Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

В.С. Климов

Многомерный математический анализ

Часть II

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов специальностей
Математика и Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2010

Оглавление

0.1 Предисловие

Учебное пособие содержит изложение разделов математического анализа, изучаемых студентами второго курса университетов специальности 010200 Прикладная математика и информатика и 010100 Математика. Оно представляет продолжение ранее опубликованного пособия автора "Многомерный математический анализ. Часть I".

Весь материал разбит на три главы. В первой главе изучаются ряды Фурье и преобразование Фурье. Основное внимание уделяется тригонометрическим рядам Фурье. Для них формулируются и доказываются достаточно обозримые условия равномерной и поточечной сходимости. Устанавливаются теоремы Вейерштрасса о равномерных приближениях непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими полиномами. Доказываются полнота тригонометрической системы функций и равенство Парсеваля. Замыкают первую главу элементы теории преобразования Фурье.

Во второй главе вводится понятие интеграла Лебега для функций одного переменного. Отметим отличающийся от стандартного подход к изложению понятия сходимости последовательности измеримых функций по мере. Привлечение интегральной метрики позволило существенно упростить доказательства важных результатов Лебега и Ф.Рисса о связи сходимостей почти всюду и по мере. В конце раздела намечены пути дальнейшего развития понятия интеграла Лебега. Завершает главу подборка задач по теме "Интеграл Лебега".

Третья глава посвящена криволинейным и поверхностным интегралам. Обсуждаются задачи из механики и физики, приводящие к соответствующим интегралам. Доказываются формулы Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса в их классических вариантах. Аппарат дифференциальных форм и теория многообразий не применяется, однако читатель достаточно близко подводится к этим разделам современной математики. Основные результаты относятся к интегралам по кривым и поверхностям, расположенным в трехмерном пространстве.

Затронутым в пособии темам посвящено много прекрасных учебников. К сожалению, обилие содержащегося в них материала затрудняет самостоятельную работу студентов. Настоящее пособие весьма близко к реальному лекционному курсу, в ряде мест автор сознательно жертвовал общностью в пользу большей доступности изложения.

Нумерация разделов, порядок цитирования, обозначения и общепринятая теоретико-множественная терминология - такие же, как и в предшествующих частях пособия. Символы ◄ и ► указывают начало и конец доказательства. Автор приносит самую искреннюю благодарность коллегам по Ярославскому университету за интерес к моей работе и конструктивные замечания, направленные на улучшение предлагаемого вниманию читателя учебного пособия.

Климов В.С., доктор физ. мат. наук

Глава 1

Ряды Фурье и преобразование Фурье

1.1 Ряд Фурье по ортонормированной системе

1.1.1 Пространства со скалярным произведением

Пусть $\mathscr{E}$ – действительное линейное пространство. Функцию (u, v), определённую на $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ со значениями в поле действительных чисел $\mathbb{R}$, называют *скалярным произведением*, если для любых u, v, w из $\mathscr{E}$ и любых действительных λ, μ выполняются следующие свойства:

1) Коммутативность : $(u, v) = (v, u)$.

2) Линейность : $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(u, w)$.

3) Неотрицательность: $(u, u) \geqslant 0$.

4) Невырожденность : Если $(u, u) = 0$, то $u = 0$.

В этом случае линейное пространство именуют *евклидовым.* Функцию (u, v), удовлетворяющую лишь первым трем условиям , называют *полускалярным произведением.* Иначе говоря, полускалярное произведение это симметричная неотрицательная билинейная форма на $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$. Несложно показать, что множество $\mathscr{E}_0 \stackrel{def}{=} \{v \in \mathscr{E}, (v, v) = 0\}$ есть линейное подпространство пространства $\mathscr{E}$.

Основным примером пространства с полускалярным произведением для нас будет являться пространство $\mathscr{R}[a, b]$ всех интегрируемых (в смысле Римана) функций $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Из свойств интеграла Римана вытекает, что функция

$$(u, v) = \int\limits_a^b u(x)v(x)\,dx, \quad u \in \mathscr{R}[a, b], \quad v \in \mathscr{R}[a, b] \tag{1}$$

является полускалярным произведением. В данном случае легко описать класс функций v, для которых $(v, v) = 0$.

Лемма 1. *Пусть $v \in \mathscr{R}[a, b]$. Тогда равенство $(v, v) = 0$ эквивалентно тому, что $v(x) = 0$ почти всюду на отрезке $[a, b]$.*

◀ Действительно, пусть $v \in \mathscr{R}[a,b]$ и $(v,v)=0$. Тогда функция $v^2(x)$ интегрируема в смысле Римана по отрезку $[a,b]$ и почти всюду непрерывна на этом отрезке. Если x_0 – точка непрерывности функции $v^2(x)$, то $v(x_0)=0$. В самом деле, в предположении противного функция $v^2(x) > \dfrac{v^2(x_0)}{2} > 0$ на некотором отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ положительной длины, поэтому $(v,v) > 0$. Тем самым доказана импликация $(v,v)=0 \Rightarrow v(x)=0$ почти всюду.

Для доказательства обратной импликации заметим, что если $v(x)=0$ почти всюду, то для любого разбиения $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_N\}$ отрезка $[a,b]$ число $m_i = \inf\{|v(x)|^2(x), x \in [x_{i-1},x_i]\} = 0 \quad (i=1,\ldots,N)$,поэтому нижняя сумма Дарбу $\underline{S}_T(v^2)$ функции v^2 равна 0. Отсюда и вытекает требуемое. ▶

Упражнение 1. *В линейном пространстве непрерывных на отрезке* $[a,b]$ *действительнозначных функций билинейная форма (1) является скалярным произведением ; возникающее таким образом евклидово пространство обозначают символом* $CL_2(a,b)$.

Автор надеется, что читателю известны и другие примеры пространств со скалярным произведением. Элементы теории конечномерных евклидовых пространств активно использовались в предшествующих частях нашего курса.

Для полускалярного произведения в линейном пространстве $\mathscr{E}$ справедливо соотношение

$$|(u,v)| \leqslant \sqrt{(u,u}\sqrt{(v,v)}\,, \tag{2}$$

называемое неравенством Коши–Буняковского. Действительно, пусть u,v – элементы пространства $\mathscr{E}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0, w = tu - \dfrac{v}{t}$. Тогда имеют место легко проверяемые соотношения

$$0 \leqslant (w,w) = t^2(u,u) - 2(u,v) + \frac{(v,v)}{t^2}, \quad (u,v) \leqslant \frac{1}{2}\left(t^2(u,u) + \frac{(v,v)}{t^2}\right),$$

$$(u,v) \leqslant \frac{1}{2}\min_{t\neq 0}\left(t^2(u,u) + \frac{(v,v)}{t^2}\right) = \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}\,.$$

Последнее неравенство влечет за собой неравенство (2). Для полускалярного произведения справедливо неравенство треугольника

$$\sqrt{(u+v,u+v} \leqslant \sqrt{(u,u)} + \sqrt{(v,v)}\,. \tag{3}$$

Оно является простым следствием соотношения (2). В самом деле, имеем

$$(u+v,u+v) = (u,u) + 2(u,v) + (v,v) \leqslant (u,u) + 2\sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)} + (v,v)\,.$$

Извлекая квадратный корень, приходим к требуемому результату.

Линейное действительное пространство E называют *полунормированным*, если на множестве его элементов определена действительнозначная функция, называемая *полунормой*, обозначаемая символом $\|u\|_E$ или $\|u\| \;\; (u \in E)$ и обладающая следующими свойствами :

1) Неотрицательность. Для всех u из E выполняется неравенство $\|u\| \geqslant 0$.

2) Однородность. Для всех $u \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\|\lambda u\| = |\lambda|\ \|u\|$.

3) Неравенство треугольника. Для всех $u \in E, v \in E$ справедливо неравенство $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Иногда дополнительно выполнено условие

4) Невырожденность. Если $\|u\| = 0$, то $u = 0$.

В этом случае полунорму называют *нормой* , а пространство E – *нормированным.* Примеры конечномерных нормированных пространств рассматривались ранее . Из отмеченных выше свойств скалярного произведения вытекает

Следствие. *Если (u, v) – полускалярное (скалярное) произведение в линейном пространстве, то функционал $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ является полунормой (нормой) в этом пространстве.*

В пространстве $\mathscr{R}[a, b]$ с полускалярным произведением (1) полунорма определяется равенством

$$\|u\| = \left(\int\limits_a^b u^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}},$$

а неравенство треугольника имеет вид

$$\left(\int\limits_a^b [u(x)+v(x)]^2\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}} \leqslant \left(\int\limits_a^b u^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}} + \left(\int\limits_a^b v^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$

1.1.2 Ортонормированные системы

Пусть $\mathscr{E}$ – действительное линейное пространство с полускалярным произведением (u, v). Два элемента z, w пространства $\mathscr{E}$ называют *ортогональными,* если скалярное произведение (z, w) этих элементов равно нулю. Последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ (конечную или бесконечную) элементов пространства $\mathscr{E}$ именуют *ортонормированной системой* , если входящие в эту последовательность элементы попарно ортогональны и имеют полунорму, равную единице.

Приведём примеры ортонормированных систем в пространстве $\mathscr{E} = \mathscr{R}[a, b]$ со скалярным произведением (1).

Пример 1. Пусть $a = -\pi, b = \pi$. Тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \tag{4}$$

является ортонормированной системой в пространстве $\mathscr{R}[-\pi, \pi]$. Это несложно проверить, вычислив интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx, \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \, .$$

Пример 2. Пусть $l > 0, \alpha$ и β – действительные и различные числа. Тогда

$$\int_{0}^{l} \sin \alpha x \sin \beta x \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)l}{\alpha - \beta} - \frac{\sin(\alpha + \beta)l}{\alpha + \beta} \right) =$$

$$= \cos \alpha l \cos \beta l \quad \frac{\beta tg\alpha l - \alpha tg\beta l}{\alpha^2 - \beta^2} \, .$$

Поэтому, если величины α и β таковы, что $\dfrac{tg\alpha l}{\alpha} = \dfrac{tg\beta l}{\beta}$, то рассматриваемый интеграл равен 0. В частности, если $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < \ldots$ – последовательность корней уравнения $tg\xi l = c\xi$ при некотором действительном c, то функции $g_n(x) = \sin(\xi_n x) \, (n \in \mathbb{N})$ взаимно ортогональны в пространстве $\mathscr{R}[0, l]$, а последовательность $e_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|}$ образует ортонормированную систему. В случае $c = 0$ имеем, например,

$$\xi_n = \frac{n\pi}{l}, \quad g_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots) \, . \tag{5}$$

Пример 3. Определяемые равенствами

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [x^2 - 1]^n}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

многочлены называют полиномами Лежандра.[1]

Упражнение 2. *Убедиться, что система функций*

$$e_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

образует ортонормированную систему в пространстве $\mathscr{R}[-1, 1]$.

Пример 4. Пусть

$$\varphi(t) = sgn(\sin 2\pi t) \, (t \in \mathbb{R}), \quad e_n(x) = \varphi(2^n x) \quad (x \in [0, 1], \, n = 0, 1, \ldots)$$

Определяемая таким образом система Радемахера [2] ортонормирована в $\mathscr{R}[0, 1]$.

---

[1] Лежандр А. (1752 - 1833) – французский математик

[2] Радемахер Г. (род. 1892) – немецкий математик

1.1.3 Коэффициенты Фурье

Пусть$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ – произвольная ортонормированная система в линейном действительном пространстве $\mathscr{E}$ с полускалярным произведением (u, v). Числа (f, e_k) называют *коэффициентами Фурье* элемента f из $\mathscr{E}$ в ортонормированной системе e_k . Фиксируем натуральное число n и обозначим через $\mathscr{E}_n$ линейную оболочку элементов $e_1, \ldots, e_n$. Таким образом,

$$\mathscr{E}_n \stackrel{def}{=} \{g \in \mathscr{E},\, g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n\}\,,$$

т.е. $\mathscr{E}_n$ – совокупность всех линейных комбинаций элементов $e_1, \ldots, e_n$. В частности, пространству $\mathscr{E}_n$ принадлежит элемент

$$g = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k\,. \tag{7}$$

Лемма 2.*Для любого вектора f из $\mathscr{E}$ элемент*

$$h = f - g = f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k$$

ортогонален каждому элементу пространства $\mathscr{E}_n$.

◀ Достаточно проверить, что $(h, e_m) = 0$ для любого вектора e_m нашей ортогональной системы. Справедливы равенства

$$(h, e_m) = (f, e_m) - (g, e_m) = (f, e_m) - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)(e_k, e_m) = (f, e_m) - (f, e_m) = 0\,,$$

из которых и вытекает требуемый результат.▶

Таким образом, любой вектор f из $\mathscr{E}$ допускает представление

$$f = g + h\,, \tag{8}$$

где $g \in \mathscr{E}_n$, а вектор h ортогонален каждому элементу из $\mathscr{E}_n$. Установим, что вектор g является наилучшим приближением вектора f элементами из пространства $\mathscr{E}_n$. Нам потребуется следующий вариант теоремы Пифагора.

Лемма 3. *Если векторы u, v из $\mathscr{E}$ ортогональны и $w = u + v$, то $\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ – квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

◀ Следует из цепочки соотношений

$$\|w\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2\,. \text{ ▶}$$

Следствие 1.*Пусть векторы $v_1, \ldots, v_n$ из $\mathscr{E}$ взаимно ортогональны и $w = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. Тогда*

$$\|w\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|v_k\|^2\,.$$

Следствие 2. *Пусть элемент g определён равенством (7), z – произвольный вектор из $\mathscr{E}_n$. Тогда*

$$\|f-z\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g-z\|^2 = \|f-g\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(g-z, e_k)^2 \,. \tag{9}$$

◀ Действительно, поскольку вектор $h = f - g$ ортогонален вектору $g - z$ из $\mathscr{E}_n$, то в силу леммы 3 $\|f-z\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g-z\|^2$. Из следствия 1 вытекает равенство

$$\|g-z\|^2 = \sum_{k=1}^{n}(g-z, e_k)^2 \,,$$

что и завершает доказательство равенства (9).▶

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\|f-g\| = \min_{z\in\mathscr{E}_n}\|f-z\| \,, \tag{10}$$

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2 \,, \tag{11}$$

иначе говоря вектор g реализует наилучшее приближение к f среди элементов $\mathscr{E}_n$; величина этого приближения находится по формуле (11).

◀ Равенство (10) очевидным образом вытекает из (9). Для доказательства (11) достаточно воспользоваться ортогональностью векторов $f-g, g$ и леммой 3. Имеем последовательно

$$\|f\|^2 = \|f-g\|^2 + \|g\|^2 = \|f-g\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2 \,,$$

что эквивалентно (11).▶

Иногда (11) именуют *тождеством Бесселя* [3] . Его следствием является

Теорема 1. *Если $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ – ортонормированная система, то для любого элемента f из $\mathscr{E}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f, e_k)^2 \leqslant \|f\|^2 \,, \tag{12}$$

именуемое неравенством Бесселя .

◀ Из неотрицательности левой части (11) следует, что для любого номера n

$$\sum_{k=1}^{n}(f, e_k)^2 \leqslant \|f\|^2 \,. \tag{13}$$

[3] Бессель Ф. (1784 - 1846) – немецкий астроном и математик

Поэтому все частичные суммы ряда с неотрицательными элементами, находящегося в левой части (12), равномерно ограничены. Следовательно, данный ряд сходится. Переходя в (13) к пределу, получим неравенство (12). ▶

1.1.4 Полные ортонормированные системы

Последовательность элементов f_n пространства $\mathscr{E}$ назовём *сходящейся* к элементу f из $\mathscr{E}$, если числовая последовательность $\|f_n - f\|$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Обычным образом вводится понятие сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{14}$$

с элементами v_k из пространства $\mathscr{E}$. Именно, ряд (14) именуют *сходящимся*, если сходится последовательность $s_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ его частичных сумм.

Рядом Фурье [4] элемента f из $\mathscr{E}$ по ортонормированной системе e_k $(k \in \mathbb{N})$ называют ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k\,. \tag{15}$$

Ортонормированную систему e_k ($k \in \mathbb{N}$ именуют *полной* в пространстве $\mathscr{E}$, если для любого элемента f из $\mathscr{E}$ и любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая линейная комбинация $w = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$, что $\|f - w\| < \varepsilon$. Таким образом, полнота системы e_k означает, что любой элемент f данного пространства $\mathscr{E}$ можно приблизить по полунорме этого пространства с любой точностью линейными комбинациями конечного числа элементов e_k.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{E}$ - линейное пространство с полускалярным произведением , $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ – ортонормированная система векторов из $\mathscr{E}$. Тогда следующие условия эквивалентны :*

a) система $\{e_k\}$ полна в пространстве $\mathscr{E}$;

b) ряд Фурье (15) сходится к f , т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) e_k\| = 0 \qquad (16);$$

c) для любого элемента f справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k)^2 = \|f\|^2\,, \tag{17}$$

называемое равенством Парсеваля. [5]

---

[4] Фурье Ж.(1768 - 1830) – французский физик и математик

[5] Парсеваль М. (1755 - 1836) – французский математик

◀ $a) \Rightarrow b)$. Если система $\{e_k\}$ полна, то

$$\lim_{n\to\infty} \min_{z\in\mathscr{E}_n} \|f - z\| = 0\,.$$

В силу (10) отсюда вытекает (16).

$b) \Rightarrow c)$ Если левая часть (11) стремится к нулю при $n \to \infty$, то и правая часть (11) также стремится к нулю.

$c) \Rightarrow a)$ Если правая часть (11) стремится к нулю при $n \to \infty$, то и левая часть (11) также стремится к нулю. ▶

1.1.5 Теоремы о приближении

Для применения теоремы 2 желательно располагать примерами полных ортонормированых систем. Этот вопрос для тригометрической системы (4) и полиномиальной системы Лежандра обсуждается далее. Нам потребуются некоторые утверждении о приближении интегрируемых функций.

