Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

В. В. Литвинов
А. Ю. Ухалов
Д. В. Глазков

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Практикум

Ярославль
ЯрГУ
2015

УДК 517 (072)
ББК В16я73
Л 64

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2015 года

Рецензент

кафедра математического анализа
Ярославского государственного университета
им. П.Г. Демидова

Литвинов Владимир Викторович.
Л 64 Несобственные интегралы, зависящие от параметра : практикум / В. В. Литвинов, А. Ю. Ухалов, Д. В. Глазков ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2015. — 44 с.

Рассмотрены методы вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра. Приведены необходимые теоретические сведения и на примерах показаны способы вычисления несобственных интегралов. Разобраны темы, вызывающие трудности у студентов, например вывод формулы Фрулани. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Практикум предназначен для студентов математического факультета, обучающихся по направлениям 01.03.02 (010400.62) Прикладная математика и информатика; 02.03.01 (010200.62) Математика и компьютерные науки, очной формы обучения.

УДК 517 (072)
ББК В16я73

Оглавление

Введение

Тема «Несобственные интегралы, зависящие от параметра», является важной составляющей курсов непрерывной математики. Вместе с тем в связи с сокращением часов, отводимых для изучения математического анализа, данную тему не удается рассмотреть в достаточном объеме. В этой ситуации представляется целесообразным на лекциях и практических занятиях разобрать только интегралы, используемые в других курсах, а часть материалов предложить для самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных расчетно-графических работ студентами специальностей прикладная математика и информатика, компьютерная безопасность, математика и компьютерные науки.

Практикум преследует цель помочь студентам самостоятельно познакомиться с вычислением собственных и несобственных интегралов, зависящих от параметра, с помощью дифференцирования и интегрирования, а также с использованием гамма- и бета-функции Эйлера.

1. Интегралы, зависящие от параметра. Интеграл Фрулани

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по совокупности аргументов на прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\},$$

где a, c – вещественные числа, а символы b, d могут обозначать вещественные числа или символ $+\infty$. Если для любого $y \in [c, d)$ сходится интеграл

$$\int_a^b f(x, y)\, dx,$$

то на множестве $[c, d)$ определена функция

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

которая называется интегралом, зависящим от параметра. Определенные подобным образом функции находят широкое применение в различных приложениях. Многие задачи могут быть сведены к вычислению интегралов такого вида.

В практикуме рассмотрены в основном методы решения задач, связанных с интегралами, зависящими от параметра. Соответствующая теория подробно изложена в [1–3], а некоторые упражнения по данной теме можно найти в [4–7].

1.1. Интеграл Эйлера-Пуассона

Интегралы, зависящие от параметра, могут быть полезны при вычислении многих определенных интегралов (собственных и несобственных), изначально параметра не содержащих. В таких случаях говорят о «введении параметра» – искусственном приеме, позволяющем вычислить данный интеграл.

В этом разделе мы вычислим интеграл, известный под названием «интеграл Эйлера – Пуассона». Он встречается во многих разделах математики, в частности в теории вероятностей и уравнениях математической физики. Этот интеграл имеет вид

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

Доказано, что первообразная от функции e^{-t^2} не выражается через элементарные функции. Тогда данный интеграл нельзя вычислить с помощью формулы Ньютона – Лейбница. Мы приведем несколько способов определения величины J.

Покажем, как вычислить данный интеграл с помощью введения параметра. Сделаем в интеграле замену переменной $t = xy,\ y > 0$. Тогда

$$J = y \int_0^\infty e^{-x^2 y^2} dx.$$

Умножая последнее равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$, получаем

$$J^2 = \int_0^\infty J e^{-y^2} dy = \int_0^\infty dy \int_0^\infty y e^{-y^2(1+x^2)} dx. \tag{1.1}$$

Изменяя порядок интегрирования, приходим к интегралу, который легко вычисляется:

$$J^2 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty y e^{-y^2(1+x^2)} dy =$$

$$= -\int_0^\infty \left. \frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{2(1+x^2)} \right|_0^\infty dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования применим теорему о перестановке порядка интегрирования, когда оба интеграла несобственные. Напомним формулировку теоремы и обратим внимание студентов, что эта теорема является естественным обобщением теоремы о перестановке пределов интегрирования в случае собственных интегралов. Проверим, выполняются ли условия данной теоремы в этом конкретном случае. Действительно, интеграл

$$\int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)}dx$$

сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[a,b] \subset (0,+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как справедлива оценка

$$\left|ye^{-y^2(1+x^2)}\right| \le be^{-a^2(1+x^2)},$$

а несобственный интеграл

$$\int_0^\infty be^{-a^2(1+x^2)}dx$$

сходится. Читателям предлагается самостоятельно доказать сходимость данного интеграла. Подробное объяснение можно найти в книге [1].

