – ограниченная снизу функция, то

$$\{x \in Q,\ f(x) \leqslant t\} = \varnothing$$

при больших по модулю отрицательных значений t. Следовательно, $i_2(f) = 0$. Множество $KE \cap \rho\mathbb{B}$ компактно, симметрично относительно 0 и принадлежит

Q. В силу седьмого свойства рода $\gamma(K) = m$. Неравенство (6) влечёт оценку $i_2(f) \geqslant \gamma(K)$. Теперь теорема 4 следует из теоремы 2.▶

Оценка (6) имеет место, если, например, функция f допускает представление

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) + \omega(x), \tag{7}$$

где

$$\lim_{x\to 0} \frac{(Ax, x)}{|x|^2} = 0, \tag{8}$$

A – симметрический линейный оператор в пространстве $\mathbb{R}^N$, имеющий отрицательные собственные значения. Если E – линейная оболочка собственных векторов оператора A, соответствующая отрицательным собственным значениям, то из (7), (8) следует (6) при достаточно малом $\rho > 0$.

Равенство (6) справедливо также, если $f(x) \leqslant -k|x| + \omega_1(x)$, где

$$k > 0, \omega_1(x) = o(|x|)$$

при $x \to 0$. В этом случае $E = \mathbb{R}^N$ и функция f недифференцируема в точке 0.

2.5 Собственные векторы

1. Условно критические точки. Конкретизируем предшествующие результаты в случае, когда множество Q определяется соотношением

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g(x) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

где функция g принадлежит классу $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$ и удовлетворяет условиям:

1) $\overset{\circ}{Q} = \{x \in \mathbb{R}^N,\ g(x) < 0\} \neq \varnothing$;

2) $0 \notin \partial g(x)$, если $g(x) = 0$.

Из этих условий следует, что определяемое равенством (1) множество Q удовлетворяет предположениям, сформулированным в начале данной главы. Соотношения, описывающие конусы $T_Q(x)$ и $N_Q(x)$, приведены выше.

Пусть f – функция класса $\Lambda_{loc}(Q), \partial f(x)$ – субградиент Кларка функции f в точке x. Из описания конуса $N_Q(x)$ вытекает оценка

$$d_f(x) \overset{def}{=} \min\{|z^*|,\ z^* \in \partial f(x) + N_Q(x)\} \geqslant$$

$$\geqslant \min\{|x^* + \lambda y^*|,\ x^* \in \partial f(x),\ y^* \in \partial g(x),\ \lambda \geqslant 0, \lambda g(x) = 0\}. \tag{2}$$

В силу (2) равенство $d_f(x) = 0$ влечёт за собой включение

$$0 \in \partial f(x) + \lambda \partial g(x), \tag{3}$$

причём

$$\lambda \geqslant 0, \quad \lambda g(x) = 0. \tag{4}$$

Если $x \in \overset{\circ}{Q}$, то $0 \in \partial f(x)$, т. е. x – критическая точка функции f.

Равенство $\lambda g(x) = 0$ называют *условием дополняющей нежёсткости.* Его непосредственным следствием является

Лемма 1. *Если* $f \in \Lambda_{loc}(Q)$ *и* $0 \notin \partial f(z) \quad \forall z \in \overset{\circ}{Q}$, *то каждая критическая точка* x *функции* $f\colon Q \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$0 \in \partial f(x) + \lambda \partial g(x), \qquad g(x) = 0 \tag{5}$$

с некоторым $\lambda \geqslant 0$.

Элемент x, для которого имеют место соотношения (5), называют *условно критической* точкой функции f относительно поверхности уровня

$$\{x \in \mathbb{R}^N,\, g(x) = 0\}.$$

Если сверх того $x \neq 0$, то x называют *собственным вектором* пары операторов $\partial f, \partial g\}$, а число λ – собственным значением задачи (5).

Фиксируем функцию h класса $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$, обладающую свойствами:

1) h – чётная функция и $h(0) = 0$;

2) $h^\circ(x; x) > 0$, если $x \neq 0$;

3) h – растущая на $\mathbb{R}^N$ функция.

Из условий 1) – 3) вытекает, что для любого x из $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ функция $t \to h(tx)$ строго возрастает на луче $[0, \infty)$ и область её значений совпадает с $[0, \infty)$. Положим

$$T_r \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N,\, h(x) \leqslant r\},\, S_r \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N, h(x) = r\},$$

$$Q_r = \{x \in \mathbb{R}^N,\, h(x) = r\}.$$

При любом $r > 0$ множество T_r ограничено, замкнуто и симметрично относительно 0; его граница совпадает с множеством S_r,

$$\overset{\circ}{T}_r = \{x \in \mathbb{R}^N,\, h(x) < r\},\, Q_r = \mathbb{R}^N \setminus \overset{\circ}{T}_r.$$

Равенство $h(t(x)x) = r$ определяет положительную и непрерывную на $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ функцию $t(x)$. Оператор $\mathscr{P}_r\colon \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to S_r$, определяемый равенством $\mathscr{P}_r = t(x)x$ и называемый *оператором радиального проектирования*, непрерывен; его область значений совпадает с множеством S_r.

Изучим условно критические точки функции f класса $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$ относительно поверхности S_r. Будут использоваться условия:

1°) f – чётная функция и $f(0) = 0$;

2°) $0 \notin \partial f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

3°) f – растущая на $\mathbb{R}^N$ функция.

Как нетрудно видеть, $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Действительно, пусть z – точка обсолютного минимума функции $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ и $f(z) < 0$. Тогда $z \neq 0$ и $0 \in \partial f(z)$, что противоречит условию 2).

Поскольку S_r – граница симметричной ограниченной окрестности точки 0, то $\gamma(S_r) = N$. При любом натуральном $n \leqslant N$ совокупность $\Sigma_n(Q_r)$ компактных и симметричных относительно 0 подмножеств Q_r, род которых не меньше n, есть непустое множество. Положим

$$c_n(r) \stackrel{def}{=} \inf_{A \in \Sigma_n(Q_r)} \max_{x \in A} f(x) \quad (n = 1, \ldots, N). \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть функции f, h класса $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$ удовлетворяют условиям $1^\circ) - 3^\circ)$ и 1) - 3) соответственно. Пусть числа $c_n(r)\,(n = 1, \cdots, N, r > 0)$ определены равенствами (6). Тогда существуют последовательности*

$$x_n(r), \lambda_n(r) \quad (n = 1, \cdots, N),$$

для которых имеют место соотношения

$$0 \in \partial f(x_n(r)) - \lambda_n(r) \partial h(x_n(r)), \tag{7}$$

$$f(x_n(r)) = c_n(r), \quad h(x_n(r)) = r,\, \lambda_n(r) > 0. \tag{8}$$

◀ Так как f – растущая функция класса $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$, то $f \in \Lambda_0(Q_r)\,(r > 0)$. Множество Q_r может быть задано соотношением (1), в котором $g(x) = r - h(x)$. Функция g удовлетворяет условиям 1), 2); при этом $\partial g(x) = -\partial h(x)$,

$$N_{Q_r}(x) \subset -\bigcup \lambda \partial h(x) \qquad (\lambda \geqslant 0, \quad \lambda(h(x) - r) = 0).$$

В частности, если x – критическая точка функции $f\colon Q_r \to \mathbb{R}$, то найдётся такое число λ, что

$$0 \in \partial f(x) - \lambda \partial h(x), \quad \lambda \geqslant 0, \quad \lambda(h(x) - r) = 0. \tag{9}$$

Поскольку f – растущая функция на множестве Q_r, то каждое из чисел $c_n(r)$, определённых равенством (6), конечно. В силу теоремы 4.1 числа $c_n(r)$ $(n = 1, \cdots, N)$ являются критическими значениями функции $f\colon Q_r \to \mathbb{R}$. Если

$$c_n(r) = c_{n+1}(r) = c$$

при некотором n, то соответствующее критическое множество $\mathscr{K}_f^c$ бесконечно. Поэтому существует N различных пар $\{x_n(r), -x_n(r)\}$ критических точек функции $f\colon Q_r \to \mathbb{R}$, для которых $f(x_n(r)) = c_n(r) \quad (n = 1, \cdots, N)$. Согласно (9) найдутся числа $\lambda_n(r)$, удовлетворяющие соотношениям

$$0 \in \partial f(x_n(r)) - \lambda_n(r) \partial h(x_n(r)), \quad \lambda_n(r) \geqslant 0,$$

$$\lambda_n(r)(h(x_n(r)) - r) = 0 \quad (n = 1, \cdots, N). \tag{10}$$

Так как $x_n(r) \in Q_r$, то $x_n(r) \neq 0$ и $0 \in \partial f(x_n(r))$. Следовательно, $\lambda_n(r) > 0, \quad h(x_n(r)) = r$ и (10) влечет за собой (7), (8). ▶

2. Зависимость критических значений от параметра. Как нетрудно видеть, с ростом r множества Q_r сужаются. Отсюда вытекает неубывание на $(0, \infty)$ функций $c_n(\cdot)\,(n = 1, \cdots, N)$. Изучим более детально поведение этих функций при замене условия 2°) более сильным требованием

4°) $f^\circ(x; x) > 0$, если $x \neq 0$.

Условие 4°) обеспечивает строгое возрастание функции $t \to f(tx)$, если $t > 0, x \neq 0$). Обозначим через $\Sigma_n(S_r)$ совокупность компактных множеств класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$, принадлежащих поверхности S_r и имеющих род не меньше n. Очевидно, что $\Sigma_n(S_r) \neq \varnothing$ и $\Sigma_n(S_r) \subset \Sigma_n(Q_r) \quad (n = 1, \cdots, N)$.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1°), 2°), 4°)*, то*

$$c_n(r) = \inf_{A \in \Sigma_n(S_r)} \max_{x \in A} f(x) \quad (n = 1, \cdots, N) \tag{11}$$

и функции $c_n(\cdot)$ *непрерывны на* $(0, \infty)$.

◀ Обозначим через $d_n(r)$ правую часть равенства (11). Так как

$$\Sigma_n(S_r) \subset \Sigma_n(Q_r),$$

то $d_n(r) \geqslant c_n(r)$. С другой стороны, если множество A принадлежит $\Sigma_n(Q_r)$, то его радиальная проекция $\mathscr{P}_r(A)$ на S_r принадлежит $\Sigma_n(S_r)$ и в силу условия 4°) справедливо соотношение

$$\max_{x \in \mathscr{P}_3(A)} f(x) \leqslant \max_{x \in A} f(x).$$

Последнее неравенство влечёт за собой оценку

$$d_n(r) \leqslant \max_{x \in A} f(x).$$

Ввиду произвольности множества A из $\Sigma_n(Q_r)$, получаем $d_n(r) \leqslant c_n(r)$. Равенство (11) доказано.

Фиксируем $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $n = 1, \cdots, N$. Подберём $\delta_0 > 0$ так, чтобы из соотношений

$$|h(x') - r| < \delta_0, \quad |h(x'') - r| < \delta_0, \quad |x' - x''| < \delta_0$$

следовало неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Фиксируем теперь $\delta > 0$, подчинённое требованиям:

$$1)\, \delta < \delta_0;$$

$$2)\, \text{если}\, |h(x) - r| < \delta,\; |t - r| < \delta,\; \text{то}\;\; |x - \mathscr{P}_r x| < \delta_0.$$

Существование таких чисел δ_0, δ следует из предположений относительно функций f, h.

Пусть $|q-r|<\delta, \quad |t-r|<\delta, \quad A\in\Sigma_n(S_q)$. Тогда

$$\mathscr{P}_t(A)\in\Sigma_n(S_t) \text{ и } |x-\mathscr{P}_t(x)<\delta_0 \quad \forall x\in A.$$

Отсюда выводится оценка

$$\max_{x\in A} f(x) - \max_{x\in\mathscr{P}_t(A)} f(x)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности чисел $\varepsilon>0$, $r>0$ последняя оценка влечёт за собой непрерывность функций $c_n(\cdot)$ на луче $(0,\infty)$ ►

В общем случае достаточно сложно выразить собственные значения $\lambda_n(r)$ через соответствующие им критические значения $c_n(r)$. Эта связь существенно упрощается в предположении однородности функций f и h:

$$f(\lambda x)=\lambda^p f(x), \qquad h(\lambda x)=\lambda^q h(x) \quad \forall\lambda>0, \tag{12}$$

где $p\geqslant 1, q\geqslant 1$. Из равенств (12) для положительных на $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ функций f,h следуют условия $3^\circ), 4^\circ), 2), 3)$. Примером положительно однородной степени p функции может служить функция $g(x)=|x|^p$.

Для дифференцируемых на $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ функций f,h равенства (12) приводят к соотношениям

$$f^\circ(x;x)=pf(x), \quad h^\circ(x;x)=qh(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},$$

объединяя которые с (7), (8), получаем последовательно равенства

$$pf(x_n(r))=\lambda_n(r)qh(x_n(r)), \quad \lambda_n(r)=\frac{pc_n(r)}{qr}.$$

Таким образом, для однородных функций f,h собственные значения $\lambda_n(r)$ пропорциональны критическим значениям $c_n(r)$ и совпадают с ними в случае $p=q\geqslant 1$, $r=1$.

2.6 Дополнения, задачи и замечания

1. Варианты условия компактности. В предшествующих построениях существенную роль играло условие компактности (C_0). Как отмечалось выше, для того чтобы функция $f\colon Q\to\mathbb{R}$ удовлетворяла условию $C_0)$ достаточно, чтобы f была растущей на Q, т. е. при любом действительном t множество $\{x\in Q, f(x)\geqslant t\}$ ограничено.

Лемма 1. *Пусть $Q\in Cv(\mathbb{R}^N)$, $f\colon Q\to\mathbb{R}$ – ограниченная снизу выпуклая функция класса $\Lambda_{loc}(Q)$. Тогда $f\in\Lambda_0(Q)$ в том и только том случае, если f – растущая на Q функция.*

◀ Пусть Q – неограниченное множество, f – выпуклая ограниченная снизу функция класса $\Lambda_0(Q)$. В силу теоремы 2.3.2 функция f достигает минимального на Q значения c. Соответствующее критическое множество $\mathscr{K}_f^c$ есть выпуклый компакт. Положим

$$\mathfrak{M}_\delta \overset{def}{=} \{x \in Q, \Theta(x, \mathscr{K}_f^c) = \delta \quad (\delta > 0).$$

Из теоремы 2.2.2 вытекает неравенство

$$f(z) \geqslant k(\delta) > c \quad \forall z \in \mathfrak{M}_\delta. \tag{1}$$

Пусть $x \in Q$, $y \in \mathscr{K}_f^c$ и $\Theta(x, \mathscr{K}_f^c) = |x - y|$, $z = (1-t)y + tx \in \mathfrak{M}_\delta$. Тогда

$$t = \frac{|z-y|}{|x-y|} = \frac{\delta}{|x-y|}. \tag{2}$$

Так как f – выпуклая функция, то

$$f(z) \leqslant (1-t)f(y) + tf(x).$$

Объединяя это неравенство с (1) и (2), приходим к оценке

$$f(x) \geqslant k(\delta)\frac{|x-y|}{|z-y|} - \left(\frac{|x-y|}{|z-y|} - 1\right)c \geqslant c +$$
$$+ (k(\delta) - c)\frac{|x-y|}{|z-y|} \geqslant \frac{k(\delta)-c}{\delta}\Theta(x, \mathscr{K}_f^c) + \delta,$$

из которой следует, что f – растущая функция. ▶

Для невыпуклой функции требование роста на ∞ необязательно для выполнения условия C_0). В связи с этим может оказаться полезным следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть множество Q звёздно относительно 0, т. е.*

$$\lambda Q \subset Q \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Пусть $f \in \Lambda_{loc}(Q)$ и выполняется неравенство

$$(x^*, x) + kf(x) \geqslant k_0|x| - k_1, \tag{3}$$

в котором $x \in Q, x^* \in \partial f(x)$, постоянные $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, k не зависят от x. Тогда $f \in \Lambda_0(Q)$.

◀ Пусть $x_n \in Q, |f(x_n)| \leqslant k_2$ и $d_f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Существуют элементы x_n^* из $\partial f(x_n)$, y_n^* из $N_Q(x_n)$, для которых $|x_n^* + y_n^*| = d_f(x_n)$. Так как множество Q звёздно относительно 0, то $0 \in K_Q(x_n), (y_n^*, x_n) \geqslant (y_n^*, 0) = 0$. Справедлива оценка

$$(x_n^*, x_n) \leqslant -(y_n^*, x_n) + d_f(x_n) \leqslant d_f(x_n)|x_n|.$$

С другой стороны, согласно (3) имеем

$$(x_n^*, x_n) \geqslant k_0|x_n| - k_1 - kf(x_n) \geqslant k_0|x_n| - k_1 - |kk_2|.$$

Если n настолько велико, что $d_f(x_n) < k_0/2$, то из полученных оценок вытекает неравенство

$$|x_n| \leqslant \frac{2(k_1 + |kk_2|}{k_0},$$

влекущее за собой ограниченность последовательности x_n. ▶

Условиям леммы 2 удовлетворяет, например, функция

$$f(x) = |x|^2 - |x|^4 \qquad (x \in Q = \mathbb{R}^N).$$

В данном примере f – невыпуклая функция; для неё не выполняется условие роста.

Некоторые предшествующие утверждения сохраняются при замене условия (C_0) его менее ограничительным вариантом. Скажем, что функция f класса $\Lambda_{loc}(Q)$ *удовлетворяет условию* $\mathscr{Y}(a,b)$, если всякая последовательность x_n из Q, для которой

$$a \leqslant f(x_n) \leqslant b, \qquad d_f(x_n) \to 0 \,\text{при}\; n \to \infty, \tag{4}$$

ограничена. Очевидно, что функция f из $\Lambda_{loc}(Q)$ принадлежит $\Lambda_0(Q)$ в том и только том случае, если она удовлетворяет условию $\mathscr{Y}(a,b)$ при любых $a < b$.

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что её утверждение верно для функций класса $\Lambda_{loc}(Q)$, удовлетворяющих условию $\mathscr{Y}(c-\delta, c+\delta)$ при некотором $\delta > 0$. Аналогично, предположение $f \in \Lambda_0(Q)$ в теоремах 3.2, 3.4 можно заменить следующим: $f \in \Lambda_{loc}(Q)$ и всякая последовательность x_n, для которой

$$f(x_n) < 0,\; f(x_n) \to 0,\; d_f(x_n) \to 0 \,\text{при}\; n \to \infty,$$

ограничена. В частности, справедлива

Теорема 1. *Пусть $0 \in Q$, множество Q симметрично относительно 0, f – чётная функция класса $\Lambda_{loc}(Q)$, множество $\{x \in Q, f(x) \leqslant 0\}$ ограничено и существует такой компакт K класса $\Sigma_n(Q)$, что*

$$f(x) < 0 \,\forall x \in K.$$

Тогда функция f имеет не менее n пар критических точек, соответствующих отрицательным критическим значениям f.

Доказательство теоремы 1 опускается. Оно вполне аналогично доказательству теоремы 4.2.

2. Теорема о промежутке регулярности. Введём одно общее понятие. Пусть $Q_1 \subset Q_0 \subset Q$. Множество Q_1 называют *деформационным ретрактом* множества Q_0, если существует непрерывное отображение $U\colon Q_0 \times [0,1] \to Q_0$, обладающее свойствами:

1)$U(x,0)=x \quad \forall x\in Q_0$;
2)$U(x,t)=x \quad \forall (x,t)\in Q_1\times[0,1]$;
3)$U(x,1)\in Q_1 \quad \forall x\in Q_0$.

На геометрическом языке свойства 1) - 3) означают, что Q_1 получается из Q_0 с помощью непрерывной деформации, не выводящей за пределы Q_0 и оставляющей точки из Q_1 на месте. Положим для краткости

$$\{f\leqslant t\}\overset{def}{=}\{x\in Q,\, f(x)\leqslant t\}.$$

Теорема 2. *Пусть $f\in\Lambda_{loc}(Q), f$ удовлетворяет условию $\mathscr{Y}(a,b)$. Пусть отрезок $[a,b]$ не содержит критических значений функции f. Тогда множество $\{f\leqslant a\}$ есть деформационный ретракт множества $\{f\leqslant b\}$.*

◀ Пусть $M\overset{def}{=}\{x\in Q,\, a\leqslant f(x)\leqslant b\}$ и $\delta\overset{def}{=}\inf\{d_f(x),\, x\in M\}$. Очевидно, что $\delta\geqslant 0$. Установим неравенство $\delta>0$. В прелположении противного существует последовательность x_n из Q, обладающая свойствами (4). Согласно условию $\mathscr{Y}(a,b)$ последовательность x_n ограничена. Если x – частичный предел последовательности x_n, то $x\in M$, $d_f(x)=0$ и, следовательно, $f(x)$ – критическое значение функции f, принадлежащее отрезку $[a,b]$. Полученное противоречие доказывает неравенство $\delta>0$.