Теорема 3. *Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана по отрезку $[a,b]$ ($f \in \mathscr{R}[a,b]$). Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $v(x)$, принимающая заданные значения при $x = a$ и при $x = b$, что*

$$\|f - w\| = \left(\int_a^b [f(x) - v(x)]^2\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}} < \varepsilon\,.$$

◀ Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ – некоторое разбиение отрезка $[a,b]$ на части $[x_{k-1}, x_k], \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k = 1, 2, \ldots, N$, а Δ – наибольшее из чисел $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, \ldots, N)$. Поскольку $f \in \mathscr{R}[a,b]$, то $|f(x)| \leqslant M$ $\forall x \in [a,b]$. Положим

$$\omega_k = \sup\{|f(x') - f(x'')|,\ x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]\} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

т.е. ω_k – колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Определим функцию $v(x)$ следующим образом : $v(x)$ на каждом из сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ – линейная функция, принимающая заданные значения при $x = x_0 = a$ и $x = x_N = b$, причём $v(x_k) = f(x_k)$ при $k = 1, \ldots, N-1$. Очевидно, что функция $v(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$ и на каждом сегменте $[x_{k-1}, x_k]$, лежащем внутри сегмента $[a,b]$ справедливы неравенства

$$\min\{f(x_{k-1}), f(x_k)\} \leqslant v(x) \leqslant \max\{f(x_{k-1}), f(x_k)\}\,,$$

$$f(x) - v(x) \leqslant f(x) - \min\{f(x_{k-1}), f(x_k)\} \leqslant \omega_k\,,$$

$$v(x) - f(x) \leqslant \max\{f(x_{k-1}), f(x_k)\} - f(x) \leqslant \omega_k\,,$$

т.е. $|f(x)-v(x)| \leqslant \omega_k$ $(x \in [x_{k-1}, x_k],\ k=2,\dots,N-1)$, откуда

$$|f(x)-v(x)|^2 \leqslant (|f(x)|+|v(x)|)\ |f(x)-v(x)| \leqslant 2M\omega_k\,.$$

На сегментах $[x_0,x_1],[x_{N-1},x_N]$ имеем

$$|f(x)-v(x)|^2 \leqslant (|f(x)|+|v(x)|)^2 \leqslant (M+M_1)^2\,,$$

где $M_1 = \max\{M, |v(a)|, |v(b)|\}$. Поэтому

$$\int\limits_a^b [f(x)-v(x)]^2\,dx = \sum_{k=1}^N \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x)-v(x)]^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2M\sum_{k=1}^N \omega_k \Delta x_k + 2(M+M_1)^2\Delta\,.$$

Поскольку функция f интегрируема по отрезку [a,b], то правая часть последнего неравенства за счёт выбора Δ может быть сделана меньше ε^2. Это и приводит к требуемому результату.▶

Скажем, что последовательность функций f_n класса $\mathscr{R}[a,b]$ сходится к функции f из $\mathscr{R}[a,b]$

1) в среднем, если

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx = 0;$$

2) в среднем квадратичном, если

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b [f_n(x)-f(x)]^2\,dx = 0;$$

3) равномерно, если

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = 0\,.$$

Сходимость в среднем квадратичном влечёт за собой сходимость в среднем; из равномерной сходимости вытекает сходимость в среднем квадратичном. Доказательство основано на легко проверяемых соотношениях

$$\int\limits_a^b |w(x)|\,dx \leqslant \left(\int\limits_a^b w^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{b-a} \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |w(x)|(b-a)\,,$$

в которых $w(x)$ – произвольная функция класса $\mathscr{R}[a,b]$. Из сходимости в среднем последовательности f_n к f следует равномерная сходимость последовательности $F_n(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ к функции $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt$. Достаточно учесть, что

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} (f_n(t) - f(t))\,dt\right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |f_n(t) - f(t)|\,dt\,.$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие. *Пусть $f \in \mathscr{R}[a,b]$. Тогда существует сходящаяся к f в среднем квадратичном последовательность непрерывных на отрезке* [a,b] *функций $v_n(x)$, принимающих в точках a, b фиксированные значения.*

◀ Построим для $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ функцию v_n , принимающую в точках a, b заданные значения и такую, что $\|f - v_n\| < \dfrac{1}{n}$. Последовательность v_n является искомой.▶

Функцию $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называют *кусочно линейной*, если существует такое разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ отрезка [a,b], что сужение w на каждый отрезок $[x_{k-1}, x_k]\,(k = 1, \ldots, N)$ есть линейная функция $c_k x + d_k$.

Теорема 4. *Пусть $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая кусочно линейная функция w, что*

$$|h(x) - w(x)| < \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad x \quad \textit{из отрезка} \quad [a,b]\,.$$

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём $\delta > 0$ таким образом , что из условий $x', x'' \in [a,b]$, $|x' - x''| < \delta$ вытекает неравенство $|h(x') - h(x'')| < \varepsilon$. Пусть N – натуральное число и $\dfrac{b-a}{N} < \delta$. Положим $x_k = a + \dfrac{k}{N}(b-a), k = 0, 1, \ldots, N$. Тогда колебание ω_k функции h на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ будет меньше ε. Пусть функция $w(x)\,(x \in [a,b])$ совпадает с функцией $h(x)$ в точках $x_k (k = 0, 1, \ldots, N)$ и линейна на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$. Повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 3, приходим к оценке $|h(x) - w(x)| \leqslant \omega_k < \varepsilon \quad (x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, N)$. Функция $w(x)$ является искомой.▶

Следствие. *Для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции существует сходящаяся к ней равномерно на $[a,b]$ последовательность кусочно линейных функций.*

1.2 Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье

1.2.1 Формулы Эйлера - Фурье

Применим предшествующие результаты к случаю , когда $\mathscr{E} = \mathscr{R}[-\pi,\pi]$, а ортонормированная система определяется равенством 1(4). Соответствующий этой системе ряд называют *тригонометрическим рядом Фурье.* Для любой функции f класса $\mathscr{R}[-\pi,\pi]$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+d_k\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right),$$

где коэффициенты Фурье c_k, d_k определяются формулами

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\,,$$

$$c_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\,, d_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\quad(k=1,2,\dots)\,.$$

Неравенство Бесселя выглядит следующим образом

$$c_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k^2+d_k^2)\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\,.$$

В теории тригонометрических рядов Фурье принята несколько иная форма записи как ряда Фурье, так и неравенства Бесселя. Тригонометрический ряд Фурье записывают в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\,, \tag{1}$$

где коэффициенты a_k, b_k находятся по формулам Эйлера - Фурье

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\,,(k=0,1,\dots);b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx\,(k=1,2,\dots)\,.$$

При подобной записи неравенство Бесселя принимает вид

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Следствие 1. *Последовательности a_k, b_k коэффициентов Фурье функции f стремятся к нулю при $k\to\infty$.*

Следствие 2. *Если функция f чётна, то $b_k=0(k=1,2,\dots)$*

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\quad(k=0,1,\dots)\,.$$

Следствие 3. *Если функция f нечётна, то $a_k = 0, (k = 0, 1, \dots)$,*

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Менее тривиальна связь между коэффициентами Фурье функции f и её производной. Назовём функцию $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ кусочно гладкой, если существует такое разбиение $\{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ отрезка $[a, b]$, что сужение h на каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i], (i = 1, 2, \dots, m)$ есть непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае не только сама функция $h(x)$, но и её производная $h'(x)$ непрерывны всюду (за исключением точек $x_1, \dots, x_{m-1}$). Доопределив функцию $h'(x)$ в точках $x_i(i = 1, \dots, m-1$ произвольным образом, получим, что $h'(x)$– интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Класс кусочно гладких на отрезке $[a, b]$ функций обозначим символом $KC^1[a, b]$.

Лемма 1. *Пусть $f \in KC^1[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда коэффициенты Фурье α_k, β_k функции $f'(x)$ и коффициенты Фурье a_k, b_k самой функции f связаны соотношениями*

$$\alpha_k = k b_k, \quad \beta_k = -k a_k. \tag{3}$$

◀ Используя интегрирование по частям и равенство $f(-\pi) = f(\pi)$, получаем

$$\pi \alpha_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx \, dx = f(x) \cos kx|_{-\pi}^{\pi} + k \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \pi k b_k.$$

Первое из равенств (3) доказано; второе равенство устанавливается аналогичным образом .▶

Лемма 1 по существу означает следующее: ряд Фурье, соответствующий функции f', получается формальным дифференцированием ряда (1). Иногда ряд (1), соответствующий функции f обозначают символом $\mathbf{S}[f]$. Краткая запись леммы 1 достаточно выразительна

$$\mathbf{S}[f'] = (\mathbf{S}[f])'. \tag{4}$$

Применяя неравенство Бесселя к функции $f'(x)$, приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + a_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx, \tag{5}$$

полезной для оценки скорости убывания коэффициентов Фурье a_k, b_k.

1.2.2 Формула Дирихле

Ниже приводятся условия, при которых ряд $\mathbf{S}[f]$ равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$ сходится к функции f. Легко сформулировать необходимые условия: функция f непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$. Действительно, элементы ряда $\mathbf{S}[f]$ непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$ и принимают одинаковые значения в точках $-\pi,\pi$. В силу этого и сумма равномерно сходящегося ряда $\mathbf{S}[f]$ должна обладать подобными свойствами.

Ещё в 19-ом веке были построены примеры функций f, удовлетворяющих перечисленным условиям, для которых ряды $\mathbf{S}[f]$ расходятся в наперёд заданных точках. Не останавливаясь на соответствующих примерах (по этому поводу см., например, [17], [20]), приведем некоторые результаты позитивного характера, руководствуясь по преимуществу критерием простоты формулировок и доступностью доказательств.

Лемма 2. *Для любого натурального числа n и $x\neq 2m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}+\cos x+\dots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\,. \tag{6}$$

◀ Воспользуемся формулой

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\,\cos kx\,.$$

Полагая $k=0,1,\dots,n$ и складывая соответствующие равенства, приходим к соотношению (6).▶

Замечание. При $x=2m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ правую часть (6) следует положить равной $n+\dfrac{1}{2}$. При таком доопределении правой части формула (6) становится верной при всех x.

Лемма 3. *Пусть $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – T- периодическая функция $(T>0)$, интегрируемая на отрезке $[0,T]$. Тогда при любом действительном a имеет место равенство*

$$\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx=\int\limits_0^T g(x)\,dx\,. \tag{7}$$

◀ Действительно, при любом a из $\mathbb{R}$ справедливы соотношения

$$\int\limits_T^{a+T} g(x)\,dx=\int\limits_0^T g(t+T)\,dt=\int\limits_0^a g(t)\,dt=\int\limits_0^a g(x)\,dx\,;$$

использовались замена переменной $x = t + T$ и периодичность функции g. В силу свойства аддитивности интеграла получаем

$$\int\limits_a^{a+T} g(x)\,dx = \int\limits_a^T g(x)\,dx + \int\limits_T^{a+T} g(x)\,dx = \int\limits_a^T g(x)\,dx + \int\limits_0^a g(x)\,dx = \int\limits_0^T g(x)\,dx\,. \blacktriangleright$$

В условиях леммы 3 интеграл по отрезку $[a, a+T]$ может быть несобственным.

Частными суммами ряда $\mathbf{S}[f]$ называют функции

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{8}$$

Найдём явное выражение для частных сумм через исходную функцию f. Будем считать функцию f интегрируемой (в смысле Римана) по отрезку $[-\pi, \pi]$ и продолженной по 2π закону на всю прямую так, что $f(x + 2\pi) = f(x)$ для всех действительных x; за продолженной функцией сохраним прежнее обозначение.

Справедливы равенства

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(y)}{2}\,dy + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(y)[\cos kx \cos ky + \sin kx \sin ky]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-y)\right] f(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(x-y)}{2\sin\dfrac{x-y}{2}} f(y)\,dy\,;$$

последовательно используются равенства (8), (6) и определение коэффициентов a_k, b_k – формулы Эйлера-Фурье. Произведём замену переменной $y = x+t$. Тогда получим

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}} f(x+t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\sin\dfrac{t}{2}} f(x+t)\,dt\,; \tag{9}$$

переход от первого интеграла ко второму основан на лемме 3. Равенство (9) называют *формулой Дирихле.* Иногда эту формулу записывают в эквивалентном, но более удобном для анализа виде

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) t}{\sin \dfrac{t}{2}} \, dt \,. \tag{10}$$

Интегрируя тождество (6) по отрезку $[0, \pi]$, получаем равенство

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{2 \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) t}{\sin \dfrac{t}{2}} \, dt \,.$$

Умножая это равенство на произвольную функцию $\varphi(x)$ и вычитая из формулы (10), приходим к соотношению

$$s_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} [f(x+t) - 2\varphi(x) + f(x-t)] \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) t}{\sin \dfrac{t}{2}} \, dt \,; \tag{11}$$

в качестве $\varphi(x)$ обычно берётся либо исходная функция $f(x)$, либо (более общим образом) $\varphi(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$; здесь и далее $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – левосторонний и правосторонний пределы функции f в точке x.

1.2.3 Основная лемма

Существенную роль при анализе сходимости ряда $\mathbf{S}(f)$ будет играть

Лемма 4. *Пусть функция* $g\colon [a,b] \times (0,T] \to \mathbb{R}$ *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет оценке*

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{K}{t^{\beta}}\,, \tag{12}$$

где $0 < K < \infty, 0 \leqslant \beta < 1, x \in [a,b] (-\infty < a < b < \infty), t \in (0,T]$. *Тогда интеграл*

$$I_p(x) \overset{def}{=} \int\limits_0^T g(x,t) \sin pt \, dt \tag{13}$$

равномерно относительно x *из отрезка* $[a,b]$ *стремится к 0 при* $p \to \infty$, *т.е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* p_0, *что при* $p \geqslant p_0$ *справедлива оценка*

$$|I_p(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \quad \text{из отрезка } [a,b]\,.$$

◀ Фиксируем положительное число τ. Подберём число $t_0 > 0$ так, что

$$\int_0^{t_0} \frac{K}{t^\beta}\,dt < \tau\,. \tag{14}$$

Функция $g(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных на прямоугольнике $[a,b]\times[t_0,T]$. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что из условий $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant T$, $|t'-t''| < \delta$ следует неравенство $|g(x,t')-g(x,t'')| < \tau$ для всех x из отрезка $[a,b]$. Фиксируем разбиение $t_0, t_1, \ldots, t_N$ отрезка $[t_0,T]$, для которого $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(i = 1,\ldots,N)$. Справедливы равенства

$$I_p(x) = \int_0^{t_0} g(x,t)\sin pt\,dt + \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[g(x,t)-g(x,t_k)]\sin pt\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(x,t_k)\sin pt\,dt = J_1(x)+J_2(x)+J_3(x)\,.$$

Оценим величину каждого из слагаемых $J_1(x), J_2(x), J_3(x)$. Имеем

$$|J_1(x)| = \left|\int_0^{t_0} g(x,t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \int_0^{t_0}\frac{K}{t^\beta}\,dt < \tau \tag{15}$$

для любого x из отрезка $[a,b]$ и произвольного p. Оценка (15) вытекает из (12), (14). Поскольку $t_k - t_{k-1} < \delta$ $(k = 1,\ldots,N)$, то

$$J_2(x)| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[g(x,t)-g(x,t_k)]\sin pt\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|g(x,t)-g(x,t_k)| < \tau(T-t_0) < \tau T \tag{16}$$

для всех x из $[a,b]$ и произвольных действительных p. Третье слагаемое можно посчитать в явном виде:

$$J_3(x) = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k} g(x,t_k)\sin pt\,dt = \sum_{k=1}^{N} g(x,t_k)\frac{\cos pt_{k-1}-\cos pt_k}{p}\,.$$

Следовательно,

$$|J_3(x)| \leqslant \frac{2N}{p} \max\{|g(x,t)|, x \in [a,b], t \in [t_0, T\} .$$

При достаточно больших p ($p \geqslant p_0$) последняя оценка влечёт за собой неравенство

$$|J_3(x)| < \tau \quad \text{для всех} \quad x \quad \text{из отрезка} \quad [a,b] . \tag{17}$$

Объединяя оценки (15)- (17), получаем

$$|I_p(x)| \leqslant |J_1(x)| + |J_2(x)| + |J_3(x)| < \tau + \tau T + \tau = \tau(2+T) .$$

Если $\tau(2+T) < \varepsilon$, то $|I_p(x)| < \varepsilon$ при $p \geqslant p_0$ и всех x из отрезка $[a,b]$. ►

1.2.4 Признаки равномерной сходимости

Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Гёльдера порядка* α ($0 < \alpha \leqslant 1$), если $|f(t)-f(s)| \leqslant L|t-s|^\alpha$ для всех t, s из $[a,b]$; константу L называют *коэффициентом Гёльдера.* Класс функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка α обозначают символом $H^\alpha[a,b]$. Без труда устанавливается включение $KC^1[a,b] \subset H^1[a,b]$; в частности, кусочно линейная на отрезке $[a,b]$ функция принадлежит $H^1[a,b]$.

Упражнение 1.*Доказать, что функция* $f(x) = x^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1$ *на отрезке* $[0,1]$ *удовлетворяет условию Гёльдера порядка* α.

Упражнение 2. *Установить включение* $H^\beta[a,b] \subset H^\alpha[a,b]$, *если* $\beta > \alpha$.

Теорема 1 (Признак Липшица). *Пусть функция* f *принадлежит классу* $H^\alpha[-\pi,\pi]$ *при некотором* α *из* $(0,1]$ *и* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Тогда ряд* $\mathbf{S}[f]$ *сходится к* f *равномерно на отрезке* $[-\pi,\pi]$.

