

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов

**Избранные задачи анализа  
и вычислительной геометрии**

**Часть I**

Учебное пособие

Ярославль  
ЯрГУ  
2020

УДК 517+514(075.8)  
ББК В16я73+В192.2я73  
Н40

*Рекомендовано  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2020 года*

**Рецензенты:**

кафедра математического анализа, теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского; Д. О. Бытев, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Ярославского государственного технического университета

**Невский, Михаил Викторович.**

Н40 Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии. Часть I : учебное пособие / М. В. Невский, А. Ю. Ухалов ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2020. – 98 с.

ISBN 978-5-8397-1190-7

В учебном пособии рассматриваются экстремальные задачи, связанные с числовыми характеристиками конечномерных выпуклых тел, в первую очередь симплексов и кубов. Эти характеристики имеют приложения в вопросах вычислительной геометрии и полиномиальной интерполяции функций многих переменных.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Математика и компьютерные науки».

УДК 517+514(075.8)  
ББК В16я73+В192.2я73

ISBN 978-5-8397-1190-7

©ЯрГУ, 2020

# Оглавление

Предисловие	5
<b>1 Числовые характеристики <math>n</math>-мерного симплекса</b>	<b>6</b>
1.1 Основные определения и обозначения	6
1.2 Базисные многочлены Лагранжа	7
1.3 Осевые диаметры симплекса	9
1.4 Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления	13
1.5 Величины $\xi(C; S)$ и $\xi(S)$	15
1.6 Величины $\alpha(C; S)$ и $\alpha(S)$	17
1.7 Следствия	22
1.8 О гомотетическом образе симплекса, поглощающем куб	25
1.9 Примеры и иллюстрации	26
<b>2 Величина <math>\xi_n</math></b>	<b>33</b>
2.1 Неравенство $\xi_n \geq n$ . Числа $\xi_1, \xi_2$ и $\xi_3$	33
2.2 Случай, когда $n + 1$ — число Адамара	35
2.3 Жёсткий симплекс и неравенство $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}, n > 2$	39
2.4 Симплексы максимального объёма в кубе	41
2.5 Эквивалентность $\xi_n \asymp n$ .	42
<b>3 Уточнение верхних оценок <math>\xi_n</math></b>	<b>44</b>
3.1 Уточнение оценки $\xi_4$	44
3.2 Точное значение $\xi_5$	47
3.3 Уточнение оценки $\xi_6$	51
3.4 Точное значение $\xi_7$	52
3.5 Уточнение оценки $\xi_8$	54
3.6 Точное значение $\xi_9$	55
3.7 Уточнение оценки $\xi_{10}$	55
3.8 Уточнение оценок $\xi_n$ при больших $n$	56
<b>4 Симплексы специального вида</b>	<b>61</b>
4.1 Симплексы с коэффициентом поглощения $n$	61
4.2 Совершенные симплексы	67

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

4.3	Равноотсекающие симплексы . . . . .	73
4.4	Константы $\varkappa_n$ . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Задачи о симплексе и шаре</b>	<b>84</b>
5.1	Величина $\alpha(B_n; S)$ . . . . .	84
5.2	Величина $\xi(B_n; S)$ . . . . .	89
5.3	Равенство $\beta_n = n$ . Комментарии . . . . .	90
	<b>Задания для самостоятельной работы</b>	<b>93</b>
	<b>Литература</b>	<b>94</b>

# Предисловие

В учебном пособии, предлагаемом вниманию читателя, рассматриваются вопросы, имеющие отношение к экстремальным задачам комбинаторной и вычислительной геометрии и вычислительной математике вообще. Мы исследуем некоторые числовые характеристики конечномерных выпуклых тел, в первую очередь симплексов и кубов. Изучение этих числовых характеристик (осевых диаметров, минимальных положительных коэффициентов гомотетии при поглощении одного выпуклого тела другим и др.) в работах М. В. Невского было связано с оптимальным выбором узлов при полиномиальной интерполяции функций многих переменных. Тем самым геометрические задачи оказались тесно связанными с математическим анализом, функциональным анализом и теорией приближения. В круге этих вопросов, подробно отражённых в монографии первого автора, применяются также методы линейной алгебры и дискретной математики, а в последние годы, прежде всего благодаря работе второго автора, — и компьютерные методы.

Как мы предполагаем, учебное пособие с единым названием "Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии" будет состоять из нескольких (как минимум, двух) связанных между собой частей. В первой части вопросы, связанные с полиномиальной интерполяцией, почти не рассматриваются — для удобства читателей их предполагается изложить во второй части.

Текст настоящей книги написан по материалам статей и монографии М. В. Невского, сравнительно недавних совместных статей М. В. Невского и А. Ю. Ухалова, а также работ учеников А. Ю. Ухалова. Многие результаты ранее публиковались только в статьях, в том числе и малодоступных. Для того чтобы заинтересованные читатели могли подробнее ознакомиться с изучаемыми вопросами и их историей, мы даём ссылки в тексте и обширный список литературы.

Авторы выражают надежду, что читателей заинтересуют как решённые, так и открытые вопросы, обсуждаемые в этой книге.

*М. В. Невский, А. Ю. Ухалов  
Ярославль, 2020 г.*

# Глава 1

## Числовые характеристики $n$ -мерного симплекса

### 1.1 Основные определения и обозначения

Всюду далее  $n \in \mathbb{N}$ . Элемент  $x \in \mathbb{R}^n$  будем записывать в виде  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Под  $\|x\|$  будем понимать евклидову норму  $x$ :

$$\|x\| := \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Положим  $Q_n := [0, 1]^n$ ,  $Q'_n := [-1, 1]^n$ . Через  $e_1, \dots, e_n$  обозначается канонический базис  $\mathbb{R}^n$ ; считаем  $e := (1, \dots, 1)$ .

Пусть  $C$  — *выпуклое тело* в  $\mathbb{R}^n$ , т. е. компактное выпуклое подмножество  $\mathbb{R}^n$  с непустой внутренностью. Через  $\sigma C$  обозначим результат гомотетии  $C$  относительно центра тяжести с коэффициентом  $\sigma$ . Символом  $\text{vol}(C)$  будем обозначать объём  $C$ . Если  $C$  — выпуклый многогранник, то  $\text{ver}(C)$  есть совокупность вершин  $C$ . Под *транслятом* понимается результат параллельного переноса. Таким образом, транслят  $C'$  выпуклого тела  $C$  имеет вид  $C' = C + u$ , где  $u \in \mathbb{R}^n$ . Если  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , то  $[x, y]$  есть отрезок с концами  $x, y$ , а  $(xy)$  — прямая, проходящая через эти точки.

Будем говорить, что  $n$ -мерный симплекс  $S$  описан вокруг выпуклого тела  $C$ , если  $C \subset S$  и каждая  $(n - 1)$ -мерная грань  $S$  содержит точку  $C$ . Примем по определению, что выпуклый многогранник вписан в  $C$ , если любая его вершина принадлежит границе  $C$ .

Определим  $d_i(C)$  как максимальную длину отрезка, содержащегося в выпуклом теле  $C$  и параллельного оси  $x_i$ . Величину  $d_i(C)$  будем называть  *$i$ -м осевым диаметром*  $C$ . Понятие осевого, или аксиального, диаметра (axial diameter) было введено Скоттом [37], [38].

Для выпуклых тел  $C_1, C_2$  через  $\xi(C_1; C_2)$  обозначим минимальное  $\sigma \geq 1$ , такое что  $C_1 \subset \sigma C_2$ . Равенство  $\xi(C_1; C_2) = 1$  эквивалентно включению  $C_1 \subset C_2$ . Величину  $\xi(C_1, C_2)$  мы называем *коэффициентом поглощения выпуклого тела  $C_1$  выпуклым телом  $C_2$* . По определению,  $\alpha(C_1, C_2)$  есть минимальное  $\sigma > 0$ , для которого выпуклое тело  $C_1$  является подмножеством некоторого транслята выпуклого тела  $\sigma C_2$ . Очевидно, всегда  $\alpha(C_1, C_2) \leq \xi(C_1, C_2)$ . Положим  $\xi(C) := \xi(Q_n; C)$ ,  $\alpha(C) := \alpha(Q_n; C)$ .

Если  $k \in \mathbb{Z}_+$ , то  $\Pi_k(\mathbb{R}^n)$  есть пространство многочленов от  $n$  переменных степени  $\leq k$ . Таким образом, под  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  понимается линейная оболочка мономов  $1, x_1, \dots, x_n$ , иначе говоря, совокупность линейных функций на  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $L$  и  $M$  — функции натурального аргумента  $n$ . Запись  $L \asymp M$  означает, что существуют константы  $c_1, c_2 > 0$ , не зависящие от  $n$ , с которыми выполняются неравенства  $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$ .

## 1.2 Базисные многочлены Лагранжа

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ . Обозначим вершины  $S$  через  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ . Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Если  $\Delta := \det(\mathbf{A})$ , то  $\text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$ . Обозначим через  $\Delta_j(x)$  определитель, который получается из  $\Delta$  заменой  $j$ -й строки на строку  $(x_1, \dots, x_n, 1)$ . Многочлены  $\lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$  из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  обладают свойством  $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$  (здесь  $\delta_j^k$  — символ Кронекера). Коэффициенты  $\lambda_j$  составляют  $j$ -й столбец  $\mathbf{A}^{-1}$ . В дальнейшем полагаем  $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$ , т. е.

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \quad (1.1)$$

В силу свойства  $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$  любой многочлен  $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)}) \lambda_j(x), \quad (1.2)$$

представляющему собой аналог классической интерполяционной формулы Лагранжа. Поэтому в дальнейшем мы называем  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу  $S$* . Применяя (1.2) последовательно к  $p(x) = 1, x_1, \dots, x_n$ , получим для  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)} = x. \quad (1.3)$$

Те же равенства могут быть получены из формул Крамера, согласно которым

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n+1)} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \\ \lambda_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

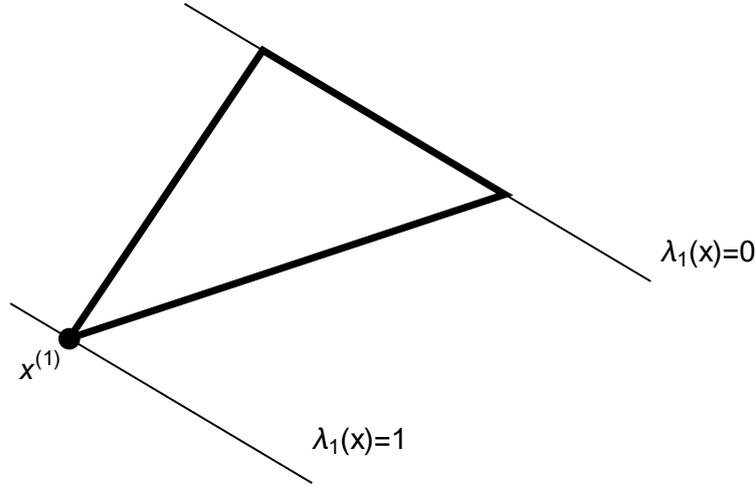


Рис. 1.1. Свойства базисных многочленов Лагранжа (случай  $n = 2$ )

Равенства (1.3) означают, что числа  $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$  являются *барицентрическими координатами*  $x$  относительно симплекса  $S$  (см. [1, гл. 12]). Хотя бы одно из этих чисел положительно. Уравнения  $\lambda_j(x) = 0$  задают  $(n - 1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани  $S$ , а для внутренних точек симплекса выполняются строгие неравенства  $0 < \lambda_j(x) < 1$ . Имеет место представление

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, n + 1\}. \quad (1.4)$$

Пусть  $x$  — точка границы  $S$ . Минимальная размерность грани  $S$ , которой принадлежит  $x$ , равна  $n - k$  тогда и только тогда, когда среди  $\lambda_j(x)$  имеется ровно  $k$  чисел, равных нулю ( $1 \leq k \leq n$ ).

Для строчных сумм матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  из (1.3) получаются равенства

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{n+1,j} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij} = \sum_{j=1}^{n+1} [\lambda_j(e_i) - \lambda_j(0)] = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(e_i) - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} l_{ij} = 0. \quad (1.5)$$

Столбцовые суммы  $\mathbf{A}^{-1}$ , в отличие от строчных, зависят от  $S$  :

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_{ij} = \lambda_j(e), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Заметим также, что из невырожденности  $\mathbf{A}^{-1}$  следует  $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \neq 0$  при любом  $i = 1, \dots, n+1$ . Как мы отметим ниже, интересный геометрический смысл имеет каждая из величин  $2 \left( \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \right)^{-1}$  (здесь  $1 \leq i \leq n$ ) и  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|$ .

### 1.3 Осевые диаметры симплекса

Для любого  $i = 1, \dots, n$  выпуклое тело  $C$  может быть представлено как объединение отрезков, параллельных  $i$ -й координатной оси. Перенесём каждый такой отрезок вдоль содержащей его прямой таким образом, чтобы конец полученного отрезка принадлежал гиперплоскости  $x_i = 0$ , а сам он располагался в полупространстве  $x_i \geq 0$ . Обозначим через  $R_i(C)$  объединение всех перенесённых отрезков. Множество  $R_i(C)$  есть результат применения к  $C$  операции  $R_i$ , введённой Радзишевски [36]. Операция  $R_i$  переводит  $C$  в выпуклое тело  $R_i(C)$ , причём  $\text{vol}(R_i(C)) = \text{vol}(C)$ .

Операция  $R_i$  определяется по аналогии с классической *симметризацией Штейнера* (см. [2, § 15]) относительно гиперплоскости  $x_i = 0$ . Результат последней операции, применённой к  $C$ , также есть объединение отрезков, полученных переносом отрезков  $C$ , параллельных оси  $x_i$ . Но при симметризации Штейнера рассматриваемой гиперплоскости принадлежит середина каждого перенесённого отрезка.

Пусть  $S$  — невырожденный  $n$ -мерный симплекс. Для  $n \geq 2$  обозначим через  $V_i(S)$  проекцию симплекса  $S$  на гиперплоскость  $x_i = 0$ . Очевидно,  $V_i(S)$  есть выпуклая оболочка проекций вершин  $S$  на эту гиперплоскость. Пусть  $\Sigma_i(S)$  есть  $(n-1)$ -мера  $V_i(S)$ ,  $\sigma_{ij}$  есть  $(n-1)$ -мера проекции  $(n-1)$ -мерной грани  $S$ , противоположной вершине  $x^{(j)}$ , на гиперплоскость  $x_i = 0$ . Тогда

$$\Sigma_i(S) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}. \quad (1.6)$$

Приведём следующую теорему из [10].

**Теорема 1.1.** Пусть  $1 \leq i \leq n$ . Для  $i$ -го осевого диаметра  $S$  верно равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1.7)$$

В  $S$  существует ровно один отрезок длины  $d_i(S)$ , параллельный оси  $x_i$ . Центр этого отрезка совпадает с точкой

$$y^{(i)} := \sum_{j=1}^{n+1} m_{ij} x^{(j)}, \quad (1.8)$$

где

$$m_{ij} := \frac{|l_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}. \quad (1.9)$$

Каждая  $(n-1)$ -мерная грань  $S$  содержит по крайней мере один из концов указанного отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней  $S$ , содержащих концы отрезка, не превосходит  $n-1$ .

*Доказательство.* Пусть сначала  $n=1$ . Тогда  $S = [x^{(1)}, x^{(2)}]$ ,  $i=1$ ,

$$\lambda_1(x) = \frac{x^{(2)} - x}{x^{(2)} - x^{(1)}}, \quad \lambda_2(x) = \frac{x - x^{(1)}}{x^{(2)} - x^{(1)}}, \quad d_1(S) = x^{(2)} - x^{(1)}.$$

Как нетрудно видеть, обе части (1.7) совпадают. Так как  $m_{11} = m_{12} = \frac{1}{2}$ , то (1.8) имеет вид  $y^{(1)} = \frac{x^{(1)} + x^{(2)}}{2}$ .

Пусть теперь  $n \geq 2$ . Положим

$$\delta_i(S) := \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{\Sigma_i(S)}.$$

Напомним, что  $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \neq 0$ . Установим последовательно равенства

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|, \quad \delta_i(S) = d_i(S). \quad (1.10)$$

Из них и будет следовать (1.7). Учитывая (1.6), имеем:

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{\Sigma_i(S)}{n \cdot \text{vol}(S)} = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \Sigma_i(S) = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_{ij}.$$

Из связи определителей и объёмов следует, что

$$\sigma_{11} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \text{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{vmatrix} =$$

### 1.3. ОСЕВЫЕ ДИАМЕТРЫ СИМПЛЕКСА

---

$$= \frac{1}{(n-1)!} \cdot |\Delta_1(e_1) - \Delta_1(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |\lambda_1(e_1) - \lambda_1(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |l_{11}|.$$

Аналогично при данном  $i$  и  $j = 1, \dots, n+1$

$$\sigma_{ij} = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |\lambda_j(e_i) - \lambda_j(0)| = \frac{|\Delta|}{(n-1)!} \cdot |l_{ij}|.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\delta_i(S)} = \frac{(n-1)!}{|\Delta|} \cdot \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|\Delta|}{(n-1)!} |l_{ij}| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|.$$

Левое равенство из (1.10) доказано, перейдём к правому.

Основание выпуклого тела  $R_i(S)$ , лежащее в гиперплоскости с уравнением  $x_i = 0$ , есть  $V_i(S)$ . Рассмотрим отрезок длины  $d_i(S)$ , принадлежащий  $R_i(S)$ . Пусть  $z$  есть его конец, не лежащий в гиперплоскости  $x_i = 0$ . Положим  $V_{i,z}(S) := \text{conv}(V_i(S), z)$ . В силу выпуклости  $R_i(S)$  выполняется  $V_{i,z}(S) \subset R_i(S)$ . Поэтому

$$\text{vol}(V_{i,z}(S)) = \frac{\Sigma_i(S)d_i(S)}{n} \leq \text{vol}(R_i(S)) = \text{vol}(S),$$

откуда

$$d_i(S) \leq \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{\Sigma_i(S)} = \delta_i(S).$$

Покажем, что  $S$  содержит отрезок, параллельный оси  $x_i$ , длина которого равна

$$\delta_i(S) = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}.$$

Пусть  $y^{(i)}$  есть точка  $S$  с барицентрическими координатами  $m_{ij}$ , заданными равенствами (1.9). Рассмотрим отрезок  $\left[ y_-^{(i)}, y_+^{(i)} \right]$ , где

$$y_-^{(i)} := y^{(i)} - \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} e_i, \quad y_+^{(i)} := y^{(i)} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} e_i.$$

Этот отрезок параллелен  $i$ -й оси и имеет длину  $\delta_i(S)$ , а его середина совпадает с  $y^{(i)}$ . Так как  $\lambda_j(y_-^{(i)}) = m_{ij}$ , то при  $j = 1, \dots, n+1$

$$\lambda_j(y_-^{(i)}) = \lambda_j(y^{(i)}) - \frac{l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} = \frac{|l_{ij}| - l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} \geq 0,$$

$$\lambda_j \left( y_+^{(i)} \right) = \lambda_j \left( y^{(i)} \right) + \frac{l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} = \frac{|l_{ij}| + l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|} \geq 0.$$

В силу представления (1.4) и выпуклости  $S$  отрезок  $\left[ y_-^{(i)}, y_+^{(i)} \right]$  целиком принадлежит симплексу. Это даёт оценку  $d_i(S) \geq \delta_i(S)$ . Выше было доказано, что верно и противоположное неравенство. Поэтому  $d_i(S) = \delta_i(S)$ . Равенство (1.8) следует из определения барицентрических координат.

При фиксированном  $j$  хотя бы одно из чисел  $\lambda_j \left( y_-^{(i)} \right)$  и  $\lambda_j \left( y_+^{(i)} \right)$  равно 0. Это означает, что соответствующий конец отрезка принадлежит  $(n-1)$ -мерной грани  $S$ , противоположной  $x^{(j)}$ . Если  $l_{ij} \neq 0$ , то эта грань содержит ровно один из концов отрезка. В случае когда  $l_{ij} = 0$ , отрезок целиком принадлежит указанной грани.

Пусть  $k_-^{(i)}$  и  $k_+^{(i)}$  равняются количеству 0 среди чисел  $\lambda_j \left( y_-^{(i)} \right)$  и  $\lambda_j \left( y_+^{(i)} \right)$  соответственно,  $j = 1, \dots, n+1$ . Тогда размерности двух минимальных по включению граней  $S$ , содержащих  $y_-^{(i)}$  и  $y_+^{(i)}$ , равняются соответственно  $n - k_-^{(i)}$  и  $n - k_+^{(i)}$ . Из предыдущего следует, что  $k_-^{(i)} + k_+^{(i)} \geq n+1$ . Поэтому сумма размерностей этих граней не превосходит  $n-1$ .

Осталось доказать единственность отрезка длины  $d_i(S)$ , параллельного оси  $x_i$  и принадлежащего  $S$ . Из равенства  $d_i(S) = \delta_i(S)$  следует, что

$$\text{vol}(S) = \frac{\sum_i(S) d_i(S)}{n}. \quad (1.11)$$

Так как  $V_{i,z}(S) \subset R_i(S)$ , то

$$\frac{\sum_i(S) d_i(S)}{n} = \text{vol}(V_{i,z}(S)) \leq \text{vol}(R_i(S)) = \text{vol}(S).$$

Левая и правая величины в этой цепочке совпадают. Поэтому для любого отрезка максимальной длины с концом  $z$ , не принадлежащим гиперплоскости  $x_i = 0$ , выполняется

$$R_i(S) = V_{i,z}(S). \quad (1.12)$$

Остаётся заметить, что если существуют два различных отрезка указанного вида, то каждое из равенств (1.11)–(1.12) нарушается. Это противоречие завершает доказательство теоремы.  $\square$

Дополнительно приведём явные формулы для концов  $y_-^{(i)}$  и  $y_+^{(i)}$  единственного в симплексе отрезка длины  $d_i(S)$ , параллельного оси  $x_i$ :

$$y_-^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} s_{ij} x^{(j)}, \quad y_+^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij} x^{(j)}; \quad (1.13)$$

$$s_{ij} := \frac{|l_{ij}| - l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}, \quad t_{ij} := \frac{|l_{ij}| + l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}. \quad (1.14)$$

## 1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО В СИМПЛЕКСЕ ОТРЕЗКА

---

Из равенств (1.11)–(1.12) следует, что для любого  $S$  все вершины выпуклого многогранника  $R_i(S)$  принадлежат параллельным гиперплоскостям  $x_i = 0$  и  $x_i = d_i(S)$ , причём последняя содержит ровно одну вершину. Аналогично результат применения к  $S$  симметризации Штейнера относительно гиперплоскости  $x_i = 0$  есть выпуклый многогранник, все вершины которого принадлежат гиперплоскостям  $x_i = 0$ ,  $x_i = \frac{d_i(S)}{2}$ ,  $x_i = -\frac{d_i(S)}{2}$  (причём каждая из двух последних гиперплоскостей содержит ровно по одной вершине). Последнее свойство  $S$  ранее установили Мартини и Вейсбах. Более того, Мартини [32] доказал, что указанное строение симметризаций Штейнера выпуклого тела в  $\mathbb{R}^n$  характеризует симплекс.

Из (1.7) и равенства  $\sum_{j=1}^{n+1} l_{ij} = 0$  вытекает, что *величина  $\frac{1}{d_i(S)}$  равна сумме положительных элементов  $i$ -й строки  $\mathbf{A}^{-1}$  и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этой строки.*

Если  $S \subset Q_n$ , то  $d_i(S) \leq 1$ . Для такого симплекса  $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2$ .

Для любого ненулевого  $n$ -мерного вектора  $v$  симплекс  $S$  содержит единственный отрезок максимальной длины, параллельный  $v$ . Каждой  $(n-1)$ -мерной грани  $S$  принадлежит хотя бы один из концов этого отрезка. Сумма размерностей двух минимальных по включению граней  $S$ , содержащих концы отрезка, не превосходит  $n-1$ . Объём  $S$  ровно в  $n$  раз меньше произведения длины указанного отрезка и  $(n-1)$ -меры проекции  $S$  на  $(n-1)$ -мерную гиперплоскость, ортогональную  $v$ . Для доказательства достаточно ввести в  $\mathbb{R}^n$  новую прямоугольную систему координат так, чтобы первая координатная ось была параллельна  $v$ , и затем применить теорему 1.1 для  $i=1$ .

В следующем пункте мы укажем явные формулы для вычисления максимального в симплексе отрезка любого направления.

### 1.4 Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$  и  $v$  — ненулевой  $n$ -мерный вектор. Обозначим через  $d^v(S)$  максимальную длину отрезка, принадлежащего  $S$  и параллельного  $v$ . Ниже приводятся формулы для вычисления величины  $d^v(S)$  и концов максимального отрезка по координатам  $v$  и вершин  $S$ . В случае когда  $v$  коллинеарен  $i$ -й координатной оси,  $d^v(S)$  совпадает с  $d_i(S)$ , т. е. с  $i$ -м осевым диаметром  $S$ . Для этого частного случая нужные формулы были получены в предыдущем пункте.

Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — координаты вектора  $v$ . Вычислим

$$m_j := \sum_{k=1}^n l_{kj} v_k, \quad \alpha_j := \frac{|m_j| - m_j}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|}, \quad \beta_j := \frac{|m_j| + m_j}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|}. \quad (1.15)$$

В [16] показано, что

$$d^v(S) = \frac{2\|v\|}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|}. \quad (1.16)$$

Концы единственного отрезка максимальной длины, принадлежащего  $S$  и параллельного  $v$ , суть точки

$$a = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x^{(j)}, \quad b = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)}, \quad (1.17)$$

где  $x^{(j)}$  — вершины  $S$ . Середина максимального отрезка совпадает с точкой

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|m_j|}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|} x^{(j)}. \quad (1.18)$$

Если  $v = e_i$ , то, как нетрудно видеть,  $m_j = l_{ij}$ , а числа  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  совпадают соответственно с числами  $s_{ij}$  и  $t_{ij}$  из (1.14). В этом частном случае  $a = y_-^{(i)}$ ,  $b = y_+^{(i)}$ , (1.16) эквивалентно (1.7), а (1.18) совпадает с (1.8). Поэтому приведённые равенства обобщают формулы теоремы 1.1 на случай произвольного  $v$ .

Интересно, что в  $S$  существует единственный отрезок, параллельный вектору  $v$  и расположенный таким образом, что каждая  $(n-1)$ -мерная грань  $S$  содержит хотя бы один из его концов. Именно этот отрезок и является единственным отрезком из  $S$  максимальной длины, параллельным  $v$ . Эта ключевая характеристика максимального отрезка получена в [16].

Как следствие, отметим такое утверждение. Пусть  $\Sigma(S; v)$  есть  $(n-1)$ -мерная мера проекции симплекса  $S$  на гиперплоскость, ортогональную вектору  $v$ . Имеют место равенства

$$\Sigma(S; v) = \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{d^v(S)} = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{2(n-1)!\|v\|} \sum_{j=1}^{n+1} |m_j|. \quad (1.19)$$

Для частного случая, когда  $v$  коллинеарен координатной оси, этот результат был получен в предыдущем пункте.

## 1.5 Величины $\xi(C; S)$ и $\xi(S)$

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $C$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ . Приведём ряд утверждений о вычислении величины  $\xi(C; S) := \min\{\sigma \geq 1 : C \subset \sigma S\}$ . Поскольку  $\xi(C; S) = 1$  тогда и только тогда, когда  $C \subset S$ , рассмотрим случай, когда  $C$  не является подмножеством  $S$ . Следующие три утверждения взяты из монографии [13].

**Лемма 1.1.** Пусть  $C \not\subset S$  и  $1 \leq j \leq n$ . Предположим, что  $j$ -я  $(n-1)$ -мерная грань симплекса  $\xi(C; S)S$  (параллельная грани  $S$  с уравнением  $\lambda_j(x) = 0$ ) содержит точку  $C$ . Тогда

$$\xi(C; S) = (n+1) \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (1.20)$$

*Доказательство.* Так как  $j$ -я грань симплекса  $S$  удовлетворяет уравнению  $\lambda_j(x) = 0$  и  $\xi(C; S) > 1$ , то  $j$ -я грань симплекса  $\xi(C; S)S$  удовлетворяет уравнению  $-\lambda_j(x) = \mu$  с некоторым  $\mu > 0$ . Обозначим через  $z$  точку  $C$ , принадлежащую  $j$ -й грани  $\xi(C; S)S$ . Пусть  $c$  — центр тяжести  $S$ ,  $b$  — общая точка отрезка  $[c, z]$  и границы  $S$ . Определение  $\xi(C; S)$  даёт

$$\xi(C; S) = \frac{\|z - c\|}{\|b - c\|}. \quad (1.21)$$

Точки  $c, b, z$  лежат на одной прямой. Поэтому (1.21) эквивалентно равенству

$$\xi(C; S) = \frac{\lambda_j(z) - \lambda_j(c)}{\lambda_j(b) - \lambda_j(c)}. \quad (1.22)$$

Действительно, обозначим  $\xi := \xi(C; S)$ . Из (1.21) имеем

$$z = \frac{\|z - c\|}{\|b - c\|} (b - c) + c = \xi(b - c) + c.$$

Поскольку  $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ , правая часть (1.22) равна

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_j(z) - \lambda_j(c)}{\lambda_j(b) - \lambda_j(c)} &= \frac{\lambda_j(\xi(b - c) + c) - \lambda_j(c)}{\lambda_j(b) - \lambda_j(c)} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n l_{ij}(\xi(b_i - c_i) + c_i) + l_{n+1,j} - \sum_{i=1}^n l_{ij}c_i - l_{n+1,j}}{\sum_{i=1}^n l_{ij}(b_i - c_i)} = \frac{\xi \sum_{i=1}^n l_{ij}(b_i - c_i)}{\sum_{i=1}^n l_{ij}(b_i - c_i)} = \xi. \end{aligned}$$

Тем самым выполняется равенство (1.22).

Остается привести (1.22) к нужному виду (1.20). Бариецентрические координаты центра тяжести симплекса одинаковы и равны  $\frac{1}{n+1}$ . Поэтому  $\lambda_j(c) = \frac{1}{n+1}$ .

Кроме того,  $\lambda_j(b) = 0$ . Поскольку  $C \subset \xi(C; S)S$ , для  $x \in C$  выполняется  $-\lambda_j(z) = \mu \geq -\lambda_j(x)$ . Следовательно,  $-\lambda_j(z) = \max_{x \in C}(-\lambda_j(x))$ . Поэтому из (1.22) следует

$$\xi(C; S) = \frac{\lambda_j(z) - \lambda_j(c)}{\lambda_j(b) - \lambda_j(c)} = \frac{\lambda_j(z) - \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n+1}} = (n+1) \max_{x \in C}(-\lambda_j(x)) + 1.$$

□

**Лемма 1.2.** Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $C$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что  $C \not\subset S$ . Если симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $C$ , то

$$\max_{x \in C}(-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in C}(-\lambda_{n+1}(x)). \quad (1.23)$$

*Доказательство.* По условию, каждая  $(n-1)$ -мерная грань симплекса  $\xi(C; S)S$  содержит точку выпуклого тела  $C$ . Из леммы 1.1 получается, что (1.20) выполняется при любом  $j = 1, \dots, n+1$ . Следовательно,  $\max_{x \in C}(-\lambda_j(x))$  не зависит от  $j$ , т. е. имеет место (1.23). □

**Теорема 1.2.** Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $C$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что  $C \not\subset S$ . Тогда

$$\xi(C; S) = (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in C}(-\lambda_k(x)) + 1. \quad (1.24)$$

Равенство (1.23) эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(S)S$  описан вокруг  $C$ .