В силу установленных ранее результатов существует векторное поле v класса $\Lambda_{loc}(\mathbb{R}^N)$, для которого справедливы соотношения

$$v(x)\in K_Q(x)\cap\mathbb{B},\qquad f^\circ(x;v(x))<-\frac{\delta}{2}\quad\forall x\in M.\tag{5}$$

Введём в рассмотрение отображение

$$F(x)=\begin{cases}v(x), & \text{если}\, x\in Q,\, a<f(x)<b,\\ 0, & \text{если}\, x\in Q,\, f(x)\leqslant a,\end{cases}$$

действующее из множества $Q_0=\{f\leqslant b\}$ в пространство $\mathbb{R}^N$. При любом x из множества Q_0 задача Коши

$$y'=F(y),\qquad y(0)=x\tag{6}$$

имеет единственное решение $y(t)=U_t(x)$, причём $U_t(Q_0)Q_0$. Действительно, если $x\in Q_1=\{f\leqslant a\}$, то $U_t(x)=x$. Если $x\in Q$ и $a<f(x)\leqslant b$, то и $U_tx\in Q$, причём $a<f(U_t(x))\leqslant b$ для некоторого промежутка $(0,t(x))$ в силу предложения 1.1. Из оценки (5) вытекает неравенство $t(x)\leqslant T\overset{def}{=}2(b-a)/\delta$, так что $U_T(Q_0)\subset Q_1$.

Отображение $(x,t)\to U_t(x)$ непрерывно по совокупности переменных на множестве $Q_0\times[0,T]$. Действительно, пусть $x_n\in Q_0$ и $x_n\to x$ при $n\to\infty$. Последовательность $y_n(t)=U_t(x_n)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0,T]$, поэтому некоторая её подпоследовательность y_{n_i} равномерно на $[0,T]$ сходится к $y(t)$ – решению задачи Коши (6). Таким образом, все равномерные частичные пределы последовательности $y_n(t)$ одинаковы и совпадают с $y(t) = U_t(x)$. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $U(t)x_n$ к $U(t)x$ и , в частности, непрерывность отображения $(x,t) \to U_t(x)$ на множестве $Q_0 \times [0,T]$.

Положим $U(x,\lambda) = U_{\lambda T}(x) \quad (x \in Q_0,\ \lambda \in [0,1])$. Определённное таким образом отображение $U\colon Q_0 \times [0,1]$ обладает свойствами 1) - 3), так что Q_1 есть деформационный ретракт Q_0. ▶

Простым, но важным следствием теоремы 2 является следующий вариант теоремы о перевале.

Теорема 3. *Пусть $f \in \Lambda_{loc}(Q)$, f удовлетворяет условию $\mathscr{Y}(a,b)$ и множество $\{f \leqslant a\}$ не является деформационным ретрактом множества $\{f \leqslant b\}$. Тогда некоторое число с из отрезка $[a,b]$ есть критическое значение функции $f\colon Q \to \mathbb{R}$.*

Для применения теоремы 4 полезно учесть, что деформационный ретракт Q_1 множества Q_0 имеет многие одинаковые топологические характеристики с Q_0. Например, если Q_0 линейно связно, то Q_1 также линейно связно. Именно этот факт и составляет основу теоремы о перевале. Вместо линейной связности можно, разумеется, использовать и другие характеристики множеств, в частности группы гомологий, гомотопические группы и др.

3. Задачи и замечания. Пусть M – замкнутое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, $A\colon M \to Kv(\mathbb{R}^N$ – многозначное отображение из M в $\mathbb{R}^N$. Графиком отображения A называют подмножество $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, обоззначаемое символом $Gr(A)$ и определяемое равенством

$$Gr(A) \overset{def}{=} \{(x,x^*) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N,\ x \in M,\ x^* \in A(x)\}.$$

Отображение A именуют ограниченным, если для всякого ограниченного множества $M_1 \subset M$ его образ

$$A(M_1) \overset{def}{=} \bigcup_{x \in M_1} A(x)$$

есть ограниченное множество, и замкнутым, если $Gr(A)$ – замкнутое множество в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.

1. Доказать, что включение $A \in S(M)$ эквивалентно ограниченности и замкнутости отображения $A\colon M \to Kv(\mathbb{R}^N$.

2. Обозначим через $\Lambda \overset{\circ}{T}(Q)$ часть $\Lambda T(Q)$, состоящую из векторных полей $F\colon Q \to \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих условию $F(z) \in K_Q(z) \,\forall z \in Q$. Установить непустоту класса $\Lambda \overset{\circ}{T}(Q)$.

3. Пусть $F \in \Lambda \overset{\circ}{T}(Q), x \in \overset{\circ}{Q}$, $y(t;x)$ – решение задачи Коши

$$y' = F(y), \quad y(0) = x.$$

Доказать включение

$$y(t;x) \in \mathring{Q} \quad \forall t \geqslant 0.$$

4. Пусть $F \in \Lambda\, T(Q)$, $v \in \Lambda\, \mathring{T}(Q)$, $y_\varepsilon(t,x)$ – решение задачи Коши

$$y' = F(y) + \varepsilon v(y), \quad y(0) = x + \varepsilon v(x) \qquad (\varepsilon > 0,\, x \in Q).$$

Доказать, что равенство

$$U_t(x) \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t,x) \qquad (t \geqslant 0,\, x \in Q)$$

определяет оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения

$$y' = F(y).$$

5. Пусть $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ – растущая функция с единственным критическим значением c, $0 < q < 1$, $0 < T < \infty$. Построим последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, подчинённую требованиям

$$x_{n+1} = x_n + t_n v_n, \quad v_n \in \mathbb{B}, \quad f^\circ(x_n; v_n) < t_n d(0, \partial f(x_n)),$$

$$0 \leqslant t_n \leqslant T, \quad f(x_n + t_n v_n) = \min_{0\leqslant t\leqslant T} f(x + tv_n).$$

Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathscr{K}_f^c) = 0;$$

показать, что последовптельность $f(x_n)$ сходится к числу c – минимальному значению функции f на пространстве $\mathbb{R}^N$.

6. Доказать, что для любого неограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}^N$ существует непостоянная функция из $\Lambda(Q)$, не входящая в класс $\Lambda_0(Q)$.

7. Если M – компактное несвязное множество в $\mathbb{R}^N$, то функция

$$\varrho(\cdot, M)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

принадлежит классу $\Lambda_0(\mathbb{R}^N$ и имеет положительное критическое значение. Доказать.

8. Функция $f\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ называется многочленом степени m, если она допускает представление

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha x^\alpha,$$

в котором $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_N}$, α_i – целые неотрицательные числа, $x_1, \ldots, x_N$ – координаты точки x в каком-либо базисе $e_1, \ldots, e_N$ пространства $\mathbb{R}^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ – порядок мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$, причём

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^2 \neq 0.$$

Доказать, что если $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ – многочлен нечётной степени класса $\Lambda_0(\mathbb{R}^N)$, имеющий точку локального минимума, то существует не менее двух критических значений функции f.

9. Пусть $E_i \subset \mathbb{R}^N$ – подпространство $\mathbb{R}^N$ $(i \in I,\ |I| < \infty)$, $M_i = E_i \cap \mathbb{B}$ $(i \in I)$. Доказать равенство

$$\gamma\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \max_{i\in I} dim\, E_i.$$

10. Если $M \in \Sigma(\mathbb{R}^N)$, то $\gamma(M) = \gamma(M \cap R\mathbb{B}$ при некотором $R > 0$. Привести пример множества M класса $\Sigma(\mathbb{R}^N)$, для которого $\gamma(M + \delta\mathbb{B}) > \gamma(M)$ $(0 < \delta < d(0, M))$.

11. Для каждой непрерывной функции $f\colon \partial\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ существуют элементы u_i, обладающие свойствами

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i, \\ 1, & \text{если } j = i. \end{cases}, \quad (i, j = 1, \ldots, N), \quad f(u_1) = f(u_2) = \ldots = f(u_N).$$

(Это утверждение называют [45] теоремой Какутани-Ямабе-Юдзебо.)

12. Показать, что около каждого множества M класса $Kv(\mathbb{R}^N)$ можно описать куб; доказательство можно провести, основываясь на задаче 11, применённой к функции $f(u) = s(u, M) + s(-u, M)$.

13. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^N$, функция $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема в области Ω. Пусть f имеет две различные точки строгого локального минимума и $f(x_n) \to \infty$ для всякой последовательности x_n, сходящейся к границе $\partial\Omega$ области Ω : $d(x_n, \partial\Omega) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда функция f имеет в области Ω третью стационарную точку (типа минимакса).

(Этот результат принадлежит Р. Куранту; его можно рассматривать как предшественника теорем о перевале).

14. Пусть A – действительная симметричная матрица размеров $N \times N$. Обозначим через

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N$$

её собственные значения, расположенные в возрастающем порядке. Обозначим через $\mathscr{E}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ совокупность подпространств E пространства $\mathbb{R}^N$, для которых $dimE = n - k + 1$. Справедлив принцип Куранта – Фишера [13], [42] о минимаксном представлении собственных чисел, выражаемый следующей формулой:

$$\lambda_k = \max_{E\in\mathscr{E}_k} \quad \min_{x\in E\cap\partial\mathbb{B}} (Ax, x).$$

В этой формуле min берётся по векторам x из $E \cap \partial\mathbb{B}$, а max по всем подпространствам E размерности $n - k + 1$. Принцип Куранта - Фишера обобщался во многих направлениях. Его бесконечномерный вариант применяется при исследовании собственных значений эллиптических операторов. Весьма неожиданным было обобщение Люстерника–Шнирельмана (1929 г.), заменившим квадратичную функцию (Ax, x) произвольной гладкой чётной функцией f на сфере

$\partial\mathbb{B}$. Развитие этого подхода привело к созданию глобального вариационного исчисления, позволившего решить многие проблемы. Дополнительные сведения исторического характера можно найти в [3], [13], [22], [25], [26], [28], [31], [33], [36], [38], [40] - [42], [45], [48] - [53], [59],[60].

Задача для внимательного читателя. Чем следует заменить класс $\mathscr{E}_k$ при переходе от квадратичной функции (Ax, x) к произвольной гладкой и чётной на сфере $\partial\mathbb{B}$ функции f?

Глава 3

Экстремальные задачи

3.1 Минимальный охватывающий шар

1. Максимизация выпуклой функции. Рассмотрим задачу максимизации

$$f(x) \to \max, \quad x \in X, \tag{1}$$

где X – выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$; f – выпуклая функция на множестве X. Задача (1), разумеется, эквивалентна задаче минимизации функции $-f$ на X, но функция $-f$ является выпуклой лишь в случае её аффинности. Поэтому задача (1) нуждается в отдельном рассмотрении.

Как отмечалось выше, выпуклость множества A эквивалентна равенству $coA = A$, а выпуклость функции $f : X \to \mathbb{R}$ равносильна выпуклости её надграфика $epi\, f \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, x \in X, z \geqslant f(x) \right\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Лемма 1. (Обобщённое неравенство Иенсена). *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$ – *выпуклая функция,* $x_i \in X$, $\lambda_i \geqslant 0\, (i = 1, \ldots, m)$ *и* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_m f(x_m).$$

◀ Из включения $\begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix} \in epi\, f$ и выпуклости $epi\, f$ следует, что

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m \\ \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_m f(x_m) \end{pmatrix} \in epi\, f\,.$$

В силу определения надграфика последнее включение эквивалентно обобщённому неравенству Иенсена.▶

Вернёмся к задаче (1). Множество $A \subset Q$ назовём *остовом* множества X, если $co\, A = X$. Остов множества определяется неоднозначно. Ясно, например, что в качестве остова X можно взять всё множество X. Для дальнейшего желательно в качестве остова брать по возможности минимальное множество. Своеобразный принцип максимума выражает

Теорема 1. *Точная верхняя грань выпуклой функции $f : X \to \mathbb{R}$ на множестве X совпадает с точной верхней гранью f на остове A множества X:*

$$\sup_X f = \sup_A f\,.$$

◀ Поскольку $A \subset X$, то

$$\sup_A f \leqslant \sup_X f\,.$$

Установим противоположное неравенство . Пусть $x \in X$. Тогда найдутся такие $\lambda_i \geqslant 0$, $x_i \in A$, $i = 1, \ldots, m$, что справедливы равенства

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\,.$$

Так как f – выпуклая функция, то

$$f(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sup_A f = \sup_A f.$$

Ввиду произвольности x из X получаем

$$\sup_{x \in X} f(x) \leqslant \sup_A f. \blacktriangleright$$

Если точная верхняя грань функции f на множествах A, X достигается, то в теореме 1 можно заменить sup на max. Именно так обстоит дело, если множества A, X компактны, а функция f непрерывна на множестве X.

Возникает вопрос: какие точки выпуклого множества входят в любой его остов, а какие нет? Существенную роль здесь начинают играть крайние точки. Напомним необходимые определения.

Элемент x из X называют *промежуточной точкой* выпуклого множества X, если x есть середина отрезка положительной длины, концы которого принадлежат множеству X. Ясно, например, если X – открытое выпуклое множество, то все его точки являются промежуточными. Бывают и замкнутые выпуклые множества, все точки которых промежуточны. Примером может служить полоса $\Pi = \{x = (x_1, \ldots, x_n)^T,\ 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Точку x выпуклого множества X именуют *крайней*, если она не является промежуточной точкой этого множества. Например, вершины плоского треугольника – его крайние точки.

Лемма 2. *Если элемент w реализует абсолютный максимум строго выпуклой на выпуклом множестве X функции f, то w – крайняя точка X.*

◀ Предположим противное, т. е. w – промежуточная точка множества X. Тогда $w = \frac{1}{2}(u+v)$, где $u \neq v, u \in X, v \in X$. Поскольку функция f строго выпукла, то

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{f(u)+f(v)}{2}.$$

Из этого неравенства вытекает, что хотя бы одно из чисел $f(u), f(v)$ больше $f(w)$. Однако в условиях леммы w реализует абсолютный максимум функции f. Противоречие. ▶

Строго выпуклая функция $f(x) = |x-a|^2$ достигает своего максимума на любом компакте $X \subset \mathbb{R}^n$. Поэтому у любого выпуклого компакта существуют крайние точки. Более того, множество $extr\, X$ крайних точек достаточно обширно и характеризует множество X в следующем смысле: $co\, extr\, X = X$. Доказательство этого принципиально важного в оптимизационных задачах утверждения можно найти , например , в [4] - [6].

Множество крайних точек выпуклого множества X входит в любой его остов, в случае компактности X оно представляет минимальный остов. В некоторых случаях множество $extr\, X$ допускает простое описание. Например, если $\Diamond$- октаэдр в $\mathbb{R}^n$, определяемый равенством

$$\Diamond := \{x = (x_1 \dots x_n)^T, \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant 1\},$$

то $extr\, \Diamond = \{\pm e_i\, i = 1, \dots, n\}$ – совокупность единичных векторов, направленных вдоль координатных осей. Для куба

$$\Box := \{x = (x_1 \dots x_n)^T, \, |x_i| \leqslant 1\}$$

соответствующее множество крайних точек $extr\, \Box$ содержит 2^n элементов вида $(\alpha_1 \dots \alpha_n)^n$, где $\alpha_i = \pm 1, \, i = 1, \dots, n$.

Задача 1. *Доказать включение* $extr\, co\, A \subset A$.

Задача 2. *Пусть*

$$Q := \{(x_1 \dots x_n)^T \in \Diamond, \sum_{j=1}^{n} x_j = 0.\}$$

Доказать равенство

$$extrQ = \{\frac{e_i - e_j}{2}, \; i, j = 1, \dots, n; i \neq j\}.$$

Лемма 3. *Пусть b – точка максимума функции $f(x) = |x-a|^2$ на выпуклом компакте X и $c = b - a \neq 0$. Тогда b – крайняя точка множества X и имеет место неравенство*

$$(c, x - b) \leqslant 0 \, \forall x \in X. \tag{1}$$

◀ В предположении противного имеем $(c, x - b) > 0$ для некоторого x из множества X. Но тогда получаем неравенство

$$|x - a|^2 = |x - b + c|^2 = |x - b|^2 + 2(c, x - b) + |c|^2 > |c|^2 = |a - b|^2,$$

противоречащее определению b – наиболее удалённому от a элементу из множества X. ▶

Неравенство (1) означает, что множество X находится в одном из полупространств, образованных гиперплоскостью, проходящей через точку b и ортогональной вектору $c = b - a$. Данное замечание делает лемму 1 очевидной в буквальном смысле этого слова.

Пусть A – ограниченное множество в пространстве $\mathbb{R}^N$. Число

$$\mathscr{D}(A) \overset{def}{=} \sup\{|u - v|, u \in A,\, v \in A\}$$

называют *диаметром* множества A. Диаметр $\mathscr{D}(A)$ характеризует размеры множества A. Нетрудно проверяются равенства

$$\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(\overline{A}) = \mathscr{D}(\overline{co}\, A) = \mathscr{D}(extr\, \overline{A}). \tag{2}$$

Если $A = \{a_t\}$, $t \in T$ и T – конечное множество, то

$$\mathscr{D}(A) = \max\{|a_i - a_j|,\, i \neq j, i \in T,\, j \in T\}. \tag{3}$$

2. Чебышёвский радиус компакта. Пусть A – компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$. Замкнутый шар $B(x, r) = x + r\mathbb{B}$ радиуса r с центром в точке x содержит множество A , если $r \geqslant |x - a|\ \forall a \in A$. Положим

$$g(x) \overset{def}{=} \max\{|x - a|, a \in A\};$$

очевидно, $g(x)$ есть наименьший из радиусов шаров с центром в точке x, содержащих множество A. Функция $g(x)$ определена и непрерывна на всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Из оценки $g(x) \geqslant |x - a|$ $(a \in A)$ вытекает ограниченность всех её нижних лебеговых множеств. Поэтому функция $g(x)$ достигает на $\mathbb{R}^n$ своего минимального значения в некоторой точке z. Число $g(z)$ совпадает с наименьшим из радиусов шаров, содержащих множество A. Оно называется *чебышёвским радиусом* компакта A и обозначается символом $\mathscr{R}(A)$. Таким образом,

$$\mathscr{R}(A) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{x \in A} |x - a|\,,$$

а элемент z есть решение задачи на минимакс

$$g(x) = \max_{a \in A}\, |x - a|\, \to \min\,. \tag{4}$$

Иногда z именуют чебышевским центром множества A [18]. Минимальный охватывающий A шар единствен. Действительно, если бы было два таких шара, то множество A лежало бы в их пересечении, а потому – в ещё меньшем шаре. Чебышевский центр компакта A всегда принадлежит $co(A)$ – выпуклой оболочке множества A . В самом деле, пусть $x \notin co\, A$, z – проекция точки x на множество $co\, A$. Для любого элемента y из множества $co\, A$ верно неравенство

$$(x - z, y - z) \leqslant 0,$$

непосредственным следствием которого является неравенство

$$|x - y| \geqslant |z - y| \quad \forall y \in A.$$

Отсюда и вытекает требуемый факт.

Отметим следующие свойства чебышёвского радиуса:

1) если $A_1 \subset A_2$, то $\mathscr{R}(A_1) \leqslant \mathscr{R}(A_2)$ (монотонность);

2) $\mathscr{R}(B) = 1$ (нормировка);

3)$\mathscr{R}(A + \delta B) \leqslant \mathscr{R}(A) + \delta$ (непрерывность).

Докажем свойство 3). Пусть $A \subset B(z, \mathscr{R}(A))$. Тогда $A + \delta B \subset B(z, \mathscr{R}(A) + \delta)$. Отсюда и вытекает требуемое свойство.