Аналогично показывается, что интеграл

$$\int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)}dy$$

сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[a,b] \subset (0,+\infty)$. Повторный интеграл

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)}dy$$

сходится в силу равенства (1.1).

Приведем еще один способ вычисления интеграла Эйлера – Пуассона. В этом случае, мы сведем задачу к вычислению двойного несобственного интеграла

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{1.2}$$

Перейдем в полярную систему координат и построим исчерпывающую весь образ $\mathbf{R}_+^2$ последовательность $\{G_n\}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbf{R}_+^2$ измеримых по Жордану множеств, где

$$G_n = \Big\{(r,\varphi): \quad 0 \le r < n, \quad 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\Big\}.$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+x^2)} dxdy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = J^2.$$

Интеграл (1.2) легко вычисляется:

$$J^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

Получаем уже известное нам значение величины J.

В разделе 2 мы покажем еще один способ подсчета данного интеграла.

1.2. Дифференцирование собственных интегралов, зависящих от параметра

Если функция $f(t,x)$ определена и непрерывна в ограниченной области $R(t,x) = \{(t,x)\ a \le t \le A, b \le x \le B\}$, то

$$F(x) = \int_a^A f(t,x) dt$$

представляет собой функцию аргумента x на отрезке $[b, B]$. Если, кроме того, частная производная $f'_x(t, x)$ непрерывна в области $\mathbb{R}$, то при $b < x < B$ справедлива формула Лейбница:

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f'(t,x)dt = \int_a^A f'_x(t,x)dt.$$

В более общем случае, когда пределы интегрирования являются дифференцируемыми функциями $\varphi(x), \psi(x)$ параметра x и $a < \varphi(x) < A$ и $a < \psi(x) < A$ при $b < x < B$, то справедлива следующая формула (см., например, [1]):

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt =$$

$$= \frac{db(x)}{dx} f(x, b(x)) - \frac{da(x)}{dx} f(x, a(x)) + \int\limits_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

1.3. Дифференцирование несобственных интегралов, зависящих от параметра

Если $f(t, x)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_x(t, x)$ в области $R(t, x) = \{a \le t < +\infty, x_1 < x < x_2\}$ и $\int\limits_0^\infty f(t,x)dt$ сходится, а $\int\limits_a^{+\infty} f'_x(t,x)dt$ сходится равномерно в интервале (x_1, x_2), то

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^\infty f(t,x)dx = \int\limits_a^\infty f'_x(t,x)dt,\ x_1 < x < x_2$$

(правило Лейбница).

Таким образом, вычисление производной по параметру несобственных интегралов можно выполнять по той же формуле, что и для собственных интегралов. В случае несобственного интеграла следует обращать особое внимание на выполнение условий теоремы. Требуется равномерная сходимость интеграла именно от производной подынтегральной функции!

В некоторых случаях, зная значение какого-либо интеграла, зависящего от параметра, можно получить значения других интегралов. Приведем несколько примеров.

Пример 1.1. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}, \quad a > 0,$$

вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 x^{a-1}\ln^2 x dx.$$

Решение. Так как

$$x^{a-1}\ln^2 x = \frac{d^2}{da^2}x^{a-1},$$

то

$$I = \frac{d^2}{da^2}\int\limits_0^1 x^{a-1}dx = \frac{d^2}{da^2}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a^3}.$$

Пример 1.2. Пользуясь равенством

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2},$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^3}.$$

Решение. Обозначим

$$J(a) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\pi}{2}.$$

Вычислив производные первого и второго порядков функции $J(a)$, придем к равенствам:

$$J'(a) = -\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^2}, \qquad J''(a) = (-1)(-2)\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^3}.$$

Искомый интеграл выражается через вторую производную $J''(a)$ следующим образом:

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^3} = \frac{J''(a)}{2} = \frac{3\pi}{16}a^{-\frac{5}{2}}.$$