*Доказательство.* Очевидно, найдётся номер  $j$ , удовлетворяющий условию леммы 1.1. Из (1.20) следует, что  $\xi(C; S)$  не превосходит правой части (1.24). Покажем, что это нестрогое неравенство фактически является равенством.

Пусть внешний максимум в правой части (1.24) достигается на  $k = k^*$ . В силу леммы 1.1 для доказательства (1.24) достаточно установить, что  $k^*$ -я грань симплекса  $\xi(C; S)S$  содержит точку из  $C$ . Предположим противное. Обозначим через  $z$  точку  $C$ , на которой достигается  $\max_{x \in C}(-\lambda_{k^*}(x))$ . Если  $\lambda_{k^*}(z) \geq 0$ , то правая часть (1.24) не превосходит 1; это противоречит условию  $C \not\subset S$ . Поэтому  $\lambda_{k^*}(z) < 0$ . В этом случае  $z$  лежит между гиперплоскостью, задающей  $k^*$ -ю грань симплекса  $\xi(C; S)S$ , и гиперплоскостью  $\lambda_{k^*}(x) = 0$ . Пусть  $c$  — центр тяжести  $S$ ,  $b$  — точка пересечения прямой  $(cz)$  с гиперплоскостью  $\lambda_{k^*}(x) = 0$ . Имеем  $\lambda_{k^*}(c) = \frac{1}{n+1}$ ,  $\lambda_{k^*}(b) = 0$ . Рассуждения по схеме доказательства леммы 1.1 и соображения подобия приводят к тому, что

$$\xi(C; S) > \frac{\lambda_{k^*}(z) - \lambda_{k^*}(c)}{\lambda_{k^*}(b) - \lambda_{k^*}(c)} = \frac{\lambda_{k^*}(z) - \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n+1}}.$$

Это даёт

$$\xi(C; S) > (n+1)(-\lambda_{k^*}(z)) + 1 = (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in C}(-\lambda_k(x)) + 1.$$

Мы получили, что левая часть (1.24) превосходит правую часть. Это противоречие доказывает первую часть теоремы.

Перейдём к доказательству второй части. Пусть выполняется условие (1.23). Тогда каждая  $(n - 1)$ -мерная грань симплекса  $\xi(C; S)S$  содержит точку из  $C$ . Действительно, если для некоторой грани это не так, то, рассуждая, как и выше, мы установим невозможность уже доказанного равенства (1.24). С учётом леммы 1.2 условие (1.23) эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(C; S)S$  описан вокруг выпуклого тела  $C$ . Теорема доказана.  $\square$

Отдельно остановимся на случае  $C = Q_n$ . Многочлен из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  принимает минимальное и максимальное значения на кубе  $Q_n = [0, 1]^n$  в вершинах куба. В связи с этим величина  $\max_C(-\lambda_j)$  при  $C = Q_n$  может быть заменена на равную величину  $\max_{\text{ver}(Q_n)}(-\lambda_j)$ . Равенство (1.24) принимает вид

$$\xi(S) = (n + 1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1, \quad (1.25)$$

а условие (1.23) сводится к соотношению

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (1.26)$$

## 1.6 Величины $\alpha(C; S)$ и $\alpha(S)$

На совокупности выпуклых тел в  $\mathbb{R}^n$  можно ввести некоторые метрики, определяемые в терминах гомотетии с коэффициентом  $\sigma \in \mathbb{R}$  и параллельного переноса (см. обзор в [3]). В этом пункте мы обратимся к величине  $\alpha(C_1; C_2)$ , которая также использует гомотетию и параллельный перенос. Однако в нашем случае коэффициент гомотетии предполагается положительным.

По определению, если  $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$  — два выпуклых тела,  $\alpha(C_1; C_2)$  равно минимальному  $\sigma > 0$ , для которого  $C_1$  принадлежит трансляту выпуклого тела  $\sigma C_2$ . Считаем  $\alpha(C) := \alpha(Q_n; C)$ .

Как мы докажем ниже, для выпуклого тела  $C$  и симплекса  $S$  справедливо

$$\alpha(C; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (1.27)$$

Здесь  $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  — базисные многочлены Лагранжа симплекса  $S$ . В случае  $C = Q_n$  равенство (1.27) приводится к виду

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (1.28)$$

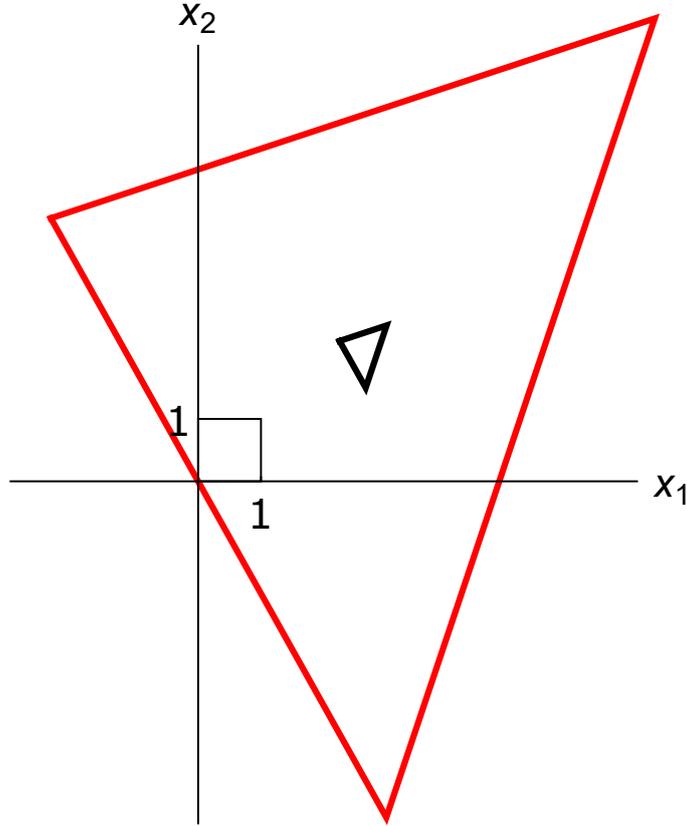


Рис. 1.2. Симплексы  $S$  и  $\xi(S)S$

Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $C$  — выпуклое тело в  $\mathbb{R}^n$ . Введём в рассмотрение величину

$$\psi(C; S) := \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + 1.$$

Следующие две леммы доказаны в [14].

**Лемма 1.3.** Для  $\sigma > 0$  и  $t \in \mathbb{R}^n$  выполняется  $\psi(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma} \psi(C; S)$ .

*Доказательство.* Пусть  $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$  — вершины симплекса  $S$ ,  $y^{(1)}, \dots, y^{(n+1)}$  — вершины симплекса  $\sigma S + t$ . Очевидно,  $y^{(k)} = \sigma(x^{(k)} - c) + c + t = \sigma x^{(k)} - t'$ . Здесь  $c$  — центр тяжести  $S$ ,  $t' = -(1 - \sigma)c - t$ . Определим многочлены  $\Lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$  с помощью равенств

$$\Lambda_j(x) := \lambda_j\left(\frac{x + t'}{\sigma}\right), \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Тогда  $\Lambda_j(y^{(k)}) = \lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$ . Поэтому  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n+1}$  суть базисные многочлены Лагранжа симплекса  $\sigma S + t$ . Так как  $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ , то

$$\lambda_j(x + s) = \lambda_j(x) + \lambda_j(s) - \lambda_j(0), \quad \lambda_j(\tau x) - \lambda_j(0) = \tau [\lambda_j(x) - \lambda_j(0)].$$

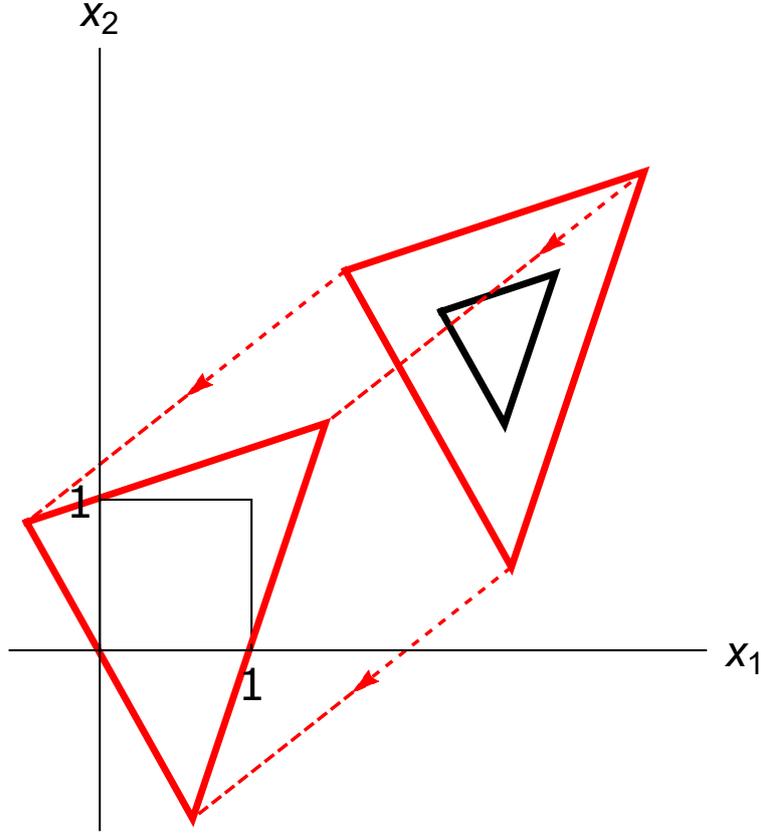


Рис. 1.3. Симплексы  $S$ ,  $\alpha(S)S$  и транслят симплекса  $\alpha(S)S$ , содержащий куб

С учетом этого

$$\begin{aligned}\Lambda_j(x) &= \lambda_j\left(\frac{x+t'}{\sigma}\right) = \lambda_j\left(\frac{x}{\sigma}\right) + \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) - \lambda_j(0) = \\ &= \frac{1}{\sigma}\lambda_j(x) + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)\lambda_j(0) + \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) - \lambda_j(0) = \frac{1}{\sigma}\lambda_j(x) + \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma}\lambda_j(0).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\psi(C; \sigma S + t) &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\Lambda_j(x)) + 1 = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} \left[ -\frac{1}{\sigma}\lambda_j(x) - \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\lambda_j(0) \right] + 1 = \\ &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{t'}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) + 1 = \\ &= \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j(x)) + \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \psi(C; S).\end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что в соответствии с (1.3)

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left( \frac{t'}{\sigma} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1.$$

□

**Лемма 1.4.** Пусть  $p(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_{n+1}$ . Тогда

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-p(x)) + p\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a_i|. \quad (1.29)$$

*Доказательство.* Если  $x_i = 0$  или  $x_i = 1$ , то  $|\frac{1}{2} - x_i| = \frac{1}{2}$ . Поэтому для  $x \in \text{ver}(Q_n)$

$$p\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) - p(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{1}{2} - x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \left|\frac{1}{2} - x_i\right| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Определим  $x^* \in \text{ver}(Q_n)$  с помощью равенств:  $x_i^* = 0$ , если  $a_i \geq 0$ , и  $x_i^* = 1$ , если  $a_i < 0$ . Для  $x = x^*$  неравенство, содержащееся в предыдущей цепочке, обращается в равенство. Это означает, что имеет место (1.29). □

**Теорема 1.3.** Пусть  $C$  — выпуклое тело,  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\alpha(C; S) = \psi(C; S). \quad (1.30)$$

В случае  $C = Q_n$  имеем

$$\alpha(S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (1.31)$$

*Доказательство.* Из определения  $\alpha(C; S)$  и  $\xi(C; S)$  следует, что существуют  $\sigma > 0$  и  $t \in \mathbb{R}^n$ , для которых симплекс  $S_1 := \sigma S + t$  не содержит  $C$  и выполняется  $\alpha(C; S_1) = \xi(C; S_1)$ . Заметим, что тогда каждая  $(n-1)$ -мерная грань симплекса  $\xi(C; S_1)S_1$  содержит точку из  $C$ . (Предположим, что это не так. Тогда найдётся число  $\tau \in (0, 1)$  такое, что  $C$  принадлежит трансляту симплекса  $(\tau\xi(C; S_1))S_1$ . В этом случае будет иметь место  $\alpha(C; S_1) \leq \tau\xi(C; S_1)$ . Последнее неравенство противоречит равенству  $\alpha(C; S_1) = \xi(C; S_1)$ .)

Сначала покажем, что (1.30) выполняется для симплекса  $S_1$ . Пусть  $\lambda_j^*$  — базисные многочлены для этого симплекса. Применяя к  $S_1$  лемму 1.1 (с  $j = 1$ ) и лемму 1.2, получим

$$\alpha(C; S_1) = \xi(C; S_1) = (n+1) \max_{x \in C} (-\lambda_1^*(x)) + 1 =$$

1.6. ВЕЛИЧИНЫ  $\alpha(C; S)$  И  $\alpha(S)$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in C} (-\lambda_j^*(x)) + 1 = \psi(C; S_1).$$

Теперь вернёмся к симплексу  $S$ . Очевидно,  $\alpha(C; S_1) = \alpha(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma} \alpha(C; S)$ . Лемма 1.3 даёт  $\psi(C; S_1) = \psi(C; \sigma S + t) = \frac{1}{\sigma} \psi(C; S)$ . Поскольку  $\alpha(C; S_1) = \psi(C; S_1)$ , имеем  $\alpha(C; S) = \psi(C; S)$ . Итак, (1.30) доказано.

Перейдём к доказательству второй части теоремы. Пусть  $C = Q_n$ . Максимум многочлена из  $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$  на выпуклом многограннике достигается в вершине многогранника. Поэтому

$$\max_{x \in Q_n} (-\lambda_j(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)).$$

Из (1.3) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = 1. \quad (1.32)$$

Применяя, кроме (1.32), еще леммы 1.3 и 1.4, а также формулу (1.7) для осевых диаметров симплекса, получим

$$\begin{aligned} \psi(Q_n; S) &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in Q_n} (-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \left[ -\lambda_j(x) + \lambda_j\left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство  $\alpha(S) := \alpha(Q_n; S) = \psi(Q_n; S)$  эквивалентно соотношению  $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}$ . Поэтому выполняется (1.31). Теорема доказана.  $\square$

В приведённом виде теорема 1.3 доказана М. В. Невским в [14]. Равенство (1.28), связывающее  $\alpha(S)$  с осевыми диаметрами симплекса, доказано двумя способами в [34] (см. также [13, гл. 1]).

Отметим, что при установлении (1.28) для произвольного выпуклого тела  $C \subset \mathbb{R}^n$  было доказано неравенство

$$\alpha(C) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}. \quad (1.33)$$

Если  $C$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ , то, как мы показали, (1.33) является равенством. Обратное утверждение верно лишь в случае  $n = 1$ , когда выпуклое тело  $C$  есть отрезок и  $\alpha(C) = \frac{1}{d_1(C)}$ . Если  $n \geq 2$ , то подходящим  $C$ , отличным

от симплекса, является множество  $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, n \leq \sum x_i \leq 2n$ . В этом примере  $d_1(C) = \dots = d_n(C) = n, \alpha(C) = 1$ , поэтому левая и правая части (1.33) одинаковы и равны 1. Доказательство и обсуждение интересного неравенства (1.33) даются в [12].

## 1.7 Следствия

В этом пункте мы приведём некоторые следствия равенства

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}. \quad (1.34)$$

Эти следствия, имеющие в основном геометрический характер, отмечались в статьях [10], [34], [16], [17] и монографии [13].

**1.7.1.** Пусть  $V$  — невырожденный параллелепипед в  $\mathbb{R}^n$ , ребра которого задаются линейно независимыми векторами  $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ ,  $d^{v^{(i)}}$  — максимальная длина отрезка, принадлежащего симплексу  $S$  и параллельного  $v^{(i)}$ . Тогда

$$\alpha(V; S) = \sum_{i=1}^n \frac{\|v^{(i)}\|}{d^{v^{(i)}}(S)}. \quad (1.35)$$

Действительно, любые два невырожденных параллелепипеда в  $\mathbb{R}^n$  аффинно эквивалентны. Соответствующее аффинное преобразование переводит симплекс в симплекс и сохраняет отношение длин. Следовательно, равенство (1.35) эквивалентно его частному варианту для  $V = Q_n$ , т. е. равенству (1.28).

**1.7.2.** Отметим следующую возможность вычисления  $\alpha(S)$  через коэффициенты  $l_{ij}$  базисных многочленов Лагранжа симплекса  $S$ :

$$\alpha(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1.36)$$

Полезная для вычислений формула (1.36) вытекает из (1.28) и (1.7). Из (1.36) и (1.5) получается, что величина  $\alpha(S)$  равна сумме положительных элементов верхних  $n$  строк матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  и одновременно равна сумме модулей отрицательных элементов этих строк.

Укажем два аналога (1.36) — для куба  $Q'_n = [-1, 1]^n$  и для произвольного параллелепипеда  $V$ .

**1.7.3.** Величина  $\alpha(C; S)$  не меняется при параллельном переносе множеств, и при  $\tau > 0$  верно  $\alpha(\tau C; S) = \tau \alpha(C; S)$ . Поскольку куб  $Q'_n = [-1, 1]^n$  есть транслят куба  $2Q_n$ , то при замене  $Q_n$  на  $Q'_n$  из (1.36) получается формула

$$\alpha(Q'_n; S) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1.37)$$

## 1.7. СЛЕДСТВИЯ

---

**1.7.4.** Если  $V$  — параллелепипед, введённый в п. 1.7.1, то

$$\alpha(V; S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \left| \sum_{k=1}^n l_{kj} v_k^{(i)} \right|. \quad (1.38)$$

Равенство (1.38) может быть получено из равенства (1.35), если преобразовать величины  $d^{v^{(i)}}(S)$  с помощью соотношения (1.16) для  $v = v^{(i)}$ .

**1.7.5.** Если  $Q_n \not\subset S$ , то  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S)$ , причём равенство эквивалентно каждому из двух равносильных условий:

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)), \quad (1.39)$$

$$\text{симплекс } \xi(S)S \text{ описан вокруг } Q_n. \quad (1.40)$$

Первая часть следует из (1.34) и неравенства  $\alpha(S) \leq \xi(S)$ . Для доказательства второй части запишем эту оценку через базисные многочлены Лагранжа. Согласно (1.25) и (1.31),

$$\alpha(S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda(x)) + 1, \quad \xi(S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda(x)) + 1.$$

Соотношение  $\alpha(S) \leq \xi(S)$  эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda(x)) \leq (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda(x)). \quad (1.41)$$

Равенство  $\alpha(S) = \xi(S)$  выполняется лишь тогда, когда справедливо равенство в (1.41), а именно при условии (1.39). Остаётся заметить, что равносильность условий (1.39) и (1.40) отмечалась в п. 1.5.

**1.7.6.** Пусть  $S \subset Q_n$ . Тогда  $\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n$ . Если  $\xi(S) = n$ , то  $\alpha(S) = n$  и для любого  $i$  верно  $d_i(S) = 1$ .

Действительно, включение  $S \subset Q_n$  влечёт  $d_i(S) \leq 1$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Поэтому

$$\xi(S) \geq \alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq n.$$

Если  $\xi(S) = n$ , то все величины в этой цепочке одинаковы и равны  $n$ . В этом случае из соотношений  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = n$  и  $d_i(S) \leq 1$  получаем  $d_i(S) = 1$ .

**1.7.7.** Рассмотрим  $n$ -мерный симплекс  $S^*$ , ограниченный гиперплоскостями  $x_i = 0$  и  $\sum x_i = n$ . Очевидно,  $Q_n \subset S^*$ . Для любого  $i = 1, \dots, n$  симплекс  $S^*$  содержит отрезок длины  $n$ , параллельный (в данном случае — принадлежащий)

$i$ -й координатной оси. Очевидно, что не каждый симплекс  $S$ , содержащий  $Q_n$ , имеет это свойство. Зададимся вопросом о существовании в  $S$  указанного отрезка хотя бы для одного  $i$ . Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Именно, пусть  $Q_n \subset S$ . Тогда для некоторого  $i = 1, \dots, n$  верно  $d_i(S) \geq n$ . Иначе говоря, для некоторого  $i$  симплекс  $S$  содержит отрезок длины  $n$ , параллельный  $i$ -й координатной оси.

Действительно, из включения  $Q_n \subset S$  следует, что  $\alpha(S) \leq 1$ . Если бы для всех  $i$  выполнялось  $d_i(S) < n$ , то, напротив, было бы

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} > 1.$$

Поэтому существует  $i$ , для которого  $d_i(S) \geq n$ .

**1.7.8.** Здесь и ниже  $V$  — параллелепипед, введённый в п. 1.7.1. Если  $V \subset S$ , то для некоторого  $i = 1, \dots, n$  симплекс  $S$  содержит отрезок, который параллелен  $v^{(i)}$  и длина которого равна  $n\|v^{(i)}\|$ . Каждый  $n$ -мерный параллелепипед аффинно эквивалентен кубу. Поэтому это утверждение достаточно доказать для  $V = Q_n$ . Но в таком виде оно совпадает с предыдущим следствием.

**1.7.9.** Если  $Q_n \subset S$ , то для коэффициентов базисных многочленов Лагранжа симплекса  $S$  выполняется

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \leq 2.$$

Следует из неравенства  $\alpha(S) \leq 1$  и (1.36). Заметим, что если  $S \subset Q_n$ , то

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \geq 2n.$$

Это эквивалентно оценке  $\alpha(S) \geq n$ .

С применением (1.34) более просто получаются некоторые ранее известные результаты. Утверждения из пп. 1.7.10, 1.7.11 доказаны Лассаком [31]. Результат из п. 1.7.12 приведён Балла [25].

**1.7.10.** Предположим, что  $-\frac{1}{n}S \subset V \subset S$ . Тогда для любого  $i = 1, \dots, n$  симплекс  $-\frac{1}{n}S$  содержит ровно один отрезок, который параллелен  $v^{(i)}$  и длина которого равна  $\|v^{(i)}\|$ .

Утверждение сводится к случаю  $V = Q_n$ , который мы и рассмотрим. Так как  $-\frac{1}{n}S \subset Q_n$ , то  $d_i(-\frac{1}{n}S) \leq 1$ . Значит,  $d_i(S) \leq n$  и  $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq 1$ . Включение

$Q_n \subset S$  даёт противоположное неравенство  $\alpha(S) \leq 1$ . Тем самым  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = 1$ .

Это равенство будет нарушаться, если существует такое  $k$ , что  $d_k(S) < n$ . Поэтому для любого  $i$  осевой диаметр  $d_i(S)$  равен  $n$ . Получаем, что  $d_i(-\frac{1}{n}S) = 1$ .

Единственность содержащегося в симплексе  $-\frac{1}{n}S$  отрезка длины 1, параллельного оси  $x_i$ , следует из теоремы 1.1.

**1.7.11.** Пусть симплекс  $S \subset V$  имеет максимальный объём из всех симплексов, принадлежащих  $V$ . Тогда для каждого  $i$  симплекс  $S$  содержит единственный отрезок, который параллелен  $v^{(i)}$  и длина которого равна  $\|v^{(i)}\|$ .

Для доказательства заметим, что  $V \subset -nS$ . В противном случае некоторая вершина  $S$  могла бы быть перемещена в  $V$  таким образом, что её расстояние до противоположной грани симплекса увеличилось. Получившийся таким путём симплекс  $S' \subset V$  удовлетворял бы неравенству  $\text{vol}(S') > \text{vol}(S)$ . Последнее невозможно в силу того, что  $S$  имеет максимальный объём в  $V$ . Итак,  $V \subset -nS$ . Обозначим  $T := -nS$ , тогда  $S = -\frac{1}{n}T$ . Имеют место включения  $-\frac{1}{n}T \subset V \subset T$ . Остаётся применить к симплексу  $T$  предыдущее следствие.

Применяя это утверждение к  $V = Q_n$ , получаем следующее свойство. *Если  $S$  — симплекс максимального объёма в  $Q_n$ , то для него каждый осевой диаметр равен 1.* Обратное утверждение верно лишь для  $n \leq 2$  (рассмотрите этот вопрос самостоятельно).

**1.7.12.** Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $V_1, V_2$  — параллелепипеды в  $\mathbb{R}^n$ . Предположим, что  $V_2$  есть результат гомотетии  $V_1$  с коэффициентом  $\sigma > 1$ . Если  $V_1 \subset S \subset V_2$ , то  $\sigma \geq n$ .

Достаточно рассмотреть случай  $V_1 = Q_n$ , когда  $V_2$  есть транслят куба  $\sigma Q_n$ . Так как  $S \subset V_2$ , имеем  $d_i(S) \leq \sigma$ . Включение  $Q_n \subset S$  даёт  $\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1$ .

Поэтому  $\frac{n}{\sigma} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \leq 1$ . Значит,  $\sigma \geq n$ .

**1.7.13.** Пусть  $V \subset S$  есть параллелепипед максимального объёма в симплексе  $S$ . Тогда для каждого  $i = 1, \dots, n$  симплекс  $-\frac{1}{n}S$  содержит ровно один отрезок, который принадлежит  $V$ , параллелен  $v^{(i)}$  и длина которого равна  $\|v^{(i)}\|$ .

Как показано в [31], некоторый транслят параллелепипеда  $nV$  содержит  $S$ . Обозначим этот транслят через  $U$ . Так как  $-U = U$ , то  $U$  содержит транслят симплекса  $-S$ . Значит,  $V$  содержит некоторый транслят симплекса  $-\frac{1}{n}S$ . Так как  $V \subset S$ , то последний транслят содержится в  $S$  и, следовательно, представляет собой  $-\frac{1}{n}S$ . Таким образом,  $-\frac{1}{n}S \subset V \subset S$ . Теперь достаточно применить предложение из п. 1.7.10.

## 1.8 О гомотетическом образе симплекса, поглощающем куб

Обозначим через  $S_{x,\sigma}$  образ симплекса  $S$  при гомотетии с центром в точке  $x \in \mathbb{R}^n$  и коэффициентом  $\sigma$ . Рассмотрим задачу о вычислении такой точки  $x \in \mathbb{R}^n$ , для которой с минимальным возможным коэффициентом  $\sigma > 0$  для невырожденного  $n$ -мерного симплекса  $S$  справедливо включение  $Q_n \subset S_{x,\sigma}$ .

Задача имеет решение, и причём единственное, в случае  $\alpha(S) \neq 1$ ; при этом минимальное  $\sigma$  как раз и равно  $\alpha(S)$ . Приведём формулы, в которых центр  $x$  минимальной положительной гомотетии при поглощении симплексом единичного куба вычисляется через вершины  $S$  и числа  $l_{ij}$  — коэффициенты многочленов  $\lambda_j$ .

Из определения  $\alpha(S)$  следует, что некоторый транслят симплекса  $\alpha(S)S$  описан вокруг  $Q_n$ , т. е. каждая  $(n-1)$ -мерная грань этого транслята содержит вершину  $Q_n$ . Поэтому  $\alpha(S) = 1$  тогда и только тогда, когда существует транслят  $S$ , описанный вокруг  $Q_n$ .

**Теорема 1.4.** *Если  $\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \neq 1$ , то существует единственная точка  $x = (x_1, \dots, x_n)$  такая, что  $Q_n \subset S_{x,\sigma}$ . Имеют место равенства*

$$x_k = \frac{1}{2(\sigma - 1)} \left[ \sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n |l_{ij}| \right) x_k^{(j)} - 1 \right], \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.42)$$

Если же  $0 < \sigma < \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}$ , то для любой  $x \in \mathbb{R}^n$  верно  $Q_n \not\subset S_{x,\sigma}$ .

Отметим формулы, в которых участвуют лишь вершины  $S$  и числа  $l_{ij}$ .

**Теорема 1.5.** *Условие  $\alpha(S) \neq 1$  эквивалентно*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \neq 2. \quad (1.43)$$

Пусть выполнено (1.43) и  $\sigma := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|$ . Тогда единственная точка  $x$ , для которой верно включение  $Q_n \subset S_{x,\sigma}$ , может быть вычислена по формулам

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n |l_{ij}| \right) x_k^{(j)} - 1}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| - 2}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.44)$$

Теоремы 1.4 и 1.5 доказаны в статье [15]. Формулы (1.42) и (1.44) могут быть полезными при решении различных вычислительных задач, в особенности с применением компьютера.

## 1.9 Примеры и иллюстрации

**1.9.1.** Пусть  $n = 2$ ,  $S$  — треугольник с вершинами  $x^{(1)} = (1, \frac{1}{4})$ ,  $x^{(2)} = (\frac{1}{2}, 1)$ ,

1.9. ПРИМЕРЫ И ИЛЛЮСТРАЦИИ

$x^{(3)} = (0, 0)$ . Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты базисных многочленов Лагранжа составляют столбцы матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ , поэтому

$$\lambda_1(x) = \frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2, \quad \lambda_2(x) = -\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2, \quad \lambda_3(x) = -\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1.$$

В соответствии с (1.4) симплекс  $S$  (с границей) задаётся системой линейных неравенств:

$$\frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 \geq 0, \quad -\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2 \geq 0, \quad -\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1 \geq 0.$$

Пусть даны точки  $z = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $w = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $h = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ . Так как все  $\lambda_j(z) > 0$ , то  $z$  принадлежит внутренности  $S$ . Так как  $\lambda_1(w) < 0$ , то  $w \notin S$ . Наконец, соотношения  $\lambda_1(h) = 0$ ,  $\lambda_2(h) > 0$ ,  $\lambda_3(h) > 0$  означают, что  $h$  принадлежит границе  $S$ , а именно стороне, противоположной вершине  $x^{(1)}$ .

Вычисления по формуле (1.7) дают

$$\frac{1}{d_1(S)} = \frac{1}{2} \left( \frac{8}{7} + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} \right) = \frac{8}{7}, \quad \frac{1}{d_2(S)} = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{7} + \frac{8}{7} + \frac{4}{7} \right) = \frac{8}{7},$$

т. е.  $d_1(S) = d_2(S) = \frac{7}{8}$ .