Последовательность A_i компактных подмножеств A назовём сходящейся к A, если $A \subset A_i + \delta_i B$, где $\delta_i \to 0$ при $i \to \infty$; будем писать $A_i \uparrow A$. Из свойств 1-3 вытекает

Лемма 2. *Если $A_i \uparrow A$, то $\mathscr{R}(A_i) \to \mathscr{R}(A)$.*

◀ Действительно, $\mathscr{R}(A) - \delta_i \leqslant \mathscr{R}(A_i) \leqslant \mathscr{R}(A)$. Поскольку $\delta_i \to 0$, то всё доказано.▶

Лемма 3. *Для любого компактного множества A существует последовательность его конечных подмножеств $A_i \uparrow A$.*

◀ Предлагается доказать самостоятельно.▶

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{R}(A)$ есть чебышёвский радиус компакта $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда найдётся такое конечное подмножество A^+ множества A, что $\mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(A^+)$ и $|A^+| \leqslant n + 1$, т. е. число элементов A^+ не превосходит $n + 1$.*

◀ Вначале изучим случай, когда A - конечное множество. Функции

$$f_a(x) = |x - a|^2 \, (a \in A)$$

выпуклы на всём пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим задачу на минимакс

$$f(x) = \max_{a \in A} |x - a|^2 \to \min\,. \tag{10}$$

Как нетрудно видеть, задача (10) имеет решение z; при этом $f(z) = \mathscr{R}^2(A)$, z – центр шара минимального радиуса, содержащего A. Согласно второй теореме об очистке существует иножество $A^+ \subset A$, $|A^+| \leqslant n+1$ такое, что z есть решение задачи на минимакс

$$f^+(x) = \max_{a \in A^+} |x - a|^2 \to \min\,, \tag{10^+}$$

следовательно, $\mathscr{R}(A^+) = \mathscr{R}(A)$.

Пусть теперь A – произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$. Построим последовательность $A_i \uparrow A$, $|A_i| < \infty$. Согласно лемме 2 $\mathscr{R}(A_i) \to \mathscr{R}(A)$ при $i \to \infty$. В силу уже доказанного существует множество A_i^+, обладающее свойствами $A_i^+ \subset A_i$, $|A_i^+| \leqslant n+1$, $\mathscr{R}(A_i^+) = \mathscr{R}(A_i)$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность A_i^+ сходится к множеству A^+, состоящему не более чем из $n+1$ элементов. При этом

$$\mathscr{R}(A^+) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{R}(A_i^+) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{R}(A_i) = \mathscr{R}(A).$$

Искомое множество построено.▶

Нетрудно установить оценку

$$\mathscr{R}(A) \leqslant \mathscr{D}(A) \leqslant 2\mathscr{R}(A). \tag{11}$$

Действительно, из определения чебышёвского радиуса $\mathscr{R}(A)$ вытекает включение $A \subset B(x, \mathscr{R}(A))$, где x – некоторая точка из $\mathbb{R}^n$. Поэтому диаметр $\mathscr{D}(A)$ не превосходит диаметра шара $B(x, \mathscr{R}(A))$, равного $2\mathscr{R}(A)$, что и доказывает правое из неравенств (11).

Если $a \in A$, то $|a - x| \leqslant \mathscr{D}(A) \forall x \in A$, поэтому $A \subset B(a, \mathscr{D}(A))$. Отсюда вытекает неравенство $\mathscr{R}(A) \leqslant \mathscr{D}(A)$.

Правое из неравенств (11) неулучшаемо. Если компакт A – центрально-симметричен относительно некоторой точки z, то $\mathscr{D}(A) = 2\mathscr{R}(A)$. При этом центр минимального охватывающего A шара совпадает с z; верно очевидное равенство

$$\mathscr{R}(A) = \max_{a\in A} |a - z|.$$

Левое из неравенств (11) допускает усиление вида

$$\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\mathscr{R}(A) \leqslant \mathscr{D}(A), \tag{12}$$

называемое неравенством Юнга. Его доказательство проводится в два этапа. Первый этап составляет

Лемма 4. *Неравенство (12) верно для каждого множества A, содержащего не более чем $n+1$ элемент.*

◀ Пусть $A = \{x_0, \cdots, x_n\}$, $B(z, R)$ – минимальный охватывающий множество A шар. Тогда $z \in co(A)$. Не нарушая общности, можно считать выполненными соотношения

$$0 = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i (x_i - z), \text{ где } \sum_{i=0}^{l} \lambda_i = 1,\ \lambda_0 > 0, \cdots \lambda_l > 0,\ l \leqslant n. \qquad (13),$$

а также

$$|x_i - z| = R, i = 0, \cdots, l.$$

Умножим (скалярно) равенство (13) на $x_k - z$ и просуммируем по k от $k = 0$ до $k = l$. Учтем при этом, что

$$(x_k - z, x_i - z) = \frac{1}{2}\left(|x_k - z|^2 + |x_i - z|^2 - |x_k - x_i|^2\right) = R^2 - \frac{1}{2}|x_k - x_i|^2,$$

$$|x_k - x_i| \leqslant \mathscr{D}(A), \quad 0 \leqslant k, i \leqslant l.$$

Тогда получим

$$0 = \sum_{k=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{l}\lambda_i R^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{l}\left(\sum_{i=0}^{l}\lambda_i |x_k - x_i|^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant (l+1)R^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{l}\left(\sum_{i\neg k}\lambda_i \mathscr{D}^2(A)\right) = (l+1)R^2 - \frac{1}{2}\mathscr{D}^2(A)\sum_{k=0}^{l}(1-\lambda_k) =$$

$$= (l+1)R^2 - \frac{l}{2}\mathscr{D}^2(A).$$

Так как $l \leqslant n$, то

$$R^2 \leqslant \frac{l}{2(l+1)}\mathscr{D}^2(A) \leqslant \frac{n}{2(n+1)}\mathscr{D}^2(A). \blacktriangleright$$

Лемма 5 . *Неравенство Юнга справедливо для любого компакта* $A \subset \mathbb{R}^n$.

$\blacktriangleleft$ В силу теоремы 3 для компакта A найдётся конечное подмножество A^+ такое, что $|A^+| \leqslant n+1, \mathscr{R}(A^+) = \mathscr{R}(A)$. Требуемое неравенство вытекает из цепи соотношений $\mathscr{D}(A) \geqslant \mathscr{D}(A^+) \geqslant k_N \mathscr{R}(A^+) = k_n \mathscr{R}(A)$, в которых $k_n = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}$ – постоянная Юнга.$\blacktriangleright$

Неравенство Юнга становится равенством, если A - правильный симплекс.

3.2 Линейная оптимизация

1. Разрешимость задачи линейной оптимизации. Задача линейной оптимизации заключается в нахождении экстремумов линейной функции при наличии конечного числа ограничений типа неравенств и равенств, задаваемых аффинными функциями. Общая задача линейной оптимизации может быть записана в виде

$$l_0(x) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \;\to\; \min\ (\max),$$

$$l_i(x) \geqslant b_i\ (i \in I_1), \quad l_i(x) = b_i\ (i \in I_2), \quad l_i(x) \leqslant b_i\ (i \in I_3).$$

Здесь $l_i(x) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ – линейные функционалы на $\mathbb{R}^n$, I_1, I_2, I_3 – непересекающиеся множества, некоторые из них могут быть пустыми. Среди ограничений часто встречаются условия неотрицательности переменных x_j.

Существует немало вариантов задачи линейной оптимизации, но наиболее употребительна так называемая *каноническая задача* линейной оптимизации. Развёрнутая запись канонической задачи выглядит следующим образом

$$l_0(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1, \ldots, m); \quad x_j \geqslant 0, \ (j = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Если ввести вектор-столбцы $x = (x_1 \ldots x_n)^T$, $b = (b_1 \ldots b_m)^T$, вектор-строку $c = (c_1 \ldots c_n)$ и матрицу $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, то задача (1),(2) записывается в краткой форме

$$l_0(x) = cx \to \min, \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0. \tag{Z}$$

Допустимый элемент задачи (1),(2) называют планом. Совокупность планов составляет *канонический многогранник* $X \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geqslant 0\}$. Если $X = \varnothing$, то задача (1),(2) бессодержательна; её *значение* будем считать равным $+\infty$. Если $X \neq \varnothing$ и функция l_0 ограничена снизу, то значением задачи (1),(2) называют число $\inf\{l_0(x),\ x \in X\}$; в случае неограниченности функции l_0 снизу значение задачи (1),(2) полагают равным $-\infty$. Итак, значением задачи (1),(2) может быть любой элемент из $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)$.

Конечность значения задачи (1), (2) очевидным образом необходима для её разрешимости. Приятной особенностью задачи линейной оптимизации является то, что для неё необходимые условия разрешимости совпадают с достаточными. Доказательство будет опираться на следующий геометрический факт.

Лемма 1. *Коническая оболочка конечного числа элементов есть замкнутое подмножество* $\mathbb{R}^n$.

◀ Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $K = con\, A$. Если система векторов a_i линейно независима, то определяемое равенством

$$\mathscr{F}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$$

отображение положительного ортанта

$$\mathbb{R}^m_+ := \{\Lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m,\ \lambda_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}$$

на K есть гомеоморфизм. Отсюда легко выводится замкнутость множества K в рассматриваемом случае.

Рассмотрим теперь случай произвольной системы элементов $a_1, \ldots, a_m$. Согласно лемме Каратеодори множество $K = con\{a_1, \ldots, a_m\}$ можно представить в виде объединения конечного числа множеств K_+ , каждое из которых есть коническая оболочка линейно независимой системы $\{a_i\}$. В силу уже доказанного множества K_+ замкнуты. Поскольку объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто, то множество K замкнуто.▶

Задача 4. *Доказать компактность выпуклой оболочки компактного множества. Привести пример замкнутого множества на плоскости, выпуклая оболочка которого не замкнута.*

Теорема 1. *Если значение задачи (1),(2) конечно (из $\mathbb{R}$), то задача (1),(2) имеет решение.*

◀ Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – столбцы матрицы A, $c_1, \ldots, c_n$ – компоненты вектор-строки c. Введём векторы $P_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \ldots, P_n = \begin{pmatrix} A_n \\ c_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{R}^{m+1}$. Обозначим через $\mathscr{K}$ коническую оболочку векторов $P_1, \ldots, P_n$. В силу леммы 1 $\mathscr{K}$ – замкнутый выпуклый конус в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$. Если x – план задачи (1),(2) и $\alpha = cx$, то $\begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{K}$. С другой стороны, если $\begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{K}$, то существует план x задачи (1),(2), для которого $\alpha = cx$. Таким образом, множество $\mathscr{A} := \left\{\alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{K}\right\}$ непусто. Множество $\mathscr{A}$ ограничено снизу и число $\alpha_0 := \inf \mathscr{A}$ есть значение задачи (1),(2). Так как $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ и конус $\mathscr{K}$ замкнут, то $\begin{pmatrix} b \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \in \mathscr{K}$, т. е. существует такой элемент $\hat{x}$ из $\mathbb{R}^n$, что $A\hat{x} = b, \hat{x} \geqslant 0$ и $c\hat{x} = \alpha_0 = \inf\{cx,\ x \in X\}$. Но это означает, что $\hat{x}$ – решение задачи (1),(2). ▶

В качестве ещё одного примера рассмотрим задачу

$$yb \to \max, \quad yA \leqslant c, \tag{Z^*}$$

называемую *двойственной* к задаче (Z).

Теорема 2. *Если множество планов $Y := \{y \in \mathbb{R}_m,\ yA \leqslant c\}$ задачи (Z^*) непусто и функционал $y \to yb$ ограничен сверху на множестве Y, то задача (Z^*) имеет решение.*

◀ Сведём задачу (Z^*) к канонической задаче линейной оптимизации. Это достигается путём введения дополнительных переменных

$$u \in \mathbb{R}^+_m,\ v \in \mathbb{R}^+_m,\ w \in \mathbb{R}^+_n$$

и замены $y = u - v$. Соответствующая каноническая задача имеет вид

$$(v - u)b \to \min,$$

$$(u - v)A + w = c, \quad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ w \geqslant 0.$$

Разрешимость этой задачи, вытекающая из теоремы 1, влечёт за собой разрешимость задачи (Z^*). ▶

Лемма 2. *Если $x \in X$, $y \in Y$, то $yb \leqslant cx$.*

◀ Действительно, $yb = yAx \leqslant cx$; используются равенство $Ax = b$ и неравенства $yA \leqslant c,\ x \geqslant 0$. ▶

Лемма 3. *Если $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, то задачи $(Z), (Z^*)$ имеют решения $\bar{x}, \bar{y}$; при этом $\bar{y}b \leqslant c\bar{x}$.*

◀ Установим разрешимость задачи (Z). Действительно, множество X непусто, функционал $x \to cx$ ограничен снизу числом yb, где y – произвольный элемент Y. Теперь разрешимость задачи (Z) вытекает из теоремы 1.

Разрешимость задачи (Z^*) следует из лемм 1, 2. Если $\bar{x}$ - решение задачи (Z), $\bar{y}$ – решение задачи (Z^*), то в силу леммы 2 $\bar{y}b \leqslant c\bar{x}$. ▶

На самом деле в условиях леммы 3 можно гарантировать равенство: $\bar{y}b = c\bar{x}$; значения задач (Z), (Z^*) одинаковы. Это будет установлено далее.

2. Теорема Фаркаша. Пусть $l_i\,(i \in I)$ – конечная система линейных функционалов на пространстве $\mathbb{R}^n$, $Q_0 := \{x \in \mathbb{R}^n,\, l_i(x) \leqslant 0\}$ - множество решений однородной системы линейных неравенств

$$l_i(x) \leqslant 0 \quad (i \in I). \tag{3}$$

Поскольку $0 \in Q_0$, то Q_0 – непустое множество. Если l – линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ и $l(x) \leqslant 0\, \forall x \in Q_0$, то линейное однородное неравенство

$$l(x) \leqslant 0 \tag{4}$$

называют *неравенством-следствием* системы неравенств (3).

Теорема 4. *Неравенство (4) есть следствие системы неравенств (3) в том и только том случае, когда функционал l есть неотрицательная линейная комбинация системы функционалов $l_i\,(i \in I)$, т. е. $l \in con\{l_i\}_{i \in I}$.*

◀ В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Действительно, если $l \in con\{l_i\}_{i \in I}$, то (4) следует из (3). Нетривиально обратное утверждение: если (4)– неравенство – следствие системы неравенств (3), то функционал l есть неотрицательная линейная комбинация системы функционалов $l_i\,(i \in I)$.

Не уменьшая общности, можно считать, что $l_i(x) = (a_i, x)\,(i \in I)$, а $l(x) = (a, x)$, где $a_i, a \in \mathbb{R}^n$. Для доказательства теоремы достаточно установить, что элемент a принадлежит конической оболочке K системы $a_i\,(i \in I)$. Предположим противное, т. е. $a \notin K$. Согласно лемме 1 K есть выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $a \notin K$, то в силу теоремы отделимости существует вектор p из $\mathbb{R}^n$, для которого

$$(p, a) > \max_{x \in K}(p, x); \tag{5}$$

можно взять, например, $p = a - b$, где b – проекция a на конус K. Правая часть (5) равна 0. В самом деле, если бы для некоторого x_1 из K имеет место неравенство $(p, x_1) > 0$, то $(p, tx_1) \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно,

$$(p, a) > \max_{x \in K}(p, x) = 0 \geqslant (p, a_i)\ (i \in I).$$

В частности, $p \in Q$, однако $l(p) = (p, a) > 0$. Противоречие.▶

Первоначальное доказательство теоремы, данное венгерским математиком Фаркашем, не опиралось на теорему отделимости и было чисто алгебраическим. Метод Фаркаша имеет свои преимущества. Например, он позволяет распространить теорию линейных неравенств на произвольные упорядоченные поля.

3. Конус опорных функционалов к полиэдру. Пусть $l_i\,(i \in I)$ – система линейных функционалов на пространстве $\mathbb{R}^n$, $h_i\,(i \in I)$ – действительные числа, $|I| < \infty$, т. е. I – конечное множество индексов. Множество

$$Q \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n, l_i(x) \leqslant h_i,\ i \in I\}$$

называют *полиэдром* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Оно является пересечением конечного числа полупространств P_i, определяемых сотношениями

$$P_i \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^n,\, l_i(x) \leqslant h_i\},$$

считаем, что $l_i \neq 0$. Сопоставим точке z из Q множество

$$I(z) \overset{def}{=} \{i \in I,\ l_i(z) = h_i\}$$

– совокупность индексов i, соответствующих жёстким ограничениям.

Теорема 5. *Конус $N_Q(z)$ опорных функционалов к полиэдру Q в точке z совпадает с конической оболочкой множества $l_i\,(i \in I(z))$, т. е.*

$$N_Q(z) = con\{l_i\}_{i \in I(z)}. \tag{6}$$

◀ Пусть $z \in Q$, $l \in N_Q(z)$. Фиксируем элемент v, удовлетворяющий неравенствам $l_i(v) \leqslant 0\,\forall i \in I(z)$. При малых положительных t элемент $z + tv$ принадлежит Q. Действительно, если $i \in I(z)$, то $l_i(v) \leqslant 0$ и поэтому $l_i(z+tv) \leqslant l_i(z) \leqslant h_i$ $\forall t > 0$. Если же $i \notin I(z)$, то $l_i(z) < h_i$ и неравенство $l_i(z + tv) \leqslant h_i$ выполняется при малых t. Так как $l \in N_Q(z)$, то $l(z) \geqslant l(x)\,\forall x \in Q$; в частности, $l(z+tv) \leqslant l(z)$ при малых $t > 0$. Отсюда следует, что $l(v) \leqslant 0$ для всех v, удовлетворяющих неравенствам $l_i(v) \leqslant 0\,(i \in I(z))$. В силу теоремы Фаркаша $l \in con\{l_i\}_{i \in I(z)}$. Тем самым доказано включение $N_Q(z) \subset con\{l_i\}_{i \in I(z)}$.

Установим противоположное включение. Пусть $l \in con\{l_i\}_{i \in I(z)}$, т. е.

$$l = \sum_{i \in I(z)} \lambda_i l_i, \quad (\lambda_i \geqslant 0\ \forall\ i \in I(z)).$$

Тогда для любого x из Q справедливы соотношения

$$l(x) = \sum_{i \in I(z)} \lambda_i l_i(x) \leqslant \sum_{i \in I(z)} \lambda_i h_i = \sum_{i \in I(z)} \lambda_i l_i(z) = l(z),$$

т. е. $l \in N_Q(z)$. ▶

Теорема 5 аналогична результатам раздела 1.3 и формально получается из них, если положить $g_i(x) = l_i(x) - h_i \, (i \in I)$. Однако в предположениях теоремы 5 условие Слейтера не фигурирует.

Равенство $l(x) = h$ эквивалентно неравенствам $l(x) \leqslant h, -l(x) \leqslant -h$. Это даёт возможность распространить теорему 5 на случай, когда полиэдр задаётся не только неравенствами, но и равенствами. Именно, пусть непустое множество Q определено соотношениями

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n, \ l_(x) \leqslant h_i \ (i \in I), \ l_i(x) = h_i \ (i \in I_0), \tag{7}$$

в котором I, I_0 – конечные непересекающиеся подмножества натуральных чисел, l_i – линейные функционалы на $\mathbb{R}^n$, $h_i \in \mathbb{R}$, $(i \in I \cup I_0)$.

Теорема 6. *Пусть $z \in Q$, $N_Q(z)$ – конус опорных функционалов к полиэдру Q в точке z. Тогда $N_Q(z)$ состоит из линейных функционалов l, допускающих представление*

$$l = \sum_{i \in I \cup I_0} \lambda_i l_i \, ,$$

где $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_i(l_i(z) - h_i) = 0 \ \forall i \in I$.

◀ Теорема 6 следует из теоремы 5. ▶

Условия на числа λ_i аналогичны предположениям о множителях Лагранжа (см. раздел 1.3).