1.4. Некоторые специальные приемы вычисления несобственных интегралов

Иногда удается вычислить несобственный интеграл, прибегнув к следующему приему. Одну из величин, входящих в подинтегральную функцию, рассматривают как параметр. Продифференцировав интеграл по параметру, получают более простой интеграл, который легко вычисляется. Проинтегрировав найденную функцию, удается найти искомую величину. Следует помнить, что интегрирование позволяет восстановить функцию лишь с точностью до постоянной (величины, не зависящей от параметра). Для определения этой неизвестной постоянной необходимо знать величину искомого интеграла при каком-либо значении параметра. Иногда удается определить неизвестную постоянную, зная какие-либо другие свойства искомого интеграла.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.3. Найти интеграл $I(x) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt, \;\; x > 0.$

Решение. Заметим, что

$$\frac{dI(x)}{dx} = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}(-t)}{t} dt = -\int\limits_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x} e^{-xt}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{x},$$

следовательно, $I(x) = -\ln x + C$, где постоянная C определяется из условия $I(1) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-t}}{t} dt = 0$. Таким образом, $I(x) = -\ln x$.

Пример 1.4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx \qquad (0 < a < b).$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x,t) = \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}, \qquad 0 \le t < \infty.$$

Она не определена при $x = 0$. Однако

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2} = b - t.$$

Доопределим эту функцию, положив $f(0,t) = b - t$. Получится непрерывная на $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ функция.

$f'_t(x,t) = e^{-tx^2}$ непрерывна, а $\int\limits_0^\infty e^{-ax^2}dx$ сходится. Более того, по признаку Вейерштрасса, сходится равномерно.

Следовательно, функция $J(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} J(b) &= 0, \\ J'(b) &= -\int\limits_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx = -\frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}du = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}. \\ \text{Отсюда } J(t) &= \sqrt{\pi}b - \sqrt{\pi}t. \\ \text{Тогда } J(a) &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \end{aligned}$$

при $0 < a < b$.

1.5. Формула Фрулани

Рассмотрим вопрос о существовании и вычислении одного частного вида несобственного интеграла – интеграла Фрулани. Вопрос о существовании интеграла и вывода формулы Фрулани редко приводится в классических курсах математического анализа. В частности, в книге [1] она даже не упоминается.

Интегралом Фрулани называется интеграл вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \quad (a, b > 0).$$

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty).$$

Из непрерывности следует, что при $0 < \delta < \delta_1 < \infty$

$$\int\limits_{\delta}^{\delta_1} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \int\limits_{\delta}^{\delta_1} \frac{f(ax)}{x}\, dx - \int\limits_{\delta}^{\delta_1} \frac{f(bx)}{x}\, dx =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{a\delta_1} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int\limits_{b\delta}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t}\, dt = \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}\, dt - \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}\, dt - \lim_{\delta_1 \to +\infty} \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Применяя к каждому интегралу обобщенную теорему о среднем, получим

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(\xi) \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \quad a\delta < \xi < b\delta.$$

Аналогично

$$\int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(\nu) \ln \frac{b}{a}, \quad a\delta_1 < \nu < b\delta_1,$$

т. к. $\xi \to 0$ при $\delta \to 0$, а $\nu \to +\infty$ при $\delta \to 0$. Отсюда следует:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

Заметим, если $f(+\infty)=0$, то формула Фрулани приобретает следующий вид:

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Рассмотрим пример:

$$\int\limits_0^\infty \ln\left(\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\right)\frac{dx}{x} = J, \qquad p,q>0.$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$\ln\left(\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\right) = \ln(p+qe^{-ax}) - \ln(p+qe^{-bx}),$$

$$f(0)=\ln(p+q), \quad f(+\infty)=\ln p.$$

В соответствии с формулой Фрулани получим, что значение искомого интеграла равно

$$J = \ln\left(1+\frac{q}{p}\right)\ln\frac{b}{a}.$$

1.6. Вычисление интегралов при помощи составления уравнений

В некоторых случаях дифференцирование интеграла по параметру не приводит к интегралу, который легко вычислить. Однако иногда удается вывести какое-либо соотношение, которому удовлетворяет искомый интеграл и его производные. В таком случае можно вычислить интеграл, решив полученное уравнение. Рассмотрим примеры.