◄ Продолжим функцию f по 2π-периодическому закону на всю действительную прямую. Введём в рассмотрение функцию

$$g(x,t) = \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{2\pi \sin \dfrac{t}{2}} .$$

Из формулы (11) вытекает равенство

$$s_n(x) - f(x) = \int\limits_0^\pi g(x,t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt ,$$

поэтому достаточно показать, что определяемая таким образом функция $g(x,t)$ удовлетворяет на $[-\pi,\pi] \times (0,\pi]$ условиям леммы 4. Так как $f \in H^\alpha[-\pi,\pi]$, то

$$|f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)| \leqslant |f(x+t) - f(x)| + |f(x) - f(x-t)| \leqslant 2Lt^\alpha ,$$

где L – коэффициент Гёльдера функции f. Для чисел φ, принадлежащих отрезку $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, верно вытекающее из вогнутости синуса на $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ оценка $\sin\varphi \geqslant \dfrac{2}{\pi}\varphi$, поэтому $2\pi \sin\dfrac{t}{2} \geqslant 2\pi \dfrac{2}{\pi}\dfrac{t}{2} = 2t$. Объединяя установленные оценки, получаем $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{2Lt^\alpha}{2t} = Lt^{1-\alpha}$. Очевидно, что $1-\alpha \in [0,1)$. Выполнение других условий леммы 4 проверяется без труда.▶

Пример 1. Условиям теоремы 1 удовлетворяет функция $f(x) = |x|(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. В рассматриваемом случае ввиду чётности функции f имеем $b_k = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos kx\,dx = \begin{cases} \pi & k = 0, \\ \dfrac{2[(-1)^k - 1]}{\pi k^2} & (k = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Искомое разложение имеет вид

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \ (|x| \leqslant \pi).$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, получаем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{18}$$

В свою очередь (18) влечёт за собой равенство

$$s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{s}{4}\,,$$

из которого следуют формулы

$$s = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{s}{4} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Пример 2. Пусть $t \in \mathbb{R}$ и $|t| < 1$. Применим теорему 1 к функции $f(x) = \cos tx\,(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. Её коэффициенты Фурье $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos tx\cos nx\,dx = (-1)^n\frac{\sin\pi t}{\pi} \cdot \frac{2t}{t^2 - n^2}.$$

Согласно теореме 1 в любой точке x отрезка $[-\pi, \pi]$ имеет место равенство

$$\cos tx = \frac{2t\sin\pi t}{\pi}\left(\frac{1}{2t^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^2 - n^2}\cos nx\right)\,.$$

При $x = \pi$ отсюда получаем, что

$$ctg\pi t - \frac{1}{\pi t} = \frac{2t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2} \,. \tag{19}$$

Если $|t| \leqslant t_0 < 1$, то $\left|\dfrac{1}{t^2 - n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2 - t_0^2}$, поэтому находящийся в правой части (19) функциональный ряд сходится равномерно по t на любом отрезке $|t| \leqslant t_0 < 1$. Почленное интегрирование ряда (19) законно и приводит к равенствам

$$\int\limits_0^x \left(ctg\pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2} \, dt \,,$$

$$\ln \frac{\sin \pi t}{\pi t} \bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \ln |t^2 - n^2| \big|_0^x \,.$$

Таким образом,

$$\ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \,.$$

Потенцируя, приходим к замечательному равенству

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \quad \text{при} \ \ |x| < 1 \,.$$

Пример 3. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ \dfrac{1}{\ln 4 - \ln |x|} & \text{если } 0 < |x| \leqslant \pi \,, \end{cases}$$

непрерывна и чётна на отрезке $[-\pi, \pi]$, однако не удовлетворяет условию Гёльдера (ни при каком значении параметра $\alpha > 0$). В этой ситуации полезна

Теорема 2 (Признак Дирихле-Жордана). *Если функция $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ непрерывна, имеет ограниченное изменение на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то справедливо заключение теоремы 1.*

Доказательство этого признака и его сравнение с признаком Липшица можно найти в [17], [20]

1.2.5 Равномерное приближение функций полиномами

Тригонометрический полином порядка N это функция вида

$$c_0 + \sum_{k=1}^{N} (c_k \cos kx + d_k \sin kx), \quad (c_k, d_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, N) \,.$$

Теорема 3.(Первая теорема Вейерштрасса) *Пусть* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *– непрерывная* 2π*- периодическая функция. Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такой тригонометрический полином* g*, для которого*

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon \quad \text{при всех действительных } x\,. \tag{20}$$

◀ Фиксируем $\varepsilon>0$. Подберём кусочно линейную функцию $h\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющую предположениям $h(-\pi)=h(\pi)=f(\pi)$ и $|f(x)-h(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}\ \forall x\in[-\pi,\pi]$ – способ построения подобной функции указан в разделе 1.5. Так как функция h принадлежит классу $KC^1[-\pi,\pi]$ и $h(-\pi)=h(\pi)$, то ряд $\mathbf{S}[h]$ сходится к h равномерно ; последовательность s_n частных сумм ряда $\mathbf{S}[h]$ сходится к функции h равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$. При $n\gg1$ выполняется неравенство

$$|h(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \forall x\in[-\pi,\pi]\,.$$

Следовательно, для каждого x из отрезка $[-\pi,\pi]$ справедлива оценка

$$|f(x)-s_n(x)|\leqslant|f(x)-h(x)|+|h(x)-s_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Обозначим через $g(x)$ 2π-периодическое продолжение функции $s_n(x)$ на всю действительную прямую. Функция $g(x)$ удовлетворяет соотношению (20).▶

Следствие. *Для любой непрерывной* 2π*-периодической функции* f *существует последовательность тригонометрических полиномов, равномерно (на всей действительной оси) сходящаяся к функции* f*.*

◀ Для любого натурального числа m существует тригонометрический полином g_m, для которого $|f(x)-g_m(x)|<\dfrac{1}{m}\forall x\in\mathbb{R}$. Последовательность g_m является искомой.▶

Теорема 4. (Вторая теорема Вейерштрасса) *Пусть* f *– непрерывная на отрезке* $[a,b]$ *функция. Тогда для каждого* $\varepsilon>0$ *найдётся такой алгебраический многочлен* $P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ $(c_k\in\mathbb{R},\ k=0,1,\ldots,n)$*, что*

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \quad \text{для всех } \ x \quad \text{из отрезка } [a,b]\,. \tag{21}$$

◀ Вначале рассмотрим случай $a=0$, $b=1$. Продолжим функцию f на отрезок $[-\pi,\pi]$, полагая $f(-\pi)=f(\pi)=0$, функция f линейна на отрезках $[-\pi,0],[1,\pi]$. Сохраним обозначение f за 2π-периодическим продолжением функции f на всю действительную прямую. Очевидно, что f – непрерывная 2π - периодическая функция. Согласно первой теореме Вейерштрасса её можно как угодно точно приблизить тригонометрическими полиномами. Фиксируем $\varepsilon>0$ и подберём тригонометрический полином $g(x)$ такой, что

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall x\in\mathbb{R}\,. \tag{22}$$

Функция $g(x)$ есть линейная комбинация функций вида $\cos kx, \sin kx$. Поэтому ряд Маклорена для функции g сходится к ней равномерно на каждом отрезке. В частности, это так и для отрезка $[0,1]$. При $n \gg 1$ справедливо неравенство

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall x \in [0,1]\,. \tag{23}$$

Объединяя (22), (23), приходим к неравенству (21), в котором

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad a = 0, b = 1\,.$$

Случай произвольного отрезка $[a,b]$ сводится к уже рассмотренному. Действительно, сопоставим непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции f непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию $\Phi(t) := f[a + t(b-a)]$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Согласно уже доказанному существует такой алгебраический полином $\widetilde{P}(t)$, для которого

$$|\Phi(t) - \widetilde{P}(t)| < \varepsilon \quad \text{для всех } t \quad \text{из отрезка } [0,1]\,. \tag{24}$$

Если $x = a + t(b-a)$, то $t = \dfrac{x-a}{b-a}$, $\Phi(t) = f(x)$. Неравенство (24) влечёт за собой соотношение

$$\left| f(x) - \widetilde{P}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \quad \text{из отрезка } [a,b]\,.$$

Полином $P(x) = \widetilde{P}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ является искомым. ▶

Следствие. *Для любой непрерывной на отрезке функции существует последовательность алгебраических полиномов, равномерно сходящаяся к этой функции.*

Вторая теорема Вейерштрасса показывает, что класс непрерывных на отрезке функций близок к классу полиномов. Она позволяет считать, что непрерывную функцию можно заменить (со сколь угодно малой абсолютной погрешностью) подходящим полиномом. На основе теорем Вейерштрасса без труда доказывается полнота некоторых ортонормированных систем.

1.3 Свойства тригонометрических рядов Фурье

1.3.1 Полнота тригонометрической системы

Имеет место

Теорема 1. *Тригонометрическая система 1(4) является полной в пространстве* $\mathscr{E} = \mathscr{R}[-\pi,\pi]$ *; иначе говоря, для любой функции* f *из* $\mathscr{R}[-\pi,\pi]$

и любого положительного числа ε *найдётся такой тригонометрический полином* $T(x)$, *что*

$$\|f-T\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\,. \tag{1}$$

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из теоремы 1(3) вытекает существование такой непрерывной на сегменте $[-\pi,\pi]$ функции $v(x)$, что $v(-\pi)=v(\pi)$ и

$$\|f-v\| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2}$$

В силу первой теоремы Вейерштрасса существует такой тригонометрический полином g, что

$$|v(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \quad \text{для всех } x \quad \text{из отрезка } [-\pi,\pi]\,. \tag{3}$$

Оценка (3) влечёт за собой неравенство

$$\|v-g\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}[v(x)-g(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4}$$

Объединяя (2), (4) с неравенством треугольника, получаем

$$\|f-g\| \leqslant \|f-v\| + \|v-g\| < \varepsilon\,.$$

Неравенство (1) доказано с $T(x)=g(x)$. ▶

Приведём некоторые следствия полноты тригогометрической системы.

Следствие 1. *Для любой функции* f *класса* $\mathscr{R}[-\pi,\pi]$ *справедливо равенство Парсеваля*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx\,,$$

если же $f \in KC^1[-\pi,\pi]$ *и* $f(-\pi)=f(\pi)$, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2+b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2\,dx\,.$$

◀ Вытекает из утверждения c) теоремы 1.2 и леммы 2.1.▶

Следствие 2. *Ряд* $\mathbf{S}[f]$ *функции* f *из* $\mathscr{R}[-\pi,\pi]$ *сходится к* f *в среднем квадратичном* :

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[f(x)-s_n(x)]^2\,dx=0\,.$$

◀ Следует из утверждения b) теоремы 1.2.▶

Следствие 3.*Если две функции* f_1, f_2 *класса* $\mathscr{R}[-\pi,\pi]$ *имеют одинаковые тригонометрические ряды , то эти функции почти всюду совпадают : множество* $\{x\in[-\pi,\pi], f_1(x)\neq f_2(x)\}$ *имеет нулевую меру.*

◀ Действительно, пусть $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$. Тогда функция f интегрируема по отрезку $[-\pi,\pi]$ и все коэффициенты Фурье этой функции равно нулю. В силу равенства Парсеваля имеем $\|f\|=0$. Требуемый результат вытекает теперь из леммы 1.1. ▶

Следствие 4. *Если две функции* f_1, f_2 *непрерывны на отрезке* $[-\pi,\pi]$ *и* $\mathbf{S}[f_1]=\mathbf{S}[f_2]$, *то* $f_1(x)=f_2(x)\ \forall x\in[-\pi,\pi]$.

Следствие 5. *Если ряд* $\mathbf{S}[f]$ *сходится равномерно на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *то он сходится именно к функции* f.

Следствия 4, 5 предлагается доказать самостоятельно. Основываясь на второй теореме Вейерштрасса, можно доказать полноту ортонормированной системы , образованной с помощью полиномов Лежандра. Для соответствующих рядов будут справедливы варианты следствий 1 - 5.

1.3.2 Почленное интегрирование и диференцирование

Сходимость ряда $\mathbf{S}[f]$ в среднем квадратичном к функции f влечёт (см. раздел 1.1.5) равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^x s_n(t)\,dt=\int\limits_0^x f(t)\,dt\,, \tag{5}$$

сходимость в (5) равномерна относительно x из отрезка $[-\pi,\pi]$. Равенство (5) можно сформулировать в терминах рядов.

Теорема 2 . *Ряд* $\mathbf{S}[f]$ *можно почленно интегрировать : для любого* x *из отрезка* $[-\pi,\pi]$ *имеет место соотношение*

$$\frac{a_0}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^x(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\,dt=\int\limits_0^x f(t)\,dt\,, \tag{6}$$

ряд в левой части (6) сходится равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Аналогичное (6) правило дифференцирования выглядит следующим образом

$$\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}(-ka_k\sin kx+kb_k\cos kx)\,. \qquad (7)$$

Оно верно, если ряды в левой и правой частях (7) равномерно сходятся.

Теорема 3. *Пусть функция f и её производная f' принадлежат классу $H^\alpha[-\pi,\pi]$ при некотором α из $(0,1]$. Пусть $f(-\pi)=f(\pi), f'(-\pi)=f'(\pi)$. Тогда*

1) ряды, находящиеся в левой и правой частях (7) , равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$ сходятся к функциям f и f' соответственно;

2) справедливо равенство (7).

◀ Как устанавливалось выше (см. п. 2.1) $\mathbf{S}[f']=(\mathbf{S}[f])'$. Равномерная сходимость рядов в левой и правой частях (7) следует из признака Липшица. Теперь доказываемое утверждение вытекает из общих результатов о почленном дифференцировании функциональных рядов . ▶

Упражнение 1. *Пусть функция f и её производные до порядка m включительно принадлежат классу $H^\alpha[-\pi,\pi]$ при некотором α из $(0,1]$. Пусть $f^{(s)}(-\pi)=f^{(s)}(\pi)$ $(s=0,1,\ldots,m)$. Тогда ряд $\mathbf{S}[f]$ можно почленно дифференцировать m раз:*

$$\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)^{(m)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^m\left(a_k\cos\left(kx+\frac{m\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{m\pi}{2}\right)\right)\,,$$

фигурирующие в этом равенстве ряды равномерно сходятся на отрезке $[-\pi,\pi]$.

1.3.3 Лемма Римана и принцип локализации

Лемма 1 (Лемма Римана). *Если функция $\varphi\colon(\omega_1,\omega_2)\to\mathbb{C}$ $(-\infty\leqslant\omega_1<\omega_2\leqslant\infty)$ абсолютно интегрируема (хотя бы в несобственном смысле) на промежутке (ω_1,ω_2), то функция*

$$I(t)=\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\varphi(x)e^{itx}\,dx \quad (t\in\mathbb{R})$$

непрерывна на действительной прямой и справедливы соотношения

$$|I(t)|\leqslant\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}|\varphi(x)|\,dx\,, \quad \lim_{t\to\infty}I(t)=0\,. \qquad (8)$$

◀ Первое из соотношений (8) очевидно. Доказательство второго соотношения и непрерывности функции $I(t)$ разобьём на несколько этапов.

1-ый этап. Функция $\varphi(x)$ совпадает с индикатором отрезка $[a,b]$, принадлежащего промежутку (ω_1,ω_2). В этом случае

$$I(t) = \int_a^b e^{itx}\,dx = \frac{e^{itx}}{it}\bigg|_a^b = \frac{e^{ibt}-e^{iat}}{it}$$

и доказываемые свойства функции $I(t)$ очевидны. Ввиду линейности интеграла аналогичный результат верен для каждой кусочно постоянной функции $\varphi(x)$.

2-ой этап. Функция $\varphi(x)$ финитна, т.е. равна 0 вне некоторого отрезка $[a,b] \subset (\omega_1,\omega_2)$. Для каждой финитной функции φ и каждого натурального числа n существует такая кусочно постоянная функция φ_n, что

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(x)-\varphi_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}\,. \tag{9}$$

Действительно, разобьём отрезок $[a,b]$ на N одинаковых частей точками $x_k = a + \frac{k}{N}(b-a),\ (k=0,1,\dots,N)$. Положим

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k) 1_{(x_{k-1},x_k]}(x)\,.$$

Тогда $\psi(x)$ – кусочно постоянная функция и

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(x)-\psi(x)|\,dx < \frac{1}{n}$$

при достаточно большом N (в силу интегрируемости функции $\varphi(x)$ по отрезку $[a,b]$). Поэтому в качестве кусочно постоянной функции φ_n, удовлетворяющей соотношению (9), можно взять функцию ψ.

В силу уже доказанного функция

$$I_n(t) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi_n(x) e^{itx}\,dx$$

непрерывна на действительной оси, стремится к нулю при $|t|\to\infty$ и удовлетворяет оценке $|I(t)-I_n(t)| < \dfrac{1}{n}$ при всех действительных t. Так как последовательность $I_n(t)$ равномерно на всей действительной прямой сходится к функции $I(t)$, то предельная функция $I(t)$ непрерывна на прямой $\mathbb{R}$ и стремится к нулю при $|t|\to\infty$.

3-ий этап. В общем случае фиксируем последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, исчерпывающую промежуток (ω_1, ω_2) и положим

$$\psi_n(x) = 1_{[a_n,b_n]}(x)\varphi(x)\,.$$

Функция $\psi_n(x)$ финитна, поэтому функция

$$J_n(t) = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} e^{itx}\psi_n(x)\,dx$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и $J_n(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$. Поскольку

$$|I(t) - J_n(t)| \leqslant \int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} |f(x) - \psi_n(x)|\,dx\,,$$

то последовательность $J_n(t)$ равномерно на всей действительной прямой сходится к функции $I(t)$. Теперь доказываемое утверждение очевидно. ▶

Следствие. *В условиях леммы 1 имеют место равенства*

$$\lim_{|t|\to\infty}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(x)\cos tx\,dx = \lim_{|t|\to\infty}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(x)\sin tx\,dx = 0\,.$$

◀ Достаточно воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos tx = \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2}, \quad \sin tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}\,. \ ▶$$

Объединение формулы Дирихле 2(11) с леммой Римана приводит к следующему утверждению, назывемому принципом локализации.