4. Экстремальные задачи с линейными ограничениями . В этом пункте рассматривается задача минимизации функции $f_0 : U \to \mathbb{R}$ на определяемом соотношениями (7) полиэдре $Q \subset U$. Её запись стандартна:

$$f_0(x) \to \min, \tag{8}$$

$$l_i(x) \leqslant h_i \quad (i \in I), \quad l_i(x) = h_i \quad (i \in I_0), \quad (x \in U). \tag{9}$$

Задача (8),(9) есть частный случай задачи, рассмотренной в разделе 1.3, возникающей при $f_i(x) = l_(x) - h_i$. Поэтому к задаче (8),(9) применимо правило множителей Лагранжа. Однако специфика линейных ограничений позволяет усилить правило множителей в двух направлениях. Во-первых, в задаче (8),(9) можно множитель Лагранжа $\hat{\lambda_0}$ взять равным 1, во-вторых, если функция f_0 выпукла, то правило множителей Лагранжа оказывается не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

Сформулируем и докажем соответствующие результаты.

Теорема 7. *Пусть z – локальное решение задачи (8),(9) и функция f_0 удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки z. Тогда найдутся такие числа λ_i, $i \in I \cup I_0$ и такой элемент a_0 из $\partial f_0(z)$, что справедливы соотношения*

$$a_0 + \sum_{i \in I \cup I_0} \lambda_i l_i = 0, \tag{10}$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_i(l_i(z) - h_i) = 0 \quad (i \in I). \tag{11}$$

◀ Так как z – локальное решение задачи (8),(9), то $-a_0 \in N_Q(z)$. Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 6.▶

Теорема 8. *Пусть $f_0 : U \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $z \in Q$, $a_0 \in \partial f_0(z)$, и выполнены соотношения (10),(11). Тогда z – решение задачи (8),(9).*

◀ Соотношения (10),(11) означают, что $0 \in f_0'(\hat{x}) + N_Q(\hat{x})$. Поскольку f_0 – выпуклая функция, то отсюда следует, что z – решение задачи (8),(9).▶

Теорема 8 применима в случае линейной функции f_0. Этот частный случай задачи (8),(9) соответствует задаче линейной оптимизации (линейного программирования). Задачу минимизации квадратичной формы при линейных ограничениях

$$f_0(x) = (Cx, x)/2 - (d, x) \to \min, \quad x \in Q \tag{12}$$

именуют задачей квадратичного программирования. Здесь C – симметричная матрица размеров $n \times n$, $d \in \mathbb{R}^n$. Функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла в том и только том случае, когда $C \geqslant 0$. Если это предположение выполнено, то к задаче (12) применима теорема 8.

5. Теоремы двойственности. Вернёмся к изучению задачи линейной оптимизации.

Теорема 9. (Первая теорема двойственности). *Если хотя бы одна из задач $(Z), (Z^*)$ имеет решение, то и другая также имеет решение, причём значения соответствующих задач равны.*

◀ 1-я часть. Пусть задача (Z^*), записанная в следующей форме

$$yb \to \max, \quad yA_j \leqslant c_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

имеет решение $\bar{y}$. Применим к этой задаче необходимые условия экстремума в задачах с линейными ограничениями (см. предшествующий пункт), согласно которым найдутся такие числа λ_j $(j = 1, \dots, n)$, что выполнены условия

$$b = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j A_j \ , \tag{12}$$

$$\lambda_j(\bar{y}A_j - c_j) = 0, \quad \lambda_j \geqslant 0, \ j = 1, \dots, n \, . \tag{13}$$

Равенство (12) – это условие стационарности в рассматриваемой экстремальной задаче, соотношения (13) – условия дополняющей нежёсткости и неотрицательности множителей Лагранжа.

Положим $\bar{x} = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^T$. Из соотношений (12),(13) следует, что $A\bar{x} = b$, $x \geqslant 0$, $\bar{y}b = c\bar{x}$. В частности, $\bar{x} \in X$. В силу леммы 2 $c\bar{x} = \bar{y}b \leqslant cx$ $\forall x \in X$, т. е. $\bar{x}$ – решение задачи (Z). Таким образом, разрешимость задачи (Z^*) влечёт за собой разрешимость задачи (Z) и равенство значений задач (Z) и (Z^*).

2-я часть. Пусть задача (Z) имеет решение $\bar{x}$. Положим

$$l_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ (i = 1, \ldots, m), \quad \varphi_j(x) = -x_j \ (j = 1, \ldots, n).$$

Тогда $\bar{x}$ есть решение экстремальной задачи

$$l_0(x) = cx \to \min,$$

$$l_i(x) - b_i = 0 \ (i = 1, \ldots, m), \quad \varphi_j(x) \leqslant 0 \ (j = 1, \ldots, n).$$

Согласно правилу множителей Лагранжа существуют числа $u_i \in \mathbb{R}, v_j \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n)$ такие, что

$$l_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i l_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \varphi_j = 0. \tag{14}$$

Введём в рассмотрение вектор-строку $y = -(u_1 \ldots u_m)$. Равенство (9) влечёт оценку $c \geqslant yA$, в частности , $Y \neq \varnothing$. Поэтому задача (Z^*) также имеет решение. Требуемый результат вытекает теперь из первой части.▶

Теорема 10 (Вторая теорема двойственности). *Если*

$$X \neq \varnothing, \ Y \neq \varnothing,$$

то обе задачи имеют решения и значения соответствующих задач равны.

◀ Разрешимость задач $(Z), (Z^*)$ следует из леммы 3, совпадение их значений – из теоремы 9. ▶

Теорема 11 (критерий оптимальности). *Для того чтобы планы $\bar{x}, \bar{y}$ задач (Z) и (Z^*) соответственно были их решениями, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$(c - \bar{y}A)\bar{x} = 0. \tag{15}$$

◀ Необходимость. Если $\bar{x}, \bar{y}$ - решения задач $(Z), (Z^*)$, то

$$0 = c\bar{x} - \bar{y}b = c\bar{x} - \bar{y}A\bar{x} = (c - \bar{y}A)\bar{x}. \tag{16}$$

Достаточность. Если имеет место (15), то в силу (16) $c\bar{x} = \bar{y}b$. Согласно лемме 2 $yb \leqslant c\bar{x}, \ \bar{y}b \leqslant cx \ \forall x \in X, \ y \in Y$. Следовательно,

$$yb \leqslant c\bar{x} = \bar{y}b \leqslant cx \quad (x \in X, \quad y \in Y),$$

т. е. $\bar{x}$, $\bar{y}$ являются решениями задач $(Z), (Z^*)$. ▶

Так как $c \geqslant \bar{y}A, \ \bar{x} \geqslant 0$, то равенство (10) эквивалентно системе равенств

$$(c_j - \bar{y}A_j)\bar{x}_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

6. Задачи с однотипными условиями. Теоремы двойственности имеют место и для других задач. Ограничимся здесь лишь задачей с однотипными ограничениями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,\ (i = 1, \ldots, m); \quad x_j \geqslant 0,\ (j = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Задача минимизации функционала $l_0(x) = cx$ при условиях (18) записывается следующим образом

$$l_0(x) = cx \to \min, \quad Ax \geqslant b, \quad x \geqslant 0. \tag{P}$$

Теорема 12. *Пусть множество планов $\mathscr{X} := \{x \in \mathbb{R}^n, Ax \geqslant b, x \geqslant 0\}$ задачи (P) непусто и функционал l_0 ограничен снизу на множестве $\mathscr{X}$. Тогда задача (P) имеет решение.*

◀ Введём дополнительные переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ и расмотрим каноническую задачу

$$\Lambda(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \cdots + 0 \cdot x_{n+m} \to \min, \tag{19)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i,\ (i = 1, \ldots, m), \quad x_k \geqslant 0\ (k = 1, \ldots, n+m). \tag{20}$$

Пусть V – множество планов задачи (19),(20). Сопоставим элементу x из $\mathscr{X}$ элемент $\Phi(x)$ из V, определяемый равенством $\Phi(x) = (x_1 \ldots x_{n+m})^T$, где

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Соответствие Φ есть биекция $\mathscr{X}$ на V, поэтому $V \neq \varnothing$. Очевидно, что $l(x) = \Lambda(\Phi(x))\ \forall x \in \mathscr{X}$ и $l(\Phi^{-1}(z)) = \Lambda(z) \forall z \in V$. Поэтому функционал Λ ограничен снизу на V. Согласно теореме 1 задача (19),(20) имеет решение. Следовательно, задача (P) также имеет решение. ▶

Приведём аналоги теорем 9 - 11 для задачи (P). Двойственной к ней называют задачу

$$yb \to \max, \quad yA \leqslant c, \quad y \geqslant 0. \tag{P^*}$$

Теорема 13. *Если одна из задач $(P), (P^*)$ имеет решение, то и другая также имеет решение, причём значения соответствующих задач равны.*

Теорема 14. *Если множества планов задач $(P), (P^*)$ непусты, то обе задачи имеют решения и значения этих задач совпадают.*

Теорема 15. *Для того чтобы планы $\bar{x}, \bar{y}$ задач $(P), (P^*)$ были решениями соответствующих задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (17).*

Проще всего теоремы 13 – 15 доказываются сведением задачи (P) к канонической путём введения дополнительных переменных $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ (см. предшествующий пункт). Возможны и непосредственные доказательства этих теорем.

Существуют различные методы доказательств теорем двойственности – центрального результата теории линейной и выпуклой оптимизации [1], [4]-[10], [12]-[14], [17]-[19]. Упомянём здесь и чисто алгебраические, без использования теорем отделимости, и доказательства, основанные на принципиально новых идеях метода штрафных функций, и игровые подходы, базирующиеся на понятии седловой функции. Одновременное рассмотрение пары двойственных задач оказывается полезным и при численном анализе соответствущих проблем.

3.3 Кусочно-линейная оптимизация

1. Редукция к задачам линейной оптимизации. В этом пункте обсуждается вопрос о сведении некоторых оптимизационных задач к задачам линейной оптимизации. Начнём с рассмотрения *задачи кусочно-линейной оптимизации*

$$f(x) = \max_{k=1,\ldots,s} ((c_k, x) + d_k) \to \min, \qquad x \in X, \tag{1}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^N, d_k \in \mathbb{R} \quad (k = 1, \ldots, s)$, а X – полиэдр в $\mathbb{R}^N$. Сопоставим задаче (1) следующую задачу линейной оптимизации

$$t \to \min, \quad (c_k, x) + d_k \leqslant t, \quad , k = 1, \ldots, s, \quad x \in X. \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение: если $\bar{x}$ – решение задачи (1) и $\bar{t} = f(\bar{x})$, то $(\bar{x}, \bar{t})$ – решение задачи (2). Верен и обратный факт: если $(\bar{x}, \bar{t})$ – решение задачи (2), то $\bar{x}$ – решение задачи (1) и $\bar{t} = f(\bar{x})$. Более общие результаты доказывались ещё в первой главе для задачи на минимакс. Эквивалентность (в указанном смысле) задач (1), (2) влечёт за собой критерий разрешимости.

Теорема. З*адача (1) имеет решение в том и только том случае, если выполнены условия: 1) полиэдр X есть непустое множество; 2) функция f ограничена снизу на полиэдре X.*

В качестве второго примера рассмотрим задачу

$$f(x) = \sum_{k=1}^{s} |(c_k, x) + d_k| \to \min, \quad x \in X. \tag{3}$$

Здесь c_k, d_k, X имеют тот же смысл, что и для задачи (1). Сопоставим (3) следующую задачу линейной оптимизации

$$\sum_{k=1}^{s} t_k \to \min,$$

$$(c_k, x) + d_k \leqslant t_k, \quad -(c_k, x) - d_k \leqslant t_k, \quad (k = 1, \dots, s) \tag{4}$$
$$x \in X.$$

Если $\bar{x}$ – решение задачи (3) и $\bar{t}_k = |(c_k, x) + d_k| \quad (k = 1, \dots, s)$, то $(\bar{x}, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_s)$ – решение задачи (4). Справедливость этого и обратного к нему утверждения предлагается проверить читателю. Очевидно, что если $X \neq \varnothing$, то задачи (3), (4) имеют решения, поскольку функционал f неотрицателен.

Переход от (3) к (4) нецелесообразен, если $N = 1$. В этом случае предпочтительнее использовать соображения геометрического характера.

Задача максимизации

$$f(x) = \min_{k=1,\dots,s} ((c_k, x) + d_k) \to \max, \qquad , x \in X, \tag{5}$$

также легко сводится к задачам линейной оптимизации. Впрочем, любая задача на максимин эквивалентна аналогичной ей задаче на минимакс, поэтому не нуждается в особом рассмотрении. Для одномерного полиэдра X задача (5) легко решается с помощью соображений геометрического характера.

Рассмотрим, наконец, *задачу дробно-линейного программирования*

$$f(x) = \frac{(c, x) + d}{(p, x) + q} \to \min, \qquad x \in X, \tag{6}$$

где $c, p \in \mathbb{R}^N; d, q \in \mathbb{R};$ $X \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N, Ax \leqslant b\}$ непустой ограниченный полиэдр и $(p, x) + q > 0$ для всех $x \in X$. Сопоставим задаче (6) задачу линейной оптимизации

$$\begin{gathered} (c, z) + td \to \min, \\ Az - tb \leqslant 0, \\ (p, z) + tq = 1,\ t \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Пусть $\bar{x}$ – решение задачи (6). Установим, что

$$\bar{z} = \frac{\bar{x}}{(p, \bar{x}) + q}, \ \bar{t} = \frac{1}{(p, \bar{x}) + q}$$

есть решение задачи (7). Действительно, точка $(\bar{z}, \bar{t})$ допустима в задаче (7). Пусть (z, t) – любая другая её допустимая точка. Тогда $t > 0$, так как при $t = 0$ получаем, что $Az \leqslant 0$ и $z \neq 0$, а это противоречит условию ограниченности X. Следовательно, $x = z/t$ – допустимая точка задачи (6). Поэтому $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$, что можно переписать в виде

$$(c, \bar{z}) + \bar{t}d \leqslant (c, z) + td.$$

Таким образом, $(\bar{z}, \bar{t})$ – решение задачи (7). Аналогично показывается, что если $(\bar{z}, \bar{t}$ – решение задачи (7), то $\bar{x} = \bar{z}/\bar{t}$ – решение задачи (6).

2. Приближения в метрике Чебышёва. Вначале рассмотрим конечномерный вариант задачи. Пусть $\mathbf{R}^m$ – m - мерное арифметическое пространство вектор-столбцов $z = (z_1, \cdots, z_m)^T$ с обычным образом определяемыми линейными операциями и нормой

$$\|z\| \stackrel{def}{=} \max\{|z_i|, i = 1, \cdots, m\}.$$

Если $A_1, \cdots, A_n, b$ – векторы из пространства $\mathbf{R}^m$, то при любых действительных $x_1, \cdots, x_n$ вектор $x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n - b$ принадлежит пространству $\mathbf{R}^m$. Обозначим через $\Phi(x)$ норму этого вектора. Определяемая равенством

$$\Phi(x) \stackrel{def}{=} \|x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n - b\|$$

функция выпукла и непрерывна на пространстве $\mathbf{R}^n$. Она достигает своего минимума в некоторой точке $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)^T$. Задача о минимизации функции Φ на пространстве $\mathbf{R}^n$ будет записываться следующим образом

$$\Phi(x) = \|\sum_{j=1}^{n} x_j A_j - b\| \to \min, \ x \in \mathbf{R}^n. \tag{T}$$

Задача (T) сводится к некоторой задаче линейного программирования. С этой целью представим векторы $A_1, \cdots, A_n, b$ в координатной форме

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Введем дополнительную переменную x_{n+1} . Тогда задача (T) редуцируется к следующей задаче линейной оптимизации

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} \geqslant b_i \qquad (i = 1, \cdots, m),$$

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} \geqslant -b_i \qquad (i = 1, \cdots, m), \tag{Z}$$

$$x_{n+1} \to \min .$$

Это означает следующее: если вектор $\tilde{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n, \hat{x}_{n+1})^T$ – решение задачи (Z), то его проекция $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_n)^T$ на пространство $\mathbf{R}^n$ есть решение задачи (T), а число $\hat{x}_{n+1}$ есть значение задачи (T). Любое решение задачи (T) может быть получено таким образом.

В задаче (Z) все ограничения однотипны. Её решение легко находится с помощью специальных программ. В частности, хорошо подходит для этой цели *Excel* - святой инструмент экономистов (да и математиков). Предложенная выше схема допускает обобщение на случай, когда переменные x_j подчинены дополнительным линейным ограничениям вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \geqslant d_i, \quad (i = 1, \cdots, s_1) \tag{P_1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = d_i, \quad (i = s_1 + 1, \cdots, s)\,. \tag{P_2}$$

Если определяемое соотношениями P_1, P_2 многогранное множество $Q \subset \mathbf{R}^n$ непусто, то задача

$$\Phi(x) \to \min, \qquad x \in Q \tag{T_1}$$

имеет решение. Вводя несколько дополнительных переменных, можно задачу (T_1) свести к задаче линейной оптимизации с однотипными ограничениями.

Теперь рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении непрерывной функции обобщенными полиномами. Эта задача записывается следующим образом:

$$\max_{t\in\mathscr{K}} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j u_j(t) - f(t) \right| \to \min\,, \tag{8}$$

где $u_1, \cdots, u_n, f$ – непрерывные на компакте $\mathscr{K}$ функции. Существование и некоторые общие свойства решений задачи (8) устанавливались многими авторами, первым среди которых следует назвать русского математика П. Л. Чебышёва. Если множество $\mathscr{K}$ конечно, то задача (8) очевидным образом сводится к рассмотренной выше задаче (T).

В случае бесконечного множества $\mathscr{K}$ полезна дискретизация задачи (8). Пусть, например, $\mathscr{K}_0$ – конечное подмножество множества $\mathscr{K}$. Сопоставим задаче (8) её дискретный вариант

$$\max_{t\in\mathscr{K}_0} \left| \sum_{j=1}^{n} x_j u_j(t) - f(t) \right| \to \min\,, \tag{9}$$

Теорема. *Существует подмножество $\mathscr{K}_0$ компакта $\mathscr{K}$, состоящее не более чем из $n+1$ точек и такое, что решение задачи (2) является одновременно решением задачи (1).*

Результаты подобного рода называют *теоремами об очистке.* (Происхождение этого термина заслуживает отдельного обсуждения). Совсем непросто усмотреть способ конструирования множества $\mathscr{K}_0$. Впервые это удалось сделать (в 1854 г) П. Л. Чебышёву для задачи о равномерном приближении непрерывной функций алгебраическими полиномами. Однако для нахождения приближенного решения задачи (8) можно (не слишком мудря) в качестве $\mathscr{K}_0$ взять конечную ε – сеть множества $\mathscr{K}$. Есть основания надеяться, что при малых $\varepsilon > 0$ решение задачи (9) будет близким к решению задачи (8). Степень близости зависит от свойств функций $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t), f(t)$. Проведение численных экспериментов было бы весьма полезным и может составить содержание квалификационной работы (курсовой, дипломной и т.д.)

Пусть $\mathscr{K} = \{t_1, \cdots, t_m\}$. Положим

$$a_{ij} = u_j(t_i), \quad b_i = f(t_i) \quad (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)\,.$$

Задача (9) сводится к задаче (Z) , рассмотренной выше. В качестве иллюстрирующего примера можно привести случай, когда

$$m = 11, \quad n = 5, \quad t_i = \frac{i-1}{10} \quad (i = 1, \cdots, 10),$$

$$u_j(t) = t^{j-1}\ (j = 1, \cdots, 5), \quad f(t) = ln(1+t)\,, \quad t \in [0,1]\,.$$

Произведенные подсчеты приводят к следующим результатам

$$x_1 = 5,94E-05 = 0,0000594,\ x_2 = 0,996545,\ x_3 = -0,46781,$$

$$x_4 = 0,220814,\ x_5 = -0,05652,\ x_6 = x_1 = 0,0000594\,.$$

Искомый многочлен наилучшего приближения имеет вид

$$P(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + x_4 t^3 + x_5 t^4.$$

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что на коэффициенты x_j можно наложить линейные ограничения типа $(P_1), (P_2)$. Достаточно подробное обсуждение и солидная библиография могут быть найдены в следующих источниках: [1], [30].