Найдём координаты концов максимальных отрезков рассматриваемого вида. При  $i = 1$  формулы (1.13)–(1.14) приводят к следующим результатам:

$$s_{11} = \frac{\frac{8}{7} - \frac{8}{7}}{\frac{16}{7}} = 0, \quad s_{12} = \frac{\frac{2}{7} + \frac{2}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{1}{4}, \quad s_{13} = \frac{\frac{6}{7} + \frac{6}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{3}{4},$$

$$y_-^{(1)} = s_{11}x^{(1)} + s_{12}x^{(2)} + s_{13}x^{(3)} = \frac{1}{4}x^{(2)} + \frac{3}{4}x^{(3)} = \left( \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right);$$

$$t_{11} = \frac{\frac{8}{7} + \frac{8}{7}}{\frac{16}{7}} = 1, \quad t_{12} = \frac{\frac{2}{7} - \frac{2}{7}}{\frac{16}{7}} = 0, \quad t_{13} = \frac{\frac{6}{7} - \frac{6}{7}}{\frac{16}{7}} = 0,$$

$$y_+^{(1)} = t_{11}x^{(1)} + t_{12}x^{(2)} + t_{13}x^{(3)} = x^{(1)} = \left( 1, \frac{1}{4} \right).$$

Концы максимального в  $S$  отрезка, параллельного оси  $x_1$ , есть точки  $y_-^{(1)} = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$ ,  $y_+^{(1)} = (1, \frac{1}{4})$ . При  $i = 2$  аналогично получаем

$$s_{21} = \frac{1}{2}, \quad s_{12} = 0, \quad s_{13} = \frac{1}{2},$$

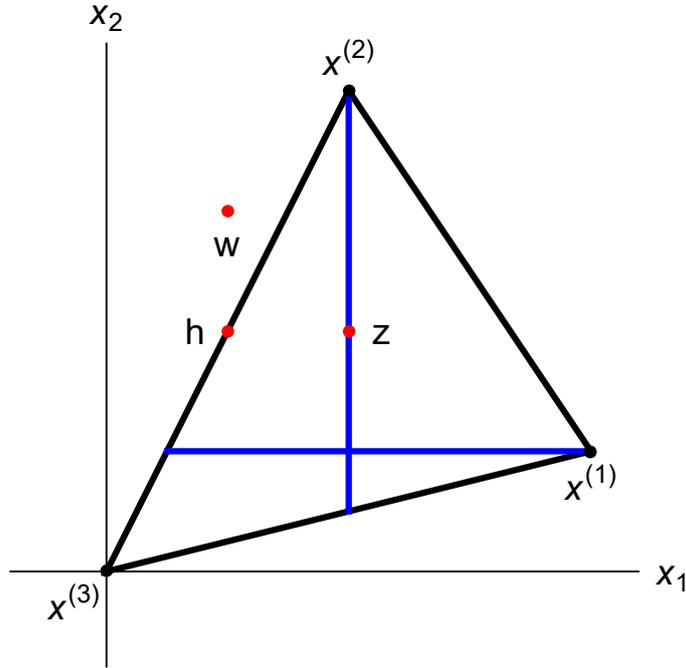


Рис. 1.4. Пример 1.9.1

$$y_-^{(2)} = s_{21}x^{(1)} + s_{22}x^{(2)} + s_{23}x^{(3)} = \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right);$$

$$t_{21} = 0, \quad t_{22} = 1, \quad t_{23} = 0,$$

$$y_+^{(2)} = t_{21}x^{(1)} + t_{22}x^{(2)} + t_{23}x^{(3)} = x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Поэтому максимальным в  $S$  отрезком, параллельным оси  $x_2$ , является отрезок с концами  $y_-^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$ ,  $y_+^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

Теперь найдём  $\xi(S)$  и  $\alpha(S)$ . Очевидно,

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \frac{4}{7}, \quad \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \frac{2}{7}, \quad \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)) = \frac{3}{7}.$$

Формула (1.25) даёт  $\xi(S) = 3 \cdot \frac{4}{7} + 1 = \frac{19}{7}$ . Величину  $\alpha(S)$  сначала вычислим с применением равенства (1.28), зная осевые диаметры:

$$\alpha(S) = \frac{1}{d_1(S)} + \frac{1}{d_2(S)} = \frac{8}{7} + \frac{8}{7} = \frac{16}{7}.$$

Тот же результат проще получается по формуле (1.36). В данном случае полусумма модулей элементов двух первых строк  $\mathbf{A}^{-1}$  равна  $\frac{16}{7}$  — это и есть  $\alpha(S)$ . Заметим, что в этом примере имеют место строгие неравенства  $\xi(S) > \alpha(S) > 2$ .

1.9. ПРИМЕРЫ И ИЛЛЮСТРАЦИИ

**1.9.2.** Пусть  $n = 3$ ,  $S$  — тетраэдр с вершинами  $x^{(1)} = (1, 0, 1)$ ,  $x^{(2)} = (0, 1, 1)$ ,  $x^{(3)} = (1, 1, 0)$ ,  $x^{(4)} = (0, 0, 0)$ . Это правильный тетраэдр, вписанный в куб  $Q_3 = [0, 1]^3$  (см. рис. 2.2). В рассматриваемой ситуации

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисные многочлены Лагранжа —

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \quad \lambda_2(x) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,$$

$$\lambda_3(x) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \quad \lambda_4(x) = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1.$$

Поэтому симплекс  $S$  (с границей) задаётся системой неравенств:

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 0, \quad -x_1 + x_2 + x_3 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 0, \quad -x_1 - x_2 - x_3 + 2 \geq 0.$$

Пусть  $z = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $w = (1, 0, 0)$ ,  $h = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $g = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Так как  $\lambda_j(z) > 0$ , то  $z$  принадлежит внутренности  $S$ . Так как  $\lambda_2(w) < 0$ , то  $w \notin S$ . Соотношения  $\lambda_1(h) = 0$ ,  $\lambda_2(h) > 0$ ,  $\lambda_3(h) > 0$ ,  $\lambda_4(h) > 0$  означают, что  $h$  является внутренней точкой грани, противоположной вершине  $x^{(1)}$ . Наконец, в силу условий  $\lambda_1(g) = 0$ ,  $\lambda_2(g) > 0$ ,  $\lambda_3(g) = 0$ ,  $\lambda_4(g) > 0$  точка  $g$  одновременно принадлежит граням  $S$ , противоположным  $x^{(1)}$  и  $x^{(3)}$ , то есть принадлежит ребру  $x^{(2)}x^{(4)}$ .

Вычислим осевые диаметры  $S$  и максимальные отрезки, параллельные координатным осям. Формула (1.7) даёт  $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$ . Факт совпадения всех  $d_i(S)$  следует также из (1.6) и того, что площади проекций  $S$  на координатные плоскости одинаковы (и равны 1). Числа  $s_{ij}$  и  $t_{ij}$  из (1.14) оказываются следующими:

$$s_{11} = 0, \quad s_{12} = \frac{1}{2}, \quad s_{13} = 0, \quad s_{14} = \frac{1}{2}, \quad t_{11} = \frac{1}{2}, \quad t_{12} = 0, \quad t_{13} = \frac{1}{2}, \quad t_{14} = 0;$$

$$s_{21} = \frac{1}{2}, \quad s_{22} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{24} = \frac{1}{2}, \quad t_{21} = 0, \quad t_{22} = \frac{1}{2}, \quad t_{23} = \frac{1}{2}, \quad t_{24} = 0;$$

$$s_{31} = 0, \quad s_{32} = 0, \quad s_{33} = \frac{1}{2}, \quad s_{34} = \frac{1}{2}, \quad t_{31} = \frac{1}{2}, \quad t_{32} = \frac{1}{2}, \quad t_{33} = 0, \quad t_{34} = 0.$$

Поэтому по формуле (1.13)

$$y_-^{(1)} = \sum_{j=1}^4 t_{1j}x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(2)} + x^{(4)}) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
 y_+^{(1)} &= \sum_{j=1}^4 s_{1j}x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(3)}) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\
 y_-^{(2)} &= \sum_{j=1}^4 t_{2j}x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(4)}) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \\
 y_+^{(2)} &= \sum_{j=1}^4 s_{2j}x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(2)} + x^{(3)}) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right), \\
 y_-^{(3)} &= \sum_{j=1}^4 t_{3j}x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(3)} + x^{(4)}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right). \\
 y_+^{(3)} &= \sum_{j=1}^4 s_{3j}x^{(j)} = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).
 \end{aligned}$$

Максимальными в  $S$  отрезками, параллельными координатным осям, оказываются отрезки единичной длины, соединяющие середины противоположных (скрецающихся) рёбер. Например, максимальный отрезок, параллельный оси  $x_1$ , имеет концы  $y_-^{(1)} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  и  $y_+^{(1)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Указанные отрезки пересекаются в центре куба.

Найдём  $\xi(S)$ . При всех  $j = 1, 2, 3, 4$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_3)} (-\lambda_j(x)) = \frac{1}{2},$$

поэтому по формуле (1.25) получаем  $\xi(S) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$ . Каждая из формул (1.28) и (1.36) даёт  $\alpha(S) = 3$ . В этом примере соотношения  $\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n$  превращаются в равенства:  $\xi(S) = \alpha(S) = 3$ . Это, в частности, означает, что симплекс  $3S$  описан вокруг куба  $Q_3$ .

**1.9.3.** Пусть  $S$  есть треугольник с вершинами  $x^{(1)} = (1, 0)$ ,  $x^{(2)} = (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $x^{(3)} = (0, 0)$ . Вычислим максимальную длину отрезка из  $S$  отрезка, параллельного вектору  $v = (1, 1)$ . Найдём также координаты концов максимального отрезка.

В данном случае

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Числа  $l_{ij}$  суть элементы  $\mathbf{A}^{-1}$ . Поскольку  $v = (1, 1)$ , надо взять  $v_1 = v_2 = 1$ . Вычисления по формулам (1.15) дают

$$m_1 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = -\frac{3}{2},$$

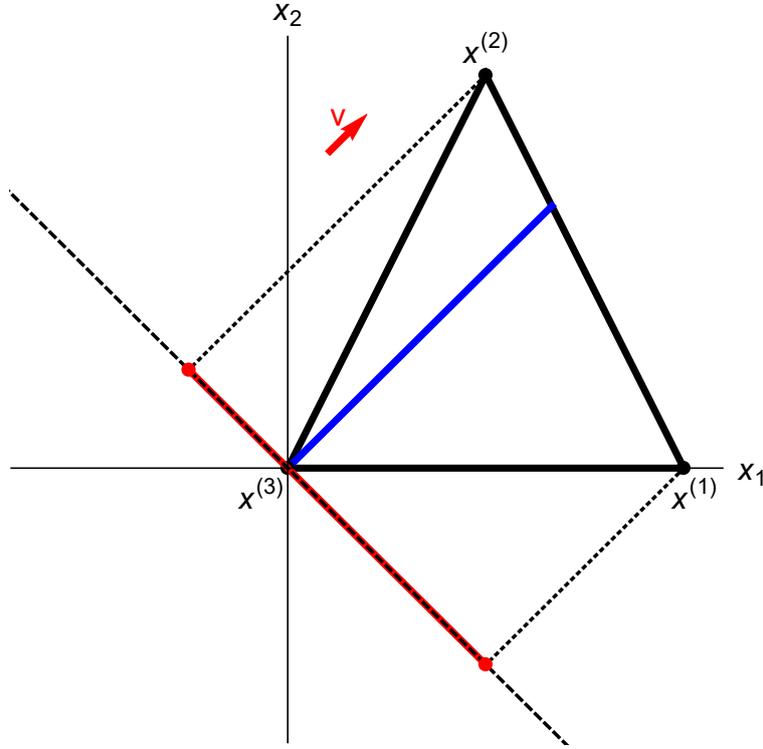


Рис. 1.5. Пример 1.9.3

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = \frac{1}{3}, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}, \quad \beta_3 = 0.$$

Так как  $\|v\| = \sqrt{2}$ , то по формуле (1.16) имеем

$$d^v(S) = \frac{2\|v\|}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

В соответствии с равенствами (1.17) единственный в  $S$  отрезок максимальной длины, параллельный вектору  $v$ , есть отрезок  $[a, b]$ , где

$$a = x^{(3)} = (0, 0), \quad b = \frac{1}{3}x^{(1)} + \frac{2}{3}x^{(3)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Теперь найдём  $(n - 1)$ -меру (иначе говоря, длину)  $\Sigma(S; v)$  ортогональной проекции симплекса  $S$  на прямую, ортогональную  $v$  (т. е. прямую  $x_1 + x_2 = 0$ ). У нас  $\det(\mathbf{A}) = 1$ , поэтому по формуле (1.19)

$$\Sigma(S; v) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{2(n-1)!\|v\|} \sum_{j=1}^{n+1} |m_j| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

В справедливости полученных результатов можно убедиться непосредственно по чертежу, проделав несложные вычисления.

Наконец, для того же треугольника  $S$  рассмотрим параллелограмм  $V$ , одна вершина которого есть  $(0, 0)$ , а рёбра, исходящие из этой вершины, задаются векторами  $v^{(1)} = (1, 0)$ ,  $v^{(2)} = (\frac{1}{2}, 1)$ . Применение равенства (1.38) даёт  $\alpha(V; S) = 2$ . Этот результат также может быть проверен непосредственно. Действительно, обозначим через  $S'$  треугольник с вершинами  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(0, 0)$ . Нетрудно видеть, что  $S'$  — удвоенный гомотетический образ  $S$ , причём  $S'$  описан вокруг  $V$  (т. е.  $V \subset S'$  и каждая сторона  $S'$  содержит вершину  $V$ ). Из этих условий и следует, что  $\alpha(V; S) = 2$ .

# Глава 2

## Величина $\xi_n$

### 2.1 Неравенство $\xi_n \geq n$ . Числа $\xi_1$ , $\xi_2$ и $\xi_3$

В настоящем учебном пособии центральное место занимает величина

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс, } S \subset Q_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Таким образом, по определению,  $\xi_n$  есть минимальный положительный коэффициент гомотетии, с которым гомотетический образ симплекса, содержащегося в кубе  $Q_n = [0, 1]^n$ , поглощает этот куб. Фактически  $\xi_n$  есть числовая характеристика размерности  $n$ .

Из соображений подобия следует, что в определении  $\xi_n$  единичный куб  $Q_n$  можно заменить на произвольный  $n$ -мерный куб. Более того,  $Q_n$  можно заменить вообще на любой  $n$ -мерный невырожденный параллелепипед. Действительно, любые два таких параллелепипеда связаны невырожденным аффинным преобразованием, которое переводит также симплекс в симплекс. Остаётся учесть, что аффинное преобразование сохраняет отношение длин. Отметим также, что симплекс  $S \subset Q_n$  с условием  $\xi(S) = \xi_n$  можно выбрать таким образом, что каждая его вершина попадёт на границу куба.

Приведём общую оценку чисел  $\xi_n$  снизу.

**Теорема 2.1.** Для любого  $n$  справедливо неравенство  $\xi_n \geq n$ .

*Доказательство.* Достаточно заметить, что если  $S \subset Q_n$ , то выполняется  $\xi(S) \geq n$  (см. п. 1.7.6).  $\square$

Оценка  $\xi_n \geq n$  является неулучшаемой (точной). Более того, как мы покажем в следующем пункте, существует бесконечная совокупность  $n$ , для которых справедливо равенство  $\xi_n = n$ .

Первые три числа  $\xi_n$  известны точно. Именно,

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1, \quad \xi_3 = 3.$$

Для  $n = 1$ ,  $n = 2$  и  $n = 3$  полностью описаны и экстремальные симплексы, т. е. такие симплексы  $S \subset Q_n$ , для которых  $\xi(S) = \xi_n$ . Приведём эти результаты.

Случай  $n = 1$  совсем прост. Очевидно, что в этой ситуации имеется единственный отрезок (одномерный симплекс)  $S$ , принадлежащий отрезку  $Q_1 = [0, 1]$ , для которого  $\xi(S) = 1$  — это весь отрезок  $[0, 1]$ . Для любого другого отрезка выполняется  $\xi(S) > 1$ . Это и означает, что  $\xi_1 = 1$ .

Весьма любопытно заметить, что, начиная с  $n = 2$ , задача вычисления  $\xi_n$  становится весьма трудной. Точные значения  $\xi_2$  и  $\xi_3$  аналитическим путём найдены М. В. Невским (см., например, [13, §§ 2.4, § 2.5], где содержатся доказательства и ссылки и на более ранние статьи этого автора).

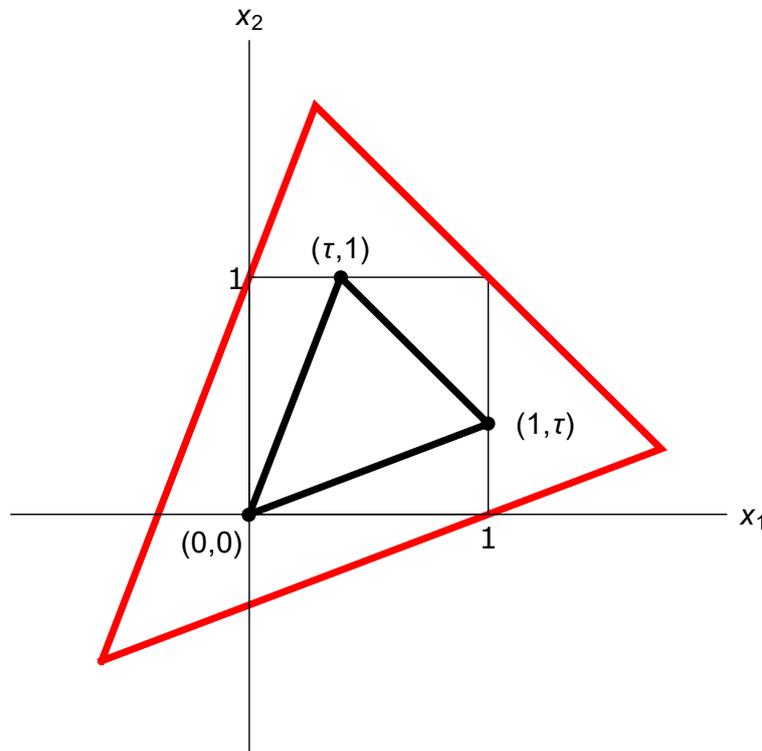


Рис. 2.1. Случай  $n = 2$ . Симплексы  $S^*$  и  $\xi(S^*)S^*$

Пусть  $\tau$  — наименьший корень скалярного уравнения  $t^2 - 3t + 1 = 0$ . Тогда  $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38196601\dots$  Число  $\tau$  связано с хорошо известным "золотым сечением" отрезка  $[0, 1]$ , так как

$$\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{1-\tau}{1} \quad (2.1)$$

(это эквивалентно  $\tau^2 - 3\tau + 1 = 0$ ). Доказано, что для любого треугольника (двумерного симплекса)  $S$ , принадлежащего квадрату  $Q_2 = [0, 1]^2$ , выполняется точное неравенство

$$\xi(S) \geq \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34164078\dots \quad (2.2)$$

При этом равенство в (2.2) имеет место лишь для треугольника  $S^*$  с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, \tau)$ ,  $(\tau, 1)$  и для тех трёх треугольников, узлы которых получаются из указанных поворотами вокруг центра  $Q_2$  на углы, равные  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  и  $\frac{3\pi}{2}$ . Для других  $S$ , кроме этих четырёх отмеченных, в (2.2) выполняется строгое неравенство. Тем самым,  $\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34164078\dots$  Экстремальный симплекс  $S^*$  изображён на рис. 2.1.

Описанные расположения вершин имеют красивые геометрические свойства. Каждый такой набор состоит из вершины квадрата  $x^{(1)}$  и двух точек  $x^{(2)}$  и  $x^{(3)}$ , принадлежащих сторонам квадрата, не содержащим  $x^{(1)}$ . Точки  $x^{(2)}$  и  $x^{(3)}$  осуществляют "золотое сечение" сторон квадрата, на которых они находятся, причём меньший отрезок прилегает к ближайшей для  $x^{(1)}$  вершине квадрата. Это приводит к тому, что оказываются равными площади всех трёх треугольников, которые отсекаются сторонами треугольника  $S = x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}$  от углов квадрата. Для доказательства достаточно привлечь (2.1). Но главное и труднонаходимое экстремальное свойство треугольника  $S$  состоит в том, что для него  $\xi(S) = \xi_2 = 2.3416\dots$  Других треугольников, принадлежащих  $Q_2$ , с таким свойством нет.

Интересно, что точное неравенство (2.2) содержит новую характеристику классического "золотого сечения". Заметим также, что на сегодняшний день  $n = 2$  остаётся единственным значением  $n$ , для которого доказано неравенство  $\xi_n > n$ .

Перейдём к случаю  $n = 3$ . Применяя, кроме собственных методов, некоторые результаты статьи [31], М. В. Невский доказал следующее утверждение. Для любого тетраэдра (трёхмерного симплекса)  $S$ , принадлежащего кубу  $Q_3 = [0, 1]^3$ , выполняется точное неравенство  $\xi(S) \geq 3$ . Равенство  $\xi(S) = 3$  достигается лишь для тетраэдров с вершинами  $(1 - t, 0, 0)$ ,  $(t, 1, 0)$ ,  $(1, 1 - t, 1)$ ,  $(0, t, 1)$  при  $t = 0$  и при  $t = \frac{1}{2}$ , а также тех тетраэдров, вершины которых сводятся к отмеченным с помощью замены переменных. Иначе говоря, если  $\xi(S) = 3$ , то либо вершины  $S$  расположены в вершинах куба и образуют правильный тетраэдр, либо они совпадают с серединами противоположных рёбер двух противоположных граней куба и при этом не имеют общей плоскости.

Таким образом,  $\xi_3 = 3$ . Заметим, что для осевых диаметров любого тетраэдра с условием  $\xi(S) = 3$  в силу следствия из п. 1.7.6 выполняются равенства  $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$ . Другими словами, в каждом таком тетраэдре содержится ровно один отрезок длины 1, параллельный любой из координатных осей.

## 2.2 Случай, когда $n + 1$ — число Адамара

*Матрицей Адамара порядка  $t$*  называется невырожденная  $(t \times t)$ -матрица

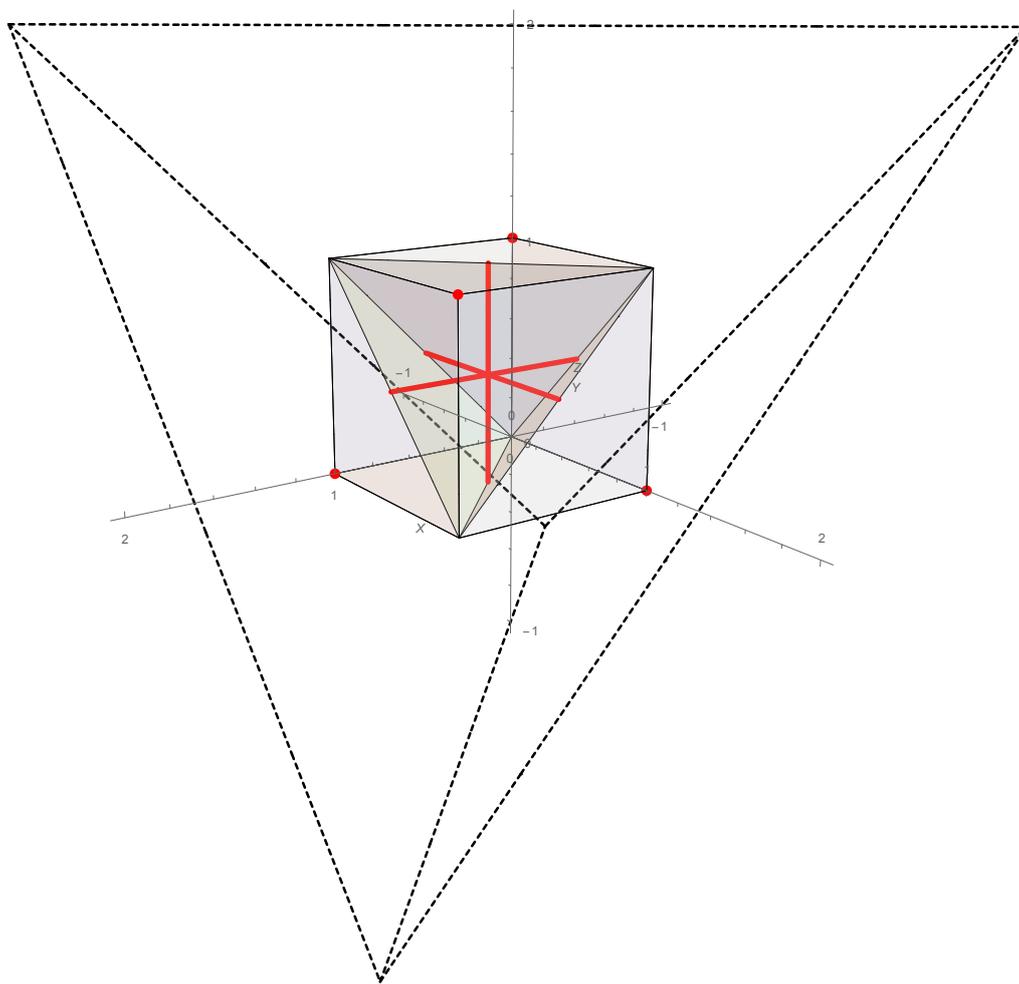


Рис. 2.2. Экстремальный симплекс для  $n = 3$ . Случай  $t = 0$

$\mathbf{H}_m$ , каждый элемент которой равен 1 или  $-1$ , и такая что

$$\mathbf{H}_m^{-1} = \frac{1}{m} \mathbf{H}_m^T.$$

Некоторые сведения о матрицах Адамара содержатся в монографии Холла [24]. Если  $\mathbf{H}_m$  существует, то  $m = 1$ ,  $m = 2$  или  $m$  кратно 4. Для бесконечного множества чисел вида  $m = 4k$ , включая степени  $m = 2^l$ , существование  $\mathbf{H}_m$  давно установлено. Наименьшее  $m$ , для которого неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка  $m$ , на 2008 г. равнялось 668. Если для натурального  $m$  матрица Адамара существует, то  $m$  будем называть *числом Адамара*, или *адамаровым числом*.

В случае когда  $n + 1$  — число Адамара, и только тогда, существует правильный симплекс  $S$ , вписанный в  $Q_n$  таким образом, что его вершины находятся в вершинах  $Q_n$  (см. [29, Theorem 4.5]). В статье [11] и монографии [13, § 3.2]

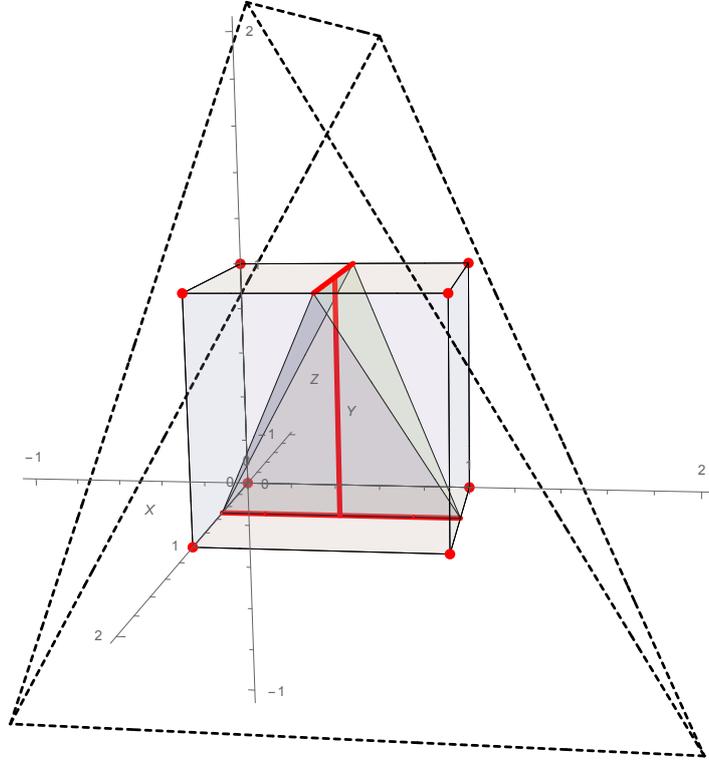


Рис. 2.3. Экстремальный симплекс для  $n = 3$ . Случай  $t = \frac{1}{2}$

разными способами доказано, что  $\xi(S) = n$ , что даёт  $\xi_n = n$ . Приведём иное доказательство этого факта, данное в [35] и непосредственно связанное с матрицами Адамара.

**Теорема 2.2.** Пусть  $n + 1$  — число Адамара,  $n \geq 1$ . Тогда существует правильный симплекс  $S$  со следующими свойствами:

- 1)  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$ ;
- 2)  $\xi_n = \xi(S) = \alpha(S) = n$ ;
- 3)  $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$ ;

4) симплекс  $nS$  описан вокруг куба  $Q_n$ , причём каждая  $(n - 1)$ -мерная грань этого симплекса содержит ровно одну вершину  $Q_n$ .

*Доказательство.* Пользуясь соображениями подобия, будем решать задачу для куба  $Q'_n := [-1, 1]^n$ . Так как число  $n + 1$  — адамарово, существует нормализованная матрица Адамара порядка  $n + 1$ , т. е. такая, у которой первая строка

и первый столбец состоят из 1 (см. [24, гл. 14]). Запишем строки этой матрицы в обратном порядке и рассмотрим получившуюся матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

которая также будет матрицей Адамара порядка  $n + 1$ . Пусть  $S'$  —  $n$ -мерный симплекс, координаты вершин которого записаны в первых  $n$  позициях строк  $\mathbf{H}$ . Очевидно, вершины  $S'$  совпадают с некоторыми вершинами  $Q'_n$ , следовательно, этот симплекс вписан в куб. Покажем, что симплекс  $S'$  является правильным, причём длина любого его ребра равна  $\sqrt{2(n+1)}$ . Пусть  $a, b$  — две различные строки  $\mathbf{H}$ . Поскольку  $\mathbf{H}$  состоит из  $\pm 1$ , имеем  $\|a\|^2 = \|b\|^2 = n + 1$ . В силу попарной ортогональности строк матрицы Адамара

$$\|a - b\|^2 = (a - b, a - b) = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2(a, b) = 2(n + 1).$$

Обозначим через  $u$  и  $w$  вершины  $S'$ , которые получаются соответственно из  $a$  и  $b$  отбрасыванием последней компоненты, равной 1. Ясно, что  $n$ -мерная длина вектора  $u - w$  совпадает с  $(n + 1)$ -мерной длиной вектора  $a - b$ , т. е. также равна  $\sqrt{2(n + 1)}$ .

Обозначим через  $\lambda_j$  базисные многочлены Лагранжа, соответствующие  $S'$ . В силу равенства  $\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{n+1}\mathbf{H}^T$  коэффициенты многочленов  $(n + 1)\lambda_j$  содержатся в строках  $\mathbf{H}$ . Свободные члены этих многочленов попадают в последний столбец  $\mathbf{H}$  и поэтому равны 1. Значит, свободные члены многочленов  $-(n + 1)\lambda_j$  равны  $-1$ . По этой причине при любом  $j = 1, \dots, n + 1$  выполняется равенство

$$(n + 1) \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_j(x)) = n - 1.$$

Так как коэффициенты многочленов  $-(n + 1)\lambda_j$  равны  $\pm 1$ , то для любого  $j$  вершина  $x$  куба  $Q'_n$ , для которой справедливо  $(n + 1)(-\lambda_j(x)) = n - 1$ , является единственной. Именно,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  определяется равенствами  $x_i = -\text{sign } l_{ij}$ , где  $l_{ij}$  — коэффициенты многочлена  $\lambda_j$ .