Теорема 4. *Сходимость или расходимость ряда* $\mathbf{S}[f]$ *в точке* $c \in (-\pi, \pi)$, *а также значение суммы ряда в этой точке в случае его сходимости, определяются значениями функции* f *в сколь угодно малой окрестности этой точки.*

◀ Из формулы Дирихле вытекает соотношение

$$s_n(c) = \int\limits_0^{\delta} \varphi(\tau)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\,d\tau + \int\limits_{\delta}^{\pi} \varphi(\tau)\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\,d\tau\,, \tag{10}$$

где $0 < \delta < \pi$,

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi}[f(c+\tau) + f(c-\tau)]\frac{1}{\sin\dfrac{\tau}{2}}.$$

Так как функция $\varphi(\tau)$ интегрируема (в смысле Римана) на промежутке $[\delta, \pi]$, то второе слагаемое в правой части соотношения (10) на основании леммы Римана стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, вопрос о существовании предела у последовательности $s_n(c)$ при $n \to \infty$, а также значение этого предела, если он существует, решается в зависимости от поведения первого слагаемого в соотношении (10), т.е. в зависимости от значений функции f на сколь угодно малом промежутке $[c-\delta, c+\delta]$. ▶

1.3.4 Сходимость тригонометрического ряда в точке

Будем говорить, что функция $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *одностороннему условию Гельдера в точке* $c \in (-\pi, \pi)$, если 1) существуют односторонние пределы

$$f(c+0) = \lim_{t \to +0} f(c+t), \quad f(c-0) = \lim_{t \to +0} f(c-t)\,;$$

2) $|f(c+t) - f(c+0)| + |f(c-t) - f(c-0)| \leqslant Lt^{\alpha}$, где $0 < L < \infty, 0 < \alpha \leqslant 1, 0 < t < \delta, \delta$ – некоторое положительное число. Например, одностороннее условие Гёльдера выполнено, если функция f имеет в точке c односторонние производные.

Теорема 5 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке) *Пусть функция f интегрируема по отрезку $[-\pi, \pi]$ ($f \in \mathscr{R}[-\pi, \pi]$) и f удовлетворяет одностороннему условию Гёльдера в точке c из $(-\pi, \pi)$. Тогда ряд* $\mathbf{S}[f]$ *сходится в точке c и его сумма равна*

$$s_0 = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}\,.$$

◀ Доказательство основано на вытекающем из формулы 2(11) равенстве

$$s_n(c) - s_0 = \int\limits_0^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt, \tag{11}$$

в котором

$$g(t) = \frac{f(c+t) - 2s_0 + f(c-t)}{2\pi \sin \dfrac{t}{2}} \quad (0 < t < \pi).$$

Определённая таким образом функция $g(t)$ абсолютно интегрируема (в несобственном смысле) на промежутке $(0, \pi)$. Действительно,

$$|f(c+t) - 2s_0 + f(c-t)| \leqslant |f(c+t) - f(c+0)| + |f(c-0) - f(t)| \leqslant Lt^{\alpha} \ (0 < t < \delta)$$

в силу одностороннего условия Гёльдера. С другой стороны, справедлива оценка снизу $\pi \sin \dfrac{t}{2} \geqslant t (0 \leqslant t \leqslant \pi)$. Следовательно, функция $g(t)$ удовлеворяет неравенству $|g(t)| \leqslant \frac{L}{2}t^{\alpha-1}$ $(0 < t < \delta)$, из которого без труда вытекает абсолютная интегрируемость функции $g(t)$ на промежутке $(0,\pi)$. В силу леммы Римана

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\pi g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0\,.$$

Теперь требуемый результат следует из формулы (11).▶

Замечание. Считая $f(-\pi) = f(\pi)$, продолжим функцию f по 2π – периодическому закону на всю действительную прямую, сохранив за ней прежнее обозначение. Если функция f удовлетворяет одностороннему условию Гёльдера в какой нибудь точке c из $\mathbb{R}$, то ряд $\mathbf{S}[f]$ сходится в точке c и его сумма равна числу $s_0 = \dfrac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$.

Пример 1. Найдём разложение в ряд Фурье функции $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$. Функция $f(x)$ нечётна, поэтому её коэфициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_k = 0\ (k = 0,1,\dots),\quad b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin kx\,dx = (-1)^{k+1}\frac{2}{k}\,.$$

В силу теоремы 5 имеет место равенство

$$x = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx \quad (-\pi < x < \pi)\,. \tag{12}$$

Упражнение 2.*Исходя из равенства (12), путём почленного интегрирования получить равенства*

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\frac{\cos kx}{k^2};\quad (\pi \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$x^3 = 2\pi^2\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + 12\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\frac{\sin kx}{k^3}\quad (-\pi < x < \pi)\,.$$

Пример 2. Пусть $f(x)$ – индикатор отрезка $[c,\pi](-\pi < c < \pi,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi)$. В данном случае коэффициенты Фурье a_k, b_k легко считаются: $a_0 = \dfrac{\pi-c}{\pi}$,

$$a_k = -\frac{\sin kc}{k\pi},\quad b_k = \frac{\cos kc + (-1)^{k+1}}{k\pi}\quad (k = 1,2,\dots)\,.$$

Соответствующий ряд Фурье

$$\frac{\pi-c}{2\pi} + \sum_{k=1}^\infty\left(-\frac{\sin kc}{k\pi}\cos kx + \frac{\cos kc + (-1)^{k+1}}{k\pi}\sin kx\right)$$

всюду сходится; его сумма совпадает с $f(x)$, если $x \in (-\pi, \pi), x \neq c$, и равна $\frac{1}{2}$, если $x = c, \pm\pi$.

1.3.5 Модификации тригонометрических рядов Фурье

а) Тригонометрические ряды для $2l$ - периодических функций. При решении ряда задач приходится раскладывать $2l$ - периодические функции в ряд Фурье. Положим $\dfrac{\pi x}{l} = t$. Если f – $2l$ - периодическая функция , то функция $F(t) = f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$ – 2π- периодична. Пусть

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,, \tag{13}$$

т.е. функция F представима в виде суммы ряда Фурье. Поскольку $f(x) = F\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$, то из (13) вытекает равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}\right)\;; \tag{14}$$

при этом

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos kt\, dt = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx\,, \tag{15}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin kt\, dt = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx\,. \tag{16}$$

Равенства (15), (16) называют *формулами Эйлера-Фурье*, правую часть (14) именуют *тригонометрическим рядом Фурье* $2l$- периодической функции f и обозначают символом $\mathbf{S}[f]$; соответствующий ряд имеет смысл для любой функции f класса $\mathscr{R}[-l, l]$. Для ряда $\mathbf{S}[f]$ имеют место утверждения, аналогичные установленным выше в случае $l = \pi$. Перечислим некоторые из них.

1° Если $f \in H^{\alpha}[-l, l](0 < \alpha \leqslant 1)$ и $f(-l) = f(l)$, то ряд $\mathbf{S}[f]$ равномерно на отрезке $[-l, l]$ сходится к функции f.

2° Если f удовлетворяет одностороннему условию Гёльдера в некоторой точке c из $(-l, l)$, то ряд $\mathbf{S}[f]$ сходится при $x = c$ к числу $\dfrac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$.

3° Ряд $\mathbf{S}[f]$ сходится к f в среднем квадратичном и справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\, dx\,.$$

4° Равенство (14) можно почленно интегрировать.

5° Если функции $f,\ f'$ принадлежат классу Гёльдера $H^{\alpha}[-l, l]$ при некотором α из $(0, 1]$ и $f(-l) = f(l), f'(-l) = f'(l)$, то разложение (14) можно почленно дифференцировать.

b) Комплексная форма ряда Фурье В силу формул Эйлера справедливы равенства $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. Применим эти равенства в случае $t = kx$. В итоге ряд Фурье $\mathbf{S}[f]$ 2π - периодической функции f можно привести к виду

$$\mathbf{S}[f] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}\,, \tag{17}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \tag{18}$$

Комплексная форма ряда Фурье удобна при рассмотрении кратных тригонометрических рядов Фурье. Пусть функция $f(x, y)$ определена на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, имеет период 2π как по x, так и по y и интегрируема (в смысле Римана) по квадрату $\square = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Подражая формуле (17), запишем двойной тригонометрический ряд Фурье $\mathbf{S}[f]$ в виде двойного ряда

$$\mathbf{S}[f] = \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^2} c_{k,m} e^{i(kx+my)}\,,$$

где коэффициенты Фурье $c_{k,m}$ определяются аналогичным (18) способом

$$c_{km} = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\square} f(x, y) e^{-i(kx+my)}\, dx\, dy\,, \qquad (k, m) \in \mathbb{Z}^2\,.$$

Справедливо следующее утверждение : *если функция $f(x, y)$ 2π - периодична по каждому из переменных x, y, а её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ удовлетворяют условию Гельдера некоторого порядка, то ряд $\mathbf{S}[f]$ сходится к f абсолютно и равномерно.*

Формулировки и доказательства более общих результатов, относящихся к теории кратных тригонометрических рядов Фурье, можно найти в [3].

c) Разложение только по косинусам и синусам.

Пусть функция f определена на отрезке $[0, l]\,(0 < l < \infty)$. Её можно продолжить по чётному закону на отрезок $[-l, 0]$, а далее на всю действительную прямую, исходя из условия $2l$ – периодичности. Сохраним обозначение f за продолжением. Если исходная функция f принадлежала классу $H^\alpha[0, l]$, то и её чётное продолжение принадлежит классу $H^\alpha[-l, l]$. Поэтому она допускает разложение вида (14). С учётом чётности функции f коэффициенты $b_k = 0$, а коэффициенты a_k вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx\,. \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{19}$$

Теорема 6 . *Пусть $f \in H^\alpha[0, l]$ при некотором $\alpha > 0$, числа a_k определены равенством (19). Тогда*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}\,, \tag{20}$$

ряд в правой части (20) сходится равномерно к функции f.

◀ Доказательство содержится в предшествующих рассуждениях.▶

Иногда возникает необходимость в разложении функции $f\colon [0, l] \to \mathbb{R}$ только по синусам. Здесь естественно условие

$$f(0) = f(l) = 0\,. \tag{21}$$

Продолжим функцию f на $[-l, 0]$ так, чтобы $f(-x) = -f(x)$, т.е. функция f нечётна на отрезке $[-l, l]$. Сохраним обозначение f за $2l$- периодическим продолжением функции f. Справедлива

Теорема 7. *Пусть $f \in H^\alpha[0, l]$ при некотором $\alpha > 0$ и выполнено условие (21). Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\,, \tag{22}$$

где

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx;$$

ряд в правой части (22) сходится равномерно к функции f.

Замечание. Если условие (21) не выполнено, то соотношение (22) имеет место для точек x из $(0, l)$; в граничных точках $0, l$ оно несправедливо, поскольку правая часть (22) в этих точках равна нулю.

1.4 Преобразование Фурье

1.4.1 Определение и простейшие свойства

Обозначим через $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ совокупность абсолютно интегрируемых функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Если $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, то и функция $e^{-itx}f(x)$ $(x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$ также принадлежит классу $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. Поэтому имеет смысл интеграл

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{-\partial}^{\infty} e^{-tx} f(x)\, dx\,, \tag{1}$$

называемый *интегралом Фурье*. Функцию $\hat{f}(t)$, определяемую равенством (1), именуют *преобразованием Фурье* функции f; используется обозначение $\hat{f} = \mathscr{F} f$. Иногда функцию $\hat{f}$ называют *образом* функции f, а функцию f – *оригиналом*.

Рассмотрим несколько примеров.

1°. Пусть $f(x)$ – индикатор отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{a}^{b} e^{-itx}\, dx = \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it}\,.$$

2° Пусть $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тогда

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos tx\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx - i \int\limits_{\infty}^{\infty} \sin txe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Последовательно используются формула Эйлера $e^{-itx} = \cos tx - i \sin tx$, установленное ранее равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos tx\, dx = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

и нечётность функции $e^{-\frac{x^2}{2}} \sin tx$. Таким образом, доказана формула

$$\mathscr{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}\,. \tag{2}$$

Отметим следующие свойства преобразования Фурье.

1°. Линейность преобразования Фурье:

$$\mathscr{F}(k_1 f_1 + \cdots + k_m f_m) = k_1 \mathscr{F}(f_1) + \cdots + k_m \mathscr{F}(f_m)\,;$$

здесь $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}), k_1, \ldots, k_m$ – постоянные. Линейность преобразования Фурье следует из его определения и свойства линейности интеграла.

2°. Ограниченность преобразования Фурье :

$$|\mathscr{F}(f)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Действительно,

$$|\hat{f}(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x)\, dx\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |e^{-itx} f(x)|\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\,.$$

Комментарий: модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля, используется также равенство $|e^{itx}| = 1$.

3°. Функция $\hat{f} = \mathscr{F} f$ непрерывна на действительной оси и $\hat{f}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$. Это свойство вытекает из леммы Римана.

1.4.2 Вспомогательные результаты

Пусть $\hat{f}(t)$ – преобразование Фурье функции f класса $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. При любом положительном числе N имеет смысл функция

$$J_N(x) \overset{def}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(t) e^{itx}\, dt\,. \tag{3}$$

Для дальнейшего будет удобно несколько иное представление этой функции; простоты ради считаем ниже (в пределах раздела 1.4) функцию f непрерывной на действительной оси. Заменим функцию $\hat{f}(t)$ соответствующим интегралом

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} f(u)\, du\,. \tag{4}$$

Объединяя (3), (4), приходим последовательно к соотношениям (комментарий приводится ниже)

$$J_n(x) \overset{(I)}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(t) e^{itx}\, dt \overset{(II)}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{N} e^{itx}\, dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} f(u)\, du \overset{(III)}{=}$$

$$\stackrel{(III)}{=} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du \int\limits_{-N}^{N} e^{it(x-u)}\, dt \stackrel{(IV)}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin N(x-u)}{x-u}\, du\,.$$

Соотношения $(I), (II)$ следуют из равенств (3), (4) соответственно, третье соотношение вытекает из правила интегрирования по параметру несобственных интегралов (равномерная сходимость соответствующих несобственных интегралов выводится из признака Вейерштрасса и включения $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$), наконец, соотношение (IV) проверяется непосредственно на основе равенства

$$\int\limits_{-N}^{N} e^{it(x-u)}\, dt = \frac{\sin N(x-u)}{x-u}\,.$$

Замена переменной $u = x + z$ приводит к следующему равенству

$$J_N(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \frac{\sin Nz}{z}\,.$$

Оно эквивалентно соотношению

$$J_N(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x+z) + f(x-z)}{z} \sin Nz\, dz\,, \tag{5}$$

называемому *формулой Дирихле.*

Напомним равенство

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin Nz}{z}\, dz = 1\,, \tag{6}$$

также установленное Дирихле. Объединяя (5), (6) , получаем соотношение

$$J_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x+z) - 2f(x) + f(x-z)}{z} \sin Nz\, dz - \tag{7}$$

основной результат этого пункта.

1.4.3 Обратное преобразование Фурье

Пусть функция $g(t)$ интегрируема по каждому отрезку $(-N, N)$. Определим *обратное преобразование Фурье* равенством

$$\left(\mathscr{F}^{-1}\right)(g)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{N} g(t) e^{itx}\, dt\,, \tag{8}$$

если этот предел существует. Например, предел в правой части (8) заведомо существует, если функция g принадлежит $\mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. В достаточно широких предположениях относительно функции f справедливо равенство $\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}f) = f$, оправдывающее принятую терминологию. Более точно, имеет место

Теорема 1 (Формула обращения). *Пусть функция f абсолютно интегрируема на всей оси и удовлетворяет в точке x_0 условию Гёльдера*

$$|f(x_0+t) - f(x_0)| \leqslant K|t|^\alpha \qquad (|t| \leqslant \delta, 0 < \alpha \leqslant 1)\,.$$

Тогда

$$f(x_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-N}^{N} e^{itx_0} \hat{f}(t)\,dt\,,$$

эквивалентная запись

$$f(x_0) = \lim_{N\to\infty} J_N(x_0)\,.$$

◀ В силу равенства (7) имеем

$$J_N(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{f(x_0+z) - 2f(x_0) + f(x_0-z)}{z} \sin Nz\,dz =$$

$$= \int\limits_0^\delta \varphi(z) \sin Nz\,dz + \frac{1}{\pi} \int\limits_\delta^\infty \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{z} \sin Nz\,dz -$$

$$- \frac{2f(x_0)}{\pi} \int\limits_\delta^\infty \frac{\sin Nz}{z}\,dz = I_1 + I_2 + I_3\,,$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \frac{f(x_0+z) - 2f(x_0) + f(x_0-z)}{z}\,, \quad I_1 = \int\limits_0^\delta \varphi(z) \sin Nz\,dz\,,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int\limits_\delta^\infty \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{z} \sin Nz\,dz,\; I_3 = \frac{-2f(x_0)}{\pi} \int\limits_\delta^\infty \frac{\sin Nz}{z}\,dz\,.$$

Из условия Гёльдера вытекает оценка $|\varphi(z)| \leqslant 2K|z|^{\alpha-1}$ $(0 < z < \delta)$, поэтому функция $\varphi(z)$ абсолютно интегрируема по промежутку $(0, \delta)$. Неравенство

$$\left| \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{z} \right| \leqslant \frac{1}{\delta}(|f(x_0+z)| + |f(x_0-z)|)\ (z \geqslant \delta)$$

влечёт за собой абсолютную интегрируемость функции $\dfrac{f(x_0+z)+f(x_0-z)}{z}$ по промежутку (δ,∞).