Близкими методами может быть рассмотрена *задача о регрессии*. Приведём её постановку. Пусть известны две числовые последовательности $x_1, \cdots, x_n$ и $y_1, \cdots, y_n$. В силу каких-либо оснований пытаются указать такие числа k, b, что вектор невязки $\Delta \stackrel{def}{=} (y_1 - kx_1 - b, \cdots, y_n - kx_n - b)$ был достаточно малым. Обычно (следуя методу Гаусса наименьших квадратов) числа k и b находят из условия минимума евклидовой нормы невязки. Относительно k, b возникает достаточно просто решаемая экстремальная задача

$$\Phi(k,b) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} (kx_i + b - y_i)^2 \to \min\,. \tag{10}$$

В рассматриваемом случае целевая функция выпукла и дифференцируема, поэтому необходимое условие минимума первого порядка является и достаточным условием глобального минимума. Оптимальная пара $\hat{k}, \hat{b}$ находится из условий стационарности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0\,.$$

Получающаяся система из двух уравнений линейна, и её решение не представляет трудностей.

Наряду с евклидовой нормой невязки Δ можно использовать и другие нормы, например, кубическую или октаэдрическую. При этом вместо задачи (10) возникают следующие задачи

$$\max_i |kx_i + b - y_i| \to \min\,, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |kx_i + b - y_i| \to \min\ . \tag{12}$$

Задачи (11), (12) сложнее задачи (10), но они могут быть сведены к задачам линейной оптимизации. Применительно к задаче (11) возникает следующая задача линейной оптимизации

$$\begin{gathered} kx_i + b + z \geqslant y_i, \quad (i = 1, \cdots, n) \\ -kx_i - b + z \geqslant -y_i, \quad (i = 1, \cdots, n), \\ z \to \min\ . \end{gathered} \tag{13}$$

Если тройка $\hat{k}, \hat{b}, \hat{z}$ – решение задачи (13), то пара $\hat{k}, \hat{b}$ – решение задачи (11), а число $\hat{z}$ – значение этой задачи. А как надо действовать в случае задачи (12)?

3. Задача о максимальном овалоиде. Пусть X – полиэдр в пространстве $\mathbf{R}^n$, определяемый равенством

$$X = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax \leqslant b\} = \{x \in \mathbf{R}^n |\, \langle a_i, x\rangle \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, m\}. \tag{14}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} -$$

матрица размеров $m \times n$, a_i – строки матрицы A, $b = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_m)^T$ – вектор-столбец из $\mathbf{R}^m$. Пусть K – выпуклый компакт в пространстве $\mathbf{R}^n$ и $0 \in \overset{\circ}{K}$. Будем считать, что у полиэдра X имеются внутренние точки ($\overset{\circ}{X} \neq \varnothing$). Тогда существуют элемент x из $\mathbf{R}^n$ и положительное число t такие, что

$$x + tK \subset X\,. \tag{15}$$

Ставится задача о нахождении максимального значения t, для которого имеет место включение (15) при подходящем выборе элемента x. Тела вида $x + tK$

представляют *овалоиды*, гомотетичные исходному овалоиду K. Сформулированную задачу иногда именуют *задачей о максимальном овалоиде*. Она представляет интерес с точки зрения приближения исходного полиэдра X более простыми множествами.

Задача о максимальном овалоиде легко сводится к некоторой задаче линейного программирования. Действительно, обозначим через $s(x^*, K)$ опорную функцию компакта K. Напомним, что

$$s(x^*, K) \stackrel{def}{=} \max_{x \in K} \langle x, x^* \rangle \ .$$

Опорная функция полупространства

$$H_{a_i b_i} = \{x \in \mathbf{R}^n, \langle x, a_i \rangle \leqslant b_i\}.$$

вычисляется по формуле

$$s(x^*, H_{a_i, b_i} = \begin{cases} (x^*, a), & \text{если}\, x^* = \lambda a\, (\lambda \geqslant 0) \\ +\infty & \text{в остальных случаях}\ . \end{cases}$$

Поставленную выше задачу можно записать так

$$t \to \max, \tag{16}$$

$$\langle a_i, x \rangle + ts(a_i, K) \leqslant b_i,\ i = 1, \cdots, m\,. \tag{17}$$

Для доказательства достаточно заметить, что i-е ограничение в (17) при $t > 0$ означает следующее: овалоид $x + tK$ принадлежит полупространству $H_{a_i b_i}$. Задача (16), (17) достаточно стандартна. Она является двойственной к некоторой канонической задаче. Её можно решить и непосредственно. Программа Exsel справляется и с такими задачами без сведения их к каноническим задачам.

В качестве примера найдём максимальный овал, вписанный в плоский выпуклый многоугольник. Пусть X – выпуклый N - угольник на плоскости, вершины $P_i(x_,y_i), \quad i = 1, \ldots N$ которого занумерованы так, что их обход осуществляется против часовой стрелки. Будем считать, что начало координат $O(0, 0)$– внутренняя точка многоугольника X. Введем числа

$$a_i = y_{i+1} - y_i,\ b_i = x_i - x_{i+1},\ h_i = a_i x_i + b_i y_i,\ d_i = s(\vec{\nu}_i, K)\,,$$

где $i = 1, \cdots, N, x_{N+1} = x_1, y_{N+1} = y_1, \vec{\nu}_i = (a_i, b_i)$ – вектор внешней нормали к многоугольнику X. Многоугольник X может быть задан системой линейных неравенств

$$a_i x + b_i y \leqslant h_i,\ i = 1, \cdots, N. \tag{18}$$

Система (5) аналогична системе неравенств (1). Для определения максимального (среди содержащихся в X) овала, гомотетичного стандартному овалу K, требуется решить следующую задачу линейной оптимизации

$$z \to \max, \tag{19}$$

$$a_i x + b_i y + d_i z \leqslant h_i,\ i = 1, \cdots, N\,. \tag{20}$$

Задача (19), (20) может быть решена достаточно стандартными способами. Представляет определенный интерес геометрическая интерпретация получающихся таким образом результатов.

Пример. Вершины многоугольника X заданы координатами:

$$P_1(4,1),\ P_2(2,3),\ P_3(-1,4),\ P_4(-4,2),\ P_5(-3,2),\ P_6(-1,-3),\ P_7(3,-1)\,.$$

Овал K совпадает с квадратом $|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$. В рассматриваемом случае оптимальный овал представляет квадрат

$$(-0,25, 0,75) + 2,25K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, |x+0,25| \leqslant 2,25, |x-0,75| \leqslant 2,25\}\,.$$

Опорная функция квадрата K задается равенством

$$s(a,b;K) = |a| + |b|\,.$$

Вычисления удобно свести в таблицу размеров 10× 8. Верхняя строка и правый столбец содержат названия, удобные для расшифровки числовых значений таблицы. Не все элементы таблицы заполнены числами. Содержание строк $P_1, \cdots, P_7$ не требует комментариев. Строка, соответствующая P_8, носит смешанный характер. В её начале приведены координаты точки P_8, совпадающей с P_1. Далее идут коэффициенты целевого функционала $0, 0, 1$. Предпоследняя клетка этой строки не заполнена. В последней клетке строки – значение оптимизируемого функционала. В заполненной части последней строки приводятся оптимальные значения переменных x, y, z – координаты центра оптимального квадрата и длина половины его стороны.

Таблица

	x	y	a	b	d	h	l
P_1	4	1	2	2	4	10	10
P_2	2	3	1	3	4	11	11
P_3	-1	4	-2	3	5	14	14
P_4	-4	2	-4	-1	5	14	11,5
P_5	-3	-2	-1	-2	3	7	5,5
P_6	-1	-3	2	-4	6	10	10
P_7	3	-1	2	-1	3	7	5,5
P_8	4	1	0	0	1		2,25
			-0,25	0,75	2,25		

3.4 Теоремы о минимаксе

1. Минимаксы и седловые точки. Ниже $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ – арифметические пространства размерностей m, n соответственно. Будем предполагать, что x и y суть векторы из пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; X и Y – замкнутые ограниченные подмножества $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных на $X \times Y$.

Теорема 1. *Функции $c\colon X \to \mathbb{R}, d\colon Y \to \mathbb{R}$, определяемые равенствами*

$$c(x) = \min_{y \in Y} f(x, y), \quad d(y) = \max_{x \in X} f(x, y), \tag{1}$$

непрерывны.

◀ Функция f непрерывна на компакте $X \times Y$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом компакте. Выберем положительное число ε. Тогда существует такое $\delta > 0$, что если $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$ для всякого y из Y. Отсюда следуют неравенства

$$f(x_1, y) > f(x_2, y) - \varepsilon \geqslant f(x_2, y) - \varepsilon, \quad f(x_1, y) > c(x_2) - \varepsilon\,.$$

В последнем неравенстве y – произвольный элемент из Y. Это влечёт за собой неравенство $c(x_1) - c(x_2) > -\varepsilon$. Меняя x_1, x_2 местами, получаем неравенство $c(x_2) - c(x_1) > -\varepsilon$. Объединяя полученные оценки, приходим к соотношению $|c(x_1) - c(x_2)| < \varepsilon$, из которого вытекает непрерывность функции c. Непрерывность функции d устанавливается аналогично.▶

Следствие. *Существуют числа*

$$I_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \text{ и } I_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y),$$

причём $I_1 \leqslant I_2$.

Действительно, существование чисел I_1, I_2 следует из непрерывности функций c, d. Если $(x, y) \in X \times Y$, то $c(x) \leqslant f(x, y)$. Отсюда получаем оценки

$$I_1 = \max_{x \in X} c(x) \leqslant \max_{x \in X} f(x, y) = d(y) \forall y \in Y.$$

Поскольку $d(y) \geqslant I_1 \forall y \in Y$, то

$$I_2 = \min_{y \in Y} d(y) \geqslant I_1,$$

что и требовалось установить.

Пару $(x^*, y^*) \in X \times Y$ назовём *седловой точкой* функции $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, если

$$f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y) \quad \forall x \in X,\, y \in Y. \tag{2}$$

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ имела седловые точки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $I_1 = I_2$.*

◀ Необходимость. Пусть функция f имеет седловые точки, и (x^*, y^*) – одна из них. Тогда из (2) следуют соотношения $d(y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant c(x^*)$. Но в силу определения функций c, d справедливы неравенства

$$c(x^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant d(y^*),$$

поэтому $I_1 = I_2$.

Достаточность. Пусть $I_1 = I_2$ и функции c, d достигают своих экстремумов в точках x^*, y^*, т. е.

$$c(x^*) = \max_{x\in X} c(x) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y} \max_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y} d(y) = d(y^*). \quad (3)$$

Справедлива цепь соотношений (пояснения ниже)

$$f(x^*, y^*) \overset{I}{\leqslant} d(y^*) \overset{II}{=} c(x^*) \overset{III}{\leqslant} f(x^*, y) \quad \forall y \in Y.$$

Комментарий: оценка I следует из определения функции d, II – применяется равенство (3), III – вытекает из определения функции c. Правое из неравенств (2) доказано. Левое из неравенств (2) устанавливается аналогично. ▶

Анализ проведённого доказательства показывает, что в качестве компонент седловой точки могут быть независимо друг от друга взяты любые точки x и y, на которых достигаются экстремумы функций $c(\cdot), d(\cdot)$ на множествах Y и X соответственно. Поэтому если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – седловые точки функции f, то точки (x_1, y_2) и (x_2, y_1) также будут седловыми для этой функции. Значения функции f во всех седловых точках одинаковы.

При любом $x \in X$ уравнение

$$f(x, y) = c(x) \quad (4)$$

имеет решение $y = y(x)$. В общем случае решение уравнения (4) неединственно, однако если предположить однозначную разрешимость относительно y уравнения (1), то возникает неявное отображение $y = s(x)$, определяемое из уравнения

$$f(x, s(x)) = c(x) \quad (5).$$

Лемма 1. *Отображение $s\colon X \to Y$ непрерывно.*

◀ В предположении противного существуют такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $x_i \in X$, что $x_i \to a$ и вместе с тем $|s(x_i) - s(a)| > \varepsilon$. Поскольку все точки $s(x_i)$ принадлежат ограниченному замкнутому множеству Y, то, не нарушая общности, можно считать, что последовательность $s(x_i)$ сходится к некоторому элементу b из Y. Так как $|s(x_i) - s(a)| > \varepsilon$, то $|b - s(a)| \geqslant \varepsilon$. Переходя к пределу в равенстве $f(x_i, s(x_i)) = c(x_i)$, получаем соотношение $f(a, b) = c(a)$, означающее, что при $x = a$ уравнение (5) имеет два различных решения: $s(a)$ и b. Противоречие.▶

2. Теорема Неймана. Напомним некоторые определения. Пусть Z – выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^k$. Функцию $\Phi\colon Z \to \mathbb{R}$ называют выпуклой, если она удовлетворяет неравенству Иенсена

$$\Phi((1-t)u + tv) \leqslant (1-t)\Phi(u) + t\Phi(v), \tag{6}$$

в котором u, v – произвольные элементы из Z, $t \in (0,1)$. Если неравенство (6) при $u \neq v$ является строгим, то функцию Φ также называют строго выпуклой.

Лемма 2. *Множество точек минимума строго выпуклой функции* $\Phi\colon Z \to \mathbb{R}$ *либо пусто, либо состоит из единственной точки.*

◀ Если $u \in Z, v \in Z$ и

$$u \neq v, \quad \Phi(u) = \Phi(v) = c = \min_{z \in Z} \Phi(z),$$

то в силу строгой выпуклости функции Φ имеем

$$\Phi(0,5(u+v)) < 0,5(\Phi(u) + \Phi(v)) = c\,.$$

Это противоречит определению числа c.▶

Сумма выпуклой и строго выпуклой функции есть строго выпуклая функция. Линейная функция выпукла, но не строго выпукла. Для неё неравенство Иенсена превращается в равенство. Функция $\Phi(z) = |z|^2$ строго выпукла. Точная верхняя грань любого семейства выпуклых функций есть выпуклая функция: если функции $\Phi_i\colon Z \to \mathbb{R}$ выпуклы, то функция

$$\Phi(z) = \sup_{i \in I} \Phi_i(z)$$

также выпукла. Множество индексов I может быть произвольным.

Функцию $\Psi\colon Z \to \mathbb{R}$ именуют вогнутой (строго вогнутой), если противоположная к ней функция $\Phi = -\Psi$ выпукла (строго выпукла). Линейная функция одновременно и выпукла, и вогнута. Точная нижняя грань любого семейства вогнутых функций есть вогнутая функция.

Венгерским (немецким, американским) математиком Нейманом установлен следующий классический результат.

Теорема 3 (Теорема Неймана). *Пусть* X, Y *– непустые выпуклые компактные подмножества пространств* $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ *соответственно. Пусть* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *– непрерывная функция, причём функция* $f(x,\cdot)\colon Y \to \mathbb{R}$ *выпукла при любом* x *из* X, *а функция* $f(\cdot, y)\colon X \to \mathbb{R}$ *вогнута при любом* y *из* Y. *Тогда*

$$\min_{x \in X} \max_{x \in X} f(x,y) \;=\; \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)\,. \qquad (7).$$

◀ Доказательство разобьём на две части. Вначале предположим, что функция $f(x,y)$ строго выпукла по y. В силу теоремы 1 функция $c(x) = \min\limits_{y} f(x,y)$ непрерывна. Так как функция $f(x,y)$ строго выпукла по y существует единственное решение $s(x)$ уравнения (4) и отображение $s\colon X \to Y$ непрерывно.

Поскольку $c(x)$ – непрерывная функция, определённая на ограниченном замкнутом множестве X, то она достигает на этом множестве своего наибольшего значения в некоторой точке x^*. В силу вогнутости функции $f(x,y)$ по x имеем при $0 < t < 1$ оценки

$$f((1-t)x^* + tx, y) \geqslant (1-t)f(x^*, y) + tf(x,y) \geqslant$$
$$\geqslant (1-t)c(x^*) + tf(x,y)\,. \tag{8}$$

Пусть теперь $\bar{y} = s((1-t)x^* + tx)$. Тогда в силу (8)

$$c((1-t)x^* + tx) = f((1-t)x^* + tx, \bar{y}) \geqslant (1-t)c(x^*) + tf(x,\bar{y})\,.$$

Но $c(x^*) \geqslant c((1-t)x^* + tx)$, и, следовательно,

$$c(x^*) \geqslant (1-t)c(x^*) + tf(x,\bar{y})\,.$$

Перенося $(1-t)c(x^*)$ в левую часть, получаем

$$c(x^*) \geqslant f(x,\bar{y})\,. \tag{9}$$

В силу непрерывности отображения $s\colon X \to Y$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to 0} s((1-t)x^* + tx) = s(x^*).$$

Положим $y^* = s(x^*)$. Переходя в (9) к пределу при $t \to 0$, имеем

$$f(x, y^*) \leqslant c(x^*). \tag{10}$$

В силу определения $y^* = s(x^*)$ справедливы соотношения

$$c(x^*) = f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y) \forall y \in Y. \tag{11}$$

Из (8), (9) вытекают неравенства

$$f(x, y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant f(x^*, y)\, \forall x \in X,\ y \in Y, \tag{12}$$

означающие, что пара $(x^*, y^*) \in X \times Y$ есть седловая точка функции

$$f\colon X \times Y \to \mathbb{R}.$$

Теперь требуемый результат падает нам в руки, как созревшее яблоко. Действительно, из (12) следуют соотношения

$$d(y^*) \leqslant f(x^*, y^*) \leqslant c(x^*)\,,$$

поэтому

$$I_2 = \min_y \ \max_x f(x,y) = \min_y d(y) \leqslant d(y^*) \leqslant$$
$$\leqslant c(x^*) = \max_x c(x) = \max_x \ \min_y f(x,y) = I_1\,.$$

Таким образом, $I_2 \leqslant I_1 \leqslant I_2$, т. е. $I_1 = I_2$.

Вторая часть доказательства. Пусть функция $f(x,y)$ вогнута по $x \in X$ и выпукла по $y \in Y$. Для любого натурального числа i функция

$$f_i(x,y) = f(x,y) + \frac{|y|^2}{i}$$

строго выпукла по y. В силу уже доказанного существует седловая точка (x_i, y_i) функции $f_i\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, т. е. справедливы неравенства

$$f(x, y_i) \leqslant f(x_i, y_i) \leqslant f(x_i, y) \forall x \in X, y \in Y. \tag{13}$$

Не нарушая общности, можно считать. что последовательность (x_i, y_i) при $i \to \infty$ сходится к точке $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Переходя в (13) к пределу, получим

$$f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0) \leqslant f(x_0, y) \ \forall x \in X, y \in Y\,.$$

Теперь равенство (7) очевидно. ▶

3. Седловые точки билинейной функции. В случае, когда X, Y – ограниченные полиэдры, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ – билинейная функция, для поиска седловой точки можно использовать переход к задачам линейной оптимизации. Ограничимся лишь одним вариантом, возникающим в теории матричных игр. Пусть множества $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ суть симплексы, определяемые соотношениями

$$X \overset{def}{=} \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^m,\, x_1 \geqslant 0, \cdots, x_m \geqslant 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1\},$$

$$Y \overset{def}{=} \{y = (y_j) \in \mathbb{R}^n,\, y_1 \geqslant 0, \cdots, y_n \geqslant 0, \sum_{j=1}^n y_j = 1\}.$$

Матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

сопоставим билинейную функцию

$$f(x,y) = (x, Ay) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j \quad (x \in X, y \in Y).$$

В теории матричных игр [12], [14] A называют *матрицей выигрышей первого игрока*, переменные $x_1, \ldots, x_m$ интерпретируют как вероятности (частоты), с которыми первый игрок выбирает строки матрицы A, $y_1, \ldots, y_n$ – вероятности, с которыми второй игрок выбирает столбцы матрицы A. Наборы $x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_n)$ именуют *смешанными стратегиями* первого и второго игроков. Это позволяет интерпретировать число $f(x, y)$ как математическое ожидание выигрыша первого игрока при выборе игроками смешанных стратегий x, y соответственно. Число

$$c_0 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

именуют *ценой* матричной игры $\Gamma(A)$.