Пример 1.5. Пусть требуется вычислить интеграл

$$I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\cos 2ax\,dx.$$

Решение. Вычислим производную функции $I(a)$:

$$\frac{dI}{da} = -\int\limits_0^\infty e^{-x^2} 2x \sin 2ax \, dx.$$

Пользуясь равенством $-e^{x^2} 2xdx = de^{-x^2}$, применим формулу интегрирования по частям. Получим

$$\frac{dI}{da} = e^{-x^2} 2x \sin 2ax \Big|_0^\infty - 2a \int\limits_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax \, dx.$$

Приходим к соотношению $\dfrac{dI}{da} = -2aI$. Таким образом, мы показали, что искомая функция $I(a)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка. Это уравнение с разделяющимися переменными. Решив его, получаем $I(a) = Ce^{-a^2}$. Для определения постоянной C воспользуемся известным равенством

$$I(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Получим, что $C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Искомый интеграл может быть записан в виде

$$I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

Пример 1.6. Вычислим интеграл

$$I(b) = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ax^2+bx} dx.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру имеем

$$\frac{dI}{db} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{bx} x dx = -\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{bx} d(-ax^2) =$$

$$= -\frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{bx} d(e^{-ax^2}) = -\frac{e^{bx-ax^2}}{2a}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{\infty} b e^{bx-ax^2} dx = \frac{b}{2a} I.$$

Для функции $I(b)$ получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dI}{db} = \frac{b}{2a} I.$$

Следовательно,

$$I = C \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).$$

Для определения постоянной C заметим, что

$$I(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Следовательно, $C = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$. В силу этого окончательно имеем

$$I(b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).$$

1.7. Интегралы, зависящие от параметра, и специальные функции

В этом разделе исследуются свойства нескольких важных специальных функций, широко применяющихся в математической физике. Методы, рассмотренные в предыдущих разделах, позволяют показать, что данные функции удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям.

Пример 1.7. Доказать, что функция

$$I_0(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)d\varphi$$

является решением уравнения Бесселя порядка $n = 0$.

Решение. Дифференцируя интеграл по параметру x, получим

$$I_0'(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi,$$

$$I_0''(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\sin^2\varphi d\varphi.$$

В интеграле $I_0'(x)$ применим формулу интегрирования по частям:

$$I_0'(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\sin\varphi)d\cos\varphi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin(x\sin\varphi)\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2\varphi\cos(x\sin\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{2x}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\cos(x\sin\varphi)d\varphi.$$

Следовательно,

$$xI_0''(x) + I_0'(x) + xI_0(x) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [-x\sin^2\varphi x\cos^2\varphi + x]\cos(x\sin\varphi)d\varphi = 0.$$

1.8. Задачи

Продифференцировать по параметру x интегралы:

1. $\displaystyle\int_{a+x}^{b+x} \frac{\sin tx}{t}\, dt.$

2. $\displaystyle\int_{1+x}^{1-x} \frac{x^{t-1}}{t-1} dt, \quad x > 0.$

3. $\displaystyle\int_{x}^{0} \ln(x^2+t^2) dt.$

4. $\displaystyle\int_{-x}^{x} e^{(x+t)^2} dt.$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \ln t \log_t x\, dt.$

6. $\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-t^2}} dt.$

7. $\displaystyle\int_{x}^{x^2} \tan x\sqrt{t}\, dt.$

8. $\displaystyle\int_{-x^2}^{0} \sin(x\sqrt{-t}) dt.$

9. $\displaystyle F(x) = \int_{0}^{x} (x+t) f(t) dt, \qquad F''(x) = ?$

10. $\displaystyle F(x) = \int_{a}^{b} f(t)|x-t| dt, \qquad F''(x) = ?$

11. $\displaystyle\int_{0}^{x} f(x+t, x-t) dt.$

Определить значения следующих выражений:

12. $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^{1+x} \frac{dt}{1+t^2+x^2}.$

13. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx.$

14. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \displaystyle\int_0^2 x^2 \cos\alpha x\,dx.$

15. $\lim\limits_{n\to 0} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}.$

16. $\lim\limits_{R\to \infty} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{R\sin\Theta} d\Theta.$

Вычислить производные следующих интегралов, зависящих от параметра:

17. $F(\alpha) = \displaystyle\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx, \qquad F'(\alpha) = ?$

18. $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx, \qquad F'(\alpha) = ?$

19. $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx, \qquad F'(y) = ?$

20. $F(y) = \displaystyle\int_0^{y} (x+xy)^{10} dx, \qquad F'(y) = ?$

21. $F(y) = \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\ln(1+xy)}{1+y}\,dx, \qquad F'(y) = ?$