Фиксируем $\varepsilon>0$ и подберём N_1 так, чтобы при $N>N_1$ выполнялась оценка $|I_1|+|I_2|<\varepsilon$. Существование подобного числа N_1 вытекает из леммы Римана. Поскольку

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Nz}{z}\,dz=\int\limits_{N\delta}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt\,,$$

то $|I_3|<\varepsilon$, если $N>N_2$. Следовательно,

$$|J_N(x_0)-f(x_0)|\leqslant|I_1|+|I_2|+|I_3|<2\varepsilon$$

для всех $N>N_0=\max\{N_1,N_2\}$. Ввиду произвольности $\varepsilon>0$ последняя оценка влечёт за собой доказываемое утверждение.▶

Изменяя предположения относительно функции f, приходим к различным вариантам формулы обращения. Например, формула обращения сохраняется, если условие Гёльдера в точке x_0 заменить условием абсолютной интегрируемости на интервале $(0,\delta)$ функции

$$\frac{f(x_0+t)-2f(x_0)+f(x_0-t)}{t}.$$

Доказательство переносится на этот более общий случай без всяких изменений.

Применим формулу обращения к функции $f(x)=e^{-|x|}$. Вначале найдём её образ

$$\hat f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-itx}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}\cos tx\,dx=2\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}\cos tx\,dx=$$

$$=2Re\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}e^{itx}\,dx=2Re\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x(1-it)}\,dx=2Re\frac{e^{-x(1-it)}}{-(1-it)}=$$

$$=2Re\frac{1}{1-it}=\frac{2}{1+t^2}\,.$$

Функция $\hat f(t)$ интегрируема по действительной прямой. По формуле обращения

$$e^{-|x|}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{1+t^2}\,dt\,.$$

Отделяя действительную часть, приходим к равенству

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos tx}{1+t^2}\, dt\,,$$

называемому интегралом Лапласа. Дифференцируя это равенство по x (при положительных x) , получаем равенство

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{t \sin tx}{1+t^2}\, dt\,,$$

также именуемому интегралом Лапласа.

1.4.4 Дифференцирование образа

При определенных условиях на функцию f её преобразование Фурье $\hat{f}(t)$ есть дифференцируемая функция и её производная может быть найдена по правилу Лейбница.

Теорема 2._Если функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(t)$ дифференцируема по t и справедливо правило Лейбница_

$$\frac{d\hat{f}}{dt}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-itx} f(x)\right)\, dx = -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-itx}\, dx\,. \tag{9}$$

◀ Для доказательства (9) достаточно применить правило Лейбница к интегралу (8). Поскольку функции $f(x), xf(x)$ абсолютно интегрируемы, то применение правила Лейбница законно.▶

Следствие._Если функция $x^k f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ при $k = 0, 1, \dots, m$, то функция $\hat{f}(t)$ m раз дифференцируема по t и её производные находятся по правилу Лейбница_

$$\frac{d^k}{dt^k} I(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left(e^{-itx} f(x)\right)\, dx = (-i)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) e^{-itx}\, dx\,; \tag{10}$$

символическая запись (10)

$$\frac{d^k}{dt^k} I(t) = (-i)^k (\widehat{x^k f(x)}) \quad (k = 1, \dots, m)\,.$$

В частности, можно любое число раз дифференцировать по t равенство (2). Это приводит к соотношениям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\dfrac{x^2}{2}} e^{-itx}\, dx = \sqrt{2\pi} (-i)^k \frac{d^k}{dt^k} e^{-\dfrac{t^2}{2}}\,, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

позволяющим находить преобразование Фурье функции вида $P(x)e^{-ax^2}$, где $P(x)$ – алгебраический полином , a – положительная постоянная - вывести соответствующие формулы предлагается читателю в качестве самостоятельного упражнения.

1.4.5 Образ производной

Фундаментальное значение для приложений к дифференциальным уравнением имеет

Теорема 3. (Преобразование Фурье производной)*Пусть функция f и её производная f' непрерывны и абсолютно интегрируемы на действительной прямой. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-itx}\,dx = it\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx\,. \tag{11}$$

◀ Вначале установим, что функция f стремится к нулю при $|x| \to \infty$. Действительно, пусть для определённости $x \to +\infty$. Из неравенства

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f'(x)\,dx\right| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} |f'(x)|\,dx \quad (x_1 < x_2)$$

и критерия Коши сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx$ следует существование конечного предела функции f на ∞. Поскольку $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$, то этот предел равняется нулю. Следовательно, $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Теперь равенство (11) получается путём интегрирования по частям. Имеем последовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-itx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}df(x) = f(x)e^{-itx}\big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)de^{-itx} = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-it)e^{-itx}\,dx = it\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx\,.$$

Таким образом, $\mathscr{F}(f') = it\mathscr{F}(f)$. ▶

Следствие.*Пусть функция f и её производные до порядка m включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на действительной прямой $\mathbb{R}$. Тогда для любого многочлена $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m$ имеет место равенство $\mathscr{F}\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)f\right) = P(it)\mathscr{F}(f)$.*

Дифференцирование оригинала (некоторая трансцендентная операция) в образах сводится к алгебраической операции умножения. Возникает мост , связывающий анализ и алгебру.

Глава 2

Интеграл Лебега

Развитая выше теория рядов Фурье и несобственных интегралов принимает более завершённую форму при использовании интеграла Лебега . В настоящей главе вводится понятие интеграла Лебега для функций одного переменного. Оно без принципиальных изменений переносится на случай любого числа переменных; обсуждение соответствующих обобщений приведено в конце главы.

2.1 Измеримые множества

2.1.1 Внешняя мера

Ниже $I = [0,1]$ – отрезок действительной прямой $\mathbb{R}$, $\mathscr{P}(I)$ – совокупность всех подмножеств отрезка I. Последовательность интервалов (α_n, β_n) (конечная или счётная) образует покрытие множества $E \subset I$, если $E \subset \bigcup\limits_n (\alpha_n, \beta_n)$. Положим

$$|E|^* = \inf \sum_n (\beta_n - \alpha_n)\,,$$

где нижняя грань берётся по всем покрытиям множества E системой интервалов (α_n, β_n). Число $|E|^*$ называют *внешней мерой* множества E. Ясно, что $0 \leqslant |E|^* \leqslant 1$. Отметим менее очевидные свойства внешней меры.

1° **Монотонность.** *Если $E_1 \subset E_2 \subset I$, то $|E_1|^* \leqslant |E_2|^*$*

◀Для доказательства достаточно заметить, что любое покрытие множества E_2 является покрытием множества E_1.▶

2° **Полуаддитивность.** *Если множество E представляет объединение конечного или счетного числа множеств E_n класса $\mathscr{P}(I)$, то*

$$|E|^* \leqslant \sum_n |E_n|^*\,.$$

◀ Фиксируем $\varepsilon > 0$. Подберём покрытие множества E_k такой системой интервалов (α_n^k, β_n^k), что

$$\sum_n (\beta_n^k - \alpha_n^k) < |E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Система интервалов (α_n^k, β_n^k) счётна, покрывает множество E, поэтому

$$|E|^* \leqslant \sum_{n,k} (\beta_n^k - \alpha_n^k) \leqslant \sum_k \left(|E_k|^* + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1} |E_k|^* + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство влечёт за собой доказываемый результат.▶

2.1.2 Мера Лебега и измеримые множества

Под промежутком $\langle a, b\rangle$ ниже понимается одно из множеств вида

$$[a,b], \quad (a,b), \quad [a,b), \quad (a,b]\,,$$

где $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ и $a \leqslant b$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ назовём *элементарным*, если оно представимо в виде объединения конечного числа промежутков. Обозначим через $\Xi(I)$ класс всех элементарных подмножеств отрезка $I = [0,1]$. Класс $\Xi(I)$ образует алгебру, т.е. если $A_1, A_2, A \in \Xi(I)$, то и

$$A_1 \cup A_2 \in \Xi(I), \quad A_1 \cap A_2 \in \Xi(I), \quad CA = I \setminus A \in \Xi(I)\,.$$

Пусть $A, B \in \mathscr{P}(I)$. Положим $A\Delta B \overset{def}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; множество $A\Delta B$ называют *симметричной разностью* множеств A, B. Очевидно, что

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad CA\Delta CB = A\Delta B, \quad 1_{A\Delta B}(x) = |1_A(x) - 1_B(x)|;$$

равенство $A\Delta B = \varnothing$ эквивалентно равенству $A = B$; симметричная разность элементарных множеств есть элементарное множество.

Число $d(A,B) = |A\Delta B|^*$ назовём расстоянием между множествами A, B. Оно обладает характерными свойствами расстояния. Отметим здесь некоторые из этих свойств.

1° **Положительность.** $d(A,B) \geqslant 0$; *равенство* $d(A,B) = 0$ *эквивалентно тому, что* $|A \setminus B|^* = 0, |B \setminus A|^* = 0$.

◀ Для доказательства достаточно воспользоваться очевидными неравенствами

$$\max\{|A \setminus B|^*, |B \setminus A|^*\} \leqslant d(A,B) \leqslant |A \setminus B|^* + |B \setminus A|^*\,. \blacktriangleright$$

2°.**Симметрия.** $d(A,B) = d(B,A)$

3° **Неравенство треугольника** $\quad d(A,B) \leqslant d(A,C) + d(C,B)\,.$

◀ Свойство 3° вытекает из теоретико-множественного включения

$$A\Delta B \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B)\,,$$

эквивалентного неравенству $|1_A(x) - 1_B(x)| \leqslant \max\{|1_A(x) - 1_B(x)|, |1_B(x) - 1_C(x)|\}$ ▶.

Кроме этих стандартных свойств расстояния имеют место три специфических свойства.

4°.

$$d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)\,; \tag{1}$$

в левой части (1) объединение двух множеств можно заменить пересечением и разностью множеств.

◀ Для доказательства (1) достаточно установить теоретико-множественное включение

$$(A_1 \cup A_2)\Delta(B_1 \cup B_2) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2)\,. ▶$$

5°. $||A|^* - |B|^*| \leqslant d(A, B)$.

◀ В силу неравенства треугольника

$$d(A, \varnothing) \leqslant d(A, B) + d(B, \varnothing),$$

поэтому $|A|^* \leqslant d(A, B) + |B|^*$, т.е. $|A|^* - |B|^* \leqslant d(A, B)$. Меняя местами множества A, B, приходим к 5°. ▶

6°. $d(A, B) = d(CA, CB)$.

◀ Достаточно учесть равенство $A\Delta B = CA\Delta CB$.▶

Наличие в классе $\mathscr{P}(I)$ метрики позволяет ввести понятие сходимости . Скажем, что последовательность A_n из $\mathscr{P}(I)$ *сходится* к A из $\mathscr{P}(I)$, если числовая последовательность $d(A_n, A) = d(A, A_n)$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Будем писать $A_n \xrightarrow{d} A$, или , более традиционно, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Из определения предела вытекает "почти единственность"предела. Именно, если $A_n \xrightarrow{d} A$ и $A_n \xrightarrow{d} \widetilde{A}$, то $d(A, \widetilde{A}) = 0$. Действительно,

$$d(A, \widetilde{A}) \leqslant d(A, A_n) + d(A_n, \widetilde{A})\,;$$

поскольку правая часть стремится к 0 при $n \to \infty$, то $d(A, \widetilde{A}) = 0$.

Множество A класса $\mathscr{P}(I)$ назовём *измеримым*, если существует сходящаяся к нему последовательность множеств A_n класса $\Xi(I)$. Очевидно,что любое элементарное множество $A \subset I$ измеримо. Таким образом , класс $\sum(I)$ всех измеримых подмножеств отрезка I непуст. В некотором смысле $\sum(I)$ есть замыкание класса $\Xi(I)$.

Внешняя мера измеримого множества A обозначается символом $|A|$ и называется *мерой Лебега* множества A. Таким образом,$|A| = |A|^*$ для всех измеримых множеств A. Мера Лебега элементарного множества $A \subset I$ равна сумме длин составляющих его попарно непересекающих его промежутков; эта сумма не зависит от способа представления A в виде объединения непересекающихся промежутков.

2.1.3 Алгебра измеримых множеств

Отметим некоторые свойства класса $\sum(I)$.

Теорема 1.*Если $A \in \sum(I)$, то $CA = I \setminus A \in \sum(I)$ (класс $\sum(I)$ замкнут относительно дополнений).*

◀ Так как $A \in \sum(I)$, то существует последовательность A_n из $\Xi(I)$ такая, что $A_n \xrightarrow{d} A$, т.е. $d(A_n, A) \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $d(CA_n, CA) = d(A_n, A)$, то $CA_n \xrightarrow{d} CA$. Остаётся заметить, что дополнение CA_n к элементарному множеству A_n также элементарно.▶

Теорема 2.*Если $A, B \in \sum(I)$, то $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \sum(I)$ (класс $\sum(I)$ замкнут относительно алгебраических операций).*

◀ Так как $A, B \in \sum(I)$, то существуют последовательности A_n, B_n из $\Xi(I)$ такие, что $A_n \xrightarrow{d} A, B_n \xrightarrow{d} B$. Поскольку $d(A \cup B, A_n \cup B_n) \leqslant d(A, A_n) + d(B, B_n)$, то $A_n \cup B_n \xrightarrow{d} A \cup B$. Объединение элементарных множеств элементарно, следовательно, $A \cup B \in \sum(I)$. Измеримость пересечения вытекает из равенства $A \cap B = C\left((CA \cup CB)\right)$ – двойственность Моргана. Так как $A \setminus B = A \cap CB$, то разность измеримых множеств измерима. ▶

Теорема 3. *Если $A_n \in \sum(I)$ и $A_n \xrightarrow{d} A$, то $A \in \sum(I)$ (замкнутость класса $\sum(I)$ относительно предельного перехода) и*

$$\lim_{n\to\infty} |A_n| = |A| . \tag{2}$$

◀ Пусть $A_n \in \sum(I)$ и $A_n \xrightarrow{d} A$. Существует множество B_n класса $\Xi(I)$, для которого $d(B_n, A_n) < \dfrac{1}{n}$. В силу неравенства треугольника справедливо неравенство

$$d(B_n, A) \leqslant d(B_n, A) + d(A, A_n) .$$

Правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $n \to \infty$, поэтому $B_n \xrightarrow{d} A$. Следовательно, $A \in \sum(I)$. Согласно свойству 5° внешней меры $||A_n| - |A|| \leqslant d(A_n, A)$, что и влечёт за собой равенство (2).▶

На совокупности элементарных множеств $\Xi(I)$ мера аддитивна. Это означает следующее: если $E_1, E_2 \in \Xi(I)$ и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$. Более общий вариант свойства аддитивности выглядит следующим образом

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2| \quad \forall E_1, E_2 \in \Xi(I) . \tag{3}$$

Свойство аддитивности сохраняется и для класса $\sum(I)$ измеримых множеств.

Теорема 4.*Пусть $A, B \in \sum(I)$. Тогда*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| . \tag{4}$$

◀ По условию A, B – измеримые множества : $A \in \sum(I)$, $B \in \sum(I)$. Поэтому существуют последовательности A_n, B_n из $\Xi(I)$, сходящиеся к A, B соответственно. Поскольку

$$d(A_n \cup B_n, A \cup B) \leqslant d(A_n, A) + d(B_n, B), \quad d(A_n \cap B_n, A \cap B) \leqslant d(A_n, A) + d(B_n, B)\,,$$

то $A_n \cup B_n) \xrightarrow{d} A \cup B$ и $A_n \cap B_n \xrightarrow{d} A \cap B$. В силу теоремы 3 имеем

$$\lim_{n\to\infty} |A_n \cup B_n| = |A \cup B|, \quad \lim_{n\to\infty} |A_n \cap B_n| = |A \cap B|\,,$$

поэтому переходя в следующем из (3) равенстве

$$|A_n \cup B_n| = |A_n| + |B_n| - |A_n \cap B_n|$$

к пределу, получаем соотношение (4) .▶

Из теоремы 4 вытекает

Следствие. *Если $E_1, \dots, E_n \in \sum(I)$ и $E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$, то*

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |E_j| -$$

конечная аддитивность меры.

2.1.4 Счётная аддитивность меры Лебега

Свойство счётной аддивности лебеговой меры формулируется следующим образом.