Лемма 3. *Пусть матрица $A(t)$ получается из матрицы A путём прибавления к каждому её элементы фиксированного числа t, а $f_t(x, y) = (x, A(t)y)$ – функция, соответствующая матрице $A(t)$. Тогда $f_t(x, y) = f(x, y) + t$.*

◀ Из определения множеств X, Y следуют равенства

$$f_t(x, y) = (x, A(t)y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + t) x_i y_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j + t. \blacktriangleright$$

Функция $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ непрерывна по совокупности переменных, она линейна по каждому из переменных x, y, поэтому к ней применима теорема Неймана. Без труда проверяются равенства

$$c(x) \stackrel{def}{=} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_j \sum_i^m a_{ij} x_i,$$

$$d(y) \stackrel{def}{=} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_i \sum_j^n a_{ij} y_j.$$

Таким образом, $c(x)$ – кусочно-линейная вогнутая функция на множестве X, $d(y)$ – кусочно-линейная выпуклая функция на множестве Y. Очевидны неравенства

$$c(x) \leqslant f(x, y) \leqslant d(y) \quad \forall x \in X, y \in Y. \tag{14}$$

Наиболее простыми представляются случаи, когда хотя бы одно из чисел m, n равно 2. Пусть, например, $m = 2$. В этом случае

$$c(x_1, x_2) = \min_j (a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2),\ X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0,\ x_1 + x_2 = 1\}.$$

Очевидно равенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} c(x) = \max_{0 \leqslant x_1 \leqslant 1} c(x_1, 1 - x_1).$$

Функция $x_1 \to c(x_1, 1-x_1)$ вогнута и кусочно-линейна на отрезке [0,1]. Это позволяет найти её максимум на [0,1] с помощью простых геометрических соображений. Тем самым будет найдено значение матричной игры и первая компонента седловой точки функции f.

В случае произвольных натуральных чисел m, n будем считать, что $c(x) > 0$ $\forall x \in X$; этого можно добиться переходом от матрицы A к матрице $A(t)$ при достаточно большом t. Для определённости будем считать все элементы матрицы A положительными числами. Из (14) вытекают соотношения

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geqslant c(x)\,\forall j, \qquad x_i \geqslant 0\,\forall i, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \tag{15}$$

Разделив почленно каждое из соотношений (15) на $c(x)$ и положив

$$\frac{x_i}{c(x)} = u_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

получим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant 1\,\forall j, \qquad u_i \geqslant 0\,\forall i, \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i = \frac{1}{c(x)}. \tag{16}$$

Задача максимизации функции $c(x)$ на множестве X заключается в нахождении такого элемента $\bar{x} \in X$, который максимизирует $c(x)$, следовательно, минимизирует выражение

$$\frac{1}{c(x)} = \sum_{i=1}^{m} u_i = w(u)$$

при выполнении неравенств, фигурирующих в (16).

Таким образом, отыскание $\bar{x}$ привело к следующей задаче линейной оптимизации:

$$w(u) = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min, (17)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant 1\,\forall j, \qquad u_i \geqslant 0\,\forall i. \tag{18}$$

Система ограничений (18) данной задачи очевидным образом совместна, а минимизируемый функционал w ограничен снизу. Следовательно, задача (17), (18) имеет решение $\bar{u}$. Попутно установлено, что элемент $\bar{x} = \frac{\bar{u}}{w(\bar{u})}$ есть точка максимума функции $c(x)$ на множестве X. Верны равенства

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \max_{x \in X} c(x) = c(\bar{x}) = \frac{1}{w(\bar{u})}. \qquad (19).$$

Перейдём к задаче минимизации функции $d(y)$ на множестве Y. Из (14) следуют соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant d(y)\,\forall i, \qquad y_j \geqslant 0\,\forall j, \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \tag{20}$$

Разделив почленно каждое из соотношений (20) на $d(y)$ и положив

$$\frac{y_j}{d(y)} = v_j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leqslant 1\,\forall i, \qquad u_j \geqslant 0\,\forall j, \qquad \sum_{j=1}^{n} v_j = \frac{1}{d(y)}. \tag{21}$$

Задача минимизации фуникции $d(y)$ на множестве y заключается в нахождении такого элемента $\bar{y} \in Y$, который минимизирует $d(y)$, следовательно, максимизирует выражение

$$\frac{1}{d(y)} = \sum_{j=1}^{n} v_j = z(v)$$

при выполнении неравенств, фигурирующих в (21).

Таким образом, отыскание $\bar{y}$ привело к следующей задаче линейной оптимизации:

$$z(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max, (22)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \leqslant 1\,\forall j, \qquad v_j \geqslant 0\,\forall i. \tag{23}$$

Задача (22), (23) является двойственной к задаче (17), (18), поэтому имеет решение $\bar{v}$. Попутно установлено, что элемент $\bar{y} = \frac{\bar{v}}{z(\bar{v})}$ есть точка минимума функции $d(y)$ на множестве Y. Верны равенства

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \min_{y \in Y} d(y) = d(\bar{y}) = \frac{1}{z(\bar{v})}. \tag{24}$$

Так как значения двойственных задач одинаковы, то $w(\bar{u}) = z(\bar{v})$. Пара $(\bar{x}, \bar{y})$ есть седловая точка функции f. Тем самым не только получено новое доказательство теоремы Неймана, но и указан способ поиска седловой точки, основанный на сведении к паре двойственных задач линейной оптимизации. Если $m = 2$ или $n = 2$, то для решения задачи (17), (18) (соответственно (21), (22)) можно применить геометрические соображения.

Для решения матричных игр важен *критерий оптимальности* (условия о дополняющей нежёсткости). Приведём формулировку условий оптимальности применительно к задаче (17). (18) и двойственной к ней задаче (22), (23):

$$\bar{u}_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{v}j - 1\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$\bar{v}_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i - 1\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Но $\bar{u}_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{c}}, \bar{v}_j = \frac{\bar{y}_j}{\bar{c}}$, где $\bar{c} = f(\bar{x}, \bar{y})$ – значение матричной игры. Подставляя эти значения в указанные выше равенства, получим

$$\bar{x}_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}j - \bar{c}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{25}$$

$$\bar{y}_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i - \bar{c}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{26}$$

Эти равенства могут быть использованы при исследовании оптимальности пары $(\bar{x}, \bar{y})$.

3.5 Ширина множества

1. Определение ширины множества. Сопоставим каждому элементу u из $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| = 1\}$ и действительным числам $h_1 \leqslant h_2$ *полосу*

$$\Pi(u, h_1, h_2) := \{x \in \mathbb{R}^N,\ h_1 \leqslant (x, u) \leqslant h_2\}.$$

Таким образом, $\Pi(u, h_1, h_2)$ есть часть пространства $\mathbb{R}^N$, расположенная между гиперплоскостями $\Gamma(u, h_i) = \{x \in \mathbb{R}^n, (x, u) = h_i\}\,(i = 1, 2)$. Расстояние между этими гиперплоскостями равно $h_2 - h_1$; оно называется *шириной полосы* $\Pi(u, h_1, h_2)$.

Лемма 1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^N$. Тогда включение*

$$M \subset \Pi(u, h_1, h_2) \tag{1}$$

эквивалентно неравенствам

$$h_2 \geqslant sM(u), \qquad -h_1 \geqslant sM(-u), \tag{2}$$

где sM – опорная функция множества M.

◀ Если выполнено (1), то

$$sM(u) = \sup\{(x, u), x \in M\} \leqslant h_2,$$

$$sM(-u) = \sup\{(x,-u), x \in M\} = -\inf\{x,u), x \in M\} \leqslant -h_1$$

и, таким образом, выполнены неравенства (2). Обратно, пусть имеют место неравенства (2). Тогда для любого x из M справедливы соотношения

$$h_2 \geqslant sM(u) \geqslant (x,u) \geqslant -sM(-u) \geqslant h_1,$$

означающие, что $u \in \Pi(u, h_1, h_2)$.▶

Из неравенства (2) вытекает, что среди полос, содержащих M, имеется наименьшая по ширине. Ширина самой узкой полосы $\Pi(u, h_1, h_2)$, содержащей M, называется [3]- [6], [18], [21], [27] ***шириной*** M в направлении u и обозначается символом $b_M(u)$. Согласно лемме 1

$$b_M(u) = sM(u) + sM(-u). \tag{3}$$

Как нетрудно видеть, $b_M(u) = b_{co\,M}(u)$, конечность $b_M(u)$ при всех u эквивалентна ограниченности множества M, равенство $b_M(u) = 0$ для некоторого u из ∂B означает, что M содержится в гиперплоскости $\Gamma(u,h)$. В дальнейшем предполагаем, что

$$M \in Kv(\mathbb{R}^N), \quad \overset{\circ}{M} \neq \varnothing \tag{4}$$

Предположения (4) гарантируют неравенства $0 < b_M(u) < \infty$.

Правая часть (3) есть функция, определённая на всём пространстве $\mathbb{R}^N$. Распространим на $\mathbb{R}^N$ функцию b_M, исходя из равенства (3). Без труда проверяется, что $b_M\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ – сублинейная чётная и положительная на $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ функция, совпадающая с опорной функцией разностного множества $D(M) \overset{def}{=} M + (-M)$. Из (3) следует равенство

$$b_M(u) = b_{\frac{D(M)}{2}}(u).$$

2. Теорема Люстерника. Функция b_M чётна ($b_M(-u) = b_M(u)\, \forall u \in \partial B$). Это даёт возможность применить методы вариационного исчисления в целом, изложенные во второй главе. Положим

$$Q \overset{def}{=} \{u \in \mathbb{R}^N,\, |u| \geqslant 1\}.$$

Очевидно равенство $\overset{\circ}{Q} = \{u \in \mathbb{R}^N,\, |u| > 1\}$. Справедливо соотношение

$$N_Q(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in \overset{\circ}{Q}, \\ -\bigcup\limits_{\lambda \geqslant 0} \lambda u, & \text{если } u \in \partial Q. \end{cases}$$

Изучим критические точки функции $b_M\colon Q \to \mathbb{R}$.

Лемма 2. *Пусть u_0 – критическая точка функции $b_M\colon Q \to \mathbb{R}$. Тогда $|u_0| = 1$ и существуют такие точки x_0, y_0 из M, что*

$$x_0 - y_0 = \lambda_0 u_0 \quad \text{при некотором } \lambda_0 > 0, \tag{5}$$

$$(x_0, u_0) = s_M(u_0), \qquad (y_0, u_0) = -s_M(u_0). \tag{6}$$

◀ Пусть $M_1 = D(M) = M + (-M)$. Из предшествующих результатов вытекают соотношения

$$b_M = s_{M_1}, \qquad \lambda_0 u_0 \in \partial s_{M_1}(u_0),$$

$$\lambda_0 \geqslant 0, \qquad \lambda_0(|u_0| - 1) = 0.$$

Равенство $\lambda_0 = 0$ невозможно, так как $0 \notin \partial s_{M_1}(u_0)$ для $u_0 \neq 0$. Следовательно, $\lambda_0 > 0, |u_0| = 1$. Включение $\lambda_0 u_0 \in \partial s_{M_1}(u_0)$ равносильно неравенству

$$s_{M_1}(v) - s_{M_1}(u_0) \geqslant (v - u_0, \lambda_0 u_0) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N. \tag{7}$$

Взяв в (6) $v = tw$ и устремив t к ∞, приходим к оценке

$$s_{M_1}(w) \geqslant (w, \lambda_0 u_0) \quad \forall w \in \mathbb{R}N,$$

из которой следует включение $\lambda_0 u_0 \in M_1$ и равенство (5) с какими-то x_0, y_0 из множества M. При $v = 0$ неравенство (7) влечёт за собой равенство

$$(u_0, \lambda_0 u_0) = s_{M_1}(u_0).$$

Так как

$$s_{M_1}(u_0) \geqslant (x - y, u_0) \quad \forall x \in M, y \in M$$

и $\lambda_0 u_0 = x_0 - y_0$, то

$$(x_0 - y_0, u_0) \geqslant (x - y, u_0) \quad \forall x \in M, y \in M.$$

Последняя оценка влечёт за собой (6). ▶

Из (6) следует, что x_0, y_0 – граничные точки множества M. Поскольку

$$(y_0, u_0) \leqslant (x, u_0) \leqslant (x_0, u_0) \quad \forall x \in M,$$

то множество M содержится между гиперплоскостями

$$(x, u_0) = (y_0, u_0), \qquad (x, u_0) = (x_0, u_0),$$

проходящими через точки x_0, y_0 соответственно. Ширина полосы, образованной этими гиперплоскостями, совпадает с

$$|x_0 - y_0| = \lambda_0 = s_M(u_0) + s_M(-u_0).$$

Обозначим через Σ_n совокупность замкнутых симметричных относительно 0 подмножеств сферы ∂B, род которых не меньше n. В силу свойств рода множество Σ_n непусто, если $n = 1, \ldots, N$). Сопоставим выпуклому телесному компакту $M \subset \mathbb{R}^N$ числа

$$b_n(M) = \inf_{A \in \Sigma_n} \quad \max_{u \in A} b_M(u). \tag{8}$$

Как нетрудно видеть, $0 < b_1(M) \leqslant b_2(M) \leqslant \ldots \leqslant b_N(M)$.

Число
$$\Delta(M) = b_1(M) = \min_{u\in\partial B} b_M(u)$$
называют толщиной M. Оно совпадает с шириной самой узкой полосы, содержащей множество M. Число $b_N(M)$ равно диаметру $\mathscr{D}(M)$ множества M.

Задача 1. *Доказать равенство*
$$\mathscr{D}(M) = \max_{u\in\partial B} b_M(u).$$

Числа $b_n(M)$, соответствующие промежуточным значениям n, могут быть выражены через *категорные поперечники* множества M [20]

В силу результатов второй главы каждое из чисел $b_n(M)$, $n = 1,\ldots,N)$ является критическим значением функции $b_M\colon Q \to \mathbb{R}$; если $b_{n+1}(M) = b_n(M)$ при некотором $n < N$, то на поверхности уровня $\{u : b_M(u) = b_n(u)\}$ имеется бесконечное число критических точек функции $b_M\colon Q \to \mathbb{R}$. Объединяя эти результаты с леммой 2, приходим к следующему утверждению

Теорема 1. *Существует не менее N различных точек u_n из ∂B и точек x_n, y_n из M таких, что*
$$x_n - y_n = b_n(M)u_n,$$
$$(x_n, u_n) = s_M(u_n), \qquad (y_n, u_n) = -s_M(-u_n),$$
где числа $b_n(M)\,(n = 1,\ldots,N)$ определены равенством (8).

Приведём вариант теоремы 2 в геометрических терминах. Гиперплоскость $\Gamma = \Gamma(u,h) \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N, (x,u) = h\}$ $\quad (u \neq 0)$ называют *опорной* к телесному выпуклому компакту M, если $\Gamma \cap M \neq \varnothing, \Gamma \cap \overset{\circ}{M} = \varnothing$. Как нетрудно проверить, гиперплоскости $\Gamma_+ = \Gamma(u, s_M(u))$, $\qquad \Gamma_-\Gamma(u, -s_M(-u))$ являются опорными к компакту M. В частности, согласно теореме 1 гиперплоскости
$$(x, u_n) = s_M(u_n), \quad (x, u_n) = -s_M(-u_n)\,(n = 1,\ldots,N)$$
проходят через точки x_n, y_n соответственно и опорны к множеству M.

Из проведённых рассуждений следует

Теорема 2. *Для каждого выпуклого телесного компакта $M \subset \mathbb{R}^N$ существует N различных отрезков, соединяющих точки границы ∂M множества M и перпендикулярных к опорным плоскостям, проходящим через их концы.*

Геометрическое доказательство теоремы 2 можно найти в [3].

3. Неравенство Бляшке. Выпуклый телесный компакт M содержит шары положительного радиуса. Шар наибольшего радиуса, целиком содержащийся в компакте M, называется *вписанным* шаром. Существование вписанного шара может быть доказано с помощью стандартных рассуждений, основанных на компктности. Радиус шара, вписанного в M, обозначим через $\rho(M)$. Ниже будет использоваться геометрически очевидная

Лемма 3. *1) Если M_1, M_2 – выпуклые телесные компакты и $M_1 \subset M_2$, то $\rho(M_1) \leqslant \rho(M_2)$.*

2) Если M – телесный выпуклый компакт, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует многогранник Q, для которого $M \subset Q$, $\rho(Q) < \rho(M) + \varepsilon$.

Не останавливаясь на доказательстве [15], [18], [24], заметим, что в качестве Q можно взять множество

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n,\ (x, u_i) \leqslant sM(u_i),\ i \in I\},$$

где $u_i \in \partial B,\ i \in I,\ |I| < \infty$, множество $\{u_i\}$ достаточно густо расположено на единичной сфере ∂B.

Положим

$$h_i = sM(u_i)\ ,\ \Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^N,\ (x, u_i) = h_i\}, \quad Q_i = \{x \in \mathbb{R}^n, (x, u_i) \leqslant h_i\}\ (i \in I).$$

Включение $B(x, t) \subset Q_i$ $(t \geqslant 0)$ эквивалентно неравенству

$$t \leqslant h_i - (x, u_i) = dist(x, \Gamma_i),$$

поэтому шар $B(x, t)$ содержится в Q, если и только если $t \leqslant h_i - (x, u_i)$ $\forall i \in I$. Отсюда легко следует, что число $-\rho(Q)$ совпадает с минимальным значением функции

$$f(x) = \max_{i \in I}((x, u_i) - h_i)$$

на пространстве $\mathbb{R}^N$. В силу второй теоремы об очистке найдётся множество $I_+ \subset I,\ |I_+| \leqslant N + 1$ такое, что минимальное значение функции

$$f_+(x) = \max_{i \in I_+}((x, u_i) - h_i)$$

на пространстве $\mathbb{R}^N$ также равно $-\rho(Q)$. В частности , если

$$Q_+ = \bigcap_{i \in I_+} Q_i,$$

то $Q \subset Q_+$ и $\rho(Q) = \rho(Q_+)$. Не уменьшая общности, можно считать множество Q_+ ограниченным; в рассматриваемом случае симплексом. Напомним, что симплексом в $\mathbb{R}^N$ называется выпуклая оболочка $N + 1$ элементов из $\mathbb{R}^N$, не принадлежащих одной гиперплоскости.

Из проведённых рассуждений вытекает

Лемма 4. *Если M – телесный выпуклый компакт, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся содержащий M симплекс Q_+ такой, что $\rho(Q_+) < \rho(M) + \varepsilon$.*

Неравенством Бляшке называют оценки вида

$$2\rho(M) \leqslant \Delta(M) \leqslant (N + 1)\rho(M), \tag{9}$$

где $\Delta(M)$ – толщина телесного выпуклого компакта M, $\rho(M)$ – радиус вписанного в M шара. Левая часть (9) очевидна. Действительно, если $B(x,\rho) \subset M$, то $\Delta(M) \geqslant \Delta(B(x,\rho)) = 2\rho$, что и приводит при $\rho = \rho(M)$ к нужному результату.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём симплекс Q_+, удовлетворяющий условиям

$$M \subset Q_+,\ \rho(Q_+) \leqslant \rho(M) + \varepsilon$$

(см. лемму 4). N- мерный объём V симплекса Q_+ может быть вычислен по формулам

$$V = \frac{1}{N} S_0 h_0 = \frac{1}{n} S \rho(Q_+), \tag{10}$$

где $S_0 - -(N-1)-$ мерный объём какой-либо грани, h_0 - длина высоты симплекса, опущенная на эту грань, S – сумма $(N-1)-$ мерных объёмов всех боковых граней, $\rho(Q_+)$ – радиус вписанного в Q_+ шара. Из формулы (10) легко выводится, что толщина симплекса Q_+ совпадает с высотой h_0, опущенной на грань с наибольшим $(N-1)$ - мерным объёмом S_0. Поскольку симплекс имеет $N+1$ грань, то $S \leqslant (N+1)S_0$. Используя снова (10), получаем $h_0 \leqslant (N+1)\rho(Q_+)$. Справедливы оценки

$$\Delta(M) \leqslant \Delta(Q_+) \leqslant (N+1)\rho(Q_+) \leqslant (N+1)(\rho(M) + \varepsilon),$$

из которых ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ следует правое из неравенств (9).

Константы 2 и $N+1$ в неравенстве (9) точны в том смысле, что существуют выпуклые компакты, для которых соответствующие неравенства становятся равенствами. Например, если M – шар, то $\Delta(M) = 2\rho(M)$; если M – правильный симплекс размерности N, то $\Delta(M) = (N+1)\rho(M)$. Оценки (9) верны и в случае нетелесного компакта M, так как в этом случае $\Delta(M) = \rho(M) = 0$.