Величина  $\xi(Q'_n; S')$  вычисляется по формуле, аналогичной (1.25):

$$\xi(Q'_n; S') = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

Пусть  $S$  — вписанный в  $Q_n$  правильный симплекс, который соответствует  $S'$  при преобразовании подобия, переводящем  $Q'_n$  в  $Q_n$ . Тогда  $\xi(S) = \xi(S'; Q'_n) = n$ . Отсюда следует, что если  $n + 1$  — адамарово, то  $\xi_n \leq n$ . Для любого  $n$ , как мы знаем, верна и противоположная оценка  $\xi_n \geq n$ . Поэтому  $\xi_n = \xi(S) = n$ . Так как

### 2.3. ЖЁСТКИЙ СИМПЛЕКС И НЕРАВЕНСТВО $\xi_N \leq \frac{N^2-3}{N-1}$ , $N > 2$

коэффициент подобия при преобразовании  $Q'_n$  в  $Q_n$  равен  $\frac{1}{2}$ , то длина любого ребра  $S$  равна  $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ .

Заметим, что из соотношения

$$\max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q'_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = \frac{n-1}{n+1}$$

следует, что симплекс  $nS'$  описан вокруг куба  $Q'_n$ . Наше рассуждение также показывает, что каждая  $(n-1)$ -мерная грань  $nS'$  содержит лишь одну вершину  $Q'_n$ . Значит, симплекс  $nS$  аналогичным образом описан вокруг куба  $Q_n$ .

Поскольку  $nS$  описан вокруг  $Q_n$ , имеем  $\alpha(S) = \xi(S) = n$  и  $d_i(S) = 1$ . Эти равенства также следуют из оценки  $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$  и того, что  $\xi(S) = n$ . Наконец, равенства  $d_i(S) = 1$  и  $\alpha(S) = n$  вытекают и из того, что правильный симплекс  $S$ , вписанный в  $Q_n$ , имеет максимальный объём (это свойство отмечается в [29, Theorem 2.4]). Как мы получили в п. 1.7.11, каждый осевой диаметр симплекса максимального объёма в  $Q_n$  равен 1.

Теорема доказана. □

### 2.3 Жёсткий симплекс и неравенство $\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$ , $n > 2$

В этом пункте мы получим наилучшую известную общую оценку  $\xi_n$ . Следующее утверждение доказано в [11, теорема 2.2].

**Теорема 2.3.** *Если  $n > 2$ , то*

$$\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}. \quad (2.3)$$

При любом  $n$  верно неравенство  $\xi_n < n+1$ .

*Доказательство.* Сначала пусть  $n \geq 2$ . Рассмотрим  $n$ -мерный симплекс  $S$  с вершинами  $x^{(1)} = (0, 1, \dots, 1)$ ,  $x^{(2)} = (1, 0, \dots, 1)$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n)} = (1, 1, \dots, 0)$ ,  $x^{(n+1)} = 0$ . В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -n+2 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -n+2 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -n+2 & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix},$$

$\Delta = \det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)$ ,  $\text{vol}(S) = \frac{n-1}{n!}$ . Коэффициенты многочленов  $\lambda_j$  составляют столбцы  $\mathbf{A}^{-1}$ , поэтому

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{n-1} \left[ (-n+2)x_j + \sum_{k \neq j} x_k \right], \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$\lambda_{n+1}(x) = -\frac{1}{n-1} \left[ \sum_{k=1}^n x_k + n-1 \right].$$

При  $n = 2$  по формуле (1.25) имеем

$$\xi(S) = -3\lambda_3(1, 1) + 1 = 4.$$

Если же  $n > 2$ , то

$$\xi(S) = -(n+1)\lambda_1(e_1) + 1 = \frac{(n+1)(n-2)}{n-1} + 1 = \frac{n^2-3}{n-1}.$$

Так как  $\xi_n \leq \xi(S)$ , то для  $n > 2$  выполняется неравенство (2.3).

При  $n > 2$

$$\xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1} < n+1.$$

Заметим, что  $\xi_1 = 1 < 2$ ,  $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.3416\dots < 3$ . Тем самым, оценка  $\xi_n < n+1$  справедлива при любом  $n$ . Теорема доказана.  $\square$

Симплекс  $S$  из доказательства теоремы 2.3 обладает следующим интересным свойством [29, Лемма 3.3]: замена любой вершины  $S$  на любую точку куба  $Q_n$  уменьшает объём симплекса. По этой причине симплекс  $S$  при  $n \geq 3$  назван *жестким* (*rigid*). При  $n = 2, 3, 4$  (и только в этих ситуациях) объём  $S$  является максимально возможным для симплекса, содержащегося в  $Q_n$ . При любом  $n \geq 2$  из (1.7) следуют равенства  $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$ . Они эквивалентны тому, что сумма модулей элементов каждой из верхних  $n$  строк матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  равна 2, а сумма положительных элементов любой из этих строк, как и сумма модулей отрицательных элементов, равна 1.

Матрица  $\mathbf{B}$  порядка  $n$ , строки которой содержат координаты ненулевых вершин  $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ , возникает в ряде задач комбинаторики и теории графов. Так, её *перманент*

$$\text{per}(\mathbf{B}) := \sum_{\omega} b_{1\omega_1} \dots b_{n\omega_n} = n! \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{1}{j!}$$

равен числу перестановок  $\omega$  порядка  $n$  таких, что  $\omega_i \neq i$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . Это число  $q_n$  называется *числом беспорядков порядка  $n$*  (см. [22], [7]). Первые значения равны  $q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = 2, q_4 = 9, q_5 = 44, q_6 = 265$ . При большом  $n$   $q_n$  приближённо равно  $n!e^{-1}$ . В то же время  $\det(\mathbf{B}) = (-1)^{n-1}(n-1)$ .

## 2.4 Симплексы максимального объёма в кубе

*Симплексом максимального объёма в кубе  $Q_n$*  будем называть  $n$ -мерный симплекс  $S \subset Q_n$ , такой что для любого  $n$ -мерного симплекса  $S' \subset Q_n$  верно  $\nu_n := \text{vol}(S) \geq \text{vol}(S')$ . Симплексы максимального объёма в кубе обладают рядом красивых свойств. Некоторые из них уже отмечались выше. Например, следствие пункта 1.7.11 для случая  $V = Q_n$  даёт такое свойство. Если симплекс  $S \subset Q_n$  имеет максимальный объём, т. е.  $\text{vol}(S) = \nu_n$ , то для осевых диаметров  $S$  выполняются равенства  $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$ .

Под  *$a/b$ -матрицей* будем понимать матрицу, каждый элемент которой равен одному из двух чисел  $a$  или  $b$ . Через  $h_n$  и  $g_n$  обозначим максимальные величины определителей  $0/1$  и  $-1/1$ -матриц порядка  $n$  соответственно.

Отметим, что числа  $\nu_n, g_n$  и  $h_n$  связаны соотношениями  $g_{n+1} = 2^n h_n, h_n = n! \nu_n$ , (см. [29, Theorem 2.1]). Для всех  $n \in \mathbb{N}$  имеют место попарно эквивалентные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\log(4/3)}{\log n} \right) &< \log(2^{n-1} h_{n-1}) \leq \frac{1}{2} \cdot n \log n, \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} &< h_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} &< \nu_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Равенство справа в каждом из соотношений эквивалентно каждому из следующих условий:

$n+1$  — число Адамара;

в  $Q_n$  существует максимальный по объёму симплекс, который является правильным.

Двойное неравенство (2.4) объединяет результат Адамара [28] (правая оценка) и результат Клементса и Линдстрёма [26] (левая оценка).

Пусть  $n+1$  — число Адамара. В этом случае найдётся совокупность  $n+1$  вершин куба  $Q_n$  с одинаковыми попарными расстояниями между ними. Такая система вершин в ряде работ называется *эквидистантной*. Другими словами, в этом случае существует правильный  $n$ -мерный симплекс, вершины которого совпадают с некоторыми из вершин  $Q_n$ . Из свойств матриц Адамара следует, что длина ребра  $S$  равна  $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ . Величина  $\nu_n$  совпадает с объёмом этого симплекса и равна правой части (2.4).

Отметим, что указанное свойство является характеристическим. Именно (см. [29, Theorem 4.5]), для любого  $n \in \mathbb{N}$  следующие три условия эквивалентны:

- 1) число  $n + 1$  — адамарово;
- 2) каждый симплекс максимального объёма в  $Q_n$  является правильным;
- 3) множество  $\text{ver}(Q_n)$  содержит эквидистантную систему, содержащую  $n + 1$  элементов.

В некоторых случаях правое неравенство из (2.4) было улучшено. Так, если  $n$  — чётное, то

$$\nu_n \leq \frac{n^{n/2} \sqrt{2n+1}}{2^n n!}. \quad (2.5)$$

Если  $n > 1$  и  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , то

$$\nu_n \leq \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1} (n-1)!} \quad (2.6)$$

Для многих  $n$  значения  $\nu_n$ ,  $g_n$  и  $h_n$  известны точно. Подробная информация по данным на 1996 г. приводится в [29]. В частности, первые 12 значений  $\nu_n$  есть

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, & \nu_2 &= \frac{1}{2}, & \nu_3 &= \frac{1}{3}, & \nu_4 &= \frac{1}{8}, & \nu_5 &= \frac{1}{24}, \\ \nu_6 &= \frac{1}{80}, & \nu_7 &= \frac{2}{315}, & \nu_8 &= \frac{1}{720}, & \nu_9 &= \frac{1}{2520}, \\ \nu_{10} &= \frac{1}{11340}, & \nu_{11} &= \frac{9}{246400}, & \nu_{12} &= \frac{3}{394240}. \end{aligned}$$

Правое равенство в (2.4) выполняется для бесконечного множества  $n$ , удовлетворяющих условию  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , включая все такие  $n < 667$ . Из интервала  $4 \leq n < 60$  равенство в (2.5) имеет место только для  $n = 4, 12, 24, 40$ . Из интервала  $1 < n < 109$  равенство в (2.6) достигается только для  $n = 5, 9, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 45, 61, 65, 73, 81, 85, 89, 97, 101$ . Известны также точные значения  $\nu_n$  для  $n = 13, 16, 20$ . Для  $n = 14, 18, 21, 22, 26, 28$  значения  $\nu_n$  к 1996 г. не были найдены. Более свежая информация имеется на сайте [www.indiana.edu/~maxdet](http://www.indiana.edu/~maxdet), где приводятся значения максимальных определителей  $h_n$  и  $g_n = 2^{n-1} h_{n-1}$ . Как отмечалось выше,  $\nu_n = \frac{h_n^n}{n!}$ .

## 2.5 Эквивалентность $\xi_n \asymp n$ .

Следующее утверждение установлено в [9, теорема 4.1].

**Теорема 2.4.** *Для любого симплекса  $S \subset Q_n$ , имеющего максимальный объём, имеет место неравенство  $\xi(S) \leq n + 2$ . Если  $n + 1$  — адамарово и  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $Q_n$ , то  $\xi(S) = n$ .*

## 2.5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ $\xi_N \asymp N$ .

*Доказательство.* Пусть  $x^{(j)}$  — вершины симплекса  $S$ , удовлетворяющего условию  $\text{vol}(S) = \nu_n$ , а определители  $\Delta$  и  $\Delta_j(x)$  вводятся через набор точек  $x^{(j)}$  так, как сказано в п. 1.2. Тогда  $|\Delta| = n!\nu_n$  есть максимальное значение определителя порядка  $n + 1$ ,  $j$ -я строка которого есть  $(y_1^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}, 1)$ ,  $0 \leq y_k^{(j)} \leq 1$ . В частности, при любом  $j = 1, \dots, n + 1$  и любом  $x \in Q_n$  выполняется  $|\Delta_j(x)| \leq |\Delta|$ . Поэтому

$$-\lambda_j(x) \leq |\lambda_j(x)| = \left| \frac{\Delta_j(x)}{\Delta} \right| \leq 1, \quad x \in Q_n.$$

Отсюда и из равенства (1.25) для вычисления  $\xi(S)$  получаем

$$\xi(S) = (n + 1) \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(x)) + 1 \leq (n + 1) \cdot 1 + 1 = n + 2.$$

Вторая часть утверждения может быть доказана разными способами. Остановимся здесь на следующем. Пусть  $n+1$  есть число Адамара и  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $Q_n$ . Как отмечалось выше,  $S$  имеет максимальный объём в  $Q_n$ . Поэтому  $S \subset Q_n \subset -nS$  (см. рассуждение из пункта 1.7.11). Положим  $T := -S$ . Так как центр тяжести  $S$  совпадает с центром куба, то  $-S \subset Q_n$ . Поэтому  $T \subset Q_n \subset nT$ , откуда  $\xi(S) = \xi(T) \leq n$ . Осталось привлечь оценку  $\xi(S) \geq n$  из пункта 1.7.6. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 2.5.** *Имеет место эквивалентность  $\xi_n \asymp n$ . Если  $S$  — жёсткий симплекс из п. 2.4, то с константами, не зависящими от  $n$ , выполняется  $\xi(S) \asymp \xi_n$ . То же соотношение справедливо для симплекса  $S \subset Q_n$ , имеющего максимальный объём.*

*Доказательство.* По теореме 2.1 выполняется  $\xi_n \geq n$ , а в соответствии с теоремой 2.3 имеем  $\xi_n < n + 1$ . Эти неравенства означают, что  $\xi_n \asymp n$ . Вторая часть следует из оценки  $\xi(S) < n + 1$  при  $n > 2$  для жёсткого симплекса и из оценки  $\xi(S) \leq n + 2$  для симплекса максимального объёма.  $\square$

Теорема 2.5 означает, что относительно  $\xi_n$  жёсткий симплекс, а также симплексы максимального объёма являются *почти-экстремальными*.

Лучшие из известных общих оценок чисел  $\xi_n$  имеют вид

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1}. \quad (2.7)$$

Левое неравенство выполняется при всех  $n$ , правое — при  $n > 2$ . Единственным  $n$ , для которого нижняя и верхняя границы совпадают, является  $n = 3$ : их общее значение в этом случае равно  $\xi_3 = 3$ . Немного увеличив верхнюю границу, получаем простую двустороннюю оценку, справедливую уже для любого  $n$ :

$$n \leq \xi_n < n + 1. \quad (2.8)$$

Неравенства (2.8) означают, что разность  $\xi_n - n$  не выходит за пределы полуинтервала  $[0, 1)$ .

# Глава 3

## Уточнение верхних оценок $\xi_n$

К 2016 г. точные значения  $\xi_n$  были известны только для  $n = 1, 2, 3$  и для тех  $n$ , для которых  $n + 1$  является числом Адамара. В 2016–2019 гг. в работах авторов были найдены значения  $\xi_n$  еще для некоторых  $n$ . Кроме того, для ряда размерностей были получены неравенства более точные, чем общие оценки вида (2.7). Эти результаты изложены в настоящей главе.

Симплексы, позволяющие уточнить оценки, были получены с помощью комбинации численных и символьных методов. Для этого использовались специальные программы, написанные на языке Wolfram Language (см. [6], [33], [40]).

### 3.1 Уточнение оценки $\xi_4$

Для  $n = 4$  неравенство (2.7) принимает вид  $4 \leq \xi_4 \leq \frac{13}{3} = 4.33\dots$ . Оказывается, справедливо более точное неравенство

$$4 \leq \xi_4 \leq \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots \quad (3.1)$$

Улучшенная верхняя граница получается из рассмотрения симплекса  $T$  с вершинами  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 0, 0\right)$ ,  $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 0, 1\right)$ ,  $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, 0, 1, 1\right)$ ,  $\left(1, \frac{1+\sqrt{13}}{6}, 1, 0\right)$ . Для него матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^{-1}$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{13}}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{13}}{6} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5-\sqrt{13}}{6} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{13}}{6} & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5-2\sqrt{13}}{18} & \frac{1+5\sqrt{13}}{36} & -\frac{11+\sqrt{13}}{18} & \frac{5-2\sqrt{13}}{18} & \frac{1+5\sqrt{13}}{36} \\ -\frac{1+5\sqrt{13}}{36} & \frac{-5+2\sqrt{13}}{18} & \frac{11+\sqrt{13}}{18} & -\frac{1+5\sqrt{13}}{36} & \frac{-5+2\sqrt{13}}{18} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{19+5\sqrt{13}}{36} & \frac{5-2\sqrt{13}}{18} & \frac{7-\sqrt{13}}{18} & \frac{-17+5\sqrt{13}}{36} & \frac{5-2\sqrt{13}}{18} \end{pmatrix}.$$

Выпишем соответствующие  $T$  базисные многочлены Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1}{36} \left( (10 - 4\sqrt{13})x_1 - (1 + 5\sqrt{13})x_2 - 18x_3 - 18x_4 + 5\sqrt{13} + 19 \right), \\ \lambda_2(x) &= \frac{1}{36} \left( (1 + 5\sqrt{13})x_1 + (4\sqrt{13} - 10)x_2 - 18x_3 + 18x_4 - 4\sqrt{13} + 10 \right), \\ \lambda_3(x) &= \frac{1}{18} \left( -(11 + \sqrt{13})x_1 + (11 + \sqrt{13})x_2 - \sqrt{13} + 7 \right), \\ \lambda_4(x) &= \frac{1}{36} \left( (10 - 4\sqrt{13})x_1 - (1 + 5\sqrt{13})x_2 + 18x_3 + 18x_4 + 5\sqrt{13} - 17 \right), \\ \lambda_5(x) &= \frac{1}{36} \left( (1 + 5\sqrt{13})x_1 + (4\sqrt{13} - 10)x_2 + 18x_3 - 18x_4 - 4\sqrt{13} + 10 \right). \end{aligned}$$

Для вычисления  $\xi(T)$  применим (1.25). По этой формуле находим

$$\xi(T) = 5 \max_{1 \leq k \leq 5} \max_{x \in \text{ver}(Q_4)} (-\lambda_k(x)) + 1 = \frac{19 + 5\sqrt{13}}{9}.$$

В последнем равенстве для  $k = 1$  максимум достигается на вершине куба  $(1, 1, 1, 1)$ , для  $k = 2$  — на вершине  $(0, 0, 1, 0)$ , для  $k = 3$  — на вершинах  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$ , для  $k = 4$  — на вершине  $(1, 1, 0, 0)$  и для  $k = 5$  — на вершине  $(0, 0, 0, 1)$ . Таким образом, для симплекса  $T$  выполнено условие (1.26):

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_4)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_4)} (-\lambda_5(x)).$$

По теореме 1.2 выполнение последнего условия эквивалентно тому, что симплекс  $\xi(T)T$  описан вокруг  $Q_4$ . Это эквивалентно также выполнению равенства  $\alpha(T) = \xi(T)$ .

Оценка сверху в (3.1) может быть получена также из рассмотрения симплекса  $R$  с вершинами  $\left(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$ ,  $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{5-\sqrt{13}}{6}\right)$ ,  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 1, 1\right)$ ,  $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$ ,  $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ . Справедливо  $\xi(R) = \xi(T) = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ .

Таблица 3.1. Числовые характеристики симплексов  $T$  и  $R$

$S$	$T$	$R$
$\det(\mathbf{A})$	$\frac{1-5\sqrt{13}}{9} = -1.891972\dots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$
$\text{vol}(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{216} = 0.078832\dots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{432} = 0.039416\dots$
$d_1(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$
$d_2(S)$	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$	1
$d_3(S)$	1	1
$d_4(S)$	1	$\frac{5\sqrt{13}-1}{18} = 0.945986\dots$
$\alpha(S)$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$
$\xi(S)$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$	$\frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.114195\dots$
$\ P\ $	$\frac{11+\sqrt{13}}{6} = 2.434258\dots$	3

Числовые характеристики симплексов  $T$  и  $R$  представлены в таблице 3.1. Для вычисления этих характеристик использовались формулы, приведенные в главе 1. Отметим, что эти симплексы имеют разные объемы и, значит, не являются эквивалентными, т. е. один из них не может быть переведен в другой с помощью ортогонального преобразования.

Симплексы  $T$  и  $R$  были получены в работе [18]. Отметим, что А. Ю. Ухаловым и его учениками неоднократно предпринимались попытки уточнить верхнюю границу в (3.1) с помощью различных численных методов. Однако улучшить верхнюю оценку не удалось. Более того, во всех случаях, когда получалось значение, близкое к  $\frac{19+5\sqrt{13}}{9}$ , это значение доставлял симплекс, эквивалентный одному из симплексов  $T$  или  $R$ . Это позволяет высказать предположение, что  $\xi_4 = \frac{19+5\sqrt{13}}{9}$  и что экстремальными являются только симплексы  $T$  и  $R$  (с точностью до ортогональных преобразований). Напомним (см. п. 2.1), что для  $n = 3$  существуют ровно два вида экстремальных симплексов.

## 3.2 Точное значение $\xi_5$

Симплексы, позволяющие вычислить точное значение  $\xi_5$ , были найдены в работах [19] и [35]. Более точно, в этих статьях построены семейства симплексов, для которых  $\xi(S) = 5$ , что в совокупности с неравенством  $\xi_5 \geq 5$  дает

$$\xi_5 = 5. \quad (3.2)$$

Приведём эти семейства экстремальных симплексов.

Рассмотрим симплекс  $U = U(t)$  с вершинами  $(1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, t, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1 - t, 1, 0)$ ,  $(0, 1, t, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1 - t, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1)$ . Заметим, что при любом  $t$  центром тяжести симплекса является точка  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Матрица  $\mathbf{A}(t)$  для  $U$  имеет вид

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении её определителя удобно вычесть из первой строки последнюю и разложить полученный определитель по первой строке.

$$\det(\mathbf{A}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Таким образом, объём симплекса  $U$  не зависит от  $t$ :

$$\text{vol}(U) = \frac{|\det(\mathbf{A}(t))|}{5!} = \frac{1}{40}$$

и  $U$  является невырожденным. Если  $t \in [0, 1]$ , то  $U \subset Q_5$ .

Матрица  $[\mathbf{A}(t)]^{-1}$  имеет вид

$$[\mathbf{A}(t)]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3t-1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2-3t \\ 3t-2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1-3t \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1-3t & 1 & 1 & -2 & 1 & 3t-2 \\ 2-3t & -1 & -1 & -1 & 2 & 3t-1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому базисные многочлены Лагранжа симплекса  $U$  суть

$$\begin{aligned}\mu_1(x) &= \frac{1}{3}((3t-1)x_1 + (3t-2)x_2 - 3x_3 + (1-3t)x_4 + (2-3t)x_5 + 2), \\ \mu_2(x) &= \frac{1}{3}(2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 - 1), \quad \mu_3(x) = \frac{1}{3}(-x_1 - 2x_2 + x_4 - x_5 + 2), \\ \mu_4(x) &= \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 - 2x_4 - x_5 + 2), \quad \mu_5(x) = \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 - 1), \\ \mu_6(x) &= \frac{1}{3}((2-3t)x_1 + (1-3t)x_2 + 3x_3 + (3t-2)x_4 + (3t-1)x_5 - 1).\end{aligned}\quad (3.3)$$

По формулам главы 1 находим  $d_i(U)$  и  $\alpha(U)$ :

$$d_i(U) = \frac{6}{|1-3t| + |2-3t| + 5} \quad \text{для } i = 1, 2, 4, 5; \quad d_3(R) = 1;$$

$$\alpha(U) = \frac{2}{3} \left( |1-3t| + |2-3t| + \frac{13}{2} \right).$$

При  $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  выполняются равенства  $d_i(U) = 1$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), следовательно,

$$\alpha(U) = \sum_{i=1}^5 \frac{1}{d_i(U)} = 5.$$

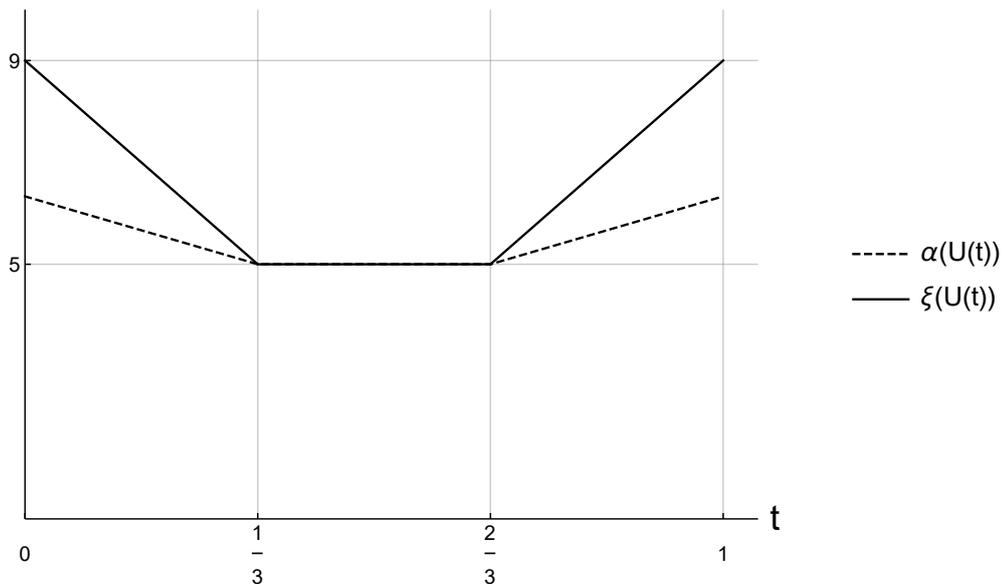


Рис. 3.1. Графики функций  $\alpha(U(t))$  и  $\xi(U(t))$

### 3.2. ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ $\xi_5$

Теперь вычислим  $\xi(U)$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_2(x)) &= \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_3(x)) = \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_4(x)) = \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_5(x)) = \frac{2}{3}, \\ \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_1(x)) &= \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_6(x)) = \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2t, 1 - t, t, 2t - \frac{2}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя (1.25), получаем следующее выражение для  $\xi(U)$ :

$$\begin{aligned} \xi(U) &= 6 \max_{1 \leq k \leq 6} \max_{x \in \text{ver} Q_5} (-\mu_k(x)) + 1 = 6 \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3} - 2t, 1 - t, t, 2t - \frac{2}{3} \right\} + 1 = \\ &= \begin{cases} 5, & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ 9 - 12t, & t < \frac{1}{3}, \\ 12t - 3, & t > \frac{2}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, при  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$  имеем  $\alpha(U) = \xi(U) = 5$ . Выполнение этих равенств означает, что симплекс  $5U$  описан вокруг куба  $Q_5$ . Графики функций  $\alpha(U(t))$  и  $\xi(U(t))$  при  $t \in [0, 1]$  приведены на рис. 3.1.

Семейство симплексов  $U(t)$  было впервые описано в [19].

Теперь рассмотрим семейство симплексов  $V = V(s, t)$  в  $\mathbb{R}^5$  с вершинами  $(s, 1, \frac{1}{3}, 1, 1)$ ,  $(s, 0, \frac{1}{3}, 1, 1)$ ,  $(s, 2 - 3t, \frac{1}{3}, 0, 1)$ ,  $(2 - 3s, t, 0, \frac{1}{3}, 0)$ ,  $(0, t, 1, \frac{1}{3}, 0)$ ,  $(1, t, 1, \frac{1}{3}, 0)$ ;  $s, t \in \mathbb{R}$ . Матрица  $\mathbf{A}$  для симплекса  $V$  имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(s, t) = \begin{pmatrix} s & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 - 3t & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2 - 3s & t & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При вычислении  $\det(\mathbf{A})$  вычтем из первой строки вторую и разложим определитель по первой строке. Затем вычтем из последней строки предпоследнюю и разложим определитель по последней строке.

$$\begin{vmatrix} s & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 - 3t & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2 - 3s & t & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & 2 - 3t & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2 - 3s & t & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} s & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2 - 3s & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} s & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ s & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 2-3s & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, при любых  $s$  и  $t$  симплекс является невырожденным и его объем равен

$$\text{vol}(V) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{5!} = \frac{1}{120}.$$

Пусть теперь  $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ , тогда  $V \subset Q_5$ . Матрица  $\mathbf{A}^{-1}$  имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(s, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3s-1 & 2-3s \\ 2-3t & 3t-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3t-\frac{4}{3} & \frac{5}{3}-3t & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 3s-\frac{5}{3} & \frac{4}{3}-3s \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 2-3s & 3s-2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем для  $V$  базисные многочлены Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= x_2 + (2-3t)x_4 + \left(3t-\frac{4}{3}\right)x_5 - \frac{2}{3}, \\ \lambda_2(x) &= -x_2 + (3t-1)x_4 + \left(\frac{5}{3}-3t\right)x_5 + \frac{1}{3}, \\ \lambda_3(x) &= -x_4 + \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}, \\ \lambda_4(x) &= -x_3 - \frac{2}{3}x_5 + 1, \\ \lambda_5(x) &= -x_1 + (3s-1)x_3 + \left(3s-\frac{5}{3}\right)x_5 + 2-3s, \\ \lambda_6(x) &= x_1 + (2-3s)x_3 + \left(\frac{4}{3}-3s\right)x_5 + 3s-2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Осевые диаметры симплекса вычислим по формуле (1.7):

$$d_1(V(s, t)) = d_2(V(s, t)) = 1, \quad d_3(V(s, t)) = d_4(V(s, t)) = \frac{2}{|1-3s| + |2-3s| + 1},$$

$$d_4(V(s, t)) = d_5(V(s, t)) = \frac{2}{\left|\frac{4}{3}-3s\right| + \left|\frac{5}{3}-3s\right| + \left|\frac{4}{3}-3t\right| + \left|\frac{5}{3}-3t\right| + \frac{4}{3}}.$$

Следовательно,

$$\alpha(V(s, t)) = \frac{1}{2} \left( |1-3s| + |2-3s| + \left|\frac{4}{3}-3s\right| + \left|\frac{5}{3}-3s\right| + |1-3t| + \right.$$

$$+ |2 - 3t| + \left| \frac{4}{3} - 3t \right| + \left| \frac{5}{3} - 3t \right| + \frac{22}{3} \Bigg).$$

При выполнении условий

$$s \in \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right], \quad t \in \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right] \quad (3.5)$$

справедливы равенства  $d_i(V(s, t)) = 1$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , поэтому  $\alpha(V(s, t)) = 5$ .

Обозначим

$$M(s, t) := \max_{1 \leq k \leq 6} \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} (-\lambda_k(x)).$$

Вычисления показывают, что

$$M(s, t) = \max \left\{ \frac{2}{3}, 2 - 3s, 3s - 1, 2 - 3t, 3t - 1 \right\}. \quad (3.6)$$

Величину  $\xi(V(s, t))$  найдём с помощью (1.25). Имеем

$$\begin{aligned} M(s, t) &= \frac{2}{3}, \quad s \in \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right] \text{ и } t \in \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right]; \\ M(s, t) &> \frac{2}{3}, \quad s \notin \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right] \text{ или } t \notin \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right]. \end{aligned}$$

Применяя (1.25), получаем

$$\begin{aligned} \xi(V(s, t)) &= 6M(s, t) + 1 = 5, \quad s \in \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right] \text{ и } t \in \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right]; \\ \xi(V(s, t)) &= 6M(s, t) + 1 > 5, \quad s \notin \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right] \text{ или } t \notin \left[ \frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

График функции  $\xi = \xi(V(s, t))$  при  $s \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$ ,  $t \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$  приведен на рис. 3.2. Из (3.7) и (3.2) вытекает, что при выполнении условий (3.5) справедливы равенства  $\xi(V(s, t)) = \xi_5 = 5$ , т. е.  $V(s, t) \subset Q_5 \subset 5V(s, t)$ .