Теорема 5. *Пусть A_n – последовательность попарно непересекающихся измеримых подмножеств отрезка I $(A_n \in \sum(I), A_k \cap A_l = \varnothing$ при $k \neq l)$. Тогда объединение множеств $A_n (n = 1, 2, \dots)$ также измеримо и*

$$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|\,. \tag{5}$$

◀ Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \qquad B_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_n \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Тогда $B_m \in \sum(I)$ и

$$|B_m| = \sum_{n=1}^{m} |A_n| \leqslant 1\,.$$

Отсюда следует сходимость ряда в правой части (5). В частности , числовая последовательность

$$r_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} |A_n| \qquad (m = 1, 2, \dots)$$

сходится к нулю . Очевидно, что

$$A = B_m \bigcup \left(\bigcup_{n>m} A_n \right) ,$$

поэтому

$$d(B_m, A) = \left| \bigcup_{n>m} A_n \right|^* \leqslant \sum_{n>m} |A_n| = r_m \, .$$

Отсюда получаем последовательно $B_m \xrightarrow{d} A$, $A \in \sum(I)$,

$$|A| = \lim_{m\to\infty} |B_m| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \, . \blacktriangleright$$

Следствие 1. *Если E_n – возрастающая последовательность измеримых множеств ($E_n \subset E_{n+1}$ и $E_n \in \sum(I)$), то*

$$\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \lim_{n\to\infty} |E_n| \, . \tag{6}$$

◀ Положим $A_1 = E_1, A_n = E_n \backslash E_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$. Определённая таким образом последовательность множеств A_n удовлетворяет предположениям теоремы 5. Теперь (6) вытекает из цепочки соотношений

$$\left| \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| == \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |A_k| = \lim_{n\to\infty} |E_n| \, . \blacktriangleright$$

Следствие 2. *Если E_n – убывающая последовательность измеримых множеств ($E_{n+1} \subset E_n$ и $E_n \in \sum(I)$, то*

$$\left| \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right| = \lim_{n\to\infty} |E_n| \, . \tag{7}$$

◀ Следствие 2 вытекает из следствия 1, если воспользоваться законом Моргана

$$C \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C E_n$$

и равенством $|CE| = 1 - |E|$, справедливым для любого множества E класса $\sum(I)$. ▶

2.1.5 Счётная аддитивность класса измеримых множеств

Теорема 6. *Объединение и пересечение счётного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами.*

◀Пусть $A_n \in \sum(I)$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Введём в рассмотрение последовательность измеримых множеств A_n', полагая $A_1' = A_1$,

$$A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \quad (n = 2, 3, \dots)\,.$$

Ясно, что множества A_n' попарно не пересекаются и их объединение совпадает с множеством A. Теперь измеримость множества A вытекает из теоремы 5. Так как дополнение к измеримому множеству измеримо, то утверждение теоремы относительно пересечений вытекает из равенства

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = C\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} CA_n\right)\,. \blacktriangleright$$

Следствие. *Класс* $\sum(I)$ *измеримых подмножеств отрезка* $I = [0,1]$ *есть* σ *- алгебра , т.е. замкнут относительно операции дополнения и операций объединения и пересечения, выполняемых счётное число раз.*

В предшествующих построениях отрезок $I = [0,1]$ можно заменить любым конечным отрезком $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тем самым понятие измеримого множества и его меры можно распространить на случай произвольного ограниченного множества, поскольку такое множество составляет часть некоторого отрезка. От предположения ограниченности легко избавиться. Представим всю прямую как объединение полуоткрытых промежутков $[n, n+1) \quad (n \in \mathbb{Z})$. Множество $A \subset \mathbb{R}$ назовём измеримым, если его пересечение $A_n = A \cap [n, n+1)$ с каждым из промежутков $[n, n+1) \quad (n \in \mathbb{Z})$ измеримо. Меру $|A|$ измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$ определим равенством

$$|A| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |A_n|\,.$$

Ряд, находящийся в правой части, либо сходится, либо расходится. Поэтому мера $|A|$ может принимать любые значения из $[0, \infty]$.

Совокупность измеримых подмножеств действительной прямой обозначается символом $\sum(\mathbb{R})$. Как показывалось ранее (см. лемму 2. 6.2) , каждое открытое подмножество прямой есть объединение счётного числа отрезков, поэтому измеримо. Класс $\sum(\mathbb{R})$ образует σ - алгебру. Поэтому измеримы все открытые и замкнутые подмножества прямой, а также все множества , которые могут быть получены из открытых и замкнутых множеств с помощью конечного или счётного числа операций взятия счётных объединений и пересечений. Можно показать: 1) перечисленными множествами класс измеримых множеств не исчерпывается; 2) существуют неизмеримые множества (примеры неизмеримых множеств приведены в [3], [8]).

Сохраняется свойство счетной аддитивности меры (теорема 5 и равенства (5), (6)). Равенство (7) верно в предположении $|E_1| < \infty$. Без этого условия равенство (7) может быть неверным. Пусть, например. $E_n = [n, \infty), n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing, \quad \text{но} \lim_{n\to\infty} |A_n| = \infty\,.$$

Пример показывает, что в обращении с множествами бесконечной меры требуется определённая осторожность.Отметим *свойство полноты* лебеговой меры: любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

2.2 Измеримые функции

2.2.1 Определение и свойства измеримых функций

Ниже E – измеримое подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup (-\infty) \cup (\infty)$ – расширенная числовая прямая. Функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ можно сопоставить лебеговы множества четырёх видов

$$E[f > c] = \{x \in E, f(x) > c\}\,, \qquad E[f \geqslant c] = \{x \in E, f(x) \geqslant c\}\,,$$

$$E[f < c] = \{x \in E, f(x) < c\}\,, \qquad E[f \leqslant c] = \{x \in E, f(x) \leqslant c\}\,.$$

Множества одного вида выражаются через множества другого вида. Покажем, например, как все лебеговы множества выражаются через множества второго вида $E[f \geqslant c]$. Справедливы соотношения

$$E[f > c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geqslant c + \frac{1}{n}], \quad E[f < c] = E \setminus E[f \geqslant c]\,,$$

$$E[f \leqslant c] = E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geqslant c + \frac{1}{n}] \right)\,.$$

Функцию $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называют *измеримой*, если множества вида $E[f > c]$ измеримы при любом c.

Теорема 1. *Для измеримости функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ необходимо и достаточно, чтобы одно из трёх множеств $E[f \geqslant c], E[f > c], E[f \leqslant c]$ было измеримым при любом c.*

◀ Проверим утверждение применительно к множествам $E[f \geqslant c]$. Если функция f измерима, то при любом натуральном n множество $E\left[f > c - \dfrac{1}{n}\right]$ измеримо, поэтому и множество $E[f \geqslant c] = \bigcup\limits_n E\left[f > c - \dfrac{1}{n}\right]$ также измеримо при любом действительном c. Обратно, пусть множества $E[f \geqslant c]$ измеримы при любом c. Тогда и множество $E[f > c] = \bigcup\limits_n E\left[f \geqslant c + \dfrac{1}{n}\right]$ также измеримо. Остальные случаи рассматриваются аналогично. ►

Теорема 2. *Сумма (разность, поизведение) двух измеримых функций (со значениями в $\mathbb{R}$) измеримо; частное двух измеримых функций, при условии, что знаменатель не обращается в нуль, тоже измеримо.*

◄ Доказательство проводится в несколько шагов.

1) Если $f\colon E \to \mathbb{R}$ – измеримая функция, k, a – действительные числа, то $kf + a$ также измеримая функция. Действительно, пусть $k > 0$. Тогда множество $E[kf + a > c] = E\left[f > \dfrac{c-a}{k}\right]$ измеримо при любом c. Случаи $k = 0, k < 0$ рассматриваются аналогично.

2) Если f, g – измеримые функции, то множество $A = \{x \in E, f(x) > g(x)\}$ измеримо , так как $A = \bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} (E[f > r] \cup E[g < r])$, где $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел. Отсюда получаем, что множество $\{x \in E, f(x) > c - g(x)\}$ измеримо при любом c. Это равносильно измеримости суммы двух измеримых функций.

3) Из 1), 2) вытекает измеримость разности двух функций.

4) Из измеримости функции вытекает измеримость её квадрата: $E[f^2 > c] = E[f > \sqrt{c}] \cup E[f < -\sqrt{c}]$ при любом $c \geqslant 0$. Поскольку $fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$, то произведение измеримых функций f, g также измеримо. Для доказательства измеримости частного $\dfrac{f}{g}$ достаточно установить измеримость функции $\dfrac{1}{g}$ (доказать самостоятельно) и воспользоваться равенством $\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$. ►

Итак, арифметические операции над измеримыми функциями не выводят за пределы класса измеримых функций.

Упражнение 1.*Если E – замкнутое подмножество прямой, $f\colon E \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, то f – измеримая функция.*

Упражнение 2.*Функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ обладает C- свойством Лузина*[6] *, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое замкнутое множество $E_\varepsilon \subset E$, что сужение f на E_ε непрерывно и $|E \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$. Доказать, что если функцияf обладает C-свойством Лузина, то она измерима.* Существенно сложнее доказывается обратное утверждение - каждая измеримая функция обладает C- свойством Лузина. Таким образом, измеримые функции в определённом смысле близки к непрерывным.

Функции f, g, определённые на множестве E , называют эквивалентными на этом множестве, если множество $E[f \neq g] = \{x \in E, f(x) \neq g(x)\}$ имеет нулевую меру. Для обозначения эквивалентности функций f, g часто используют запись $f \approx g$. Если $f \approx g$ и f – измеримая функция , то и функция g также измерима.

[6]Лузин Н.Н. (1883 - 1950) – русский математик

2.2.2 Предел последовательности измеримых функций

Теорема 3. *Пусть* $f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}} \quad (n \in \mathbb{N})$ *– последовательность измеримых функций. Тогда функции*

$$\mathscr{F}_1(x) \stackrel{def}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad \mathscr{F}_2(x) \stackrel{def}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$

$$\mathscr{F}_3(x) \stackrel{def}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x), \qquad \mathscr{F}_4(x) \stackrel{def}{=} \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x)$$

также измеримы.

◀ Измеримость функции $\mathscr{F}_1$ вытекает из равенства $E[\mathscr{F}_1 > c] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E[f_n > c]$. Измеримость функции $\mathscr{F}_2$ устанавливается аналогично. Поскольку

$$\mathscr{F}_3(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} f_k(x), \qquad \mathscr{F}_4(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geqslant n} f_k(x)\,,$$

то функции $\mathscr{F}_3(x), \mathscr{F}_4(x)$ также измеримы.▶

Следствие. *Предел поточечно сходящейся последовательности измеримых функций есть измеримая функция.*

◀ Действительно, пусть $f_n(x) \to f(x)$ для любого x из E. Тогда $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n(x)$, поэтому f – измеримая функция. ▶

Введём некоторое обобщение поточечной сходимости функциональной последовательности. Последовательность $f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *сходящейся почти всюду* к функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, если найдётся такое множество $E_0 \subset E$ меры нуль, что $f_n(x) \to f(x)\, \forall x \in E \setminus E_0$; иначе говоря, f_n поточечно сходится к f на множестве $E \setminus E_0$.

Теорема 4. *Предел почти всюду сходящейся последовательности измеримых функций есть измеримая функция.*

◀ Пусть $f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций, поточечно сходящася к f на множестве $E \setminus E_0$, где $|E_0| = 0$. Тогда сужение функции f на $E \setminus E_0$ есть измеримая функция (теорема 3). Всякая функция на множестве E_0 нулевой меры измерима (свойство полноты лебеговой меры). Поэтому функция f измерима на объединении множеств $E \setminus E_0$ и E_0, т.е. на множестве E (аддитивность класса измеримых множеств).▶

2.2.3 Теорема Егорова

В этом пункте E – измеримое множество конечной положительной меры.

Теорема 5 (Теорема Егорова [7]). *Пусть последовательность измеримых функций* $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится к функции* f *в каждой точке множества* E*. Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое множество* $E_\varepsilon \subset E$*, что*

[7] Егоров Д.Н. (1869 - 1931) – русский математик

$|E \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ *и последовательность* f_n *сходится к функции* f *равномерно на множестве* $E\varepsilon$.

◀ 1-ый этап. Вначале предположим, что $f(x) \equiv 0$ и последовательность $f_n(x)$ монотонно убывает. Таким образом, $f_n(x) \to 0$ и $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \, \forall x \in E$. Фиксируем положительные числа ε и τ и положим $E_n(\tau) = \{x \in E, f_n(x) > \tau\}$. Так как последовательность $f_n \colon E \to \mathbb{R}$ с ростом n убывает, то $E_{n+1}(\tau) \subset E_n(\tau)$, т. е. $E_n(\tau)$ – убывающая последовательность измеримых множеств. При каждом x из E последовательность $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $f_n(x) < \tau$ при больших n, т.е. $x \notin E_n(\tau)$ при больших n. Следовательно, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n(\tau) = \varnothing$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} |E_n(\tau)| = 0$.

Положим $\tau = \dfrac{1}{k}$ (k – натуральное число). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \left|E_n\left(\dfrac{1}{k}\right)\right| = 0$, в частности, найдётся такое число n_k, что

$$\left|E_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots)\,. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение множества

$$A_\varepsilon \stackrel{def}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right), \qquad E_\varepsilon \stackrel{def}{=} E \setminus A_\varepsilon\,. \tag{2}$$

Оказывается, определяемое таким образом множество E_ε является искомым. В самом деле

$$|A_\varepsilon| < \sum_{k=1}^{\infty} \left|E_{n_k}\left(\frac{1}{k}\right)\right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\,,$$

так что A_ε – множество малой меры. Если $x \in E_\varepsilon$, то $x \notin E_{n_k}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ при любом k. Соотношение $x \notin E_{n_k}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ эквивалентно тому, что $f_{n_k}(x) \leqslant \dfrac{1}{k}$. Если $m \geqslant n_k, x \in E_\varepsilon$, то

$$0 \leqslant f_m(x) \leqslant f_{n_k}(x) \leqslant \frac{1}{k}\,.$$

Последнее неравенство влечёт за собой равномерную сходимость последовательности f_n на множестве E_ε.

2-ой этап. Общий случай легко сводится к рассмотренному. Действительно, пусть $f_n(x) \to f(x) \; \forall x \in E$. Введём в рассмотрение функциональную последовательность

$$\varphi_n(x) = \sup_{k \geqslant n} |f_k(x) - f(x)|\,.$$

Тогда функции $\varphi_n\colon E \to \mathbb{R}$ измеримы, $0 \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant \varphi_n(x)$ и $\varphi_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех x из множества E. Согласно уже доказанному для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, что $|E \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ и последовательность φ_n равномерно на множестве E_ε сходится к нулю. Отсюда вытекает равномерная сходимость $f_n \rightrightarrows f$ на множестве E_ε . ▶

Теорема Егорова может быть усилена за счёт замены поточечной сходимости $f_n \xrightarrow{E} f$ сходимостью почти всюду . Например, справедлива

Теорема 6. *Пусть функции* $f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}}\,(n \in \mathbb{N}), f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *измеримы на множестве* E *и принимают почти всюду конечные значения. Пусть* $f_n(x) \to f(x)$ *при* $n \to \infty$ *почти всюду на множестве* E*. Тогда справедливо заключение теоремы 5.*

◀ Введём в рассмотрение множества $A = \{x \in E, |f(x)| = \infty\}, A_n = \{x \in E, |f_n(x)| = \infty\}$, B – множество тех точек x из E, в которых последовательность $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$,

$$C = A \bigcup B \bigcup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) .$$

Тогда по условиям теоремы множество C имеет нулевую меру, функции f_n, f конечны на множестве $E_0 = E \setminus C$ и $f_n \xrightarrow{E_0} f$. Применим теорему 5 к сужениям функций f_n, f на множество E_0. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество $E_\varepsilon \subset E_0$, что $|E_0 \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ и последовательность f_n сходится равномерно на множестве E_ε. Множество E_ε является искомым.▶

2.2.4 Простые функции

Функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ называют *простой*, если она измерима и принимает конечное или счётное число значений.

Теорема 7. *Функция* $f\colon E \to \mathbb{R}$*, принимающая не более чем счётное число значений* $y_1, \dots, y_n, \dots$*, измерима в том и только в том случае, если все множества* $A_n = \{x \in E, f(x) = y_n\}$ *измеримы.*

◀ Необходимость. Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ измерима, то множества $E[f \geqslant y_n], E[f \leqslant y_n]$ измеримы, поэтому их пересечение A_n также измеримо.

Достаточность. При любом действительном числе c множество $E[f > c] = \bigcup\limits_{y_n > c} A_n$, поэтому лебеговы множества $E[f > c]$ измеримы. ▶

В условиях теоремы 7 функция f допускает представление

$$f(x) \ = \ \sum_n y_n 1_{A_n}(x) \,, \tag{3}$$

где $1_{A_n}\colon E \to \mathbb{R}$ – индикатор множества A_n. Измеримость индикатора $1_A\colon E \to \mathbb{R}$ множества $A \subset E$ равносильна измеримости множества A.

Теорема 8. *Для измеримости функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ необходимо и достаточно , чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся к ней последовательности простых функций.*

◀ Достаточность ясна из предшествующих результатов . Для доказательства необходимости положим

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}. \quad (x \in E)$$

Иначе говоря, $f_n(x) = \dfrac{m}{n}$, если $\dfrac{m}{n} \leqslant f(x) < \dfrac{m+1}{n}$ (здесь $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$). Определённые таким образом функции f_n являются простыми. Действительно, функция f_n принимает не более чем счётное число значений. Поскольку

$$E\left[f_n = \frac{m}{n}\right] = E\left[f \geqslant \frac{m}{n}\right] \bigcap E\left[f < \frac{m+1}{n}\right],$$

то измеримость функции f_n следует из измеримости функции f. Так как $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$, то последовательность f_n равномерно на множестве E сходится к функции f. ▶

Замечание . *Если функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ ограничена, то каждая из функций $f_n(x) = \dfrac{[nf(x)]}{n} (x \in E)$ конечнозначна.*

Теорема 2 может быть использована для исследования свойств измеримых функций; в частности, на её основе можно иначе доказывать замкнутость класса измеримых функций относительно арифметических операций.

Задача. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – измеримая функция, $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, то суперпозиция $\Phi \circ f\colon E \to \mathbb{R}$ – измеримая функция.*

2.3 Определение и свойства интеграла Лебега

2.3.1 Интеграл Лебега для простых функций

Всюду (в разделах п. 2.3) множество E измеримо и имеет конечную меру. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ – простая функция, $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ – конечная или счётная последовательность её значений, причём $y_k \neq y_l$ при $k \neq l, A_n = \{x \in E, f(x) = y_n\}$. В силу теоремы 2.2.7 множества A_n измеримы. Простая функция 2.2(3) называется *интегрируемой*, если сходится ряд $\sum\limits_n |y_n||A_n|$. Это требование автоматически выполнено , если функция f конечнозначна. В случае бесконечнозначности функции f данное требование означает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_n y_n|A_n|$. Положим по определению

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \sum_n y_n|A_n|\,. \tag{1}$$

Из определения вытекает, что вместе с функцией f является интегрируемой и функция $|f|$.