3.6 Оптимальные проекции многогранников

1. Постановка задачи об оптимальной проекции. Пусть M – выпуклый ограниченный многогранник в N-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$, имеющий непустую внутренность и k граней, объединение которых совпадает с границей ∂M многогранника M. Пусть $\{n_i\}|_{i=1}^k$ – единичные векторы внешних нормалей к его $(N-1)$-мерным граням и $\{F_i\}|_{i=1}^k$ – $(N-1)$-мерные объёмы этих граней. Справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{k} F_i n_i = 0\,. \tag{1}$$

Действительно, пусть u – вектор единичной длины в пространстве $\mathbb{R}^N$,

$$H_u = \{y \in \mathbb{R}^N, (y,u) = 0\} -$$

гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$, проходящая через начало координат и ортогональная вектору u. Тогда (u, n_i) – косинус угла между гиперплоскостью H_u и гиперплоскостью грани F_i, а число $(u, n_i)F_i$ есть $(N-1)$-мерный объём проекции грани F_i на H_u, взятый с соответствующим знаком, а $|(u, n_i)F_i|$ – тот же объём, но уже без знака. Проекции граней многогранника M на H_u дважды покрывают его проекцию на эту гиперплоскость, причём для одной из таких граней (покрывающих одну и ту же точку проекции) $(u, n_i) > 0$, а для другой грани $(u, n_i) < 0$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k}(u, n_i)F_i = 0 \quad \forall u \in \partial B.$$

Ввиду произвольности единичного вектора u отсюда вытекает равенство (1). Другим (и важным для нас) следствием проведённых рассуждений является равенство

$$S(u) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}|(F_i n_i, u)|, \tag{2}$$

в котором $S(u)$ – $(N-1)$-мерный объём проекции M_u многогранника M на гиперплоскость H_u.

Для выпуклого N-мерного многогранника векторы $\{n_i\}|_{i=1}^k$ должны порождать всё N-мерное пространство, т. е. линейная оболочка данной системы векторов совпадает с $\mathbb{R}^N$. В предположении противного все векторы n_i принадлежали бы некоторой гиперплоскости, и, значит, в направлении нормали к этой гиперплоскости многогранник M был бы неограниченным.

Г. Минковский доказал, что сформулированные выше условия на векторы n_i и числа F_i не только необходимы, но и достаточны для существования соответствующего многогранника.

Теорема (Минковского). *Пусть система $\{n_i\}|_{i=1}^k$ единичных векторов в $\mathbb{R}^N$ порождает всё пространство $\mathbb{R}^N$. Пусть система $\{F_i\}|_{i=1}^k$ положительных чисел F_i удовлетворяет соотношению (1). Тогда существует выпуклый многогранник, у которого объёмы $(N-1)$-мерных граней равны F_i, а векторы n_i являются векторами внешних нормалей к соответствующим граням.*

Доказательство теоремы Минковского, основанное на правиле множителей Лагранжа для задач на условный экстремум, можно найти в [4], [34].

Нахождение направления проектирования $\bar{u}$, при котором объём проекции максимален, приводит к задаче

$$\sum_{i=1}^{k}|(a_i, u)| \to \max, \tag{3}$$

$$|u| = 1, \tag{4}$$

где $a_i = 0,5 n_i F_i\,(i = 1, \ldots, k)$. Условие $a_1 + \ldots + a_k = 0$, вытекающее из (1), для дальнейшего анализа задачи (3), (4) несущественно, однако следует помнить, что в задаче об оптимальном проектировании оно выполнено автоматически. Будем считать, что система векторов $\{a_i\}|_{i=1}^k$ порождает пространство $\mathbb{R}^N$.

Определим функцию $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ равенством

$$f(u) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{k} |(a_i, u)|. \tag{5}$$

Функция f положительно однородна и выпукла. В силу теоремы Фенхеля она является опорной функцией некоторого выпуклого компакта $\mathscr{A}$ Более точно, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Определяемая равенством (5) функция* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *есть опорная функция компакта*

$$\mathscr{A} \overset{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, |\lambda_i| \leqslant 1, \, i \in \overline{1,k} \right\}. \tag{6}$$

◀ Основу доказательства составляет очевидное равенство

$$|c| = \max_{1 \leqslant \lambda \leqslant 1} c\lambda \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Применяя это равенство, приходим к соотношениям

$$\sum_{i=1}^{k} |(a_i, u)| = \sum_{i=1}^{k} \max_{-1 \leqslant \lambda_i \leqslant 1} (\lambda_i (a_i, u)) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i a_i, u), |\lambda_i| \leqslant 1 \right\},$$

$$f(u) = \sum_{i=1}^{k} |(a_i, u)| = \max\{(v, u), \, v \in \mathscr{A}\}.$$

Последнее равенство означает, что f – опорная функция множества $\mathscr{A}$.▶

Множества типа (6) в геометрии называют [1] *зоноэдрами*. Множество $\mathscr{A}$ выпукло, замкнуто, центрально-симметрично относительно 0 и ограничено. Точка 0 принадлежит внутренности множества $\mathscr{A}$; это следует из того, что система $\{a_i\}|_{i=1}^k$ порождает всё пространство $\mathbb{R}^N$.

2. Экстремальные значения проекции. Для исследования экстремальных значений функции f на сфере $\partial\mathbb{B}$ можно применить аппарат, развитый в предшествующем параграфе. Уместно заметить, что ввиду симметричности зоноэдра $\mathscr{A}$ число $2f(u)$ совпадает с шириной $\mathscr{A}$ в направлении вектора u: $2f(u) = b(u) \quad \forall u \in \partial\mathbb{B}$. Максимальное значение функции $f(u)$ на сфере $\partial\mathbb{B}$ равно половине диаметра зоноэдра $\mathscr{A}$, т. е. радиусу минимального охватывающего $\mathscr{A}$ шара. Таким образом, верно равенство

$$\max_{u \in \partial\mathbb{B}} f(u) = \max_{x \in \mathscr{A}} |x|. \tag{7}$$

[1] Математическая энциклопедия. Т. 2. С. 468.

Функция $|x|$ строго выпукла, поэтому максимального значения на зоноэдре $\mathscr{A}$ она достигает в крайних точках $\mathscr{A}$. Обозначим через $\mathscr{A}_0$ совокупность линейных комбинаций векторов $a_1, \dots, a_k$ с коэффициентами 1 и -1. Множества $\mathscr{A}_0, ext\,\mathscr{A}$ являются остовами множества $\mathscr{A}$; очевидно включение $ext\,\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_0$.

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\max_{u\in\partial\mathbb{B}} f(u) = \max_{x\in\mathscr{A}_0} |x| = \max_{x\in ext\,\mathscr{A}} |x|. \tag{8}$$

◀ Теорема 1 следует из теоремы 3.1.1. ▶

Множество $\mathscr{A}_0$ конечно, поэтому теорема 1 сводит задачу о максимальной проекции к поиску максимума простой функции $|x|$ на конечном множестве $\mathscr{A}_0$ или даже на его части $ext\,\mathscr{A}$. [1] В некоторых случаях удаётся понизить число перебираемых точек за счёт геометрических свойств рассматриваемых многогранников. Примеры такого рода, относящиеся к случаям $N = 2$ или $N = 3$ рассматриваются в следующем пункте.

Поскольку 0 есть внутренняя точка зоноэдра $\mathscr{A}$, то при некотором положительном r справедливо включение

$$rB \subset \mathscr{A}, \tag{9}$$

эквивалентное неравенству

$$r|x| \leqslant f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \tag{10}$$

В силу (9), (10) минимальное значение функции f на сфере $\partial\mathbb{B}$ равно максимальному из чисел $r > 0$, для которых верно включение (9), т. е. радиусу $\rho(\mathscr{A})$ вписанного в зоноэдр $\mathscr{A}$ шара. Способ нахождения $\rho(\mathscr{A})$, основанный на применении линейной оптимизации, обсуждался выше. Однако ввиду симметричности $\mathscr{A}$ относительно 0 ситуация значительно упрощается. Не нарушая общности, можно считать, что зоноэдр $\mathscr{A}$ задаётся равенством

$$\mathscr{A} \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N, |(x, h_j)| \leqslant d_j, \quad j \in J\}, \tag{11}$$

в котором J – конечное множество, h_j – ненулевые векторы из $\mathbb{R}^N$, d_j – положительные числа, $j \in J$.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\min_{u\in\mathbb{B}} f(u) = \min_{j\in J} \frac{d_j}{|h_j|}. \tag{12}$$

◀ Включение (9) для зоноэдра, определяемого соотношением (11), эквивалентно неравенствам $r|h_j| \leqslant d_j\, \forall j \in J$. Теперь равенство (12) очевидно. ▶

[1] По поводу реализации намеченного подхода см. например, H. Edelsbrunner „Algoritms in Combinatorial Geometry“,Shapter 12.

Теорема 2 редуцирует задачу о минимальной проекции к задаче минимизации достаточно простой функции на конечном множестве. Однако и здесь возникают дополнительные трудности, обусловленные двумя обстоятельствами. Во-первых, зоноэдр $\mathscr{A}$ в исходной задаче определяется отличным от (11) способом. Предстоит найти векторы h_j, постоянные d_j да и само множество J. Если число элементов J велико, то возникает проблема с отысканием минимума, находящегося в правой части (12).

Как и в предшествующем параграфе, можно ввести минимаксные значения c_n, $n = 1, \ldots, N$ функционала f, полагая

$$c_n = \inf_{X \in \Sigma_n} \quad \max_{u \in X} f(u). \tag{13}$$

Определяемые равенством (13) числа c_n являются критическими значениями функционала f относительно сферы $\partial\mathbb{B}$. При этом справедливы соотношения

$$0 < \min_{u \in \partial\mathbb{B}} f(u) = c_1 \leqslant c_2 \leqslant \ldots \leqslant c_N = \max_{u \in \partial\mathbb{B}} f(u).$$

Вопрос о геометрическом смысле промежуточных критических значений и соответствующих критических точек предлагается продумать читателю.

3. Решение примеров. *Пример 1.* Рассмотрим задачу оптимального проектирования в плоском случае (N = 2). Пусть M – ограниченный выпуклый многоугольник на плоскости. В этом случае максимум длины проекции равен диаметру M, а минимум длины проекции совпадает с толщиной $\Delta(M)$ многоугольника M. Если $A_1, \ldots, A_k$ – вершины многоугольника M, то его диаметр $\mathscr{D}(M)$ находится по формуле

$$\mathscr{D}(M) = \max_{i \neq j} |A_i - A_j| = |A_{i_0} - A_{j_0}|.$$

Нормаль к прямой, продящей через точки A_{i_0}, A_{j_0}, задаёт направление оптимального проектирования.

Несколько сложнее обстоит дело с нахождением толщины многоугольника M. Положим $A_{k+1} = A_1$ и обозначим через l_i прямую проходящую, через точки A_i, A_{i+1}. Пусть $d_{ij} = dist(A_j, l_i)\,(i, j = 1, \ldots, k)$ – расстояние от точки A_j до прямой l_i. Имеет место равенство

$$\Delta(M) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant k} d_{ij},$$

в справедливости которого предлагается убедиться читателю.

Пример 2. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная призма M с гранями $G_1, \ldots, G_k$, объединение которых совпадает с границей ∂M призмы M. Будем считать, что G_1 и G_2 – основания призмы, а $G_2, \ldots, G_{k-1}$ – боковые грани M,h – высота призмы M. Пусть F_i – площадь грани G_i, n_i – единичный вектор внешней нормали к грани G_i, $a_i = F_i n_i$, $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда $a_1 + a_k = 0$, векторы $a_2, \ldots, a_{k-1}$ ортогональны вектору a_1 и их сумма равна 0. Зоноэдр $\mathscr{A}$, соответствующий призме

M, в данном случае также является прямоугольной призмой, симметричной относительно нуля. В основании призмы $\mathscr{A}$ находится зоноэдр $\mathscr{A}_1$, соответствующий грани G_1. Высота призмы $\mathscr{A}$ равна $h/2$. Если положить $\mathscr{A}_2 = [-h/2, h/2]$, то придём к выразительному равенству

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2. \tag{14}$$

Достаточно несложно найти вектор $\bar{a}$ – вершину зоноэдра $\mathscr{A}$ – для которой

$$|\bar{a}| = \max_{x \in \mathscr{A}} |x|.$$

Вектор $\bar{u} = \bar{a}/|\bar{a}|$ максимизирует функцию $S(u)$ на единичной сфере. Длина вектора $\bar{a}$ равна максимальной из площадей проекций многогранника на плоскости в $\mathbb{R}^3$. Она может быть найдена по формуле

$$|\bar{a}| = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + d^2},$$

в которой d – диаметр основания G_1 исходной призмы M.

Упражнение. Перенести проведённые построения на призмы в пространстве $\mathbb{R}^n$; под призмой следует понимать прямое произведение многогранников низшей размерности.

Пример 3. Пусть M – треугольная пирамида в $\mathbb{R}^3$, G_1, G_2, G_3, G_4 – грани M, F_i – площадь грани G_i, n_i – единичный вектор внешней нормали к грани G_i, $a_i = 0,5F_i n_i (i = 1, 2, 3, 4)$, $S(u)$ – площадь проекции пирамиды M на плоскость H_u. Обозначим через $\mathscr{A}$ зоноэдр, соответствующий пирамиде M. Пусть $extr(\mathscr{A})$ – множество крайних точек зоноэдра $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_0$ – совокупность линейных комбинаций векторов $a_1, \dots, a_k$ с коэффициентами 1 и -1. Для нахождения максимума $S(u)$ на сфере $\partial\mathbb{B}$ можно воспользоваться формулой (8). В данном случае вместо $\mathscr{A}_0$ следует расматривать его подмножество $\mathscr{A}^*$, состоящее из элементов a, допускающих преставление

$$a = a_1 + \sum_{i=2}^{4} \lambda_i a_i,$$

в котором $|\lambda_i| = 1$, и не все λ_i равны 1. Множество $\mathscr{A}^*$ содержит не более семи элементов. Из семи чисел $|a|$, $a \in \mathscr{A}^*$ несложно найти наибольшее. Это позволяет найти решение об оптимальной проекции для треугольной пирамиды.

Приложение A

Задачи по выпуклому анализу

1. Пусть f – выпуклая и ограниченная на шаре $B(a,R) = a + R\mathbb{B}$ функция, причём

$$\sup_{u,v\in B(a,R)} |f(u) - f(v)| \leqslant L_0.$$

Доказать, что при любом $r < R$ и любых z, w из шара $B(a,r)$ справедливо неравенство

$$|f(z) - f(w)| \leqslant \frac{L_0}{R-r}|v - w|.$$

2. Найти хаусдорфово расстояние между двумя шарами $x_1 + r_1\mathbb{B}$ и $x_2 + r_2\mathbb{B}$ в пространстве $\mathbb{R}^N$.

3. Найти хаусдорфово расстояние между эллипсами

$$\mathscr{E}_1 \overset{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 \leqslant 1,\ a_1 > 0,\ b_1 > 0\},$$

$$\mathscr{E}_2 \overset{def}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \left(\frac{x}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_2}\right)^2 \leqslant 1,\ a_2 > 0,\ b_2 > 0\}.$$

4. Привести пример функции класса $\Lambda(0,1)$, не представимой в виде разности выпуклых на $(0,\,1)$ функций.

5. Найти опорную функцию N-мерного бруса

$$G \overset{def}{=} \{x = (x_i),\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = 1.\ldots,N\}.$$

6. Найти опорную функцию N-мерного эллипсоида

$$\mathscr{E} \overset{def}{=} \{x = (x_i), \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}x_ix_j \leqslant 1\},$$

где (a_{ij}) – симметричная положительно определённая матрица размеров $N \times N$.

7. Опорные функции ограниченных множеств $M_1 \subset \mathbb{R}^N, M_2 \subset \mathbb{R}^N$ равны между собой в том и только том случае, когда их замкнутые выпуклые оболочки совпадают: $\overline{co}M_1 = \overline{co}M_2$. Доказать.

8. Пусть M_1, M_2 – множества класса $Kv(\mathbb{R}^N)$, $s(\cdot, M_i)$ – опорная функция множества $M_i\,(i = 1, 2)$. Доказать, что множества M_1, M_2 пересекаются, т. е. $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$, в том и только том случае, если для произвольного элемента $p \in \mathbb{R}^N$ выполняется неравенство

$$s(p, M_1) + s(p, -M_2) \geqslant 0.$$

9. Опорная функция множества K класса $Kv(\mathbb{R}^2$ определяется равенством

$$s(p_1, p_2) = |p_1 - p_2|.$$

Восстановите множество K.

10. Найти опорную функцию объединения и пересечения двух множеств.

11. Найти минимальное среди всех значений параметра k, при которых множество

$$X = \{x \in \mathbf{R}^2 \quad | \quad 2x_1^2 + 1)x_2 \leqslant 1, \quad x_2 \geqslant k\}$$

выпукло.

12. Доказать выпуклость множества $X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_2 \geqslant e^{x_1}\}$.

13. Найти выпуклую оболочку множества

$$X = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_2 = \sin x_1, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant \pi\}.$$

14. Пусть $Tx = Ax + b$ – аффинное отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^m \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция m переменных. Доказать выпуклость суперпозиции $g = f \circ T : \mathbf{R}^n \to \mathbb{R}$.

15. Пусть многоугольник Q есть выпуклая оболочка точек

$$A_1(0,1), A_2(1,0), A_3(0,0), A_4(1,4), A_5(4,1)\,.$$

При каких условиях на постоянные c_1, c_2 линейный функционал

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

достигает своего максимума на множестве Q в точке A_4?

16. Найти минимальное значение функции $f = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 8x_2$ при условиях

$$x_1 + x_2 \leqslant 7, \quad x_2 \leqslant 5, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0\,.$$

17. Найти минимальное значение функции $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2 - 3x_3$ при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 18\,,$$

$$x_2 \leqslant 12\,,$$

$$x_1 + 2x_3 \leqslant 14\,,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0\,.$$

18. Пусть f, g – функции одного действительного переменного,

$$h(z) = \inf_{x+y=z} (f(x) + g(y)) -$$

третья функция одного переменного, называемая *конволюцией* функций f, g, в этом случае пишут $h = f \oplus g$. Доказать, что надграфик функции $h = f \oplus g$ равен алгебраической сумме надграфиков функций f, g:

$$epi\, h = epi\, f + epi\, g\,.$$

19. Найти $f \oplus g$, если $f(x) = x^2, g(x) = kx + b$.

20. Доказать, что конволюция выпуклых функций есть снова выпуклая функция.

21. Сопряжённой к функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называют функцию одного переменного, обозначаемую символом f^* и определяемую равенством

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)) = \sup_{(x,\,t) \in epi f} (xy - t)\,.$$

Доказать выпуклость функции f^*.

22. Найти сопряженную к функции $f(x) = \dfrac{|x|^p}{p} \qquad (1 \leqslant p < \infty)$.

23. Доказать равенство $(f \oplus g)^* = f^* + g^*$.

24. Доказать неравенство Юнга

$$xy \leqslant f(x) + f^*(y)\,.$$

25. Конкретизировать неравенство Юнга в случае $f(x) = \dfrac{|x|^p}{p} \quad (1 < p < \infty)\,.$

26. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла, а функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонно возрастает и выпукла. Доказать, что суперпозиция $h = g \circ f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла.

27. Привести пример выпуклой функции одного переменного, квадрат которой уже не является выпуклой функцией.

28. Доказать, что для любого натурального n и любых чисел $x_i \in (0, \pi)$ $(i = 1, \ldots, n)$, имеет место неравенство

$$\prod_{i=1}^{n} \sin x_i \leqslant \sin^n \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \right).$$

29. Функция f определена на положительном ортанте $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ пространства $\mathbb{R}^n$ равенством

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{p_1} + \ldots + x_n^{p_n}.$$

При каких показателях $p_1, \ldots, p_n$ функция f выпукла?

30. При каком положительном показателе p функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{1/p}$$

выпукла на пространстве $\mathbb{R}^n$.

31. Средним порядка p положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ называют число

$$M_p(a_1, \ldots, a_n) \overset{def}{=} \left(\frac{a_i^p + \ldots + a_n^p}{n}\right)^{1/p}.$$

Вывести из выпуклости функции $t \to t^p$ $(0 < t < \infty, 1 \leqslant p < \infty)$ неравенство

$$M_1(a_1, \ldots, a_n) \leqslant M_p(a_1, \ldots, a_n).$$

Получить из этого неравенства более общее неравенство

$$M_q(a_1, \ldots, a_n) \leqslant M_p(a_1, \ldots, a_n),$$

в котором $q < p$. При каком условии функция $p \to M_p(a_1, \ldots, a_n)$ строго возрастает на всей действительной прямой?