22. $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-y(x+y)^2}dx, \qquad F'(y) = ?$

23. $F(y) = \int_0^{1} f(x)\,\mathrm{sign}(\sin xy)dx, \qquad F'(y) = ?$

Вычислить интегралы при помощи дифференцирования под знаком интеграла (воспользовавшись вспомогательными равенствами):

24. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1+a\sin^2 x)^2}$, если изестно, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+a\sin^2 x)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}, \qquad |a| < 1.$$

25. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, если изестно, что

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{1}{a}, \qquad a \neq 0.$$

26. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{(1+a\cos x)^2}$, если изестно, что

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \qquad |a| < 1.$$

Вычислить интегралы:

27. $$\int\limits_0^1 \frac{\arctan tx}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

28. $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-t(x+1)}}{t}\,dt \qquad (x>-1).$$

29. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(x\tan t)}{\tan t}\,dt \qquad (x\geq 0).$$

30. $$\int\limits_0^\infty \frac{\ln(x^2+t^2)}{t^2+1}\,dt.$$

31. $$\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-xt^2}}{t}\,e^{-t^2}dt.$$

32. $$\int\limits_0^\infty \frac{\arctan tx}{t(1-t^2)}\,dt \qquad (x\geq 0).$$

33. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)dt.$$

34. $$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+x\sin t}{1-x\sin t}\,\frac{dt}{\sin t} \qquad (|x|\leq 1).$$

35. $$\int\limits_0^\infty \frac{(e^{-xt}-e^{-t})^2}{t^2}\,dt \qquad (x>0).$$

36. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{t^x - t}{\ln t}\,dt \qquad (x > 0).$

37. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2} - e^{-yt^2}}{t}\,dt \qquad (x, y > 0).$

38. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \Big(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\Big)^2 dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$

39. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin x\,dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$

40. $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos x\,dx \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$

41. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\,dx \qquad (|\alpha| \leq 1).$

42. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \qquad (|\alpha| \leq 1).$

43. $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\,dx.$

44. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2}\,dx.$

Полагая параметры a и b положительными, найти значения следующих интегралов:

45. $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx.$$

46. $$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^3}}{x}\,dx.$$

47. $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\,dx.$$

48. $$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx.$$

49. $$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctan} ax - \operatorname{arctan} bx}{x}\,dx.$$

50. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^\infty \exp\left(-x^2 - \frac{c^2}{x^2}\right)dx, \quad \text{если} \quad \int\limits_0^\infty e^{x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Указание: в интеграле, который получается после дифференцирования по параметру, сделать замену переменной $x = \dfrac{C}{Z}$.

51. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}\,dx, \quad a > 0.$

Указание: при составлении дифференциального уравнения воспользоваться тем, что

$$\frac{\sin ax}{x(1+x^2)} = \frac{\sin ax}{x} - \frac{x\sin ax}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad a > 0.$$

52. Вычислить интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx\,dx.$

53. Вычислить разность интегралов

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-kx}}{1+x^2}\,dx - \int\limits_k^\infty \frac{\sin(x-k)}{x}\,dx.$$

Указание: постоянные интегрирования найдутся при условии обращения I в 0 при $k\to\infty$.

54. Найти уравнение линии $r = r(\varphi)$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой и лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$, вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{4}r^2(\varphi_1) - \dfrac{1}{4}$.

В задачах 55 – 59 читателю предлагается самостоятельно показать, что функция, представленная интегралом является решением соответствующего дифференциального уравнения.

55. Доказать, что функция Бесселя целого порядка n

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$x^2 I_n''(x) + x I_n'(x) + (x^2 - n^2) I_n(x) = 0.$$

56. Доказать, что функция

$$u(x) = \int\limits_0^1 k(x,y)v(y)dy,$$

где

$$k(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \le y, \\ y(1-x), & x > y \end{cases}$$

и $v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению

$$u''(x) = -v(x), \qquad 0 < x < 1$$

и граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$.

57. Доказать, что функция

$$u(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} f(t)dt,$$

где $f(t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению

$$u''(x) + k^2 u(x) = f(x), \qquad x > 0$$

и начальным условиям $u(0) = u'(0) = 0$.