Лемма 1. *Пусть* $E = \bigcup\limits_k B_k$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *множества* B_i *измеримы и на каждом множестве* B_k *функция* f *принимает только одно значение* c_k. *Тогда*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;=\; \sum_k c_k|B_k|\,, \tag{2}$$

причём функция f *интегрируема на* E *в том и только в том случае, когда ряд (2) абсолютно сходится.*

◀ Поскольку $A_n = \bigcup\limits_{c_k=y_n} B_k$, то

$$\sum_n y_n|A_n| = \sum_n y_n \sum_{c_k=y_n} |B_k| = \sum_k c_k|B_k|\,.$$

Так как мера неотрицательна, то

$$\sum_n |y_n||A_n| = \sum_k |c_k||B_k|\,, \tag{3}$$

т.е. ряды , фигурирующие в левой и правой частях равенства (3), сходятся или расходятся одновременно.▶

Отметим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций.

$$\int\limits_E [f(x)+g(x)]\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx + \int\limits_E g(x)\,dx\,, \tag{1°}$$

$$\int\limits_E \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_E f(x)\,dx\,, \tag{2°}$$

$$\left|\int\limits_E h(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in E}|h(x)||E|\,; \tag{3°}$$

здесь $f(x), g(x)$ – простые интегрируемые функции, λ – произвольная действительная постоянная, $h(x)$ - простая ограниченная функция:

$$h(x) = \sum_i y_i 1_{A_i}(x)\,.$$

◀ Пусть , например,

$$f(x) = \sum_i u_i 1_{B_i}(x), \qquad g(x) = \sum_j v_j 1_{D_j}(x)\,;$$

измеримые множества B_i, D_j образуют разбиения множества E, т.е.

$$\bigcup_i B_i = \bigcup_j D_j = E, B_i \cap B_k = \varnothing \quad \text{для } i \neq k, \quad D_j \cap D_l = \varnothing \quad \text{для } j \neq l\,.$$

Тогда система измеримых множеств $B_i \cap D_j$ образует разбиение множества E и

$$\int\limits_E [f(x)+g(x)]\,dx = \sum_{i,j}(u_i+v_j)|B_i \cap D_j| = \sum_i \sum_j u_i|B_i \cap D_j| +$$

$$+\sum_j \sum_i v_j|B_i \cap D_j| = \sum_i u_i|B_i| + \sum_j v_j|D_j| = \int\limits_E f(x)\,dx + \int\limits_E g(x)\,dx -$$

фигурирующие здесь ряды сходятся абсолютно, что и обеспечивает законность манипуляций с рядами. Свойство (1°) доказано; свойство (2°) устанавливается проще.

Если $M = \sup\limits_E |h(x)| = \sup\limits_i |y_i|$, то ряд $\sum\limits_i y_i|A_i|$ абсолютно сходится, так как $|y_i| \leqslant M$ и $\sum\limits_i |A_i| = |E|$. Очевидно, что

$$\left|\int\limits_E h(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |h(x)|\,dx = \sum_i |y_i||A_i| \leqslant M|E|\,.$$

Свойство (3°) также доказано.►

2.3.2 Общее определение интеграла Лебега

Функцию $f\colon E \to \mathbb{R}$ назовём *суммируемой (интегрируемой по Лебегу)*, если существует последовательность простых интегрируемых на E функций f_n, равномерно сходящаяся к функции f. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)\,dx$ обозначим символом $\int\limits_E f(x)\,dx$ и назовём *интегралом Лебега* от функции f по множеству E.

Для обоснования корректности этого определения проверим следующее : I) указанный предел существует для любой равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых функций; II) этот предел не зависит от способа выбора последовательности $f_n \rightrightarrows f$; III) для простых функций определения интегрируемости и интеграла равносильны приведённым в п. 1.

Для доказательства I) достаточно заметить, что для любой последовательности простых функций f_n, равномерно сходящейся на множестве E, соответствующая последовательность интегралов $\int\limits_E f_n(x)\,dx$ фундаментальна :

$$\left|\int\limits_E f_{n+p}(x)\,dx - \int\limits_E f_n(x)\,dx\right| \leqslant \sup_{x\in E}|f_{n+p}(x) - f_n(x)|\;|E|\,.$$

Так как $f_n \rightrightarrows f$, то $\sup\limits_{x\in E}|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon_n$, где ε_n – бесконечно малая последовательность (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности). Это и влечёт за собой I).

Для доказательства II) рассмотрим две последовательности простых интегрируемых функций f_n и g_n, равномерно сходящиеся к функции f. Образуем третью последовательность $f_1, g_1, f_2, g_2, \ldots, f_n, g_n, \ldots$, также равномерно сходящуюся к f. Последовательность интегралов от функций, образующих данную последовательность, также сходится, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_E g_n(x)\,dx\,,$$

что и доказывает II).

Наконец, для доказательства III) достаточно рассмотреть стационарную последовательность $f_n = f$.

Любая ограниченная и измеримая на множестве E функция f суммируема. Последовательность f_n простых интегрируемых функций, равномерно сходящуюся к функции f, можно определить равенством $f_n(x) = \dfrac{[nf(x)]}{n}$.

2.3.3 Основные свойства интеграла Лебега

Вначале сформулируем свойства типа равенств.

1° Линейность интеграла

$$\int\limits_E [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda\int\limits_E f(x)\,dx + \mu\int\limits_E g(x)\,dx\,.$$

2° Аддитивность интеграла . Если $E = E_1 \cup E_2$ и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E_1} f(x)\,dx + \int\limits_{E_2} f(x)\,dx\,.$$

3° Если функция h п.в. (почти всюду) равна нулю, то и $\int\limits_E h(x)\,dx = 0$.

4° Свойство нормировки : $\int\limits_E 1\,dx = |E|$. Далее отметим свойства интеграла, связанные с неравенствами.

5° Монотонность интеграла. Если $f(x) \geqslant g(x)$ п.в., то $\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \int\limits_E g(x)\,dx$.

6° Мажорантный признак суммируемости: если h – измеримая функция, g – суммируемая функция и $|h(x)| \leqslant g(x)$ п.в., то h также суммируемая функция и $\left|\int\limits_E h(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E g(x)\,dx\,.$

7° Абсолютный характер суммируемости : функции g и $|g|$ суммируемы или несуммируемы одновременно.

Комментарий к свойствам $1^\circ - 7^\circ$. Вначале свойства проверяются для простых функций, а затем с помощью подходящего предельного процесса переносятся на случай произвольных (измеримых) функций. Остановимся, например, на доказательстве свойства 6°. Пусть вначале h и g – простые функции и $|h(x)| \leqslant g(x)$ всюду за исключением множества E_0 нулевой меры. Положим $E_1 = E \setminus E_0$. Множество E_1 можно представить как объединение конечного или счётного числа множеств A_n, на каждом из которых функции g и h постоянны: $h(x) = y_n, g(x) = z_n$, причём $|y_n| \leqslant |z_n|$. Из интегрируемости функции g вытекает, что

$$\sum_n |y_n|\ |A_n| \leqslant \sum_n z_n|A_n| = \int\limits_{E_1} g(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx\,.$$

Поэтому функция h также суммируема и

$$\left|\int\limits_E h(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{E_1} h(x)\,dx\right| = \left|\sum_n y_n|A_n|\right| \leqslant \sum_n |y_n||A_n| \leqslant \int\limits_E g(x)\,dx\,.$$

В общем случае введём функции $h_n(x) = \dfrac{[nh(x)]}{n}, g_n(x) = \dfrac{[ng(x)]}{n}$. В силу уже доказанного

$$\left|\int\limits_E h_n(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E g_n(x)\,dx\,.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем свойство 6°. Отметим вытекающее из этого свойства

Следствие (Критерий суммируемости измеримой функции). *Пусть* $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ *– измеримая функция ,* $A_n = \{x \in E, n-1 \leqslant |\varphi(x)| < n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. *Тогда суммируемость функции* φ *эквивалентна сходимости числового ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|\,. \tag{4}$$

◀ Введём в рассмотрение функцию $h(x) = [|\varphi(x)|\,]$. Тогда $h\colon E \to \mathbb{R}$ – простая функция и $h(x) \leqslant |\varphi(x)| < h(x) + 1$. В силу мажорантного признака суммируемости функции $h(x), |\varphi(x)|$ суммируемы (или несуммируемы) одновременно. Очевидно, что

$$\int\limits_E h(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)|A_n|\,.$$

Отсюда вытекает, что суммируемость функции h эквивалентна сходимости ряда (4).▶

Следствием проведённых рассуждений является полезная оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n| \ - |E| \leqslant \int\limits_E |\varphi(x)|\, dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|A_n|\,. \tag{5}$$

Если функция f суммируема на множестве E и $f \approx g$, то функция g также суммируема на этом множестве и

$$\int\limits_E f(x)\, dx = \int\limits_E g(x)\, dx\,. \tag{6}$$

Это позволяет ввести понятие суммируемости для функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, конечной почти всюду на множестве E. Назовём конечную почти всюду на множестве E функцию $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ суммируемой на множестве E, если существует эквивалентная ей и суммируемая на множестве E функция $g\colon E \to \mathbb{R}$. Равенство (6) примем в качестве определения интеграла от функции f по множеству E. Правая часть (6) не зависит от выбора эквивалентной f функции g, поэтому приведённое определение интеграла корректно. Совокупность почти всюду конечных функций $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$, суммируемых по множеству E, обозначим символом $\mathscr{L}(E)$.

Из свойств монотонности и нормировки интеграла следует *неравенство Чебышёва* : если $\varphi \in \mathscr{L}(E), c > 0$, то

$$|\{x \in E, |\varphi(x)| \geqslant c\}| \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_E |\varphi(x)|\, dx\,. \tag{7}$$

◀ Действительно, пусть $A = \{x \in E, |\varphi(x)| \geqslant c\}$. Тогда

$$\int\limits_E |\varphi(x)|\, dx \geqslant \int\limits_A |\varphi(x)|\, dx \geqslant c \int\limits_A 1\, dx = c|A|\,. \ ▶$$

В свою очередь из неравенства Чебышёва вытекает полезное следствие: если $f \in \mathscr{L}(E)$ и $\int\limits_E |f(x)|\, dx = 0$, то $f(x) \approx 0$. Достаточно заметить, что при любом $c > 0$ множество $E[|f| \geqslant c]$ имеет нулевую меру.

2.3.4 Счётная аддитивность интеграла

Установим более сильное, чем 2°, свойство счётной аддитивности интеграла Лебега.

Теорема 1.*Пусть* $f \in \mathscr{L}(E),\ E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n, E_i \cap E_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$ *и* E_i $(i \in \mathbb{N})$ *– измеримые множества. Тогда*

$$\int\limits_E f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\, dx\,. \tag{8}$$

◀ Пусть f – простая функция, принимающая значения $y_1, \ldots, y_k, \ldots, A_k = f^{-1}(y_k), B_{nk} = E_n \cap B_k$ и $f \in \mathscr{L}(E)$. Справедливы соотношения

$$\int\limits_E f(x)\,dx \;=\; \sum_k y_k|A_k| \;=\; \sum_k y_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}|B_{nk}|\right) \;=$$

$$=\sum_k\sum_{n=1}^{\infty} y_k|B_{nk}| \;=\sum_{n=1}^{\infty}\;\sum_k y_k|B_{nk}| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{E_n} f(x)\,dx\,.$$

Поскольку $f \in \mathscr{L}(E)$, то ряды, фигуририрующие в приведённой выше цепочке равенств, абсолютно схоятся. Это и гарантирует законность проведённых манипуляций с рядами.

В случае произвольной суммируемой функции f фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём простую интегрируемую функцию g, удовлетворяющую неравенству $|f(x) - g(x)| < \varepsilon\ \forall x \in E$. Согласно уже доказанному

$$\int\limits_E g(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{E_n} g(x)\,dx\,. \tag{9}$$

Затем используем оценки

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx - \int\limits_E g(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon|E|,\ \left|\int\limits_{E_n} f(x)\,dx - \int\limits_{E_n} g(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon|E_n|\,, \tag{10}$$

вытекающие из неравенства $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ и монотонности интеграла. Из (9), (10) следует, что

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx - \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{E_n} f(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon|E| + \varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}|E_n| = 2\varepsilon|E|\,.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к требуемому результату.▶

Теорема 2. *Пусть* $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\,, E_n$ *– измеримые попарно непересекающиеся множества, функция* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ *неотрицательна и её сужение на каждое из множеств* E_n $(n \in \mathbb{N})$ *есть суммируемая функкция . Пусть ряд в правой части (8) сходится. Тогда функция* f *суммируема по множеству* E *и выполнено равенство (8).*

◀ Ограничимся указанием схемы доказательства. Вначале теорема 2 устанавливается для простой неотрицательной функции. Переход к произвольной функции стандартен.▶

Следствие. *Пусть* $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ – *измеримая на множестве* E *функция, её сужение на каждое множеств* E_n *суммируемо и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} |f(x)|\, dx \tag{11}$$

сходится. Тогда $f \in \mathscr{L}(E)$.

Пример. Пусть $E = (0,1]$, $E_n = \left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} 1_{E_n}(x)\,.$$

В этом случае

$$\int\limits_{E_n} f(x)\, dx = \frac{(-1)^n}{n}, \quad \text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{сходится,}$$

но функция f несуммируема по множеству E ! Требование неотрицательности функции f в теореме 2 существенно. В рассматриваемом примере ряд (11) расходится; он совпадает с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2.3.5 Абсолютная непрерывность интеграла

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathscr{L}(E)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что из соотношений* $A \subset E, |A| < \delta$ *вытекает неравенство*

$$\int\limits_{A} |f(x)|\, dx < \varepsilon\,.$$

◀. Пусть вначале $f(x)$ – простая интегрируемая функция :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 1_{E_n}(x), \quad \text{причём} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n||E_n| < \infty\,.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, а затем натуральное число N таким образом, что

$$\sum_{n>N} |c_n||A_n| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Положим $B = \bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n$, $M = \max\{|c_1|, \ldots, |c_N|\}$. Если $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$, A – измеримое подмножество E и $|A| < \delta$, то справедливы соотношения

$$\int\limits_A |f(x)|\,dx = \int\limits_{A\cap B} |f(x)|\,dx + \int\limits_{A\setminus B} |f(x)|\,dx \leqslant M|A| + \sum_{n>N} |c_n||E_n| <$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

что и приводит к требуемому результату в случае простой интегрируемой функции f.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. Действительно , пусть f – произвольная суммируемая функция, $\varepsilon > 0$. Подберём такую простую интегрируемую функцию $h(x)$, что $\int\limits_E |f(x) - h(x)|\,dx < \dfrac{\varepsilon}{2}$. (В качестве $h(x)$ можно взять , например, функцию $\dfrac{[nf(x)]}{n}$ при достаточно большом n). В силу уже доказанного существует такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_A |h(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

для каждого измеримого множества $A \subset E$, мера которого меньше δ. Указанное δ является искомым. Действительно,

$$\int\limits_A |f(x)|\,dx \leqslant \int\limits_A |f(x) - h(x)|\,dx + \int\limits_A |h(x)|\,dx \leqslant \int\limits_E |f(x) - g(x)|\,dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \blacktriangleright$$

Сформулированное в теореме 3 свойство называют свойством абсолютной непрерывности интеграла. Оно означает малость интеграла от суммируемой функции по множествам малой меры.

2.4 Сходимость в среднем

2.4.1 Теоремы Лебега

Пусть E – измеримое подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$ конечной и положительной меры: $0 < |E| < \infty$. Для каждой функции f из $\mathscr{L}(E)$ имеет смысл и конечна величина

$$\|f\|_{\mathscr{L}} = \int\limits_E |f(t)|\,dt\,,$$

определяющая на $\mathscr{L}(E)$ некоторую полунорму. Последовательность функций f_n из $\mathscr{L}(E)$ назовём *сходящейся в среднем* к суммируемой функции f, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathscr{L}} = 0\,. \tag{1}$$

Сходимость в среднем влечёт за собой равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(x)\,dx = \int\limits_A f(x)\,dx \tag{2}$$

для каждого измеримого множества $A \subset E$: (1) $\to$ (2).

Теорема 1. *Пусть последовательность измеримых функций $f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ п.в. (почти всюду) в E сходится к функции f. Пусть существует такая суммируемая функция g, что*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad \textit{п.в.}. \tag{3}$$

Тогда функция f суммируема ($f \in \mathscr{L}(E)$) и последовательность f_n сходится в среднем к функции f.