32. Если выпуклая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в какой-то точке a, то она строго дифференцируема в этой точке.

33. Если выпуклая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в каждой точке шара $B(a, R)$, то её градиент $\nabla f(x)$ непрерывен в точке a. Выпуклость функции f можно заменить требованием её строгой дифференцируемости в каждой точке шара $B(a, R)$. Доказать (или опровергнуть).

Приложение В

Теоремы о доминировании

Задача о поиске седловой точки билинейной функции ранее была сведена к решению двух двойственных задач линейной оптимизации. В данном приложении обсуждаются способы упрощения этой и близких к ней задач.

Пусть X, Y – симплексы в пространства $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, определяемые равенствами

$$X \overset{def}{=} \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^m,\, x_1 \geqslant 0, \cdots, x_m \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

$$Y \overset{def}{=} \{y = (y_j) \in \mathbb{R}^n,\, y_1 \geqslant 0, \cdots, y_n \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

Матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

сопоставим билинейную функцию

$$f(x, y) = (x, Ay) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (x \in X, y \in Y).$$

Интерпретируем $\mathbb{R}^n$ как евклидово пространство строк $u = (u_j) = (u_1, \ldots, u_n)$ с определяемыми обычным образом (покомпонентно) операциями сложения и умножения на действительные числа. Скалярное произведение строк $u = (u_j)$и $v = (v_j)$ определено равенством

$$(u, v) = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j.$$

Скажем, что строка $u = (u_j)$ доминирует строку $v = (v_j$, если $u_j \geqslant v_j\,(j = 1, \ldots, n)$. В этом случае будем записывать $u \succ v$ или $v \prec u$. Будем говорить, что строка u строго доминирует строку v_j и использовать запись $u \gg v$, если $u_j > v_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Соотношения $u \succ v$ и $u \gg v$ эквивалентны неравенствам

$$(u, y) \geqslant (v, y), \qquad (u, y) > (v, y) \quad \forall y \in Y \tag{1}$$

соответственно. Обозначим через $a_1, \dots, a_m$ строки матрицы A. Таким образом, $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \in \mathbb{R}^n$,

$$(a_k, y) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j,$$

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i (a_i, y). \tag{2}$$

В силу теоремы Неймана существуют такие элементы $\bar{x} = (\bar{x}_i)$ из X и $\bar{y} = (\bar{y}_j)$ из множеств X и Y соответственно, что

$$f(x, \bar{y}) \leqslant f(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant f(\bar{x}, y) \, \forall x \in X, y \in Y, \tag{3}$$

иначе говоря, $(\bar{x}, \bar{y})$ – седловая точка функции $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если строка a_k матрицы A строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией оставшихся строк, то для любой седловой точки $(\bar{x}, \bar{y})$ функции f имеет место равенство $\bar{x}_k = 0$.*

◀ Пусть

$$a = \sum_{i \neq k} \lambda_i a_i -$$

выпуклая комбинация строк a_i $(i \neq k)$, строго доминирующая строку a_k. Предположим, что $\bar{x}_k > 0$. Введём в рассмотрение строку $x^* = (x_i^*)$, где

$$x_i^* = \begin{cases} \bar{x}_i + \lambda_i \bar{x}_k, & \text{если } \ i \neq k, \\ 0, & \text{если } \ i = k. \end{cases} \tag{4}$$

Используя соотношения (1), (2), получаем последовательно

$$f(x^*, \bar{y}) = \sum_{i \neq k} (\bar{x}_i + \lambda_i \bar{x}_k)(a_i, \bar{y}) = \sum_{i \neq k} \bar{x}_i (a_i, \bar{y}) + \sum_{i \neq k} \lambda_i \bar{x}_k (a_i, \bar{y}) =$$

$$= \sum_{i \neq k} \bar{x}_i (a_i, \bar{y}) + \bar{x}_k (a, \bar{y} > \sum_{i \neq k} \bar{x}_i (a_i, \bar{y}) + \bar{x}_k (a_k, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Неравенство $f(x^*, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$ противоречит (3). ▶

Теорема 2. *Если строка a_k матрицы A доминируется некоторой выпуклой комбинацией оставшихся строк, то существует такая седловая точка (x^*, y^*) функции f, что $x_k^* = 0$.*

◀ Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ – седловая точка функции $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$. Положим $y^* = \bar{y}$, а элемент $x* = (x_i^*)$ определим по формулам (4). Повторяя выкладки, проведённые при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству $f(x^*, y^*) \geqslant f(\bar{x}, \bar{y})$.

Из (3) вытекает неравенство $f(x^*, y^*) = f(x^*, \bar{y}) \leqslant f(\bar{x}, \bar{y})$. Таким образом, $f(x^*, y^*) = f(\bar{x}, \bar{y})$. Теперь доказываемое утверждение очевидно.▶

Аналогичные утверждения справедливы для столбцов матрицы A. Интерпретируем $\mathbb{R}^m$ как пространство вектор-столбцов $w = (w_i) = (w_1, \ldots, w_m)^\tau$ с определяемыми обычным образом (покомпонентно) операциями сложения и умножения на действительные числа. Скалярное произведение столбцов

$$w = (w_i), \quad z = (z_i)$$

определено равенством

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{m} w_i z_i.$$

Скажем, что столбец $w = (w_i)$ доминирует столбец $z = (z_i)$, если

$$w_i \leqslant z_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Будем говорить, что столбец $w = (w_i)$ строго доминирует столбец $z = (z_i)$, если

$$w_i < z_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Обозначим через $A_1, \ldots, A_n$ столбцы матрицы A. Тогда

$$A_k = (a_{1k}, \ldots, a_{nk})^\tau \in \mathbb{R}^m, \qquad (x, A_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} x_i, \qquad f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} y_j (x, A_j).$$

Сформулируем варианты теорем 1, 2 для столбцов.

Теорема 3. *Если столбец A_k матрицы A строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией оставшихся столбцов, то для любой седловой точки $(\bar{x}, \bar{y})$ функции f имеет место равенство $\bar{y}_k = 0$.*

Теорема 4. *Если столбец A_k матрицы A доминируется некоторой выпуклой комбинацией оставшихся столбцов, то существует такая седловая точка (x^*, y^*) функции f, что $y_k^* = 0$.*

Основной вывод, вытекающий из теорем 1 - 4, следующий: доминируемые строки (столбцы) можно вычёркивать. При этом, разумеется, надо помнить, какие именно ряды матрицы вычёркиваются. Это необходимо для восстановления решения исходной задачи, исходя из решения её упрощений. Следует заметить, что в ситуациях теорем 2, 4 часть решений исходной задачи может быть потеряна. Приведём пример применения теорем о доминировании. Пусть исходная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Третья строка доминируют первую. Вычёркивая первую строку, получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

В новой матрице первый столбец больше третьего. Вычёркивая первый столбец, получаем

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице никакая строка (и никакой столбец) не превосходит другие строки (и столбцы). Однако первый столбец превоходит среднее арифметическое второго и третьего столбцов. Поэтому мы исключаем первый столбец и получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

В данной матрице среднее арифметическое второй и третьей строк превосходит первую. Наша матрица приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Седловая точка $(\bar{x}, \bar{y}$ функции f, соответствющей данной матрице, легко находится; $\bar{x} = \bar{y} = (2/3, 1/3)$. Поскольку матрицу 2×2 мы получили из первоначальной матрицы 4×4 путём вычёркивания первых двух строк и первых двух столбцов, то седловая точка (x^*, y^*) функции (x, Ay), соответствующей исходной матрице A, будет $x^* = y^* = (0, 0, 2/3, 1/3)$.

Известны обобщения теорем о доминировании для задач линейной оптимизации. Приведём вариант теоремы 3 для задачи вида

$$l(x) = (c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad (i = 1, \ldots, k)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad (i = k+1, \ldots, m) \tag{6}$$

$$x_j \geqslant 0, (j = 1, \ldots, s \leqslant n).$$

Переменная $x_r \quad (1 \leqslant r \leqslant s)$ является доминируемой в задаче (5), (6), если существуют такие числа $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_s \geqslant 0, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_n$, что

$$a_{ir} \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j, \quad i = 1, \ldots, k$$

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\lambda_j, \quad i = k+1, \ldots, m$$

$$c_r < \sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j.$$

Теорема 5. *Если задача (5), (6) имеет решение и переменная* x_r $(1 \leqslant r \leqslant s)$ *является доминируемой, то* $\bar{x}_r = 0$ *для любого решения* $\bar{x}$ *данной задачи.*

◀ Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_j)$ – решение задачи (5),(6). Предположим, что $\bar{x}_r > 0$. Введём в рассмотрение элемент $x^* = (x_j^*)$, компоненты x_j^* которого определяются равенствами

$$x_j^* = \begin{cases} \bar{x}_j + \lambda_j \bar{x}_r, & \text{если } j \neq r, \\ \lambda_j \bar{x}_r, & \text{если } j = r. \end{cases}$$

Легко проверяется, что x^* – план задачи (5), (6) и в то же время $l(x^*) > l(\bar{x})$. Противоречие. ▶

Иное доказательство теоремы 5 и содержательную экономическую интерпретацию, делающую её совершенно очевидной, заинтересованный читатель может найти в [7]. Уместно заметить, что если пара двойственных задач линейной оптимизации имеет решения, то их множество полностью описывается множеством решений некоторой матричной игры. Приведём формулировку относящихся сюда результатов.

Рассмотрим пару двойственных задач линейной оптимизации, записанную в матричной форме:

$$l(x) = (c, x) \to \max, \quad Ax \leqslant b, \qquad x \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\tilde{l}(y) = (b, y) \to \min, \quad yA \geqslant c, \qquad y \geqslant 0. \tag{8}$$

Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица размеров $m \times n$ с элементами a_{ij}, $(i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n)$, $b = (b_i)$ – вектор-столбец с компонентами $b_i\,(i = 1, \ldots, m)$, $c = (c_j)$ – вектор-строка с компонентами $c_j\,(j = 1, \ldots, n)$, скалярное произведение и бинарные отношения $\leqslant, \geqslant$ в пространствах $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ определяются стандартным образом.

Сопоставим паре задач (7), (8) матрицу M размеров $(m+n+1)\times(m+n+1)$, записывая её в блочной форме

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A & C^\tau \\ A^\tau & 0 & -b^\tau \\ -C & B & 0 \end{pmatrix}.$$

Как и ранее, символ τ означает транспонирование. С матрицей M можно связать билинейную форму $g(U,V)$, определённую на $\mathbb{R}^{m+n+1}\times\mathbb{R}^{m+n+1}$ равенством

$$g(U,V) = (U, MV).$$

Обозначим через $\mathscr{S}$ – стандартный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^{m+n+1}$:

$$\mathscr{S} \stackrel{def}{=} \{w = (w_1,\ldots,w_{m+n+1}) \in \mathbb{R}^{m+n+1}, \quad \sum_{k=1}^{m+n+1} w_k = 1, \quad w_k \geqslant 0\}.$$

Теорема 6. *Двойственная пара задач линейной оптимизации (7), (8) имеет решения $\bar{x} = (\bar{x}_j)$ и $\bar{y} = (\bar{y}_j)$ тогда и только тогда, когда у функции*

$$g\colon \mathscr{S}\times\mathscr{S} \to \mathbb{R}$$

существует седловая точка вида $(\bar{U},\bar{U})$ такая, что $t = \bar{u}_{m+n+1} > 0$. При этом

$$\bar{y}_i = \frac{\bar{u}_i}{t}, \quad i = 1,\ldots m, \tag{9}$$

$$\bar{x}_j = \frac{\bar{u}_{m+j}}{t}, \quad j = 1,\ldots n. \tag{10}$$

Доказательство теоремы 6 опускается. Его можно найти в любом руководстве по теории матричных игр и линейной оптимизации (см., например, [10], [12], [14]).

Приложение C

Индивидуальные задания по теме „Кусочно-линейная оптимизация“

Кусочно-линейная оптимизация (КЛиО) – один из подразделов спецкурса „Современные проблемы математики“, читаемого магистрам первого года обучения. Основное его содержание составляет минимизация выпуклой кусочно-линейной функции, определенной на многогранном множестве. КЛиО представляет промежуточное звено между линейной и выпуклой оптимизацией. В его терминах могут быть сформулированы разнообразные задачи, возникающие в математике и её приложениях.

На первых занятиях студентам предлагались задачи минимизации кусочно-линейных функций одного переменного. Больших трудностей здесь не возникало, однако задачи, по своей сути связанные с выпуклым анализом, решались уже не столь успешно. Следующий цикл упражнений имел отношение к теории матричных игр. В начале студенты знакомились с постановками задач, учились находить нижнюю и верхнюю цены матричной игры. В случае их несовпадения приходилось использовать специальные методы. Для матриц с двумя рядами возможно графическое решение соответствующих игр. На основе теорем о доминировании матричные игры больших размеров могут быть также решены графически. Такого рода редукция не всегда возможна, но в ряде случаев бывает полезна. Основу решения матричных игр произвольного размера и вида составляет их сведение к задачам линейной оптимизации. Аналогичная редукция применяется для задачи о максимальном шаре, содержащемся в полиэдре, а также в задаче о чебышевском приближении. Замыкает перечень упражнений задача о вычислении опорной функции выпуклого компакта.

Приведу один из вариантов, дающий представлении о степени сложности решаемых задач.

1. Найти минимум на всей действительной прямой $\mathbb{R}$ функции

$$f(x) = |2x + 6| + |x + 2| + |x - 2| + |4x - 12|. \qquad (1)$$

2. Представить функцию $f(x)$, определённую равенством (1), как максимум

конечного числа линейных функций:

$$f(x) = \max_{i \in I} \, (c_i x + d_i). \tag{2}$$

В равенстве (2) $I-$ конечное множество.

3. В плоскости OXY заданы точки $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$, координаты x_t, y_t приведены в таблице

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	-5	2	4	-6	3	-9	2	1	- 2	7

.

Найти наибольшую из выпуклых функций $f\colon [0,10] \to \mathbb{R}$, таких что $y_t \geqslant f(x_t) \quad (t = 0, 1, \dots, 10)$.

4. Задана платёжная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Найти верхнюю и нижнюю цену игры $\Gamma(A)$, а в случае их совпадений - оптимальные чистые стратегии в игре $\Gamma(A)$.

5. Графическим методом найти решение игры $\Gamma(A)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$

6. На основе теоремы о доминировании свести игру $\Gamma(A)$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

к игре размеров 5×2, а получившуюся 5×2 игру решить графическим методом.

7. Матричную игру $\Gamma(A)$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

решить путём сведения к задачам линейной оптимизации.

8. Найти максимальный круг среди кругов, содержащихся в пятиугольнике с вершинами (x_t, y_t) $(t = 1, 2, 3, 4, 5)$. Координаты вершин приведены в таблице

t	1	2	3	4	5
x	2	-1	-2	0	3
y	2	3	-1	-3	-1

.

9. Решить задачу Чебышёва

$$\max_{t\in\mathscr{K}}\left|\sum_{j=1}^{n} x_j u_j(t) - f(t)\right| \to \min,$$

в случае, когда $\mathscr{K} = \{t_1, \dots, t_m\}$ и

$$m = 11, \quad t_i = \frac{i-1}{10} \quad (i = 1, \dots, 11),$$

$$u_j(t) = t^{j-1} \quad (j = 1, \dots, n = 5), \quad f(t) = \frac{1-t}{1+t^2}, \quad t \in [0, 1].$$

10. Найти опорную функцию выпуклого многоугольного множества, определяемого соотношениями

$$a_t x + b_t y \leqslant c_t \quad (t = 1, \dots, 5). \tag{3}$$

Коэффициенты a_t, b_t, c_t в неравенствах (3) приведены в таблице

t	1	2	3	4	5
a	2	-1	-2	0	3
b	2	3	-1	-3	-1
c	6	7	8	9	10

.

В ряде случаев студенты для решения упражнений использовали не только руководства по линейному и выпуклому программированию, но и новые средства. Отдельное занятие было посвящено решению задачи линейной оптимизации на основе программы Excel. Занятие оказалось совсем нелишним – и среди магистров попадаются те, которые не подозревают о богатых возможностях этой популярной программы.

Литература

I. Основные учебники

1. Гавурин М. К., Малозёмов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1984.

2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

3. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: Гостехиздат, 1956.

4. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000.

5. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

6. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

II. Дополнительная литература

7. Ашманов С. А., Тимохов А. В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

8. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М:. Изд-во МГУ, 1977.

9. Гирсанов И. В. Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: МГУ, 1970.

10. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. М.: Советское радио, 1966.

11. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и её применения. М.: Мир, 1968.

12. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967.

13. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

14. Карлин С. Математические методы в теории игр. программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

15. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

16. Лоран П. Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.

17. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

18. Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007.

19. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

20. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

21. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.
22. Эльсгольц Л.Э. Качественнные методы в математическом анализе. М.: Гостехиздат, 1955.
23. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 5. М.: Наука, 1966.

Специальная литература

24. Бляшке В. Круг и шар. М.: Наука, 1967.
25. Бобылёв Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.
26. Бобылёв Н. А., Климов В. С. Методы нелинейного анализа в задачах негладкой оптимизации. М.: Наука, 1992.
27. Бураго Д. М., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.
28. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
29. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.
30. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
31. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
32. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
33. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
34. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и её приложения. М.: Наука, 1976.
35. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применения в математике и экономике. М.: Наука, 1985.
36. Люстерник Л. А. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом // Труды Матем. ин-та им. Стеклова. 1947. Т. 19.
37. Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Наука, 1988.
38. Похожаев С. И. О методе расслоения решения нелинейных краевых задач // Труды МИАН СССР, 1990. Т. 192. С. 146 – 163.
39. Сакс С. Теория интеграла. М.: ИЛ, 1949.
40. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О. Нелинейный функциональный анализ и его приложения к уравнениям в частных производных. М.: Научный Мир, 2008.
41. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
42. Струве М. Вариационные методы. М.: Изд-во МЦНМО, 2010.
43. Фёдоров В. В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
44. Хадвигер Г. Лекции об об объёме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.

45. Шварц А. С. Род расслоенного пространства // Труды ММО. 1961. № 10. С. 217 – 272.

46. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970.

47. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1974.

48. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

49. Ambrosetti A., Rabinowitz P. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications // J. Func. Anal. Vol. 14, № 4. P. 349-381.

50. Browder F. E. Nonlinear eigenvalue problems and group invariance // Func. Analisis and Relat. Fields, Berlin et al. 1970. P. 1 – 58.

51. Chang K. C. Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. 1981. Vol. 80. P. 102 – 129.

52. Clark D. C. A variant of the Lusternik - Schnirelman theory // Indiana Univ. Math. Journ. 1972. Vol. 22. P. 65 – 74.

53. Coffman C. V. A minimum - maximum principle for a class of nonlinear equations // J. d' Anal. Math. 1969. Vol. 22. P. 391 – 419.

54. Egglston H. Convexity. Cambridge Univ. Press, 1958. 136 p.

55. Fenchel W. On conjugate convex functions // Canad. J. Math. 1949. Vol. 1. № 1, P. 73 – 77.

56. Fenchel W. Convex cones, sets and functions. Princeton, 1953. 241 p.

57. John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // Studies and Essaus. Courant Anniversary Volume. N.Y. : Interscience, 1948. P. 187 – 204.

58. Minkowski H. Geometrie der Zahlen. Leipzig. 1910. 256 S.

59. Pale R. Lusternik-Schnirelman theory in Banach manifolds // Topology. 1966. Vol. 5. P. 115 – 132.

60. Rabinowitz P. Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems // Indiana Univ. Math. Journ. 1974. Vol. 23, № 8. P. 729 – 754.

Учебное издание

Климов Владимир Степанович

Дополнительные главы математического анализа

Учебное пособие

Редактор, корректор М. В. Никулина
Компьютерная верстка А. Ю. Ухалова

Подписано в печать 03.12.2013. Формат 60 х 84/8.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 8,0.
Тираж 50 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет.
150044 Ярославль, ул. Советская, 14.