Легко убедиться, что центром тяжести любого из симплексов  $V(s, t)$  является центр куба  $Q_5$ , то есть точка  $\left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .

Семейство симплексов  $V(s, t)$  было описано в [35].

### 3.3 Уточнение оценки $\xi_6$

Из общей оценки  $n \leq \xi_n \leq \frac{n^2-3}{n-1}$  ( $n > 2$ ) имеем  $6 \leq \xi_6 \leq 6.6$ . С помощью численной минимизации функции  $\xi(S)$  авторам удалось существенно сузить промежуток, содержащий  $\xi_6$  (см. [19]).

Более точная оценка  $\xi_6$  сверху получается из рассмотрения симплекса  $S$  с вершинами  $(1, 0.657259, 1, 0, 0.823603, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 0, 0, 0.490244)$ ,  $(0, 1, 1, 0.176397, 0.657259, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 0, 1)$ ,  $(0.490244, 1, 0, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0.823603, 0, 0.342741, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0.490244, 1, 1, 0)$ . Вычисления по формулам (1.28) и (1.25) дают значения  $\alpha(S) = 6.016585\dots$ ,  $\xi(S) = 6.016587\dots$ . Из второго равенства следует, что  $6 \leq \xi_6 < 6.0166$ . Длина нового промежутка  $< 0.0166$ .

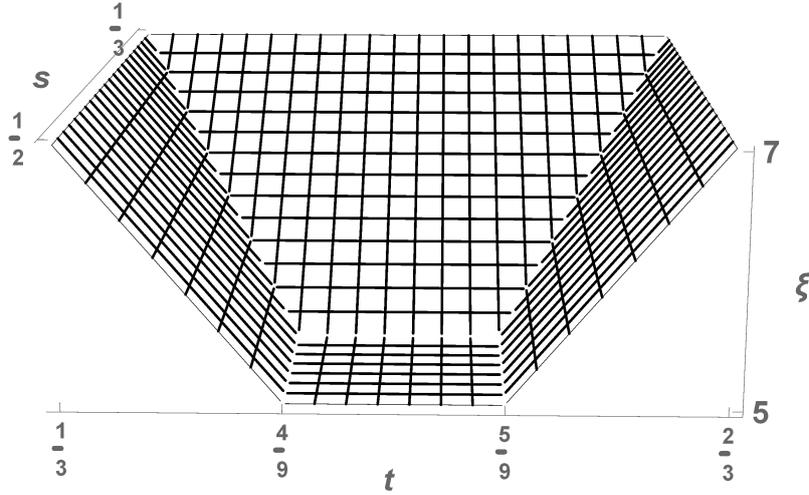


Рис. 3.2. График функции  $\xi = \xi(V(s, t))$

### 3.4 Точное значение $\xi_7$

Так как 8 есть число Адамара, из результатов п. 2.2 следует, что  $\xi_7 = 7$  и существует правильный симплекс  $W \subset Q_7$ , такой что  $\xi(W) = \xi_7 = 7$ . Как выяснилось, это свойство выполняется и для некоторых симплексов, не являющихся правильными. В этом смысле случай  $n = 7$  аналогичен случаю  $n = 3$  (см. п. 2.1).

Пусть  $W(t)$  — симплекс с вершинами  $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, t, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1 - t, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0, t, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1 - t, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0, t, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1 - t, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ . Очевидно, при  $0 \leq t \leq 1$  симплекс  $W(t)$  содержится в  $Q_7$ . Матрица  $\mathbf{A}(t)$  имеет вид

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & t & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-t & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-t & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & t & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-t & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При любом  $t$  верно  $\det(\mathbf{A}(t)) = 8$ . Поэтому симплекс  $W(t)$  является невырожденным, причем

$$\text{vol}(W(t)) = \frac{|\det(\mathbf{A}(t))|}{7!} = \frac{1}{630} = 0.001587\dots$$

Покажем, что при  $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  симплекс  $7W(t)$  описан вокруг куба  $Q_7$ .

### 3.4. ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ $\xi_7$

Для симплекса  $W$  матрица  $[\mathbf{A}(t)]^{-1}$  имеет вид

$$[\mathbf{A}(t)]^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4t-1 & 3 & -1 & -5 & -1 & 3 & -1 & 3-4t \\ 1-4t & -3 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1 & 4t-3 \\ 1-4t & 5 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & 4t-3 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4t-3 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & 5 & 1-4t \\ 4t-3 & 1 & 5 & 1 & -3 & 1 & -3 & 1-4t \\ 3-4t & -1 & 3 & -1 & -5 & -1 & 3 & 4t-1 \\ 6 & -2 & -2 & 6 & 6 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы содержат коэффициенты базисных многочленов Лагранжа  $\mu_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq 8$ . По формулам (1.7) и (1.28) находим  $d_i(W)$  и  $\alpha(W)$ :

$$d_i(W) = \frac{16}{|1-4t| + |3-4t| + 14}, \quad i \neq 4; \quad d_4(W) = 1;$$

$$\alpha(W) = \frac{1}{8}(3|1-4t| + 3|3-4t| + 50) = \begin{cases} 7, & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{31}{4} - 3t, & t < \frac{1}{4}, \\ 3t + \frac{19}{4}, & t > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

При  $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  верно  $d_i(W) = 1$ , поэтому  $\alpha(W) = \sum_{i=1}^7 \frac{1}{d_i(W)} = 7$ .

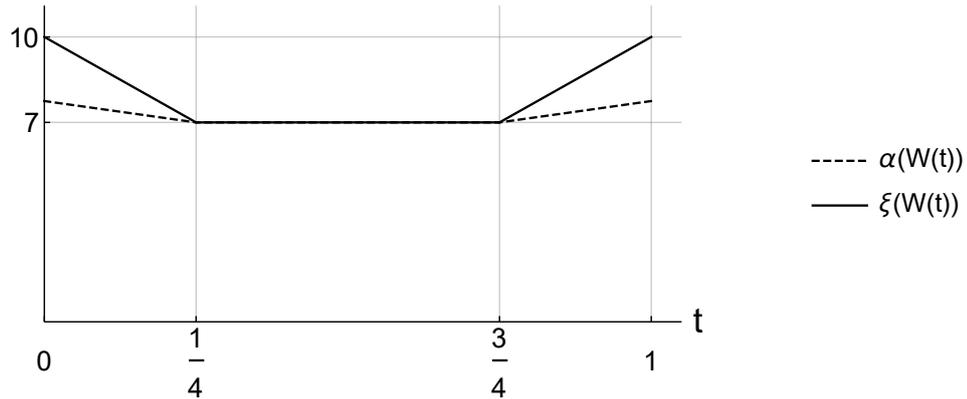


Рис. 3.3. Графики функций  $\alpha(W(t))$  и  $\xi(W(t))$

Теперь вычислим  $\xi(W)$ , применяя (1.25):

$$\xi(W) = 8 \max_{1 \leq k \leq 8} \max_{x \in \text{ver} Q_7} (-\mu_k(x)) + 1 = \begin{cases} 7, & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ 10 - 12t, & t < \frac{1}{4}, \\ 12t - 2, & t > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Итак, при  $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}$  справедливо  $\alpha(W) = \xi(W) = 7$ . Эти равенства означают, что симплекс  $7W$  описан вокруг куба  $Q_7$ . Графики функций  $\alpha(W(t))$  и  $\xi(W(t))$  при  $t \in [0, 1]$  приведены на рис. 3.3.

Авторам удалось построить еще одно семейство симплексов, обладающих аналогичными свойствами, но отличных от  $W(t)$ . Пусть  $Y(t)$  — симплекс с вершинами  $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, t, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1 - t, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 0, t, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1 - t, 0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1, t, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1 - t, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ . Применяя формулы (1.25), (1.28), получаем

$$\alpha(Y(t)) = \frac{1}{8} (2(|1 - 4t| + |3 - 4t| + 25) + |5 - 12t| + |7 - 12t|),$$

$$\xi(Y(t)) = \begin{cases} 14 - 20t, & t \leq \frac{1}{4}, \\ -12t + 12, & \frac{1}{4} < t < \frac{5}{12}, \\ 7, & \frac{5}{12} \leq t \leq \frac{7}{12}, \\ 12t, & \frac{7}{12} < t < \frac{3}{4}, \\ 20t - 6, & t \geq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Графики функций  $\alpha(Y(t))$  и  $\xi(Y(t))$  приведены на рис. 3.4.

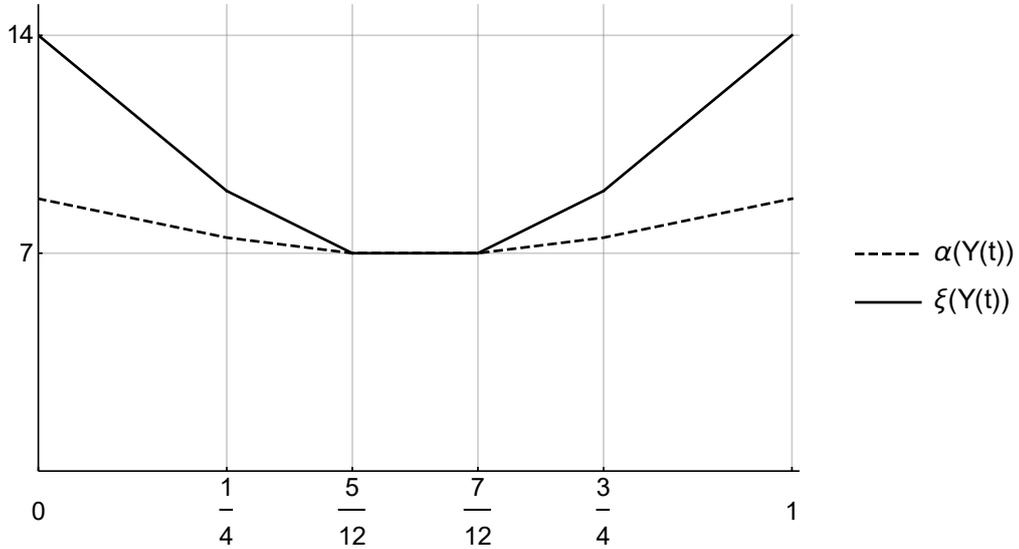


Рис. 3.4. Графики функций  $\alpha(Y(t))$  и  $\xi(Y(t))$

Семейства симплексов  $W(t)$  и  $Y(t)$  различны. Достаточно заметить, что у этих симплексов различаются наборы длин рёбер.

### 3.5 Уточнение оценки $\xi_8$

Уточнённая оценка сверху для  $\xi_8$  получается из рассмотрения симплекса  $S$  с вершинами  $(0, 0.487324, 0.999584, 0.000015, 0, 0, 1, 0.000054)$ ,

(0, 0.021247, 0, 0.994519, 0.997612, 0.007806, 0.000049, 0.000363),  
 (0.994191, 0, 1, 1, 0.093607, 1, 0, 0.404681),  
 (0.999981, 0, 0, 0.320835, 0, 0, 0.99927, 1),  
 (0.998303, 1, 0.989783, 1, 1, 0.269099, 1, 0),  
 (0.995842, 1, 0, 0, 0.414823, 0.999313, 0.018129, 0),  
 (0.671663, 0.99946, 1, 0.031503, 0.99879, 0.000322, 0, 1),  
 (0.00547, 0.021783, 0.452784, 0.077069, 1, 0.999996, 1, 0.997195),  
 (0, 0.99992, 0.123118, 1, 0.000852, 0.999914, 0.483036, 0.936099).

Вычисления по формулам (1.25) и (1.28) дают значения  $\alpha(S) = 8.1257\dots$ ,  $\xi(S) = 8.13545\dots$ . Таким образом, справедливы неравенства  $8 \leq \xi_8 < 8.1355$ . Симплекс  $S$  найден в работе [23].

### 3.6 Точное значение $\xi_9$

Отметим, что точное значение  $\xi_9$  равно 9. Более того, существует целое семейство симплексов  $S \subset Q_9$ , таких что  $\xi(S) = 9$ .

Пусть  $S = S(t)$  — симплекс с вершинами  $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ,  
 $(1, 1, 0, 1, t, 1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 1, 1 - t, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1, 1, t, 0, 0, 1, 1)$ ,  
 $(0, 1, 1, 0, 1 - t, 1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1, t, 0, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 0, 1 - t, 1, 1, 1, 0)$ ,  
 $(0, 1, 1, 0, t, 1, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 1, 1 - t, 1, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$ .

Если  $0 \leq t \leq 1$ , то  $S(t) \subset Q_9$ . Опуская подробные вычисления, приведём характеристики симплекса  $S$ :

$$\det(\mathbf{A}) = 25, \quad \text{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{7!} = \frac{5}{1008} = 0.00496\dots$$

$$d_i(S) = \frac{50}{|10 - 25t| + |15 - 25t| + 45}, \quad i \neq 5; \quad d_5 = 1;$$

$$\alpha(S) = \begin{cases} 9, & \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{3}{5}, \\ \frac{61}{5} - 8t, & t < \frac{2}{5}, \\ 8t + \frac{21}{5}, & t > \frac{3}{5}, \end{cases} \quad \xi(S) = \begin{cases} 9, & \frac{2}{5} \leq t \leq \frac{3}{5}, \\ 25 - 40t, & t < \frac{2}{5}, \\ 40t - 15, & t > \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Пусть  $\frac{2}{5} \leq t \leq \frac{3}{5}$ , тогда  $\alpha(S) = \xi(S) = 9$ . Так как  $\xi_9 \geq 9$ , имеем  $\xi_9 = 9$ . Из равенства  $\alpha(S) = \xi(S)$  следует, что симплекс  $9S$  описан вокруг куба  $Q_9$ . Семейство симплексов  $S(t)$  было впервые описано в [35].

### 3.7 Уточнение оценки $\xi_{10}$

Для уточнения оценки  $\xi_{10}$  рассмотрим симплекс  $S$  с вершинами  
 (0.041047, 0.037879, 1, 0.330575, 1, 0, 1, 0.048055, 1, 0.291904),  
 (0.960780, 0, 1, 0.250305, 0.999706, 0.916678, 0.014938, 1, 0.000089, 1),  
 (1, 0.734044, 0, 0, 1, 0.999928, 0.204362, 0, 0.488617, 0),

(1, 0.046996, 0.920973, 0.950917, 0, 1, 1, 0.999620, 1, 0.053571),  
 (0, 1, 0.004464, 1, 1, 0.374532, 1, 1, 0, 0.006593),  
 (0, 0, 0.392400, 1, 0, 0.752041, 0, 0, 0, 0.002029),  
 (1, 0.817225, 0, 1, 0.801914, 0, 0.019363, 0.221740, 0.782488, 0.991481),  
 (0, 0.999979, 0.017534, 0.532962, 0.581550, 1, 0.222236, 0.231594, 1, 1),  
 (0.992805, 1, 1, 0.366910, 0, 0.644450, 1, 0.040009, 0.000828, 1),  
 (0.305125, 0, 0.004921, 0.003458, 0, 0.041917, 1, 1, 0.174159, 1),  
 (0.051508, 0.993242, 1, 0, 0.026295, 0, 0.000001, 1, 0.928228, 0.000312).

Имеем  $\alpha(S) = 10.234152$ ,  $\xi(S) = 10.234155 \dots$ . Последнее равенство даёт оценку  $\xi_{10} < 10.2342$ . Симплекс  $S$  найден в работе [23].

В таблице 3.2 приводятся наиболее точные из известных оценок первых десяти чисел  $\xi_n$ .

Таблица 3.2. Оценки  $\xi_n$  ( $1 \leq n \leq 10$ )

$n$	$\xi_n$	$n$	$\xi_n$
1	1	6	$6 \leq \xi_6 < 6.0166$
2	$\frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.3416 \dots$	7	7
3	3	8	$8 \leq \xi_8 < 8.1355$
4	$4 \leq \xi_4 \leq \frac{19+5\sqrt{13}}{9} = 4.1141 \dots$	9	9
5	5	10	$10 \leq \xi_{10} < 10.2342$

### 3.8 Уточнение оценок $\xi_n$ при больших $n$

Проведённые авторами численные эксперименты показывают, что для больших  $n$  ( $n > 10$ ) оценивание чисел  $\xi_n$  путем численной минимизации величины  $\xi(S)$  для  $S \subset Q_n$  оказывается весьма трудоёмкой задачей. Число вершин  $n$ -мерного симплекса равно  $n + 1$ , каждая из них имеет  $n$  координат. Поэтому для вычисления  $\xi_n$  требуется найти минимум функции  $n(n + 1)$  переменных.

Опишем результаты оценивания  $\xi_n$ , полученные другим путем. Эти оценки опубликованы в статье [21]. Теорема 2.5 утверждает, что если  $S \subset Q_n$  — симплекс, имеющий максимальный объём, то  $\xi(S) \asymp \xi_n$ . Как оказывается, вычисление  $\xi(S)$  для симплексов максимального объёма в ряде случаев позволяет

### 3.8. УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК $\xi_N$ ПРИ БОЛЬШИХ $N$

---

существенно уточнить верхнюю границу в двойном неравенстве

$$n \leq \xi_n \leq \frac{n^2 - 3}{n - 1} \quad (3.8)$$

(см. соотношения (2.7) из п. 2.5).

Для построения симплексов максимального объема в  $Q_n$  нами использовались данные о максимальных  $-1/1$ -определителях, приведенные на сайте <http://www.indiana.edu/~maxdet/>. На этом сайте представлены максимальные  $-1/1$ -определители до порядка 119 включительно. Следует отметить, что среди перечисленных определителей имеются и такие, максимальность которых пока не доказана, а для некоторых порядков определители вообще не приводятся. Нельзя также утверждать, что при каждом  $n$  известны все неэквивалентные матрицы, для которых значение определителя максимально.

Наиболее точные из найденных верхних границ  $\xi_n$  содержатся в таблицах 3.3, 3.4 и 3.5. Наряду с верхней границей  $\xi_n$  мы приводим также сведения о способе получения данной оценки. При этом мы применяем следующие обозначения:

- А — оценка получена из неравенства (3.8) Использование максимального симплекса не позволило улучшить эту оценку.
- В — приводится наименьшее значение  $\xi(S)$ , полученное из рассмотрения одного или нескольких симплексов максимального объема в  $Q_n$ . Это значение меньше, чем правая часть (3.8)
- АВ — полученное для максимальных симплексов значение  $\xi(S)$  совпадает с правой частью (3.8)
- Н — число  $n+1$  является адамаровым. Приводится точное значение  $\xi_n = n$ .
- А\* — использовано неравенство (3.8), так как для данного  $n$  на сайте не приводится ни одного максимального определителя.

Для  $n = 57$  в таблице используется обозначение  $q = \frac{34018994107517188105}{590424166322794597}$ .

ГЛАВА 3. УТОЧНЕНИЕ ВЕРХНИХ ОЦЕНОК  $\xi_N$

Таблица 3.3. Оценки  $\xi_n$  ( $11 \leq n \leq 58$ )

$n$	$\xi_n \leq$		$n$	$\xi_n \leq$		$n$	$\xi_n \leq$	
11	11	H	27	27	H	43	43	H
12	$\frac{184}{15} = 12.267$	B	28	$\frac{781}{27} = 28.926$	A	44	$\frac{1933}{43} = 44.953$	A
13	$\frac{529}{39} = 13.564$	B	29	$\frac{5963}{203} = 29.374$	B	45	$\frac{2493}{55} = 45.327$	B
14	$\frac{193}{13} = 14.846$	A	30	$\frac{2981}{98} = 30.418$	B	46	$\frac{2113}{45} = 46.956$	A
15	15	H	31	31	H	47	47	H
16	$\frac{163}{10} = 16.300$	B	32	$\frac{1600}{49} = 32.653$	B	48	$\frac{2301}{47} = 48.957$	A
17	$\frac{296}{17} = 17.412$	B	33	$\frac{543}{16} = 33.938$	A	49	$\frac{689}{14} = 49.214$	B
18	$\frac{321}{17} = 18.882$	AB	34	$\frac{5237}{152} = 34.454$	B	50	$\frac{1162}{23} = 50.522$	B
19	19	H	35	35	H	51	51	H
20	$\frac{596}{29} = 20.552$	B	36	$\frac{875}{24} = 36.458$	B	52	$\frac{2701}{51} = 52.961$	A
21	$\frac{219}{10} = 21.900$	A	37	$\frac{4139}{111} = 37.288$	B	53	$\frac{36707}{689} = 53.276$	B
22	$\frac{481}{21} = 22.905$	A	38	$\frac{2309}{60} = 38.483$	B	54	$\frac{2017}{37} = 54.514$	B
23	23	H	39	39	H	55	55	H
24	$\frac{339}{14} = 24.214$	B	40	$\frac{1808}{45} = 40.178$	B	56	$\frac{394}{7} = 56.286$	B
25	$\frac{379}{15} = 25.267$	B	41	$\frac{8479}{205} = 41.361$	B	57	$q = 57.618$	B
26	$\frac{4853}{182} = 26.665$	B	42	$\frac{40204}{945} = 42.544$	B	58	$\frac{31455}{539} = 58.358$	B

3.8. УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК  $\xi_N$  ПРИ БОЛЬШИХ  $N$

Таблица 3.4. Оценки  $\xi_n$  ( $59 \leq n \leq 106$ )

$n$	$\xi_n \leq$		$n$	$\xi_n \leq$		$n$	$\xi_n \leq$	
59	59	H	75	75	H	91	91	H
60	$\frac{1985}{33} = 60.152$	B	76	$\frac{5773}{75} = 76.973$	A	92	$\frac{8461}{91} = 92.978$	A
61	$\frac{11219}{183} = 61.306$	B	77	$\frac{2963}{38} = 77.974$	A	93	$\frac{4323}{46} = 93.978$	A
62	$\frac{21299}{341} = 62.460$	B	78	$\frac{4081}{52} = 78.481$	B	94	$\frac{5857}{62} = 94.468$	B
63	63	H	79	79	H	95	95	H
64	$\frac{4093}{63} = 64.968$	A	80	$\frac{3937}{49} = 80.347$	B	96	$\frac{9213}{95} = 96.979$	A
65	$\frac{33949}{520} = 65.287$	B	81	$\frac{3653}{45} = 81.178$	B	97	$\frac{18863}{194} = 97.232$	B
66	$\frac{5918}{89} = 66.494$	B	82	$\frac{8990}{109} = 82.477$	B	98	$\frac{4234}{43} = 98.465$	B
67	67	H	83	83	H	99	99	H
68	$\frac{4621}{67} = 68.970$	A	84	$\frac{42406}{501} = 84.643$	B	100	$\frac{714817}{7110} = 100.537$	B
69	$\frac{2379}{34} = 69.971$	A	85	$\frac{152113}{1785} = 85.217$	B	101	$\frac{51097}{505} = 101.182$	B
70	$\frac{3313}{47} = 70.489$	B	86	$\frac{1643}{19} = 86.474$	B	102	$\frac{19555}{191} = 102.382$	B
71	71	H	87	87	H	103	103	H
72	$\frac{5181}{71} = 72.972$	A	88	$\frac{7741}{87} = 88.977$	A*	104	$\frac{10813}{103} = 104.981$	A*
73	$\frac{48128}{657} = 73.254$	B	89	$\frac{3959}{44} = 89.977$	A*	105	$\frac{5511}{52} = 105.981$	A
74	$\frac{2458}{33} = 74.485$	B	90	$\frac{1538}{17} = 90.471$	B	106	$\frac{7021}{66} = 106.379$	B

Таблица 3.5. Оценки  $\xi_n$  ( $107 \leq n \leq 118$ )

<b>n</b>	$\xi_n \leq$		<b>n</b>	$\xi_n \leq$	
107	107	H	114	$\frac{24247}{212} = 114.373$	B
109	$\frac{107131}{981} = 109.206$	B	115	115	H
110	$\frac{22627}{205} = 110.376$	B	116	$\frac{13453}{115} = 116.983$	A*
111	111	H	117	$\frac{132583}{1131} = 117.226$	B
112	$\frac{6727}{60} = 112.117$	B	118	$\frac{8641}{73} = 118.370$	B
113	$\frac{25591}{226} = 113.235$	B			

# Глава 4

## Симплексы специального вида

Выше уже рассматривались некоторые специальные симплексы: имеющие максимальный объём в  $Q_n$ , жёсткий симплекс и др. В этой главе мы опишем свойства ряда других замечательных симплексов, а именно удовлетворяющих включениям  $S \subset Q_n \subset nS$ , совершенных и равноотсекающих.

### 4.1 Симплексы с коэффициентом поглощения $n$

Как мы неоднократно отмечали, коэффициент поглощения единичного куба находящимся в нём симплексом ограничен снизу размерностью пространства. Это эквивалентно неравенству  $\xi_n \geq n$ . Если же для некоторого симплекса  $S \subset Q_n$  выполняется  $\xi(S) = n$ , то  $\alpha(S) = \xi(S) = n$  и  $\xi_n = n$ . Кроме того, для любого  $i$  верно  $d_i(S) = 1$ . Наоборот, равенство  $\xi_n = n$  означает, что существует симплекс  $S \subset Q_n$ , для которого  $\alpha(S) = \xi(S) = n$ , т.е.  $S \subset nS$ . Однако симплексы, для которых справедливы включения  $S \subset Q_n \subset nS$ , имеются не для всех  $n$ . Первое такое значение  $n$  равно 2. Именно,  $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\dots > 2$ ; нетривиальное доказательство приводится в [13]. Другим путём неравенство  $\xi_2 > 2$  выводится в п. 4.1.1.

К настоящему моменту равенство  $\xi_n = n$  доказано для  $n = 5$ ,  $n = 9$  и бесконечной совокупности тех  $n$ , для которых  $n+1$  есть число Адамара. В частности, таковыми являются все нечётные  $n$  из промежутка  $1 \leq n \leq 11$ . Ни одного чётного  $n$  с условием  $\xi_n = n$  пока не обнаружено. Более того, остаётся неясным, существует ли хотя бы одно такое чётное  $n$ .

Симплексы, для которых верны включения  $S \subset Q_n \subset nS$ , если они существуют, обладают целым рядом замечательных свойств. Такие симплексы изучались в статье авторов [20]. Приведём ряд результатов из этой статьи.

Ниже  $x^{(j)}$  — вершины,  $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$  — базисные многочлены Лагранжа  $n$ -мерного симплекса  $S$ . Через  $c(G)$  обозначается центр тяжести выпуклого тела  $G$ .

**Теорема 4.1.** Пусть  $S \subset Q_n \subset nS$ . Тогда выполняются равенства

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_1(x) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_{n+1}(x) = 1, \quad (4.1)$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)) = \frac{n-1}{n+1}, \quad (4.2)$$

$$c(S) = c(Q_n) = \left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right), \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2 \quad (1 \leq i \leq n), \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1} \quad (1 \leq j \leq n+1). \quad (4.5)$$

Аналогичные (4.1)–(4.2) соотношения имеют место и в случае, когда максимумы берутся по  $x \in Q_n$ .

*Доказательство.* Так как  $S \subset Q_n \subset nS$ , имеем  $\xi(S) = \alpha(S) = n$ . Из равенства  $\xi(S) = \alpha(S)$  следует, что симплекс  $nS$  описан вокруг  $Q_n$ . Поэтому справедливо соотношение (1.26), означающее, что  $\max(-\lambda_j(x))$  не зависит от  $j$ . Формула (1.25) даёт при любом  $j = 1, \dots, n+1$

$$n = \xi(S) = (n+1) \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1,$$

откуда

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = \frac{n-1}{n+1}. \quad (4.6)$$

Таким образом, выполняется соотношение (4.2).

В наших обозначениях

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = - \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} l_{ij} - l_{n+1,j}, \quad (4.7)$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_j(x) = \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j}. \quad (4.8)$$

Поскольку  $x^{(j)} \in Q_n$ , справедливо неравенство

$$\max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) \geq \lambda_j(x^{(j)}) = 1. \quad (4.9)$$

Напомним, что  $e = (1, \dots, 1)$ . Применяя (4.6)–(4.9), имеем цепочку соотношений:

$$2\lambda_j \left( \frac{1}{2} e \right) = 2\lambda_j \left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) = \sum_{i=1}^n l_{ij} + 2l_{n+1,j} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] + \left[ \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] = \\
 &= \max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) - \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) \geq 1 - \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n+1}. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Итак, при каждом  $j$

$$\lambda_j \left( \frac{1}{2} e \right) \geq \frac{1}{n+1}. \quad (4.11)$$

Покажем, что каждое соотношение (4.11) является равенством. Числа  $\lambda_j \left( \frac{1}{2} e \right)$  суть барицентрические координаты точки  $x = \frac{1}{2} e$ , поэтому

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left( \frac{1}{2} e \right) = 1.$$

Если при некотором  $j$  неравенство (4.11) было бы строгим, то левая часть последнего соотношения была бы строго больше правой, а это не так. Следовательно,

$$\lambda_j \left( \frac{1}{2} e \right) = \frac{1}{n+1}, \quad 1 \leq j \leq n+1. \quad (4.12)$$

Первая и последняя величины в цепочке (4.10) оказываются равными, поэтому неравенство в (4.10), а значит, и неравенство в (4.9) обращаются в равенства. Тем самым справедливо соотношение (4.1). Поскольку  $\lambda_j$  — линейная функция, каждое из равенств (4.1)–(4.2) эквивалентно аналогичному соотношению, в котором максимумы берутся по  $x \in Q_n$ .

Равенство (4.3) следует из (4.12) и определения барицентрических координат:

$$c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j \left( \frac{1}{2} e \right) x^{(j)} = \frac{1}{2} e = \left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right).$$

Теперь докажем (4.4)–(4.5). Включение  $S \subset Q_n$  влечёт  $d_i(S) \leq 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Но, поскольку  $\alpha(S) = n$ , из (1.28) следует, что каждый осевой диаметр  $d_i(S)$  равен 1. Применяя (1.7), имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 1.$$

Следовательно,  $\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| = 2$ , т. е. выполняются равенства (4.4). Наконец, заметим, что при любом  $j = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n |l_{ij}| = \left[ \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] - \left[ \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} l_{ij} + l_{n+1,j} \right] =$$

$$= \max_{x \in Q_n} \lambda_j(x) + \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) = 1 + \frac{n-1}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Мы применили (4.1)–(4.2) Тем самым справедливы равенства (4.5).