58. Пусть $f(x)$ – дважды дифференцируемая функция и $g(x)$ – дифференцируемая функция. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} g(z)dz$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

и начальным условиям $u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = h(x).$

59. Пусть $f(x)$ – абсолютно интегрируемая на $(-\infty, \infty)$. Доказать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0.$$

2. Эйлеровы интегралы

В этом разделе рассматриваются определения и основные свойства двух специальных функций – так называемых Эйлеровых интегралов (гамма- и бета-функций Эйлера). Эти функции полезно знать, т. к. с их помощью удается записать решение многих важных задач.

Основное внимание уделяется разъяснению методов решения соответствующих задач. Теоретические сведения приводятся очень коротко и носят справочный характер.

2.1. Бета-функция Эйлера

По определению, бета-функцией Эйлера называется следующий интеграл, зависящий от двух параметров:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p,q) > 0. \tag{2.3}$$

Легко устанавливаются следующие свойства B-функции:

1. $B(p,q) = B(q,p)$.

2. Функция $B(p,q)$ может быть представлена в виде

$$B(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy. \tag{2.4}$$

Читателю предлагается самостоятельно доказать это свойство. Указание: (2.4) можно получить из (2.3) заменой переменного $x = \dfrac{y}{1+y}$.

3. $B(p,q) = \dfrac{p-1}{p+q-1}\,B(p-1,q)$.

Докажем свойство 3. Заметим, что в силу симметрии p, q достаточно установить, что

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\, B(p,q-1).$$

Воспользовавшись в (2.3) формулой интегрирования по частям, получим

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 (1-x)^{q-1} d\frac{x^p}{p} =$$

$$= \frac{x^p(1-x)^{q-1}}{p}\Bigg|_0^1 + \frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-2}dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}dx - \frac{q-1}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \frac{q-1}{p}B(p,q-1) - \frac{q-1}{p}B(p,q).$$

Из этого соотношения вытекает нужное нам равенство.

Следствием свойства 3 является следующее утверждение. Если $q = n \in \mathbb{N}$, то

$$B(p,n) = \frac{n-1}{p+n-1}\frac{n-2}{p+n-2}\cdots\frac{1}{p+1}B(p,1),$$

где $B(p,1) = \int\limits_0^1 x^{p-1}dx = \frac{1}{p}$. Тогда

$$B(n,a) = B(a,n) = \frac{1\cdot 2\cdots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)},$$

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4. Если $p+q=1$, то

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad 0<p<1.$$

Обоснование этого свойства более сложно, чем в предыдущих случаях. Доказательство можно найти, например, в книге [1].

Из свойства 4 следует, в частности, что $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$.

2.2. Гамма-функция Эйлера

Гамма-функцией Эйлера называется следующий интеграл:

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx,\quad p>0. \tag{2.5}$$

Приведем некоторые свойства Г-функции.

1. $\Gamma'(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}\ln x e^{-x}dx.$

Читателю предлагается самостоятельно обосновать возможность дифференцирования по параметру. Подробно этот вопрос рассмотрен в книге [1].

2. Применим к интегралу в правой части (2.5) формулу интегрирования по частям. Имеем

$$p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx=x^pe^{-x}\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty x^pe^{-x}dx.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\Gamma(p+1)=p\,\Gamma(p). \tag{2.6}$$

Из последнего тождества легко вывести формулы:

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\,\Gamma(p), \quad \Gamma(n+1) = n!$$

Формула (2.5) определяет функцию $\Gamma(p)$ для положительных значений переменной p. Равенство (2.6) позволяет распространить гамма-функцию и на отрицательные значения p. Для $p \in (-1, 0)$ полагаем

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\,\Gamma(p+1).$$

Для $p \in (-2, -1)$, $p \in (-3, -2)$ и т. д. значения определяются аналогично. Таким образом, гамма-функция оказывается определена для всех действительных чисел, кроме $p = 0, -1, -2, \ldots$.

3. Справедлива следующая формула, устанавливающая связь между гамма- и бета-функциями:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{2.7}$$

4. Справедлива формула («формула дополнения»)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Из этой формулы легко следует равенство

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

С помощью этой формулы можно найти значение интеграла Эйлера–Пуассона:

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx$$

еще одним способом. Сделав в этом интеграле замену переменной $x^2 = t$, получим

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Аналогично, через гамма-функцию можно выразить и многие другие интегралы.

Пример 2.1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

Аналогично предыдущему случаю, преобразовав интеграл с помощью подстановки $y = x^2$, получим его выражение через Г-функцию:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Многие интегралы можно вычислить, преобразовав их таким образом, чтобы они выразились через B-функцию.