Отметим здесь другой способ доказательства соотношения

$$\max_{x \in Q_n} \lambda_1(x) = \dots = \max_{x \in Q_n} \lambda_{n+1}(x) = 1. \quad (4.13)$$

Из доказанного равенства  $c(S) = c(Q_n)$  следует, что  $-S \subset -Q_n \subset -nS$ . Но  $-Q_n = Q_n$ , значит,  $S \subset Q_n \subset -nS$ . Обозначим через  $\Gamma_j$  гиперплоскость с уравнением  $\lambda_j(x) = 1$ . Заметим, что каждая вершина симплекса  $-nS$  при некотором  $j$  принадлежит  $\Gamma_j$ . Именно, если  $v$  — вершина  $S$ , лежащая в гиперплоскости  $\lambda_j(x) = 0$ , то её образ  $w$  при гомотетии с коэффициентом  $(-n)$  и с центром гомотетии в точке  $c := c(S)$  принадлежит  $\Gamma_j$ . Действительно,  $w = -n(v - c) + c$ . Положим  $\mu_j(x) = \lambda_j(x) - \lambda_j(0)$ . Так как  $\mu_j$  — аддитивный и однородный функционал на  $\mathbb{R}^n$ , имеем

$$\mu_j(w) = \mu_j(-n(v - c) + c) = -n\mu_j(v) + n\mu_j(c) + \mu_j(c) = -n\mu_j(v) + (n+1)\mu_j(c),$$

$$\lambda_j(w) = \lambda_j(0) + (-n)[\lambda_j(v) - \lambda_j(0)] + (n+1)[\lambda_j(c) - \lambda_j(0)].$$

Барицентрические координаты точки  $c = c(S)$  равны  $\lambda_j(c) = \frac{1}{n+1}$ . Кроме того,  $\lambda_j(v) = 0$ . Следовательно,

$$\lambda_j(w) = (n+1)\lambda_j(0) + (n+1) \left[ \frac{1}{n+1} - \lambda_j(0) \right] = 1.$$

Значит,  $w \in \Gamma_j$ . Итак, гомотетический образ любой из  $n$  вершин симплекса  $S$ , принадлежащих грани  $S$  с уравнением  $\lambda_j(x) = 0$ , лежит в гиперплоскости  $\lambda_j(x) = 1$ . Гомотетический образ оставшейся вершины  $x^{(j)}$ , очевидно, принадлежит полупространству  $\lambda_j(x) < 1$ . Поэтому для любого  $j$  симплекс  $-nS$  содержится в полупространстве  $\lambda_j(x) \leq 1$ . Включение  $Q_n \subset -nS$  означает, что куб  $Q_n$  также принадлежит этому полупространству. Остаётся заметить, что в силу включения  $S \subset Q_n$  вершина  $x^{(j)}$  симплекса  $S$  содержится в  $Q_n$ . Поскольку  $\lambda_j(x^{(j)}) = 1$ , имеет место соотношение (4.13).

Теорема полностью доказана.  $\square$

Отметим некоторые следствия из теоремы 4.1.

**4.1.1.** Справедливо неравенство  $\xi_2 > 2$ .

Действительно,  $\xi_2 \geq 2$ . Нетрудно показать, что минимальное значение  $\xi(S)$  для  $S \subset Q_2 = [0, 1]^2$  достигается на треугольнике  $S'$  с вершинами  $(1, s)$ ,  $(t, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $0 \leq s, t \leq 1$ . Допустим, что  $\xi_2 = 2$ . Тогда  $\xi(S') = 2$ , значит,  $S' \subset Q_2 \subset 2S'$ . По теореме 4.1  $c(S') = c(Q_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Поэтому

$$\frac{t+1}{3} = \frac{s+1}{3} = \frac{1}{2},$$

#### 4.1. СИМПЛЕКСЫ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ $N$

откуда  $s = t = \frac{1}{2}$ . Для треугольника  $S'$  с вершинами  $(1, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(0, 0)$  выполняется

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисные многочлены Лагранжа для  $S'$  имеют вид

$$\lambda_1(x) = \frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2, \quad \lambda_2(x) = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2, \quad \lambda_3(x) = -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 1.$$

По формуле (1.25)

$$\xi(S') = 3 \cdot \max_{1 \leq j \leq 3, x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_j(x)) + 1 = 3.$$

Итак,  $\xi(S')$  равно 3, а не 2, как мы предположили. Это противоречие завершает доказательство. Неравенство  $\xi_2 > 2$  получается здесь более простым путём, чем в [13].

**4.1.2.** Пусть  $n$  — чётное. Тогда не существует симплекса  $S$ , для которого одновременно выполняются включения  $S \subset Q \subset nS$  и  $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$ .

Предположим противное: существует симплекс  $S$ , вершины  $x^{(j)}$  которого совпадают с вершинами  $Q_n$  и для которого  $S \subset Q_n \subset nS$ . Из теоремы 4.1 имеем

$$c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left( \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right),$$

откуда

$$u := \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} = \left( \frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2} \right).$$

Поскольку  $x^{(j)} \in \text{ver}(Q_n)$ , координаты точки  $u$  являются целочисленными. Поэтому при чётном  $n$  последнее равенство невозможно. Мы получили противоречие.

**4.1.3.** Включения  $S \subset Q_n \subset nS$  могут быть продолжены в обе стороны следующим образом:

$$\dots \subset \frac{1}{n^2}S \subset \frac{1}{n}Q_n \subset S \subset Q_n \subset nS \subset n^2Q_n \subset n^3S \subset \dots$$

Достаточно привлечь (4.3).

**4.1.4.** Пусть  $S \subset Q_n \subset nS$ . Тогда для  $j = 1, \dots, n+1$

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} = 1 - l_{n+1,j}, \quad \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| = \frac{n-1}{n+1} + l_{n+1,j}.$$

Докажем это. Пусть  $x^{(j)}$  — вершины  $S$ ,  $c = c(S)$ . В соответствии с (4.3) имеем  $c = c(S) = \frac{1}{2}e$ . По свойствам барицентрических координат

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(e)x^{(j)} = e, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0)x^{(j)} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\lambda_j(e) + \lambda_j(0)}{2} x^{(j)} = \frac{1}{2}e = c.$$

Поэтому  $\frac{\lambda_j(e) + \lambda_j(0)}{2}$  суть барицентрические координаты точки  $c$ . Поскольку  $c$  — центр тяжести  $S$ , каждое из этих чисел равно  $\frac{1}{n+1}$ . Таким образом,

$$\lambda_j(e) + \lambda_j(0) = \frac{2}{n+1}. \quad (4.14)$$

Из равенства (4.14) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} - \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| + 2\lambda_j(0) &= \frac{2}{n+1}, \\ \sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} - \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| &= 2 \left[ \frac{1}{n+1} - \lambda_j(0) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применим ещё (4.5), записав это равенство в виде

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} + \sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| = \frac{2n}{n+1}. \quad (4.16)$$

Так как  $\lambda_j(0) = l_{n+1,j}$ , то сложение (4.15) и (4.16) даёт

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} \geq 0} l_{ij} = 1 - l_{n+1,j}.$$

Вычитая (4.15) из (4.16), получаем

$$\sum_{i \leq n: l_{ij} < 0} |l_{ij}| = \frac{n-1}{n+1} + l_{n+1,j}.$$

Следствие доказано.

**4.1.5.** Для симплекса  $S$  введём в рассмотрение  $n$ -мерные полосы

$$G_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{n-1}{n+1} \leq \lambda_j(x) \leq 1 \right\}.$$

## 4.2. СОВЕРШЕННЫЕ СИМПЛЕКСЫ

---

Пусть  $S \subset Q_n \subset nS$ . Тогда  $Q_n \subset \bigcap_{j=1}^{n+1} G_j$ .

Действительно, справедливо соотношение

$$\min_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_1(x) = \dots = \min_{x \in \text{ver}(Q_n)} \lambda_{n+1}(x) = -\frac{n-1}{n+1}. \quad (4.17)$$

Оно эквивалентно (4.2), поскольку  $\min \lambda_j(x) = -\max(-\lambda_j(x))$ . Такое же соотношение выполняется и в случае, когда минимумы берутся по  $x \in Q_n$ . Из (4.1) и (4.17) вытекает, что  $Q_n \subset G_j$  при каждом  $j$ . Поэтому  $Q_n$  содержится в пересечении  $G_j$ .

**4.1.6.** Предположим, что  $S \subset Q_n \subset nS$ . Тогда симплекс  $S$  обладает следующим свойством: замена любой его вершины на любую точку  $Q_n$  не увеличивает объём симплекса. Приведём доказательство.

Пусть  $1 \leq j \leq n+1$  и  $y \in Q_n$ . Так как  $-\frac{n-1}{n+1} \leq \lambda_j(y) \leq 1$  и  $\lambda(x^{(j)}) = 1$ , справедливо неравенство

$$\text{dist}(y; B_j) \leq \text{dist}(x^{(j)}; B_j). \quad (4.18)$$

Здесь  $B_j$  —  $(n-1)$ -мерная гиперплоскость, задаваемая уравнением  $\lambda_j(x) = 0$ ,

$$\text{dist}(y; B_j) := \min_{z \in B_j} \|y - z\|$$

— расстояние от  $y$  до  $B_j$ . Обозначим через  $S'$  симплекс с вершинами  $x^{(1)}, \dots, x^{(j-1)}, y, x^{(j+1)}, \dots, x^{(n+1)}$ , иначе говоря, выпуклую оболочку точек  $x^{(k)}$  для  $k \neq j$  и точки  $y$ . Из неравенства (4.18) получается, что  $\text{vol}(S') \leq \text{vol}(S)$ .

По терминологии статьи [29] симплекс  $S \subset Q_n$ , для которого замена любой вершины на любую точку  $Q_n$  уменьшает его объём, называется жёстким (rigid). В соответствии с последним результатом симплекс  $S$ , удовлетворяющий включениям  $S \subset Q_n \subset nS$ , естественно назвать *почти-жёстким* (quasi-rigid).

## 4.2 Совершенные симплексы

Невырожденный  $n$ -мерный симплекс  $S$  назовём *совершенным симплексом относительно  $n$ -мерного куба  $Q$* , если  $S \subset Q \subset \xi_n S$  и куб  $Q$  вписан в симплекс  $\xi_n S$ , т. е. граница  $\xi_n S$  содержит все вершины  $Q$ . Симплекс, совершенный относительно куба  $Q_n$ , назовём просто *совершенным*. На данный момент известны лишь три значения  $n$ , при которых в  $\mathbb{R}^n$  существуют совершенные симплексы, а именно  $n = 1, 3, 5$ ; во всех этих случаях  $\xi_n = n$ .

Нам потребуется следующее утверждение.

**Теорема 4.2.** Пусть  $S \subset Q_n$ . Вершина  $v$  куба  $Q_n$  принадлежит  $j$ -й грани симплекса  $\xi(S)S$  тогда и только тогда, когда

$$-\lambda_j(v) = \max_{1 \leq k \leq n+1, x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)). \quad (4.19)$$

*Доказательство.* Положим  $\xi := \xi(S)$ . Заметим сначала, что уравнение гиперплоскости, содержащей  $j$ -ю грань симплекса  $\xi S$ , имеет вид

$$\lambda_j(x) = \frac{1 - \xi}{n + 1}. \quad (4.20)$$

Действительно, пусть это уравнение имеет вид  $\lambda_j(x) = a$ . Функция  $\lambda_j(x)$  — многочлен первой степени. Так как центр тяжести симплекса  $S$  принадлежит гиперплоскости  $\lambda_j(x) = \frac{1}{n+1}$ , а  $j$ -я грань  $S$  принадлежит гиперплоскости  $\lambda_j(x) = 0$ , то справедливо соотношение

$$\frac{a - \frac{1}{n+1}}{0 - \frac{1}{n+1}} = \xi,$$

откуда  $a = \frac{1-\xi}{n+1}$ .

Приведём другое обоснование этого факта. Пусть  $c$  — центр тяжести симплекса  $S$ ;  $y$  — вершина  $S$ , отличная от  $x^{(j)}$ ;  $z$  — образ точки  $y$  при гомотетии с коэффициентом  $\xi$  относительно точки  $c$ . Тогда  $z - c = \xi(y - c)$  и  $z = \xi y + (1 - \xi)c$ . Функционал  $\mu_j(x) := \lambda_j(x) - \lambda_j(0)$  является линейным (аддитивным и однородным) на  $\mathbb{R}^n$ . Так как  $\lambda_j(y) = 0$  и  $\lambda_j(c) = \frac{1}{n+1}$ , то

$$\begin{aligned} \lambda_j(z) - \lambda_j(0) &= \mu_j(y) = \mu_j(\xi y + (1 - \xi)c) = \xi \mu_j(y) + (1 - \xi) \mu_j(c) = \\ &= \xi[\lambda_j(y) - \lambda_j(0)] + (1 - \xi)[\lambda_j(c) - \lambda_j(0)] = \frac{1 - \xi}{n + 1} - \lambda_j(0), \end{aligned}$$

откуда  $\lambda_j(z) = \frac{1-\xi}{n+1}$ . Поскольку  $z$  принадлежит  $j$ -й грани симплекса  $\xi S$ , то уравнение этой грани имеет вид (4.20).

Пусть теперь  $v \in \text{ver}(Q_n)$  таково, что выполняется (4.20). Так как

$$\xi = (n + 1) \max_{1 \leq k \leq n+1, x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1, \quad (4.21)$$

(см. (1.25)), то правая часть (4.19) совпадает с  $\frac{\xi-1}{n+1}$ , поэтому  $v$  принадлежит  $j$ -й грани симплекса  $\xi S$ . Наоборот, если  $v$  принадлежит  $j$ -й грани симплекса  $\xi S$ , то  $-\lambda_j(v) = \frac{\xi-1}{n+1}$ . В силу (4.21) это равенство эквивалентно (4.19).

Теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим вопрос о существовании совершенных симплексов в  $\mathbb{R}^n$  при различных  $n$ .

1)  $n = 1$ .

Этот случай весьма прост. Для отрезка  $S = [0, 1]$  верно  $S = Q_1$ . Поэтому  $\xi_1 = 1$  и  $S$  — единственный совершенный симплекс. Равенство  $\xi_1 = 1$  следует и из теоремы 2.2 в силу того, что 2 есть число Адамара.

2)  $n = 2$ .

## 4.2. СОВЕРШЕННЫЕ СИМПЛЕКСЫ

---

Для  $n = 2$  совершенных симплесов не существует. Это следует из результатов п. 2.1, где описан единственный (с точностью до ортогональных преобразований) симплекс  $S^*$ , для которого  $\xi(S^*) = \xi_2$ . Очевидно,  $S^*$  не является совершенным. Этот факт усматривается из рис. 2.1, поскольку нулевая вершина  $Q_2$  не принадлежит границе симплекса  $\xi(S^*)S^*$ .

3)  $n = 3$ .

Равенство  $\xi_3 = 3$  было установлено в п. 2.1. Отмечалось, что равенство  $\xi(S) = 3$  выполняется для двух (с точностью до замены переменных) тетраэдров. Рассмотрим эти случаи.

Сначала заметим, что при  $n = 3$  выполнены условия теоремы 2.2 (так как  $n + 1 = 4$  есть число Адамара). Теорема утверждает, что  $\xi_3 = 3$  и существует правильный симплекс  $S$ , вписанный в  $Q_3$ , для которого  $Q_3 \subset 3S$ . В качестве примера рассмотрим симплекс  $S_1$  с вершинами  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ . Для него

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.7) имеем  $\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 |l_{ij}| = 1$ , т. е.  $d_i(S_1) = 1$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Из (1.28)

следует, что  $\alpha(S_1) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i(S_1)} = 3$ . Выпишем базисные многочлены Лагранжа:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1}{2} (-x_1 - x_2 - x_3 + 2), & \lambda_2(x) &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2 - x_3), \\ \lambda_3(x) &= \frac{1}{2} (x_1 - x_2 + x_3), & \lambda_4(x) &= \frac{1}{2} (-x_1 + x_2 + x_3). \end{aligned}$$

Величину  $\xi(S_1)$  найдем с помощью формулы (1.25):

$$\xi(S_1) = 4 \max_{1 \leq k \leq 4} \max_{x \in \text{ver}(Q_3)} (-\lambda_k(x)) + 1.$$

Вычисления показывают, что

$$\max_{1 \leq k \leq 4} \max_{x \in \text{ver}(Q_3)} (-\lambda_k(x)) = \frac{1}{2}, \quad (4.22)$$

откуда  $\xi(S_1) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$ . Следовательно,  $\xi(S_1) = \xi_3$ . Максимум в (4.22) для каждого  $k$  достигается только на одной из вершин  $Q_3$ :

$$-\lambda_1(1, 1, 1) = -\lambda_2(0, 0, 1) = -\lambda_3(0, 1, 0) = -\lambda_4(1, 0, 0) = \frac{1}{2}. \quad (4.23)$$

Из теоремы 4.2 и равенств (4.23) следует, что экстремальные вершины куба, т. е. вершины  $(1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ , принадлежат граням симплекса  $3S_1$ , причем каждая грань содержит по одной вершине. Остальные четыре вершины куба находятся строго внутри симплекса  $3S_1$ . Таким образом, симплекс  $S_1$ , хотя и удовлетворяет включениям  $S \subset Q_3 \subset 3S_1$ , совершенным не является.

Максимальные по длине отрезки из  $S_1$ , параллельные координатным осям, пересекаются в центре куба  $Q_3$ . Этот результат может быть получен из формул (1.8) и (1.9).

Теперь рассмотрим симплекс  $S_2$  с вершинами  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2}, 1)$ ,  $(1, \frac{1}{2}, 1)$ . Для этого симплекса

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\frac{1}{d_i(S_2)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 |l_{ij}| = 1$ , откуда  $d_i(S_2) = 1$ . Значит,  $\alpha(S_2) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{d_i(S_2)} = 3$ .

Базисные многочлены Лагранжа для  $S_2$  суть

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= -x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1, & \lambda_2(x) &= x_2 - \frac{1}{2}x_3, \\ \lambda_3(x) &= \frac{1}{2}(-2x_1 + x_3 + 1), & \lambda_4(x) &= \frac{1}{2}(2x_1 + x_3 - 1). \end{aligned}$$

Имеем

$$\xi(S_2) = 4 \max_{1 \leq k \leq 4} \max_{x \in \text{ver}(Q_3)} (-\lambda_k(x)) + 1.$$

Из формул для  $\lambda_k$  получаем

$$\begin{aligned} -\lambda_1(0, 1, 1) &= -\lambda_1(1, 1, 1) = -\lambda_2(0, 0, 1) = -\lambda_2(1, 0, 1) = \\ -\lambda_3(1, 0, 0) &= -\lambda_3(1, 1, 0) = -\lambda_4(0, 0, 0) = -\lambda_4(0, 1, 0) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким образом,  $\max_{k, x \in \text{ver}(Q_3)} (-\lambda_k(x)) = \frac{1}{2}$ , откуда  $\xi(S_2) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$ . В этом случае экстремальной является каждая вершина куба. Из теоремы 4.2 и равенств (4.24) следует, что все вершины  $Q_3$  принадлежат граням симплекса  $3S_2$ . Таким образом, симплекс  $S_2$ , в отличие от симплекса  $S_1$ , является совершенным.

Симплексы  $S_1$  и  $S_2$  являются представителями двух классов экстремальных симплексов для  $n = 3$ , описанных в п. 2.1. Каждый совершенный симплекс в  $\mathbb{R}^3$  подобен  $S_2$ .

Симплексы  $S_1$ ,  $3S_1$ ,  $S_2$ ,  $3S_2$  показаны на рис. 2.2 и рис. 2.3. Жирными точками отмечены вершины куба  $Q_3$ , принадлежащие симплексам  $3S_1$  и  $3S_2$ . Жирными линиями показаны отрезки, соответствующие осевым диаметрам.

4)  $n = 5$ .

## 4.2. СОВЕРШЕННЫЕ СИМПЛЕКСЫ

---

Как было показано,  $\xi_5 = 5$ . Рассмотрим симплекс  $V(s, t)$  из п. 3.2. Будем предполагать, что условия (3.5) выполнены и, следовательно,  $\xi(V(s, t)) = 5$ . Из равенства  $\alpha(V(s, t)) = 5$  следует, что все осевые диаметры симплекса  $V(s, t)$  равны 1. При выполнении (3.5) имеем

$$\max_{1 \leq k \leq 6} \max_{x \in \text{ver}(Q_5)} (-\lambda_k(x)) = \frac{2}{3}. \quad (4.25)$$

Множество вершин куба  $Q_5$ , на которых для данного  $k$  достигается максимум в (4.25), зависит от  $s$  и  $t$ . Рассмотрим поведение коэффициентов базисных многочленов Лагранжа (3.4).

Таблица 4.1. Основные экстремальные вершины

$k$	Вершины $Q_5$ , для которых $(-\lambda_k(x)) = \frac{2}{3}$ при $\frac{4}{9} \leq s \leq \frac{5}{9}, \frac{4}{9} \leq t \leq \frac{5}{9}$
1	$(0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 0)$
2	$(0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0)$
3	$(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0),$ $(1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0)$
4	$(0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1),$ $(1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$
5	$(1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 1)$
6	$(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 1)$

Заметим, что при выполнении (3.5) справедливы строгие неравенства  $2 - 3t > 0, 3t - 1 > 0, 3s - 1 > 0, 2 - 3s < 0, 3s - 2 > 0$ . Для остальных коэффициентов, зависящих от  $s$  и  $t$ , имеют место нестрогие неравенства  $3t - \frac{4}{3} \geq 0, \frac{5}{3} - 3t \geq 0, 3s - \frac{5}{3} \leq 0, \frac{4}{3} - 3s \leq 0$ , причем обращение в нуль возможно только в граничных точках области (3.5). Если коэффициент в  $\lambda_k(x)$  при некотором  $x_i$  обращается в нуль, значение  $x_i$  не влияет на значение многочлена. Переменная  $x_i$  для  $x \in \text{ver}(Q_5)$  может принимать значения 0 или 1. Следовательно, число экстремальных вершин для  $\lambda_k(x)$  в этой ситуации удваивается.

Приведем списки вершин, на которых достигается максимум в (4.25). Эти данные сведены в таблицы 4.1–4.2.

Таблица 4.2. Дополнительные экстремальные вершины

$k$	Значения параметров $s$ и $t$	Вершины $Q_5$ , для которых $(-\lambda_k(x)) = \frac{2}{3}$ только при данных значениях $s$ и $t$
1	$\frac{4}{9} \leq s \leq \frac{5}{9}, t = \frac{4}{9}$	$(0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 1),$ $(1, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1)$
2	$\frac{4}{9} \leq s \leq \frac{5}{9}, t = \frac{5}{9}$	$(0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 1),$ $(1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 1)$
5	$s = \frac{5}{9}, \frac{4}{9} \leq t \leq \frac{5}{9}$	$(1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0),$ $(1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0)$
6	$s = \frac{4}{9}, \frac{4}{9} \leq t \leq \frac{5}{9}$	$(0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0),$ $(0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0)$

Из приведённых данных и теоремы 4.2 следует, что на плоскости параметров  $s, t$  существует открытый прямоугольник

$$\Pi = \left\{ (s, t) : \frac{4}{9} < s < \frac{5}{9}, \frac{4}{9} < t < \frac{5}{9} \right\},$$

такой что для  $(s, t) \in \Pi$  множество вершин куба разбивается на 6 непересекающихся классов экстремальных вершин. Общее число экстремальных вершин равно числу вершин  $Q_5$ , т. е. 32. При  $(s, t) \in \Pi$  вершины, принадлежащие одному классу, являются внутренними точками одной и той же четырёхмерной грани симплекса  $5V(s, t)$ . Такое разбиение множества  $\text{ver}(Q_5)$  на классы отражено в таблице 4.1.

Кроме этого, для  $k = 1, 2, 5, 6$  при некоторых специальных значениях параметров (в случае  $(s, t) \in \partial\Pi$ ) экстремальными оказываются и некоторые дополнительные вершины. Все такие случаи описаны в таблице 4.2. При отмеченных значениях параметров вершины, перечисленные в таблице 4.2, принадлежат двум различным 4-мерным граням симплекса  $5V(s, t)$ , т. е. попадают на грани меньшей размерности.

Если значение одной из переменных  $s$  или  $t$  находится на конце интервала  $[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}]$ , то число экстремальных вершин с учетом повторов равно 36. Если на границе этого интервала находятся обе точки  $s$  и  $t$ , то число экстремальных вершин с учетом повторов равно 40.

Можно непосредственно убедиться в том, что при любых  $(s, t)$ , принадлежащих квадрату  $\Pi \cup \partial\Pi$ , равенство (4.25) выполняется для всех вершин куба. В силу теоремы 4.2 все вершины куба  $Q_5$  принадлежат границе симплекса  $5V(s, t)$ . Следовательно, симплекс  $V(s, t)$  является совершенным при  $(s, t) \in \Pi \cup \partial\Pi$ .

В п. 3.2 описано еще семейство симплексов  $U(t)$ , для которых  $\xi(U(t)) = 5$  при  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ . Можно показать, что при таких  $t$  равенство (4.19) выполняется только для 16 вершин куба. Значит, симплекс  $U(t)$  совершенным не является.

В заключение отметим, что для чётных  $n > 2$  точные значения  $\xi_n$  пока неизвестны. Открытым остается и вопрос о существовании для таких  $n$  совершенных симплексов. Также неизвестно, существуют ли совершенные симплексы для нечётных  $n > 5$ .

## 4.3 Равноотсекающие симплексы

**4.3.1. Определение и примеры.** Симплекс  $S \subset Q_n$  будем называть *равноотсекающим*, если все  $(n - 1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани  $S$ , отсекают от куба  $Q_n$  во внешнюю по отношению к симплексу сторону равные по объёму части. *Экстремальным* мы называем симплекс  $S \subset Q_n$ , для которого  $\xi(S) = \xi_n$ .

Уравнения  $(n - 1)$ -мерных гиперплоскостей, содержащих грани симплекса, имеют вид  $\lambda_j(x) = 0$ . При этом  $j$ -я гиперплоскость содержит все вершины симплекса, кроме  $j$ -й вершины. Обозначим через  $v_j$  объём тела, отсекаемого  $j$ -й гиперплоскостью от  $Q_n$  и не содержащего симплекса. Таким образом,

$$v_j = \text{vol}(Q_n \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \leq 0\}).$$

Симплекс является равноотсекающим, если  $v_1 = v_2 = \dots = v_{n+1}$ .

Например, равноотсекающим является симплекс с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(1, \tau)$ ,  $(\tau, 1)$ , где  $\tau = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38196601\dots$  (см. рис. 2.1). Как отмечалось в п. 2.1, это единственный (с точностью до ортогональных преобразований) экстремальный симплекс для  $n = 2$ . Площадь каждого отсекаемого треугольника равна  $\frac{3-\sqrt{5}}{4} = 0.1909\dots$ . Нетрудно убедиться, что равноотсекающими являются также и экстремальные симплексы  $S_1$  и  $S_2$  для  $n = 3$ , изученные в п. 4.2. Для  $n = 1$  экстремальный симплекс  $S = [0, 1]$  также является равноотсекающим: его грани отсекают от куба  $Q_1 = [0, 1]$  отрезки нулевой длины.

В связи с этим в работе [20] обсуждалась следующая гипотеза о равноотсечении: *все экстремальные симплексы являются равноотсекающими*. Как показано в [20], в данной формулировке гипотеза о равноотсечении неверна. Однако оказалось, что для экстремальных симплексов объёмы  $v_j$  подчиняются некоторым закономерностям. В настоящем пункте мы исследуем отсекаемые объёмы для двух семейств экстремальных симплексов. Эти результаты опубликованы в статье [5].

**4.3.2. Вычисление объёма части  $n$ -мерного куба, отсекаемой гиперплоскостью.** Мы используем следующее утверждение из статьи [27].

**Теорема 4.2.** Пусть  $n > 2$ ,  $Q'_n = [-1, 1]^n$ . Рассмотрим гиперплоскость

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) = b\},$$

где  $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Имеет место равенство

$$\text{vol}(Q'_n \cap H) = \frac{|a|}{\pi} \cdot 2^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{k=1}^n \frac{\sin(a_k t)}{a_k t} \right) \cdot \cos(bt) dt. \quad (4.26)$$

Здесь  $\text{vol}(Q'_n \cap H)$  означает  $(n-1)$ -мерный объём сечения куба  $Q'_n$  гиперплоскостью  $H$ . Если в уравнении гиперплоскости  $|a| = 1$ , то  $b$  есть расстояние со знаком от гиперплоскости  $H$  до начала координат. В этом случае интеграл по  $b$  в пределах от  $b_0$  до  $+\infty$  от правой части формулы (4.26) равен объёму пересечения  $Q'_n$  и полупространства  $\{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) \geq b_0\}$ . На практике требуется вычислить интеграл лишь по некоторому конечному промежутку, длина которого равна расстоянию от гиперплоскости  $H$  до наиболее удалённой от неё вершины куба, лежащей в нужном полупространстве.

Так как мы рассматриваем куб  $Q_n = [0, 1]^n$ , а не куб  $Q'_n = [-1, 1]^n$ , в расчётные формулы были внесены соответствующие поправки.

При вычислении объёмов подынтегральное выражение в (4.26) обычно оказывается довольно громоздким, однако получающиеся интегралы всегда сводятся к известным интегралам. Для вычислений мы использовали специально написанные программы для системы Wolfram Mathematica (см. [6], [33], [40]). Все вычисления проводились в символьном режиме, поэтому полученные выражения для объёмов являются точными.

**4.3.3. Семейство экстремальных симплексов в  $\mathbb{R}^5$ .** Рассмотрим семейство экстремальных симплексов  $U = U(t)$  с вершинами  $(1, 0, 0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, t, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1-t, 1, 0)$ ,  $(0, 1, t, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 1-t, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 0, 1)$  (см. п. 3.2).

Уравнения гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^5$ , содержащих грани симплекса  $U$ , имеют вид  $\mu_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , где  $\mu_j$  — базисные многочлены Лагранжа (см. (3.3)). Заметим, что только многочлены  $\mu_1$  и  $\mu_6$  зависят от  $t$ . Поэтому отсекаемые объёмы  $v_1$  и  $v_6$  зависят от  $t$ , а остальные объёмы  $v_j$ ,  $j = 2, 3, 4, 5$ , от  $t$  не зависят. Вычисления с применением формулы (4.26) дают следующие выражения:

$$v_1(t) = \begin{cases} \frac{4860t^4 - 8640t^3 + 5400t^2 - 1590t + 169}{9720t^4 - 19440t^3 + 14040t^2 - 4320t + 480}, & -\infty < t < -\frac{1}{3}, \\ \frac{486t^5 + 15390t^4 - 25380t^3 + 16380t^2 - 4740t + 509}{29160t^4 - 58320t^3 + 42120t^2 - 12960t + 1440}, & -\frac{1}{3} < t < \frac{1}{6}, \\ \frac{-27t^3 + 63t^2 - 57t + 17}{108t^2 - 144t + 48}, & \frac{1}{6} < t < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}, \\ \frac{27t^3 - 18t^2 + 12t - 4}{108t^2 - 72t + 12}, & \frac{2}{3} < t < \frac{5}{6}, \\ \frac{-486t^5 + 17820t^4 - 41040t^3 + 37440t^2 - 15870t + 2645}{29160t^4 - 58320t^3 + 42120t^2 - 12960t + 1440}, & \frac{5}{6} < t < \frac{4}{3}, \\ \frac{4860t^4 - 10800t^3 + 8640t^2 - 2730t + 199}{9720t^4 - 19440t^3 + 14040t^2 - 4320t + 480}, & \frac{4}{3} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$v_j = \frac{13}{48}, \quad j = 2, 3, 4, 5, \quad v_6(t) = v_1(t).$$

### 4.3. РАВНООТСЕКАЮЩИЕ СИМПЛЕКСЫ

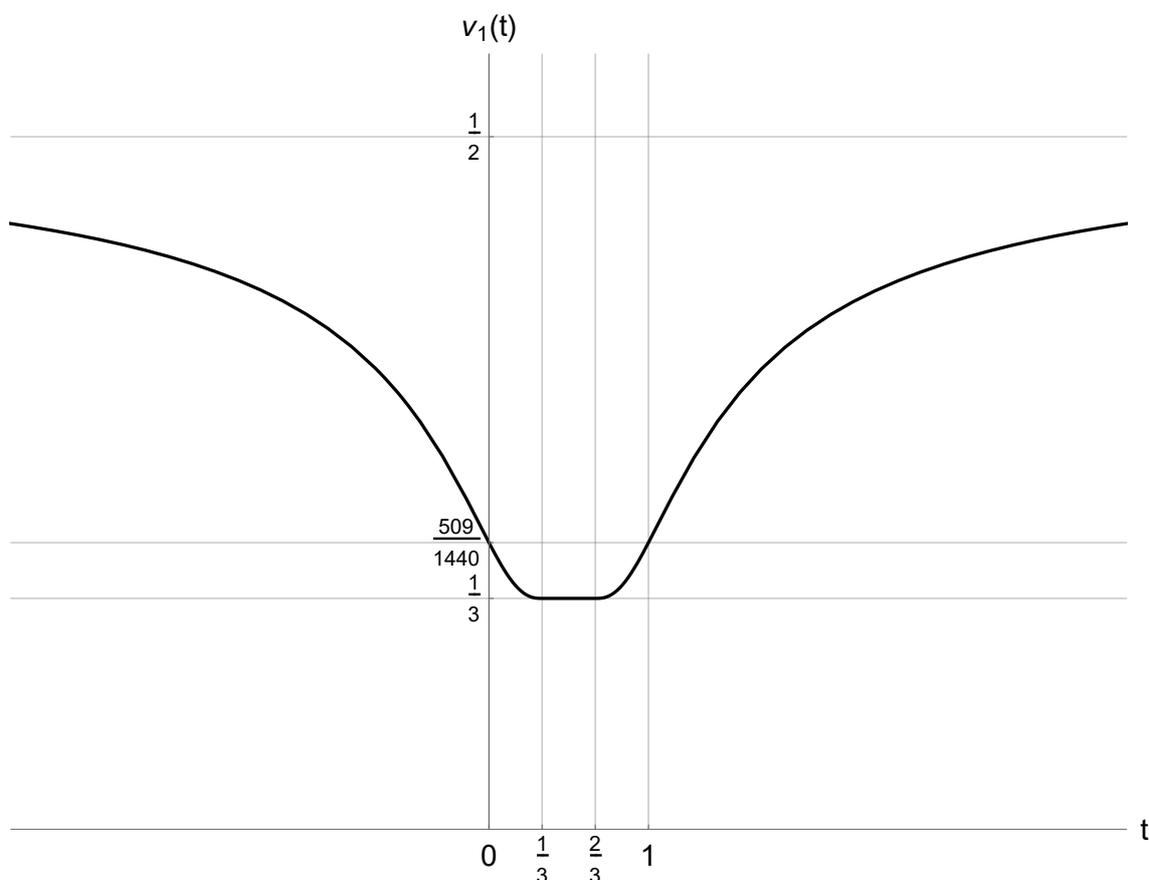


Рис. 4.1. График функции  $v_1(t)$  для симплекса  $U(t)$

Плоскости  $\mu_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 6$  пересекаются с кубом при всех  $t$ . Выражения для  $v_1(t)$  и  $v_6(t)$  одинаковы. Прямая  $v = \frac{1}{2}$  является горизонтальной асимптотой для графика функции  $v_1(t)$  при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ . График функции  $v_1(t)$  симметричен относительно прямой  $t = \frac{1}{2}$ , т. е. для всех  $t$  справедливо равенство  $v_1(\frac{1}{2} - t) = v_1(\frac{1}{2} + t)$ . График  $v_1(t)$  приведен на рис. 4.1.

Как видно из выражений для объёмов, экстремальные симплексы не являются равноотсекающими. Вместе с тем при каждом  $t$  каждый из объёмов  $v_j$  может принимать лишь одно из двух значений. При  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ , т. е. при тех значениях параметра, когда симплекс  $S$  является экстремальным, все  $v_j$  постоянны. Это позволяет предполагать, что существует связь между экстремальностью симплекса и значениями отсекаемых объёмов  $v_j$ .

При  $t \rightarrow \infty$  плоскости  $\mu_1(x) = 0$  и  $\mu_6(x) = 0$  стремятся к некоторым предельным положениям. Чтобы найти предельные плоскости, можно разделить эти уравнения на  $t$  и перейти к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Получатся уравнения  $x_1 + x_2 - x_4 - x_5 = 0$  и  $-x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0$  соответственно. Очевидно, каждая из предельных плоскостей содержит вершины куба  $(0, 0, 0, 0, 0)$  и  $(1, 1, 1, 1, 1)$  и, следовательно, проходит через большую диагональ куба. Такие плоскости

делят куб на две равные по объёму части, что согласуется с тем фактом, что  $v_1(t) \rightarrow \frac{1}{2}$  и  $v_6(t) \rightarrow \frac{1}{2}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

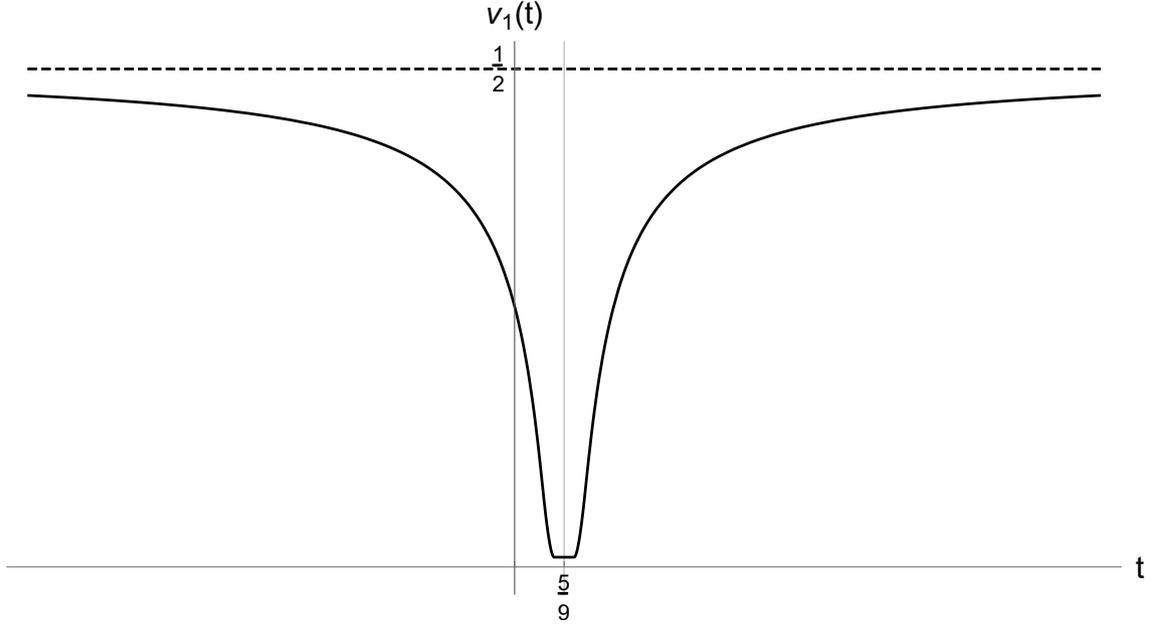


Рис. 4.2. График функции  $v_1(t)$  для симплекса  $V(t)$

**4.3.4. Семейство совершенных симплексов в  $\mathbb{R}^5$ .** Рассмотрим семейство симплексов  $V = V(s, t)$  в  $\mathbb{R}^5$  с вершинами  $(s, 1, \frac{1}{3}, 1, 1)$ ,  $(s, 0, \frac{1}{3}, 1, 1)$ ,  $(s, 2 - 3t, \frac{1}{3}, 0, 1)$ ,  $(2 - 3s, t, 0, \frac{1}{3}, 0)$ ,  $(0, t, 1, \frac{1}{3}, 0)$ ,  $(1, t, 1, \frac{1}{3}, 0)$ , где  $s, t \in \mathbb{R}$ . Как отмечалось в п. 3.2, при  $\frac{4}{9} \leq s, t \leq \frac{5}{9}$  выполняется равенство  $\xi(V(s, t)) = \xi_5 = 5$ . В предыдущем пункте показано, что при этих же значениях параметра симплекс  $V(s, t)$  является совершенным.

Уравнения гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^5$ , содержащих грани симплекса  $R$ , имеют вид  $\lambda_j(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, 6$ , где  $\lambda_j$  — базисные многочлены Лагранжа симплекса  $V(s, t)$  (см. (3.4)). Заметим, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  зависят только от  $t$ ,  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  не зависят от параметров, а  $\lambda_5$  и  $\lambda_6$  зависят только от  $s$ . Аналогичным образом от параметров зависят и отсекаемые плоскостями объёмы. Применяя метод, описанный выше, находим следующие выражения для объёмов, отсекаемых гиперплоскостями  $\lambda_j(x) = 0$ :

$$v_1(t) = \begin{cases} \frac{81t-35}{1458t^2-1620t+432} + \frac{1}{2}, & -\infty < t < \frac{1}{3}, \\ -\frac{t}{2} + \frac{2}{54-81t} + \frac{4}{9}, & \frac{1}{3} < t < \frac{4}{9}, \\ \frac{1}{3}, & \frac{4}{9} < t < \frac{2}{3}, \\ \frac{t}{2} + \frac{2}{81t-36} - \frac{1}{9}, & \frac{2}{3} < t < \frac{7}{9}, \\ \frac{55-81t}{1458t^2-1620t+432} + \frac{1}{2}, & \frac{7}{9} < t < +\infty, \end{cases}$$

### 4.3. РАВНОУТСЕКАЮЩИЕ СИМПЛЕКСЫ

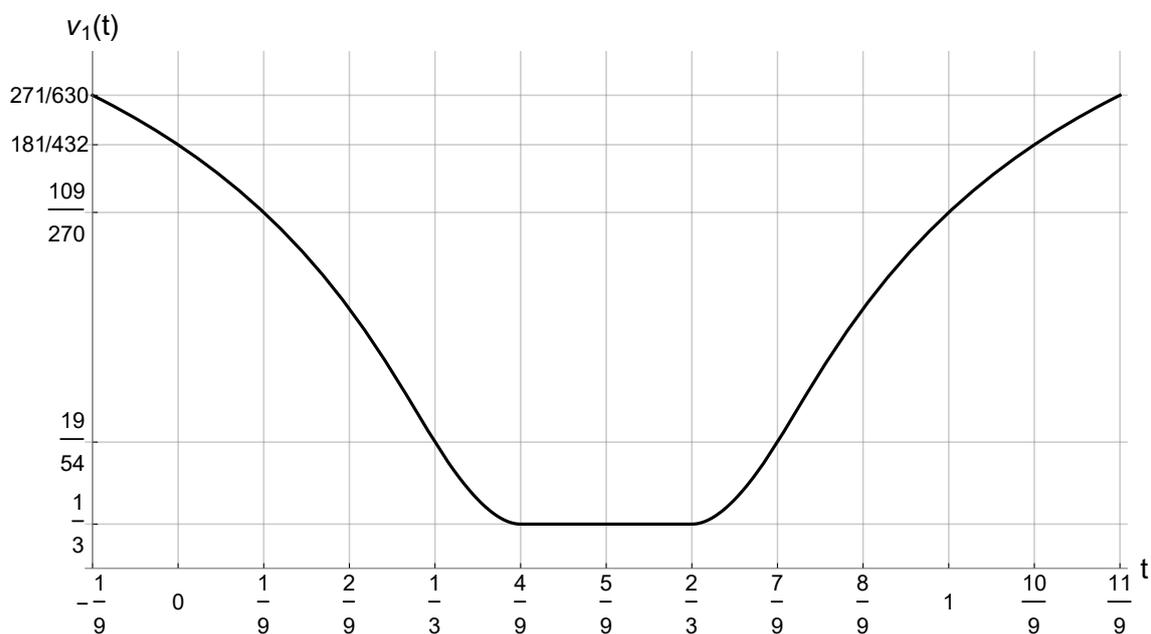


Рис. 4.3. График функции  $v_1(t)$  на отрезке  $[-\frac{1}{9}, \frac{11}{9}]$  для симплекса  $V(t)$

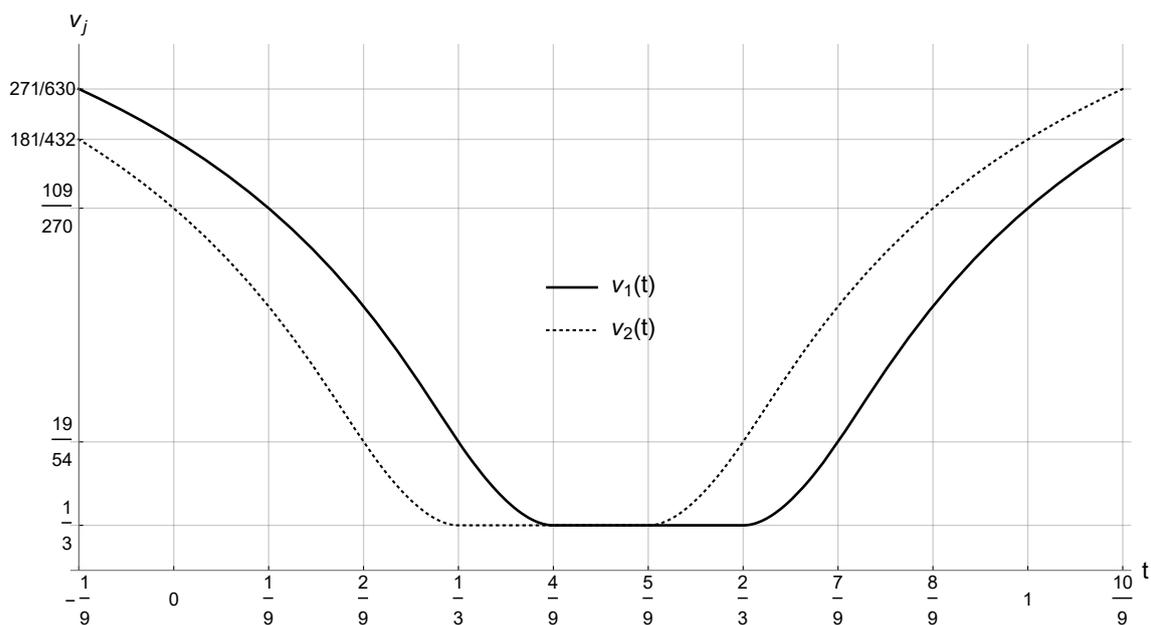


Рис. 4.4. График функций  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  для симплекса  $V(t)$

$$v_2(t) = \begin{cases} \frac{81t-26}{1458t^2-1296t+270} + \frac{1}{2}, & -\infty < t < \frac{2}{9}, \\ -\frac{t}{2} + \frac{2}{45-81t} + \frac{7}{18}, & \frac{2}{9} < t < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} < t < \frac{5}{9}, \\ \frac{81t^2-36t+7}{162t-54}, & \frac{5}{9} < t < \frac{2}{3}, \\ \frac{46-81t}{1458t^2-1296t+270} + \frac{1}{2}, & \frac{2}{3} < t < +\infty, \end{cases}$$

$$v_3 = \frac{1}{3}, \quad v_4 = \frac{1}{3}, \quad v_5(s) = v_2(s), \quad v_6(s) = v_1(s).$$

Для объёмов  $v_5(s)$  и  $v_6(s)$  выражения оказываются такими же, как и для  $v_2(s)$  и  $v_1(s)$  соответственно. Анализ выражений для  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  показывает, что  $v_2(t) = v_1\left(t + \frac{1}{9}\right)$ . Таким образом, поведение объёмов  $v_j$  для  $j = 1, 2, 5, 6$  описывается, по существу, одной функцией.

График функции  $v_1(t)$  симметричен относительно прямой  $t = \frac{5}{9}$ , т. е.  $v_1\left(\frac{5}{9} + t\right) = v_1\left(\frac{5}{9} - t\right)$  для всех  $t$ . Прямая  $v = \frac{1}{2}$  является горизонтальной асимптотой графика функций  $v_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 5, 6$  при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ . График функции  $v_1(t)$  приведён на рис. 4.2 и на рис. 4.3. На рис. 4.4 приведены графики функций  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  на отрезке  $\left[-\frac{1}{9}, \frac{10}{9}\right]$ .

При  $s \in \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right]$  и  $t \in \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right]$  имеем  $v_j = \frac{1}{3}$ ,  $j = 1, \dots, 6$ . Значит, при данных значениях параметров симплекс является равноотсекающим. Отметим, что при этих же значениях параметров симплекс  $V$  является совершенным.

По существу, нас интересуют значения отсекаемых объёмов только при тех значениях параметров, когда  $V \subset Q_5$ , т. е. при  $\frac{1}{3} \leq s, t \leq \frac{2}{3}$ . Однако полученные формулы верны при любых  $s$  и  $t$ . В частности, из приведённых результатов следует, что плоскости  $\lambda_j(x) = 0$  пересекают куб при всех  $s$  и  $t$ . При стремлении  $s, t$  к бесконечности плоскости  $\lambda_j(x) = 0$ ,  $j = 1, 2, 5, 6$  имеют некоторые предельные положения. Чтобы получить уравнения этих предельных плоскостей, достаточно разделить первое и второе уравнения на  $3t$  и перейти к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Получатся уравнения  $-x_4 + x_5 = 0$  и  $x_4 - x_5 = 0$  соответственно. Аналогично для пятого и шестого уравнений получим предельные плоскости  $x_3 + x_5 - 1 = 0$  и  $-x_3 - x_5 + 1 = 0$ . Очевидно, все эти плоскости делят куб пополам, что соответствует отмеченным выше особенностям функций:  $v_j(t) \rightarrow \frac{1}{2}$  при  $t \rightarrow \infty$  для  $j = 1, 2, 5, 6$ .

**4.3.5. Замечания.** Для приведённых в пунктах 3.4 и 3.6 экстремальных симплексов  $W(t)$  и  $S(t)$  (в  $\mathbb{R}^7$  и  $\mathbb{R}^9$  соответственно) поведение отсекаемых объёмов аналогично случаю рассмотренного выше (несовершенного) симплекса  $U(t)$  из  $\mathbb{R}^5$ . Эти симплексы не являются равноотсекающими, но при значениях параметра, для которых они являются экстремальными, все отсекаемые объёмы постоянны.

Таким образом, все известные на данный момент совершенные симплексы являются равноотсекающими. Это позволяет сформулировать гипотезу о равноотсечении следующим образом: *все совершенные симплексы являются равноотсекающими.*

Отметим, что обратное утверждение неверно. Легко привести пример равноотсекающего симплекса, не являющегося экстремальным (и тем более совершенным) в пространстве  $\mathbb{R}^1$ . В работе [4] построены примеры такого типа для пространства  $\mathbb{R}^3$ .

## 4.4 Константы $\varkappa_n$

Сначала докажем две теоремы (см. [19]).

**Теорема 4.3.** Для любого невырожденного отрезка  $S \subset Q_1$  выполняется неравенство

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \frac{1}{2} (\xi(S) - \xi_1) \quad (4.27)$$

с точной константой  $\frac{1}{2}$ .

*Доказательство.* Пусть  $S = [x_1, x_2]$ ,  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ . Так как центром  $S$  является точка  $\frac{x_1+x_2}{2}$ , то, по определению  $\xi(S)$ , имеем

$$\begin{aligned} \xi(S) &= \min\{\sigma \geq 1 : [0, 1] \subset \sigma S\} = \max\left\{\frac{1 - \frac{x_1+x_2}{2}}{x_2 - \frac{x_1+x_2}{2}}, \frac{0 - \frac{x_1+x_2}{2}}{x_1 - \frac{x_1+x_2}{2}}\right\} = \\ &= \frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Тот же результат даёт и применение общей формулы (1.25). В нашем случае

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1(x) &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad \lambda_2(x) = \frac{-x + x_1}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

В соответствии с (1.25)

$$\begin{aligned} \xi(S) &= 2 \max\{-\lambda_1(0), -\lambda_1(1), -\lambda_2(0), -\lambda_2(1)\} + 1 = \\ &= 2 \max\left\{\frac{x_2}{x_1 - x_2}, \frac{-1 + x_2}{x_1 - x_2}, \frac{-x_1}{x_1 - x_2}, \frac{1 - x_1}{x_1 - x_2}\right\} + 1 = \\ &= 2 \max\left\{\frac{1 - x_2}{x_2 - x_1}, \frac{x_1}{x_2 - x_1}\right\} + 1 = \frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

что совпадает с (4.28). Заметим, что числитель последней дроби всегда  $\geq 1$ , а знаменатель  $\leq 1$ , причём они обращаются в 1 лишь при  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Это соответствует тому, что всегда  $\xi(S) \geq 1$ , причём  $\xi(S) = 1$  только в случае  $S = [0, 1] = Q_1$ .

Пусть  $d(S)$  — осевой диаметр  $S$ . Очевидно,  $d(S) = x_2 - x_1$ , значит,

$$\alpha(S) = \frac{1}{d(S)} = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Поскольку  $\xi_1 = 1$ , то (4.27) записывается в виде

$$\frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\}}{x_2 - x_1} - 1 \right). \quad (4.29)$$

Это эквивалентно неравенству

$$\max\{2 - (x_1 + x_2), x_1 + x_2\} \leq 2 - x_2 + x_1. \quad (4.30)$$

Как нетрудно видеть, (4.30) равносильно системе неравенств  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \leq 1$ . Поэтому справедливо каждое из неравенств (4.30), (4.29) и (4.27).

Остаётся заметить, что константа  $\frac{1}{2}$ , стоящая в правой части (4.27), является точной (неуменьшаемой). Действительно, для  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ , т.е.  $S = [0, \frac{1}{2}]$ , каждое из отмеченных трёх неравенств обращается в равенство.

Теорема доказана.  $\square$

График функции

$$\varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1, x_2) - \alpha(x_1, x_2)}{\xi(x_1, x_2) - \xi_1}$$

для  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  приведён на рис. 4.5.

**Теорема 4.4.** Пусть  $n > 1$ . Предположим, что существует константа  $\gamma > 0$ , такая что для любого невырожденного симплекса  $S \subset Q_n$  справедливо неравенство

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \gamma (\xi(S) - \xi_n). \quad (4.31)$$

Тогда  $\gamma \geq 1$ . Если  $\xi_n = n$ , то точное значение  $\gamma$  равно 1.

*Доказательство.* Пусть  $S$  — угловой симплекс с вершинами  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, 0)$ . Для этого симплекса

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_j(x) = x_j, \quad 1 \leq j \leq n; \quad \lambda_{n+1}(x) = -\sum_{j=1}^n x_j + 1.$$

Вычислим  $\xi(S)$  по формуле (1.25):

$$\begin{aligned} \xi(S) &= (n+1) \max_{1 \leq k \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1 = \\ &= -(n+1)\lambda_{n+1}(1, \dots, 1) + 1 = (n+1)(n-1) + 1 = n^2. \end{aligned}$$

Очевидно,  $d_i(S) = 1$ , поэтому

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = n.$$

#### 4.4. КОНСТАНТЫ $\varkappa_N$

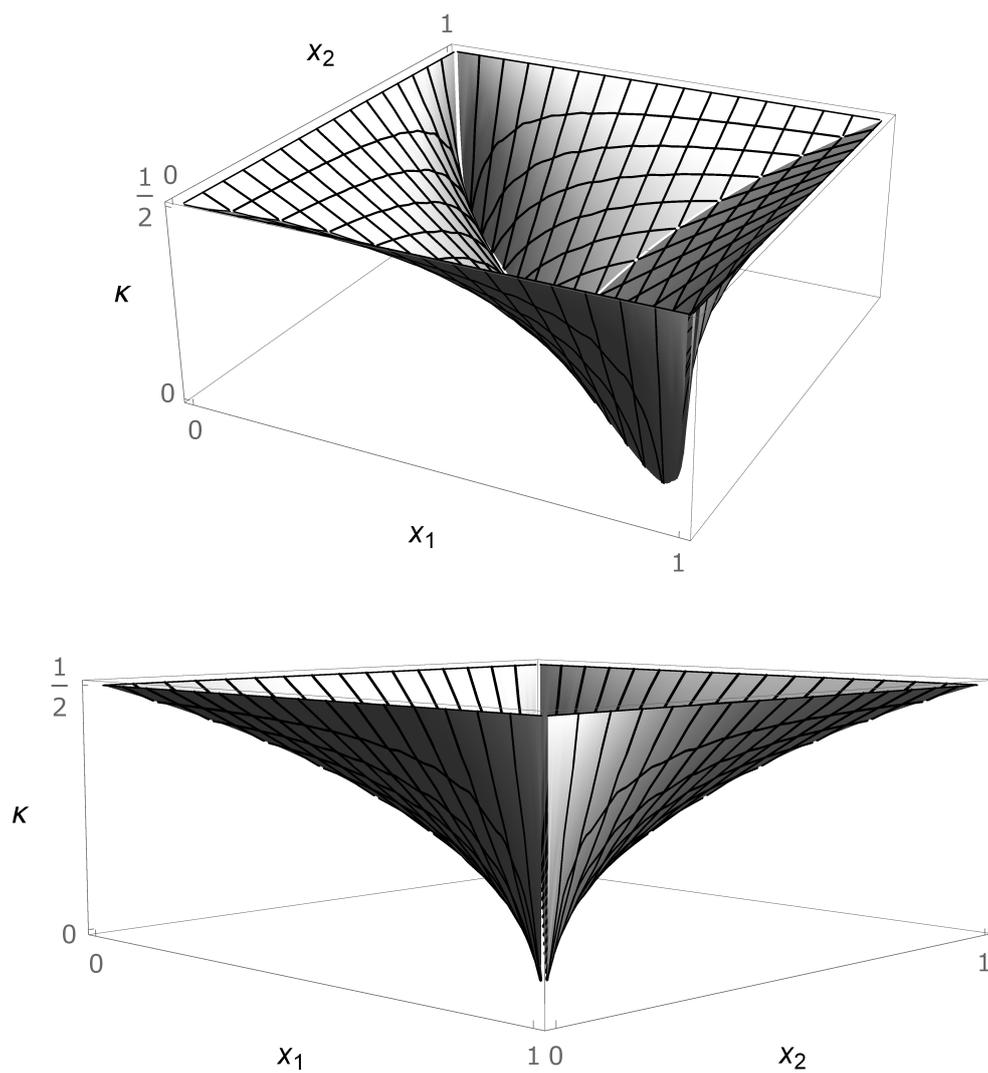


Рис. 4.5. Поверхность  $\varkappa = \varkappa(x_1, x_2) = \frac{\xi(x_1, x_2) - \alpha(x_1, x_2)}{\xi(x_1, x_2) - \xi_1}$  для  $x_1, x_2 \in [0, 1]$

Применяя к  $S$  неравенство (4.31), получим  $n^2 - n \leq \gamma(n^2 - \xi_n)$ . При любом  $n$  выполняется  $\xi_n \geq n$ , поэтому тем более справедливо и неравенство  $n^2 - n \leq \gamma(n^2 - n)$ . Так как  $n > 1$ , то отсюда следует  $\gamma \geq 1$ .

Интересно заметить, что это рассуждение не подходит к случаю  $n = 1$ , когда  $n^2 - n = 0$ . Одномерный случай — единственный, в котором симплекс  $S$  совпадает с кубом  $Q_n$ . Этот случай был специально рассмотрен выше.

Предположим теперь, что  $n > 1$  и  $\xi_n = n$ . Поскольку для любого  $S \subset Q_n$  верны неравенства  $\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n$ , то имеет место соотношение

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \xi(S) - n = \xi(S) - \xi_n.$$

Таким образом, в этой ситуации неравенство (4.31) выполняется с константой 1. Из предыдущего следует, что эту константу, общую для всех  $S$ , уменьшить нельзя. Поэтому в случае  $\xi_n = n > 1$  точное значение  $\gamma$  равно 1.

Теорема доказана.  $\square$

Теперь приведём две гипотезы о числах  $\xi(S)$  и  $\alpha(S)$ , впервые сформулированные в [11] (по этому поводу см. также [13, § 3.10], [18] и [19]).

(Н1) Пусть  $S \subset Q_n$  — невырожденный  $n$ -мерный симплекс. Если  $\xi(S) = \xi_n$ , то  $\xi(S) = \alpha(S)$ .

(Н2) Для любого  $n$  существует константа  $\gamma > 0$ , такая что для каждого невырожденного симплекса  $S \subset Q_n$  выполняется неравенство (4.31).

Для  $n = 1, 2, 3$  полное описание симплексов с условием  $\xi(S) = \xi_n$  дано в п. 2.1. Для каждого из них  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Справедливость (Н1) для  $n = 4$  пока неясна, но вычисления, приведённые в [18], означают, что в четырёхмерной ситуации эта гипотеза, по-видимому, верна.

Если  $\xi_n = n$ , то в силу соотношений  $n \leq \alpha(S) \leq \xi(S)$  условие  $\xi(S) = \xi_n$  сразу даёт  $\xi(S) = \alpha(S)$ . Поэтому утверждение (Н1) верно для всех размерностей, когда  $\xi_n = n$ . К этой совокупности относятся, в частности, те  $n$ , для которых  $n + 1$  — число Адамара, но не только они. Как было показано,  $\xi_5 = 5$ ,  $\xi_9 = 9$ , следовательно, (Н1) верно для  $n = 5$  и  $n = 9$ .

Очевидно, из справедливости (Н2) следует справедливость (Н1). Обозначим через  $\varkappa_n$  минимальное  $\gamma > 0$ , с которым (4.31) выполняется для любого невырожденного симплекса  $S \subset Q_n$ . Иными словами,  $\varkappa_n$  есть точная константа в неравенстве

$$\xi(S) - \alpha(S) \leq \varkappa_n (\xi(S) - \xi_n), \quad S \subset Q_n.$$

Утверждение (Н2) равносильно следующему свойству: для любого  $n$

$$\varkappa_n := \sup_{S \subset Q_n} \frac{\xi(S) - \alpha(S)}{\xi(S) - \xi_n} < \infty. \quad (4.32)$$

Точная верхняя грань в (4.32) берётся по совокупности симплексов  $S$ , содержащихся в  $Q_n$  и таких, что  $\xi(S) \neq \xi_n$ .

#### 4.4. КОНСТАНТЫ $\varkappa_N$

---

Приведём сведения о числах  $\varkappa_n$ , имеющиеся на настоящий момент. В соответствии с теоремой 4.3 верно равенство  $\varkappa_1 = \frac{1}{2}$ . Для  $n > 1$  теорема 4.4 даёт  $\varkappa_n \geq 1$ . Если же  $n > 1$  таково, что  $\xi_n = n$ , то  $\varkappa_n = 1$ . Это выполняется, по крайней мере, когда  $n + 1$  — число Адамара, большее 2, а также для  $n = 5$  и  $n = 9$ .

Существуют ли числа  $\varkappa_n$ , большие 1? В статье [11] было высказано предположение, что  $\varkappa_2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{3} = 3.1573\dots$  Позднее с помощью компьютерных методов было подтверждено, что это действительно так (см. [18]). Кроме того, также на основе вычислений было сделано предположение о справедливости равенства  $\varkappa_4 = \frac{4+\sqrt{13}}{5} = 1.5211\dots$  Однако аналитические доказательства двух последних утверждений пока не найдены.