Пример 2.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1} x^3 \sqrt[3]{1 - x^3}\,dx$.

$$\int_0^1 x^3 \sqrt[3]{1 - x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{1 - y}\,dy = \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{4}{3})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\,.$$

2.3. Задачи

Пользуясь равенством $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ и формулами (2.6) и (2.7), вычислить значения Г-функции в указанных точках.

60. $\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **61.** $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. **62.** $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

63. $\Gamma\left(-\dfrac{9}{2}\right)$. **64.** $\Gamma\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

Проверить справедливость соотношений:

65. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.

66. $B(p+1,q) = \dfrac{p}{q}B(p,q+1)$.

67. $B(p,q) = \dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)$.

Вычислить интегралы:

68. $\displaystyle\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx.$

69. $\displaystyle\int\limits_0^\infty e^{-x^n} dx, \quad n > 0$

70. $\displaystyle\int\limits_0^\infty x^{2n-1} e^{-x^2} dx, \quad n > 0.$

71. $\displaystyle\int\limits_0^\infty x^m e^{-x^n}dx, \quad \frac{m+1}{n} > 0.$

72. $\displaystyle\int\limits_0^1 (\ln\frac{1}{x})^p dx, \quad p > 0.$

Пользуясь свойствами B-функции, вычислить следующие интегралы:

73. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\,dx, \quad n > 0.$

74. $\displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx.$

75. $\displaystyle\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad a > 0.$

76. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$

77. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$

78. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

79. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

80. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

81. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}(1+x)^2}}.$

82. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx.$

83. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$

84. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}.$

85. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$

86. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{(1+x^3)^2}.$

87. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{1+x^8}$.

88. $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x)^5}$.

89. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^4}dx$.

Указание: использовать подстановку $y = \dfrac{2x}{x+1}$.

90. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^5(1-x)^3}{(1+x^2)^5}dx$.

Указание: использовать подстановку $y = \dfrac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$.

91. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^5 xdx$.

92. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{2}{3}} xdx$.

93. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\frac{1}{3}} xdx$.

94. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\cos^4 xdx$.

95. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 xdx$.

96. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах:

97. $r = \sin\Theta\cos^3\Theta$.

98. $r = \sin^3\Theta\cos\Theta$.

99. $r^4 = \sin^3\Theta\cos\Theta$.

100. $r^4 = \sin^5\Theta\cos^3\Theta$.

Пользуясь формулой $\dfrac{1}{x^m} = \dfrac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^\infty t^{m-1} e^{-xt} dt, \quad x > 0,$

найти интегралы:

101. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$

102. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$

103. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

104. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$

105. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x} dx.$

106. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2} dx.$

Доказать тождества:

107. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$

108. $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^4} dx \int\limits_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

109. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{n}.$

110. $\int\limits_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{3} \int\limits_1^\infty (x^3-1)^{\frac{1}{2}} dx.$

111. Известно, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

Найти $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$

112. Доказать, что $\Gamma'(x)$ имеет корень $x_0 \in [1, 2]$.

Указание: воспользоваться теоремой Ролля.

Ответы

1. $\dfrac{b+2x}{x(b+x)}\sin(bx+x^2)-\dfrac{a+2x}{x(a+x)}\sin(ax+x^2).$

2. $\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)(x^{x-1}-x^{-x-1}).$

3. $-\ln 2-\dfrac{\pi}{2}-2\ln|x|.$ **4.** $2e^{4x^2}.$

5. $-e^{x|\sin x|}\cos x-e^{x|\cos x|}\cos x+\displaystyle\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}e^{x\sqrt{1-t^2}}dt.$

6. $\ln x\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)+1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}.$

7. $2x\tan x^2-\tan x^{\frac{3}{2}}+\displaystyle\int\limits_{x}^{x^2}\frac{\sqrt{t}dt}{\cos^2 x\sqrt{t}}dt.$

8. $2x\sin x|x|+\displaystyle\int\limits_{-x^2}^{0}\cos(x\sqrt{-t})\sqrt{-t}dt.$

9. $F''(x)=3f(x)+2xf'(x).$

10.

$$F''(x)=\begin{cases}2f(x), & \text{при } x\in(a,b);\\ 0, & \text{при } x\notin(a,b).\end{cases}$$

11. $f(x,-x)+2\displaystyle\int_0^x f_u(u,v)dt,$ где $u=x+t, v=x-t.$

12. $\dfrac{\pi}{4}$. **13.** 1. **14.** $\dfrac{8}{3}$. **15.** $\log\dfrac{2e}{1+e}$. **16.** 0.