# Глава 5

## Задачи о симплексе и шаре

Пусть  $B(x^{(0)}; \varrho) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \leq \varrho\}$  — евклидов  $n$ -мерный шар с центром  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  и радиусом  $\varrho > 0$ . Как и ранее, под  $\|x\|$  понимается евклидова норма элемента  $x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

По определению, полагаем  $B_n := B(0; 1)$ .

В настоящей главе приводятся и комментируются формулы для величин  $\alpha(B_n; S)$  и  $\xi(B_n; S)$ , определяемых для симплекса и единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ . Замена куба на шар делает многие рассматриваемые вопросы существенно более простыми. Однако геометрическая интерпретация общих результатов и в этом частном случае имеет определённый интерес. Кроме того, мы отметим некоторые новые приложения базисных многочленов Лагранжа, которые представляются весьма полезными для практических вычислений. Глава написана по материалам статьи [17].

### 5.1 Величина $\alpha(B_n; S)$

*Инрадиусом*  $n$ -мерного симплекса  $S$  (*inradius*) называется максимальный радиус шара, содержащегося в  $S$ . Центр этого единственного максимального шара называется *инцентром*  $S$  (*incenter*). Граница максимального в симплексе шара — сфера, которая имеет с каждой  $(n - 1)$ -мерной гранью симплекса единственную общую точку. Под *внешним радиусом*, или *циркумрадиусом*  $S$  (*circumradius*), будем понимать минимальный радиус шара, содержащего  $S$ . Граница этого единственного минимального шара не обязательно содержит все вершины  $S$ . Это имеет место тогда и только тогда, когда центр минимального шара является внутренней точкой  $S$ .

5.1. ВЕЛИЧИНА  $\alpha(B_N; S)$

Инрадиус  $r$  и внешний радиус  $R$  симплекса  $S$  связаны *неравенством Эйлера*

$$R \geq nr. \quad (5.1)$$

Равенство в (5.1) имеет место тогда и только тогда, когда  $S$  — правильный симплекс. По поводу доказательств  $n$ -мерного неравенства Эйлера, а также его истории и обобщений см., например, [30], [41], [39].

По поводу неравенства (5.1) напомним свойство параллелепипедов из пункта 1.7.12. Пусть  $S$  — невырожденный симплекс,  $V, V^*$  — параллелепипеды в  $\mathbb{R}^n$ , причём  $V^*$  есть результат гомотетии  $V$  с коэффициентом  $\tau > 1$ . Если выполняются включения  $V \subset S \subset V^*$ , то  $\tau \geq n$ .

Это утверждение верно и для шаров. Нетрудно видеть, что неравенство Эйлера эквивалентно следующему свойству. Если  $B$  — шар радиуса  $r_1$ ,  $B^*$  — шар радиуса  $r_2$  и  $B \subset S \subset B^*$ , то  $nr_1 \leq r_2$ . Равенство выполняется тогда и только тогда, когда  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $B^*$ , а  $B$  — шар, вписанный в  $S$ . Другая эквивалентная форма этих утверждений — приводимая ниже теорема 5.2 (см. замечание после её доказательства).

Пусть  $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$  — вершины,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  — базисные многочлены Лагранжа невырожденного симплекса  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Через  $\Gamma_j$  обозначим  $(n-1)$ -мерную гиперплоскость, задаваемую уравнением  $\lambda_j(x) = 0$ , через  $\Sigma_j$  —  $(n-1)$ -мерную грань симплекса, содержащуюся в  $\Gamma_j$ , через  $h_j$  — высоту, опущенную из вершины  $x^{(j)}$  на  $\Gamma_j$ , через  $r$  — инрадиус  $S$ . Пусть  $\sigma_j$  —  $(n-1)$ -мера  $\Sigma_j$  и  $\sigma := \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j$ . Обозначим  $a_j := \{l_{1j}, \dots, l_{nj}\}$ . Этот вектор ортогонален  $\Gamma_j$  и направлен в полупространство, содержащее вершину  $x^{(j)}$ . Ясно, что

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j} = (a_j, x) + l_{n+1,j} = (a_j, x) + \lambda_j(0).$$

**Теорема 5.1.** *Справедливы равенства*

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}, \quad (5.3)$$

$$\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r}, \quad (5.4)$$

$$\alpha(B_n; S) = \frac{\sigma}{n \operatorname{vol}(S)}. \quad (5.5)$$

*Доказательство.* Получим эти попарно эквивалентные равенства, двигаясь сверху вниз. Сначала запишем

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in B} (-\lambda_j(x)) + 1. \quad (5.6)$$

Формула (5.6) есть частный случай (1.27) в ситуации  $C = B_n$ . По неравенству Коши имеем  $|(a_j, x)| \leq \|a_j\| \|x\|$ , откуда

$$\begin{aligned} -\|a_j\| \|x\| &\leq (a_j, x) \leq \|a_j\| \|x\|, \\ -\|a_j\| \|x\| - \lambda_j(0) &\leq -\lambda_j(x) \leq \|a_j\| \|x\| - \lambda_j(0). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Так как верхняя и нижняя границы в неравенстве (5.7) достигаются, то

$$\max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) = \max_{\|x\| \leq 1} (-\lambda_j(x)) = \|a_j\| - \lambda_j(0).$$

Поэтому

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| - \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) + 1 = \sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Мы воспользовались тем, что  $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(0) = 1$ . Поскольку  $\lambda_j(x^{(j)}) = 1$ , имеем

$$h_j = \text{dist}(x^{(j)}; \Gamma_j) = \frac{|\lambda_j(x^{(j)})|}{\|a_j\|} = \frac{1}{\|a_j\|} = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\alpha(B_n; S) = \sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}.$$

Итак, мы получили (5.2) и (5.3).

Докажем (5.4). Шар  $B$  есть подмножество транслята симплекса  $\alpha(B_n; S)S$ . Значит, транслят шара  $\frac{1}{\alpha(B_n; S)}B_n$  содержится в  $S$ . Так как максимальный радиус шара, принадлежащего  $S$ , равен  $r$ , то  $\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \leq r$ , т. е.  $\alpha(B_n; S) \geq \frac{1}{r}$ . Для получения противоположного неравенства обозначим через  $B'$  шар радиуса  $r$ , вписанный в  $S$ . Тогда шар  $B_n = \frac{1}{r}B'$  содержится в некотором трансляте симплекса  $\frac{1}{r}S$ . По определению  $\alpha(B_n; S)$ , это даёт  $\alpha(B_n; S) \leq \frac{1}{r}$ . Стало быть, верно равенство  $\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r}$ .

Наконец, для установления (5.5) достаточно привлечь (5.4) и формулу  $\text{vol}(S) = \frac{1}{n}\sigma r$ . Последнее равенство получается из обычной формулы для объёма симплекса после разбиения  $S$  на  $n + 1$  симплекс, каждый из которых имеет вершину в центре вписанного шара и опирается на одну из граней  $\Sigma_j$ .

5.1. ВЕЛИЧИНА  $\alpha(B_N; S)$

Теорема доказана. □

Отметим некоторые следствия теоремы 5.1. Имеет место равенство

$$\frac{1}{r} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{h_j}.$$

Для доказательства достаточно применить (5.3) и (5.4). Представляется интересным, что это красивое геометрическое соотношение, которое может быть получено и непосредственно, оказывается эквивалентным общей формуле для  $\alpha(C; S)$  в случае, когда выпуклое тело  $C$  является евклидовым единичным шаром.

Инрадиус  $r$  и инцентр  $z$  симплекса  $S$  могут быть вычислены по формулам

$$r = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}}, \quad (5.8)$$

$$z = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}} \sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} x^{(j)}. \quad (5.9)$$

Точка касания шара  $B(z; r)$  с  $(n-1)$ -мерной гранью  $\Sigma_k$  симплекса  $S$  имеет вид

$$y^{(k)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2}} \left[ \sum_{j=1}^{n+1} \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} x^{(j)} - \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^n l_{ik}^2 \right)^{1/2}} (l_{1k}, \dots, l_{nk}) \right]. \quad (5.10)$$

Равенство (5.8) немедленно следует из (5.2) и (5.4). Для получения (5.9) заметим, что

$$r = \text{dist}(z; \Gamma_j) = \frac{|\lambda_j(z)|}{\|a_j\|}.$$

Так как точка  $z$  лежит строго внутри  $S$ , каждая её барицентрическая координата  $\lambda_j(z)$  положительна. Поэтому  $\lambda_j(z) = r\|a_j\|$ . Следовательно,

$$z = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(z) x^{(j)} = r \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| x^{(j)},$$

что совпадает с (5.9). Наконец, поскольку вектор  $a_k = \{l_{1k}, \dots, l_{nk}\}$  ортогонален грани  $\Sigma_k$  и направлен от неё внутрь симплекса, единственная общая точка шара  $B(z; r)$  и этой грани имеет вид

$$y^{(k)} = z - \frac{r}{\|a_k\|} a_k = r \left( \sum_{j=1}^{n+1} \|a_j\| x^{(j)} - \frac{1}{\|a_k\|} a_k \right).$$

Последнее равенство равносильно (5.10).

Формулу (5.2) интересно сравнить с формулой (1.37) для  $\alpha(Q'_n; S)$ . Так как шар  $B_n$  есть подмножество куба  $Q'_n = [-1, 1]^n$ , то  $\alpha(B_n; S) \leq \alpha(Q'_n; S)$ . Аналитически же это неравенство следует из оценки

$$\left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n |l_{ij}|.$$

Для произвольных  $x^{(0)}$  и  $\varrho > 0$  величина  $\alpha(B(x^{(0)}; \varrho); S)$  может быть вычислена с помощью формул теоремы 5.1 и равенства  $\alpha(B(x^{(0)}; \varrho); S) = \varrho \alpha(B_n; S)$ .

Если  $S \subset Q_n$ , то все осевые диаметры  $d_i(S) \leq 1$ . Как уже отмечалось выше, формула (1.28) немедленно даёт  $\alpha(Q_n; S) \geq n$ . Если же для некоторого  $S$  выполняется  $\alpha(Q_n; S) = n$ , то каждый осевой диаметр  $S$  равен 1. Следующая теорема даёт аналоги этих утверждений для симплексов, содержащихся в шаре.

**Теорема 5.2.** *Если  $S \subset B_n$ , то  $\alpha(B_n; S) \geq n$ . Равенство  $\alpha(B_n; S) = n$  выполняется тогда и только тогда, когда  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $B_n$ .*

*Доказательство.* По определению  $\alpha(B_n; S)$ , шар  $B_n$  содержится в трансляте симплекса  $\alpha(B_n; S)S$ . Поэтому некоторый транслят  $B'$  шара  $\frac{1}{\alpha(B_n; S)}B_n$  есть подмножество  $S$ . Итак,  $B' \subset S \subset B_n$ . Так как радиус  $B'$  равен  $\frac{1}{\alpha(B_n; S)}$ , то для инрадиуса  $r$  и внешнего радиуса  $R$  симплекса  $S$  справедливы неравенства  $\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \leq r$ ,  $R \leq 1$ . Применяя неравенство Эйлера  $R \geq nr$ , запишем

$$\frac{1}{\alpha(B_n; S)} \leq r \leq \frac{R}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad (5.11)$$

откуда  $\alpha(B_n; S) \geq n$ .

Если же  $\alpha(B_n; S) = n$ , то левая величина в (5.11) совпадает с правой, значит, все неравенства в этой цепочке обращаются в равенства. Это даёт  $R = 1$ ,  $r = \frac{1}{n}$ . Так как в этом случае неравенство Эйлера (5.1) обращается в равенство,  $S$  является правильным симплексом, вписанным в  $B_n$ . Наоборот, если  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $B_n$ , то для него, очевидно,  $r = \frac{1}{n}$ , поэтому  $\alpha(B_n; S) = \frac{1}{r} = n$ .  $\square$

Итак, теорема 5.2 следует из неравенства Эйлера (5.1). Фактически же эти утверждения эквивалентны. Действительно, пусть  $S$  — произвольный  $n$ -мерный симплекс,  $r$  — инрадиус,  $R$  — внешний радиус  $S$ . Обозначим через  $B$  шар радиуса  $R$ , содержащий  $S$ . Тогда некоторый транслят  $S'$  симплекса  $\frac{1}{R}S$  содержится в шаре  $\frac{1}{R}B = B_n$ . По теореме 5.1  $\alpha(B_n; S')$  есть величина, обратная инрадиусу  $S'$ , т.е. равна  $\frac{R}{r}$ . Предположим теперь, что теорема 5.2 верна, и применим её к симплексу  $S' \subset B_n$ . Это даст  $\alpha(B_n; S') = \frac{R}{r} \geq n$ , т.е. неравенство (5.1). Если же  $R = nr$ , то  $\alpha(B_n; S') = n$ . Из теоремы 5.2 получаем, что в этом случае  $S'$ , а с ним и  $S$  являются правильными симплексами.

Как отмечалось, минимальное значение  $\alpha(S) = \alpha(Q_n; S)$  для  $S \subset Q_n$  также равно  $n$ . Это минимальное значение достигается на тех и только тех  $S \subset Q_n$ , для которых каждый осевой диаметр  $d_i(S)$  равен 1. Указанным свойством обладают, например, симплексы максимального объёма в  $Q_n$ , но при  $n > 2$  не только они.

## 5.2 Величина $\xi(B_n; S)$

В этом пункте приводится формула для коэффициента поглощения симплексом евклидова шара.

**Теорема 5.3.** Пусть  $S$  — невырожденный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ ,  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varrho > 0$ . Если  $B(x^{(0)}; \varrho) \not\subset S$ , то

$$\xi(B(x^{(0)}; \varrho); S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[ \varrho \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j} \right] + 1. \quad (5.12)$$

В частности, если  $B_n \not\subset S$ , то

$$\xi(B_n; S) = (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[ \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - l_{n+1,j} \right] + 1. \quad (5.13)$$

*Доказательство.* Применим общую формулу (1.24) для случая  $C = B(x^{(0)}; \varrho)$ . Неравенство Коши даёт

$$- \|a_j\| \|x - x^{(0)}\| \leq (a_j, x - x^{(0)}) \leq \|a_j\| \|x - x^{(0)}\|. \quad (5.14)$$

Для  $\|x - x^{(0)}\| \leq \varrho$  имеем

$$\begin{aligned} -\varrho \|a_j\| &\leq (a_j, x) - (a_j, x^{(0)}) \leq \varrho \|a_j\|, \\ -\lambda_j(x) &= -(a_j, x) - l_{n+1,j} \leq \varrho \|a_j\| - (a_j, x^{(0)}) - l_{n+1,j}. \end{aligned}$$

Так как верхняя и нижняя границы в неравенстве (5.14) достигаются, то

$$\max_{\|x - x^{(0)}\| \leq \varrho} (-\lambda_j(x)) = \varrho \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j}.$$

С учётом этого

$$\begin{aligned} \xi(B(x^{(0)}; \varrho); S) &= (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1, \|x - x^{(0)}\| \leq \varrho} (-\lambda_j(x)) + 1 = \\ &= (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \left[ \varrho \left( \sum_{i=1}^n l_{ij}^2 \right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} - l_{n+1,j} \right] + 1, \end{aligned}$$

и мы пришли к (5.12). Равенство (5.13) получается из (5.12) при  $x^{(0)} = 0$ ,  $\varrho = 1$ . Теорема доказана.  $\square$

### 5.3 Равенство $\beta_n = n$ . Комментарии

Прежде всего докажем следующее утверждение.

**Теорема 5.4.** *Если  $S \subset B_n$ , то  $\xi(B_n; S) \geq n$ . Равенство  $\xi(B_n; S) = n$  выполняется тогда и только тогда, когда  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $B_n$ .*

*Доказательство.* Утверждение теоремы немедленно следует из теоремы 5.2 и неравенства  $\xi(B_n; S) \geq \alpha(B_n; S)$ . Приведём и непосредственное доказательство без применения неравенства Эйлера, с помощью которого получена оценка  $\alpha(B_n; S) \geq n$ .

Пусть сначала  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $B_n$ . Тогда  $\alpha(B_n; S) = n$ , что равносильно тому, что инрадиус  $S$  равен  $\frac{1}{n}$ . Так как симплекс  $\xi(B_n; S)S$  описан вокруг  $B_n$ , то  $\xi(S; B_n) = \alpha(S; B_n) = n$  и выполняется соотношение (1.23), в котором надо взять  $C = B_n$ . Из (1.24) следует, что при любом  $j = 1, \dots, n+1$

$$\max_{x \in B_n} (-\lambda_j(x)) = \frac{n-1}{n+1},$$

где  $\lambda_j$  — базисные многочлены Лагранжа симплекса  $S$ .

Пусть теперь симплекс  $S$  содержится в  $B_n$ , но не является правильным симплексом или не вписан в этот шар. Его многочлены Лагранжа обозначим через  $\mu_j$ . Найдётся такой правильный симплекс  $S^*$ , вписанный в  $B_n$ , и такое  $k$ , что  $S$  принадлежит полосе  $0 \leq \lambda_k(x) \leq 1$ ,  $k$ -е  $(n-1)$ -мерные грани  $S$  и  $S^*$  параллельны и при этом  $S$  не имеет общих точек хотя бы с одной граничной гиперплоскостью этой полосы. Здесь  $\lambda_j$  — базисные многочлены Лагранжа симплекса  $S^*$ . Вершина  $x^{(k)}$  симплекса  $S^*$  не принадлежит его  $k$ -й грани. Пусть  $u$  есть точка границы шара, наиболее удалённая от  $x^{(k)}$ , тогда  $u$  есть точка максимума многочлена  $-\lambda_k(x)$ , т. е.  $-\lambda_k(u) = \frac{n-1}{n+1}$ . Рассмотрим прямую, соединяющую  $x^{(k)}$  и  $u$ . Обозначим через  $y, z$  и  $t$  точки пересечения этой прямой с попарно параллельными гиперплоскостями  $\mu_k(x) = 1$ ,  $\mu_k = 0$  и  $\lambda_k(x) = 0$  соответственно. Выполняются неравенства

$$\|x^{(k)} - t\| \geq \|y - z\|, \quad \|t - u\| \leq \|z - u\|, \quad (5.15)$$

хотя бы одно из которых наверняка строгое. В силу линейности базисных многочленов Лагранжа справедливы соотношения

$$\frac{\mu_k(z) - \mu_k(u)}{\mu_k(y) - \mu_k(z)} = \frac{\|z - u\|}{\|y - z\|}, \quad \frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(u)}{\lambda_k(x^{(k)}) - \lambda_k(t)} = \frac{\|t - u\|}{\|x^{(k)} - t\|}.$$

Поскольку  $\mu_k(y) = 1, \mu_k(z) = 0, \lambda_k(x^{(k)}) = 1, \lambda_k(t) = 0$ , имеем

$$-\mu_k(u) = \frac{\|z - u\|}{\|y - z\|} > \frac{\|t - u\|}{\|x^{(k)} - t\|} = -\lambda_k(u) = \frac{n-1}{n+1}.$$

Мы применили неравенства (5.15) и учли, что хотя бы одно из них является строгим. По формуле (1.24)

$$\xi(B_n; S) = (n + 1) \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in B_n} (-\mu_j(x)) + 1 \geq (n + 1)(-\mu_k(u)) + 1 > n.$$

Значит, если  $S$  не является правильным симплексом, вписанным в  $B_n$ , то имеет место строгое неравенство  $\xi(B_n; S) > n$ .

Таким образом, для любого симплекса  $S \subset B_n$  выполняется  $\xi(B_n; S) \geq n$ . Равенство здесь эквивалентно тому, что  $S$  — правильный симплекс, вписанный в  $B_n$ . Теорема доказана.  $\square$

По аналогии с величиной  $\xi_n = \min\{\xi(Q_n; S) : S \subset Q_n\}$ , определяемой через единичный куб  $Q_n = [0, 1]^n$ , введём в рассмотрение числовую характеристику, задаваемую единичным шаром:

$$\beta_n := \min\{\xi(B_n; S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс, } S \subset B_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Как отмечалось, многие задачи о числах  $\xi_n$  ещё не решены. Например, единственным точным значением  $\xi_n$  для чётного  $n$  до сих пор остаётся  $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5}$ , да и оно было найдено весьма непростым способом (см. [13, гл. 2]). По сравнению с  $\xi_n$  задача о числах  $\beta_n$  оказывается тривиальной. Из теоремы 5.4 немедленно следует, что для любого  $n$  справедливо  $\beta_n = n$ . Экстремальным относительно  $\beta_n$  симплексом  $S \subset B_n$  является любой правильный симплекс, вписанный в  $B_n$ . Других экстремальных симплексов нет.

Техника, связанная с шаром, позволяет проиллюстрировать некоторые результаты, полученные ранее для куба. Для примера докажем новым способом, что если существует матрица Адамара порядка  $n+1$ , то  $\xi_n = n$  (см. теорему 2.2).

Известно (см., например, [29]), что для такого и только такого  $n$  в  $Q_n$  можно вписать правильный симплекс  $S$  так, что вершины симплекса будут находиться в вершинах куба. Обозначим через  $B$  шар с центром в центре куба и радиусом  $\frac{\sqrt{n}}{2}$ . Очевидно, куб  $Q_n$  вписан в  $B$ , поэтому и симплекс  $S$  вписан в этот шар. Так как  $S$  является правильным, то по теореме 5.4 и из соображений подобия имеем  $\xi(B; S) = n$ . Включение  $Q_n \subset B$  означает, что  $\xi(S) = \xi(Q_n; S) \leq \xi(B; S)$ , т. е.  $\xi(S) \leq n$ . Выполнено и противоположное неравенство  $\xi(S) \geq n$ , поэтому  $\xi(S) = n$ . Одновременно получаем, что  $\xi_n = n$ .

Это рассуждение базируется на том, что если  $S$  — правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах  $Q_n$ , то симплекс  $nS$  поглощает не только  $Q_n$ , но и шар  $B$ , описанный вокруг куба. При этом коэффициент поглощения  $n$  оказывается минимально возможным и для куба, и для шара.

Если  $S \subset Q_n \subset nS$ , причём симплекс  $S$  не является правильным, то  $B \not\subset nS$ . Действительно, включение  $B \subset nS$  означало бы, что  $\xi(B; S) = n$ . Тогда  $S$  был бы правильным симплексом, вписанным в шар  $B$ , однако это не так. Поэтому  $B$  не является подмножеством  $nS$ . Как показано выше, симплексы, не являющиеся правильными и удовлетворяющие включениям  $S \subset Q_n \subset nS$ , существуют по крайней мере при  $n = 3$ ,  $n = 5$  и  $n = 9$ .

Равенство  $\xi_n = n$  установлено при  $n = 5$ ,  $n = 9$  и в тех ситуациях, когда  $n + 1$  есть число Адамара. Для этих размерностей  $\xi_n = \beta_n$ , т.е. относительно величины минимального коэффициента поглощения находящимся внутри симплексом оба множества —  $n$ -мерный куб и  $n$ -мерный шар — ведут себя одинаково. Однако вопрос о полном описании таких размерностей остаётся открытым.

## Задания для самостоятельной работы

1. Даны вершины невырожденного  $n$ -мерного симплекса. Требуется задать этот симплекс системой линейных неравенств. Реализуйте алгоритм решения задачи на компьютере.
2. Составьте и реализуйте на компьютере алгоритм нахождения осевых диаметров данного невырожденного симплекса в  $\mathbb{R}^n$ .
3. Реализуйте на компьютере алгоритм нахождения максимального в симплексе  $S \subset \mathbb{R}^n$  отрезка данного направления и вычисления  $(n-1)$ -мерной меры проекции  $S$  на данную гиперплоскость.
4. Даны невырожденный симплекс  $S$  и выпуклое тело  $C$  в  $\mathbb{R}^n$ . Составьте и реализуйте на компьютере алгоритм вычисления величин  $\alpha(C; S)$  и  $\xi(C; S)$ . Рассмотрите различные примеры выпуклых тел и способов их задания.
5. Решите предыдущую задачу в случае, когда  $C = [0, 1]^n$ .
6. Составьте и реализуйте на компьютере алгоритм вычисления объёмов частей, отсекаемых от  $n$ -мерного куба данной гиперплоскостью.
7. Реализуйте на компьютере вычисление величины  $\alpha(B; S)$  для невырожденного симплекса  $S$  и евклидова шара  $B$  в  $\mathbb{R}^n$ .
8. Реализуйте на компьютере вычисление коэффициента поглощения  $\xi(B; S)$  симплексом  $S \subset \mathbb{R}^n$  произвольного  $n$ -мерного евклидова шара  $B$ .

# Литература

- [1] *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009. 512 с.
- [2] *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967. 232 с.
- [3] *Грюнбаум Б.* Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971. 96 с.
- [4] *Есипова Е. М.* Геометрические характеристики симплексов, обладающих свойством равноотсечения // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 17. Ярославль: ЯрГУ, 2017. С. 49–61.
- [5] *Есипова Е. М., Ухалов А. Ю.* Свойства экстремальных симплексов, связанные с отсекаемыми объемами // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 18. Ярославль: ЯрГУ, 2018. С. 4–17.
- [6] *Климов В. С., Ухалов А. Ю.* Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 96 с.
- [7] *Невский М. В.* Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам  $n$ -мерного куба // Модел. и анализ информ. систем. 2003. Т. 10, № 1. С. 9–19.
- [8] *Невский М. В.* Неравенства для норм интерполяционных проекторов // Модел. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15, № 3. С. 3–15.
- [9] *Невский М. В.* Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 2. С. 24–43.
- [10] *Невский М. В.* Об одном свойстве  $n$ -мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. (Английский перевод: *Neuskii M. V.* On a property of  $n$ -dimensional simplices // Math. Notes. 2010. V. 87, № 4. P. 543–555.)

- [11] *Невский М. В.* О геометрических характеристиках  $n$ -мерного симплекса // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 2. С. 52–64.
- [12] *Невский М. В.* Об осевых диаметрах выпуклого тела // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 313–315. (Английский перевод: *Neuskii M. V.* On the axial diameters of a convex body // Math. Notes. 2011. V. 90, № 2. P. 295–298.)
- [13] *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции: монография. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 218 с.
- [14] *Невский М. В.* О минимальном положительном гомотетическом образе симплекса, содержащем выпуклое тело // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 3. С. 448–456. (Английский перевод: *M. V. Neuskii.* On the minimal positive homothetic image of a simplex which contains a convex body // Math. Notes. 2013. V. 93, № 3–4. P. 470–478.)
- [15] *Невский М. В.* Об одной задаче для симплекса и куба в  $\mathbb{R}^n$  // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 3. С. 77–85. (Англ. перевод: *Neuskii M. V.* On some problem for a simplex and a cube in  $\mathbb{R}^n$  // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. V. 48, № 7. P. 521–527.)
- [16] *Невский М. В.* Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления // Фундамент. и прикладная математика. 2013. Т. 18, вып. 2. С. 147–152. (Англ. перевод: *Neuskii M. V.* Computation of the longest segment of a given direction in a simplex // Journal of Math. Sciences. 2014. V. 203, № 6. P. 851–854.)
- [17] *Невский М. В.* О некоторых задачах для симплекса и шара в  $\mathbb{R}^n$  // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25, № 6. С. 680–691. (Англ. перевод: *Neuskii M. V.* On some problems for a simplex and a ball in  $\mathbb{R}^n$  // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. V. 52, № 7. P. 828–842.)
- [18] *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* О числовых характеристиках симплекса и их оценках // Модел. и анализ информ. систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 603–619. (Англ. перевод: *Neuskii M. V., Ukhalov A. Yu.* On numerical characteristics of a simplex and their estimates // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. V. 51, № 7. P. 757–769.)
- [19] *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 1. С. 94–110. (Англ. перевод: *Neuskii M. V., Ukhalov A. Yu.* New estimates of numerical values related to a simplex // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. V. 51, № 7. P. 770–782.)

- [20] *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Об  $n$ -мерных симплексах, удовлетворяющих включениям  $S \subset [0, 1]^n \subset nS$  // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 578–595. (Англ. перевод: *Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu.* On  $n$ -dimensional simplices satisfying inclusions  $S \subset [0, 1]^n \subset nS$  // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. V. 52, № 7. P. 667–679.)
- [21] *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* О минимальном коэффициенте поглощения для  $n$ -мерного симплекса // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 140–150. (Англ. перевод: *Nevskii M. V., Ukhalov A. Yu.* On minimal absorption index for an  $n$ -dimensional simplex // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. V. 52, № 7. P. 680–687.)
- [22] *Тараканов В. Е.* Комбинаторные задачи и  $(0, 1)$ -матрицы. М.: Наука, 1985. 192 с.
- [23] *Федулов Д. Д., Ухалов А. Ю.* Оценки минимального коэффициента поглощения  $n$ -мерного симплекса // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 19. Ярославль: ЯрГУ, 2019. С. 53–59.
- [24] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
- [25] *Balla M. Y.* Approximation of convex bodies by parallelotopes. International Centre for Theoretical Physics. Internal report IC/87/310. Trieste, 1987. 5 pp.
- [26] *Clements G. F., Lindström B.* A sequence of  $(\pm 1)$  determinants with large values // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 548–550.
- [27] *Frank R., Riede H.* Hyperplane sections of the  $n$ -dimensional cube // Amer. Math. Monthly. 2012. V. 119, № 10. P. 868–872.
- [28] *Hadamard J.* Résolution d’une question relatif aux déterminants // Bull. Sci. Math. 1893. V. 28. P. 240–246.
- [29] *Hudelson M., Klee V., Larman D.* Largest  $j$ -simplices in  $d$ -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241–243. P. 519–598.
- [30] *Klamkin M. S., Tsifinis G. A.* Circumradius–inradius inequality for a simplex // Mathematics Magazine. 1979. V. 52, № 1. P. 20–22.
- [31] *Lassak M.* Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 449–462.
- [32] *Martini H.* Some characterizing properties of the simplex // Geometriae Dedicata. 1989. V. 29, № 6. P. 1–6.

- [33] *Mangano S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly Media Inc. 2010. 830 pp.
- [34] *Nevskii M.* Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.
- [35] *Nevskii M., Ukhalov A.* Perfect simplices in  $\mathbb{R}^5$  // Beitrage zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry. 2018. V. 59, № 3. P. 501–521.
- [36] *Radziszewski K.* Sur une probleme extremal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux fiures convexes // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. 1952. V. 6. P. 5–18.
- [37] *Scott P. R.* Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. V. 36. P. 359–362.
- [38] *Scott P. R.* Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329–333.
- [39] *Vince A.* A simplex contained in a sphere // Journal of Geometry. 2008. V. 89, № 1–2. P. 169–178.
- [40] *Wolfram S.* Essentials of programming in Mathematica. Cambridge University Press, 2016. 422 pp.
- [41] *Yang S., Wang J.* Improvements of  $n$ -dimensional Euler inequality // Journal of Geometry. 1994. V. 51. P. 190–195.

Учебное издание

**Невский** Михаил Викторович  
**Ухалов** Алексей Юрьевич

# Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии

## Часть I

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерная верстка М. В. Невский и А. Ю. Ухалов  
Подписано в печать 10.02.2020. Формат 60 x 84/8.  
Усл. печ. л. 11,28. Уч.-изд. л. 6,0.  
Тираж 24 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен  
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им П. Г. Демидова  
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.