17. $-e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha + \displaystyle\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

18. $\dfrac{2}{\alpha}\log(1+\alpha^2)$.

24. $\dfrac{\pi}{4(1+a)^{\frac{3}{2}}}$.

25. $\dfrac{(a^2+1)\arctan\frac{1}{a}+a}{2a^5+2a^3}$.

26. $-\dfrac{\pi a}{(1-a)^{\frac{3}{2}}}$.

27. $\dfrac{\pi}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

28. $\ln(1+x)$.

29. $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

30. $\pi\ln(1+x)$.

31. $\dfrac{1}{2}\ln(1+x)$.

32. $\dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$.

33. $\pi\ln\Big(\dfrac{|x|+1}{2}\Big)$.

34. $\pi\arcsin x$.

35. $2x\ln 2x - 2(x+1)\ln(x+1)$.

36. $\dfrac{1}{2}\ln(1+x)$.

37. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

38. $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$.

39. $\arctan\frac{\beta}{m} - \arctan\frac{\alpha}{m}$.

40. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$.

41. $-\pi\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)$.

42. $\pi\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$.

43. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})$.

44. $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|),\ \beta\neq 0$.

45. $\ln\frac{b}{a}$. **46.** 0. **47.** $\ln\frac{b}{a}$. **48.** $\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$. **49.** $\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$.

50. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}$.

51. $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}e^{-a}$.

52. $e^{-b^2}\int\limits_0^b e^{t^2}dt$.

53. 0.

54. $r=e^{\varphi}$.

60. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

61. $-2\sqrt{\pi}$.

62. $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

63. $-\frac{32}{945}\sqrt{\pi}$.

64. $\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$.

68. $\dfrac{105}{32}\sqrt{\pi}.$ **69.** $\dfrac{1}{n}\,\Gamma\Big(\dfrac{1}{n}\Big).$ **70.** $\dfrac{1}{2}(n-1)!.$

71. $\dfrac{1}{|n|}\,\Gamma\Big(\dfrac{m+1}{n}\Big).$ **72.** $\Gamma(p+1).$

73. $\dfrac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}\cdot 2.$

74. $\dfrac{\pi}{8}.$ **75.** $\dfrac{\pi a^4}{16}.$ **76.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

77. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}.$ **78.** $\dfrac{8}{15}.$ **79.** $\dfrac{15}{96}\pi.$

80. $\dfrac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2\pi}}.$ **81.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}.$ **82.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

83. $\pi\dfrac{2}{3}.$ **84.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}.$ **85.** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

86. $\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$ **87.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{8}.$ **88.** $\dfrac{1}{12}.$

89. $\dfrac{\pi}{32\sqrt{2}}.$ **90.** $\dfrac{2}{3}.$

91. $\dfrac{1}{24}$. **92.** π. **93.** $\dfrac{\pi}{3}$.

94. $\dfrac{9\pi}{4096}$. **95.** $\dfrac{3\pi}{512}$. **96.** $\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\,\Gamma^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

97. $\dfrac{15\pi}{768}$. **98.** $\dfrac{15\pi}{768}$. **99.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$. **100.** $\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{64}$.

101. $\dfrac{\pi}{2}$. **102.** $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$. **103.** $\dfrac{\pi}{2}$.

104. $\dfrac{\pi}{4}$. **105.** $\dfrac{\pi}{4}$. **106.** $\dfrac{3}{4}\ln 3$.

111. $\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.

Литература

1. Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1988.

2. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969.

3. Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высшая школа, 1981.

4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1977.

5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1980.

6. Блинова, И. В. Интегралы, зависящие от параметров : методические указания / И. В. Блинова, И. Ю. Попов. – СПб. : ГУ ПТМО, 2008.

7. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : Высшая школа, 2000.

Учебное издание

Литвинов Владимир Викторович
Ухалов Алексей Юрьевич
Глазков Дмитрий Владимирович

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Практикум

Компьютерный набор, верстка
В. В. Литвинов, А. Ю. Ухалов, Д. В. Глазков
Редактор, корректор М. Э. Левакова

Подписано в печать 22.06.2015.
Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,55. Уч.-изд. л. 2,0.
Тираж 20 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.