◀ Из условий теоремы вытекает оценка $|f(x)| \leqslant g(x)$ п.в. Поэтому функции $f_n, f \in \mathscr{L}(E)$ и $|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2g(x)$ п.в. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдётся такое $\delta > 0$, что

$$\int\limits_A 2g(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всякого измеримого множества $A \subset E$, мера которого меньше δ. В силу теоремы Егорова можно подобрать такое множество E_δ, что $|E \setminus E_\delta| < \delta$ и последовательность f_n на множестве E_δ сходится равномерно, т.е. $|f_n(x) - f(x)| < \lambda_n \ \forall x \in E_\delta$, где λ_n – бесконечно малая числовая последовательность. Следовательно,

$$\|f_n - f\|_{\mathscr{L}} = \int\limits_{E_\delta} |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int\limits_{E\setminus E_\delta} |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_n|E_\delta| + \int\limits_{E\setminus E_\delta} 2g(x)\,dx \leqslant \lambda_n|E| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Так как λ_n – бесконечно малая последовательность, то $\lambda_n|E| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant n_0$. Следовательно,

$$\|f_n - f\|_{\mathscr{L}} = \int\limits_E |f_n(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon \quad \text{при} \ \ n \geqslant n_0\,.$$

Это влечёт за собой сходимость в среднем последовательности f_n к функции f. ▶

Обозначим через $S(E)$ совокупность измеримых и почти всюду конечных функций $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Для каждой функции f класса $S(E)$ функция $v(x) =$

$\dfrac{|f(x)|}{1+|f(x)|}$ измерима , неотрицательна и не превосходит 1, поэтому имеет смысл величина

$$[f]_S = \int\limits_E v(x)\,dx = \int\limits_E \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,dx\,.$$

Скажем, что последовательность функций $f_n \in S(E)$ сходится к функции f того же класса по мере, если

$$\lim_{n\to\infty}[f_n - f]_S = 0\,.$$

Справедлива

Теорема 2. *Если последовательность функций класса $S(E)$ сходится почти всюду к функции f, то она сходится к той же самой функции f по мере.*

◀ Последовательность функций $w_n(x) = \dfrac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}$ почти всюду сходится к нулевой функции. Очевидно, что $0 \leqslant w_n(x) < 1$. В силу теоремы 1 последовательность w_n сходится к нулевой функции в среднем. Поэтому $[f_n-f]_S \to 0$ при $n\to\infty$.▶

Упражнение 1. *Определим для каждого натурального числа k на полуинтервале $E=(0,1]$ функции $f_i^{(k)}(x) = 1_{(\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}]}(x)\,(i=1,\ldots,k)$. Занумеровав эти функции подряд, получим последовательность, сходящуюся по мере к нулю, но расходящуюся в каждой точке (доказать самостоятельно).*

Упражнение 2. *Сходимость по мере $f_n \to f$ эквивалентна тому, что для любого $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}|\{x\in E, |f_n(x)-f(x)| \geqslant \sigma\}| = 0\,.$$

Известны прямые доказательства теоремы 2 (не опирающиеся на первую теорему Лебега).

2.4.2 Теорема Б. Леви

Последовательность f_n из $\mathscr{L}(E)$ называется *ограниченной в среднем*, если $\|f_n\|_{\mathscr{L}} \leqslant M$, где постоянная M не зависит от n. Как нетрудно видеть, всякая сходящаяся в среднем последовательность ограничена в среднем. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако для монотонных (возрастающих или убывающих) последовательностей суммируемых функций сходимость в среднем эквивалентна ограниченности. (Последовательность $f_n\colon E\to\overline{\mathbb{R}}$ называют *возрастающей (убывающей)*, если $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ (соответственно, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$) почти всюду на множестве E и для любого натурального числа n.)

Теорема 3 (Теорема Б.Леви [8]). *Если последовательность суммируемых функций $f_n\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ монотонна и ограничена в среднем, то она почти всюду сходится к суммируемой функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ и $f_n \to f$ в среднем.*

◀ Будем считать, что последовательность f_n возрастает и неотрицательна на множестве E : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ $\forall x \in E$ и любом натуральном числе n (общий случай легко сводится к этому). Неотрицательность и ограниченность последовательности f_n в среднем влекут за собой оценки

$$0 \ \leqslant \ \int\limits_E f_n(x)\,dx \leqslant M < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Положим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (у монотонной последовательности $f_n(x)$ конечный или бесконечный предел всегда существует). Пусть $\Omega = \{x \in E, f(x) = \infty\}$. Если $x \in \Omega$, то для любого натурального числа r и достаточно большого натурального числа n выполняется неравенство $f_n(x) > r$. Положим $\Omega_n^r = \{x \in E, f_n(x) \geqslant r\}$. В силу неравенства Чебышёва $|\Omega_n^r| \leqslant \dfrac{M}{r}$. Множество $E[f \geqslant r] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n^r$. С ростом n множества Ω_n^r расширяются, поэтому справедливы соотношения $|E[f \geqslant r]| = \lim\limits_{n\to\infty} |\Omega_n^r| \leqslant \dfrac{K}{r}$. Так как $\Omega \subset \Omega_n^r$ $\forall r$, то $|\Omega| \leqslant \dfrac{K}{r}$ $\forall r$. Ввиду произвольности натурального числа r отсюда следует, что $|\Omega| = 0$. Тем самым доказано, что последовательность f_n почти всюду на множестве E имеет конечный предел $f(x)$.

Функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима как поточечный предел последовательности измеримых функций f_n. Следовательно, измеримы множества

$$A_n = \{x \in E, n-1 \leqslant f(x) < n\} \ (n \in \mathbb{N}), \quad B_m = \bigcup_{n=1}^{m} A_n, \qquad (m \in \mathbb{N})\,.$$

При $x \in A_m$ справедлива оценка $0 \leqslant f(x) \leqslant m$. Функция $f(x)$ ограничена на множестве B_m и $f_n(x) \to f(x)$ для всех x из B_m. В силу теоремы Лебега

$$\int\limits_{B_m} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{B_m} f_n(x)\,dx \leqslant M\,.$$

Но

$$\int\limits_{B_m} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{m} (n-1)|A_n|\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{m} n|A_n| \leqslant \int\limits_{B_m} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{m} |A_n| \leqslant M + |E|\,.$$

[8]Леви Б. (1875 - 1961) – итальянский математик

Правая часть последнего неравенства не зависит от m. Это означает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|A_n|$, а, следовательно, суммируемость функции f.

Поскольку $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$ почти всюду, а $f \in \mathscr{L}(E)$, то сходимость в среднем $f_n \to f$ вытекает из теоремы Лебега.▶

Следствие. *Если ψ_n – последовательность неотрицательных суммируемых на множестве E функций и числовой ряд $\sum\limits_n \int\limits_E \psi_n(x)\,dx$ сходится, то почти всюду на множестве E функциональный ряд*

$$\sum_n \psi_n(x) \tag{4}$$

сходится к суммируемой на множестве E функции и ряд (4) можно почленно интегрировать :

$$\int\limits_E \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E \psi_n(x)\,dx\,.$$

◀ Достаточно положить $f_n = \psi_1 + \cdots + \psi_n$ и сослаться на теорему Б. Леви.▶

Теорема 4 (Теорема Ф. Рисса [9]). *Пусть функции $f_n (n \in \mathbb{N}), f$ принадлежат классу $S(E)$ и последовательность f_n сходится по мере к функции f. Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду.*

◀ По условию числовая последовательность $[f_n - f]_S$ бесконечно мала. Поэтому для любого натурального числа n найдется такое натуральное число $k_n > n$, что

$$[f_{k_n} - f]_S < \frac{1}{2^n}\,.$$

Последовательность функций $\psi_n(x) = \dfrac{|f_{k_n}(x) - f(x)|}{1 + |f_{k_n}(x) - f(x)|}$ удовлетворяет предположениям только что установленного следствия теоремы Б.Леви, поэтому соответствующий этой последовательности ряд (3) почти всюду сходится. В частности , $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = 0$ для почти всех x из E. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x)$ для почти всех x из E . ▶

Теорема 5 (Теорема Фату [10]). *Пусть последовательность функций f_n класса $\mathscr{L}(E)$ почти всюду сходится к функции f и*

$$\int\limits_E |f_n(x)|\,dx \ \leqslant R\,.$$

Тогда $f \in \mathscr{L}(E)$ и

$$\int\limits_E |f(x)|\,dx \leqslant R\,.$$

[9] Рисс Ф. (1880 - 1956) – венгерский математик
[10] Фату П. (1878 - 1929) – французский математик

◀ Очевидно, что $|f_n(x)| \to |f(x)|$ почти всюду, поэтому функция $|f(x)|$ измерима. Положим $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} |f_k(x)|$. Каждая из функций $\varphi_n(x)$ неотрицательна и измерима,

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \leqslant |f_{n+1}(x)| \quad \text{п. в. и} \qquad \int\limits_E \varphi_n(x)\,dx \leqslant \int\limits_E |f_n(x)|\,dx \leqslant R\,.$$

Последовательность $\varphi_n(x)$ почти всюду сходится к $|f(x)|$. В силу теоремы Б. Леви

$$\int\limits_E |f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E \varphi_n(x)\,dx \leqslant R\,. \blacktriangleright$$

2.4.3 Критерий Коши сходимости в среднем

Лемма 1. *Пусть* $v_n \in \mathscr{L}(E)$, $(n \in \mathbb{N})$ *и числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E |v_n(x)|\,dx$$

сходится. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ *сходится почти всюду и в среднем.*

◀ В силу результатов предшествующего пункта функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$$

сходится почти всюду и в среднем к суммируемой функции $g(x)$. Тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ сходится почти всюду. Если $f_n(x) = v_1(x) + \cdots + v_n(x)$ – последовательность его частичных сумм, то $f_n(x) \to f(x)$ п.в. и $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. По теореме Лебега $f_n \to f$ в среднем.▶

Последовательность f_n из $\mathscr{L}(E)$ $(n \in \mathbb{N})$ называют *фундаментальной в среднем*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что $\|f_n - f_{n+p}\| < \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ и произвольном натуральном числе p.

Лемма 2. *Сходящаяся в среднем последовательность фундаментальна в среднем.*

◀ Пусть $f_n \to f$ в среднем. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n_0, что $\|f_n - f\|_{\mathscr{L}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant n_0$. Если p – натуральное число, то $n + p > n$, поэтому и $\|f_{n+p} - f\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда $\|f_{n+p} - f_n\|_{\mathscr{L}} \leqslant$

$\|f_{n+p} - f\|_{\mathscr{L}} + \|f - f_n\|_{\mathscr{L}} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$ и произвольном p. Поэтому последовательность f_n фундаментальна.▶

Лемма 3. *Если последовательность f_n $(n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в среднем, то некоторая её подпоследовательность сходится почти всюду и в среднем.*

◀ Поскольку f_n – фундаментальная в среднем последовательность, то найдётся такое натуральное число n_1, что $\|f_n - f_{n+p}\|_{\mathscr{L}} < \dfrac{1}{2}$, если $n \geqslant n_1, p \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом, существует такое натуральное число $n_2 > n_1$, что $\|f_n - f_{n+p}\|_{\mathscr{L}} < \dfrac{1}{4}$, если $n \geqslant n_2, p \in \mathbb{N}$. Процесс можно продолжить далее. В итоге возникает строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что

$$\|f_n - f_{n+p}\|_{\mathscr{L}} < \frac{1}{2^k},$$

если $n \geqslant n_k, p \in \mathbb{N}$. Положим $v_1(x) = f_{n_1}(x), v_2(x) = f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x), \dots, v_m(x) = f_{n_m}(x) - f_{n_{m-1}}(x)$. В силу выбора чисел n_k справедливо неравенство $\|v_i\|_{\mathscr{L}} < \dfrac{1}{2^{i-1}}$ $(i = 2, 3, \dots)$, поэтому числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|v_i\|_{\mathscr{L}}$ сходится. Согласно лемме 1 функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i(x)$ сходится почти всюду и в среднем к некоторой суммируемой функции $f(x)$. Но частичные суммы этого ряда равны $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots$, что и приводит к требуемому результату.▶

Теорема 6. (Критерий Коши сходимости в среднем) *Для того чтобы последовательность суммируемых функций сходилась в среднем необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной в среднем.*

◀ В части необходимости теорема вытекает из лемммы 2. Пусть f_n – фундаментальная последовательность. Согласно лемме 3 некоторая её подпоследовательность $f_{n_i}(x)$ сходится в среднем к функции f. Покажем, что и вся последовательность f_n сходится к функции f. Действительно, фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберём натуральное число n_0 так, что $\|f_n - f_m\|_{\mathscr{L}} < \varepsilon$, если $n \geqslant n_0, m \geqslant n_0$. Так как $n_i \to \infty$, то $n_i \geqslant n_0$ при $i \geqslant i_0$. Следовательно,

$$\|f_n - f\| \leqslant \|f - f_{n_i}\|_{\mathscr{L}} + \|f_{n_i} - f_n\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|f - f_{n_i}\|_{\mathscr{L}} + \varepsilon,$$

если $i \geqslant i_0$. Устремив i к ∞, приходим к неравенству $\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_0$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство влечёт за собой сходимость в среднем $f_n \to f$. Теорема доказана и в части достаточности.▶

2.4.4 Сравнение интегралов Римана и Лебега

В этом пункте выясняется связь между интегралами Лебега и Римана. Рассматривается случай $E = [a, b]$.

Теорема 7. *Если функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрруема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и интегралы от функции f по Риману и Лебегу совпадают.*

◀ Интегрируемая по Риману функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ограничена. Поэтому имеют смысл суммы Дарбу функции f, совпадают между собой верхний и нижний интегралы $I^*(f), I_*(f)$, при этом

$$I^*(f) = I_*(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Введём специальные разбиения T_n отрезка $[a,b]$. Положим

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b-a), \qquad ,k = 0,1,\ldots,2^n\,.$$

Точки x_k разбивают отрезок $[a,b]$ на 2^n равных частей. Если $T_n = \{x_0,\ldots,x_{2^n}\}$ – соответствующее разбиение, то $T_n \prec T_{n+1}$. Следующее разбиение получается из предшествующего путём дробления каждого отрезка $[x_{k-1},x_k]$ на две равные части. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

$$M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f, \quad m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f, \quad (k = 1,2,\ldots,2^n)\,,$$

$$\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{2^n} M_k \Delta x_k, \qquad \underline{S}_n = \sum_{k=1}^{2^n} m_k \Delta x_k$$

– верхняя и нижняя суммы Дарбу функции f , соответствующие разбиению T_n. Как известно,

$$\underline{S}_n \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \overline{S}_n \quad \text{для всех натуральных } n \quad \text{и}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Введём в рассмотрение две последовательности простых функций

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} m_k 1_{(x_{k-1},x_k]}(x), \quad h_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} M_k 1_{(x_{k-1},x_k]}(x) \quad (x \in E = [a,b])\,.$$

Последовательность $g_n(x)$ возрастает, а последовательность $h_n(x)$ убывает, при этом $g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant h_n(x)$ и

$$\int\limits_E g_n(x)\,dx = \underline{S}_n, \quad \int\limits_E h_n(x)\,dx = \overline{S}_n\,.$$

Последовательности $g_n(x), h_n(x)$ монотонны и ограничены, поэтому поточечно сходятся к некоторым функциям $g(x), h(x)$ $(x \in E)$. Справедливы оценки $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$. Согласно теореме Б. Леви

$$\int\limits_E g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,,$$

$$\int\limits_E h(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E h_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Следовательно, $\int\limits_E [h(x) - g(x)]\,dx = 0$, поэтому $g(x) \approx f(x) \approx h(x)$. Значит,

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Функция $f(x) = 1_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$ $(x \in [0,1])$ интегрируема по Лебегу ($\int\limits_{[0,1]} f(x)\,dx = 0$), но не интегрируема по Риману. В этом смысле интеграл Лебега шире интеграла Римана.

Ранее вводился несобственный интеграл от функции $f\colon (\alpha, \omega) \to \mathbb{R}$, определяемый как предел

$$\lim_{a\to\alpha,\, b\to\omega} \int\limits_a^b f(t)\,dt\,.$$

Если функция f абсолютно интегрируема (хотя бы в несобственном смысле по промежутку (α, ω)), то она интегрируема и в смысле Лебега по множеству $E = (\alpha, \omega)$ и соответствующие интегралы равны. Для условно сходящихся интегралов это не так, поскольку интегрирование по Лебегу носит абсолютный характер. Например, несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\,dx$$

существует, а функция $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ $\quad (x \in (0,1))$ несуммируема.

2.4.5 Класс функций, суммируемых в квадрате

Измеримую функцию $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ назовём *суммируемой в квадрате* (или *квадратично суммируемой*), если $f^2 \in \mathscr{L}(E)$. Совокупность квадратично суммируемых функций обозначим символом $\mathscr{L}^2(E)$. Отметим , что если $f, g \in$

$\mathscr{L}^2(E)$, то
$$f+g \in \mathscr{L}^2(E), \qquad fg \in \mathscr{L}(E)\,. \tag{5}$$
Действительно, $(f+g)^2 \leqslant 2(f^2+g^2), 2|f(x)g(x)| \leqslant f^2+g^2$, поэтому включения (5) вытекают из мажорантного признака суммируемости. Очевидно, что вместе с f класс $\mathscr{L}^2(E)$ содержит произведение λf при любом действительном λ.

Определим на $\mathscr{L}^2(E)\times\mathscr{L}^2(E)$ симметричную билинейную неотрицательную форму $(\cdot,\cdot)$, полагая
$$(u,v) = \int\limits_E u(x)v(x)\,dx\,, \qquad (u\in\mathscr{L}^2(E), v\in\mathscr{L}^2(E))\,. \tag{6}$$
Форма (6) обладает свойствами полускалярного произведения. Это позволяет ввести в линейном пространстве $\mathscr{L}^2(E)$ полунорму
$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int\limits_E f^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}};$$
установить неравенство Коши-Буняковского $|(u,v)| \leqslant \|u\|\,\|v\|$ – его развёрнутая форма выглядит следующим образом
$$\left|\int\limits_E u(x)v(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int\limits_E u^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}} \left(\int\limits_E v^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}}.$$
Соотношение $\|f\|=0$ равносильно тому, что $f\approx 0$. Справедливо строгое вложение $\mathscr{L}^2(E) \subseteq \mathscr{L}(E)$; доказательство этого факта предлагается в качестве самостоятельного упражнения.

Наличие полунормы в пространстве $\mathscr{L}^2(E)$ позволяет стандартным образом определить сходящиеся и фундаментальные последовательности в этом пространстве. Последовательность f_n называют *сходящейся к f (в среднем квадратичном)*, если $\|f_n - f\| \to 0$ при $n\to\infty$. Последовательность f_n именуют *фундаментальной* (в среднем квадратичном), если для каждого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер n_0, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ при $n,m \geqslant n_0$.

Теорема 8. (Критерий Коши). *Сходимость и фундаментальность последовательности в пространстве $\mathscr{L}^2(E)$ эквивалентны.*

◀ Пусть последовательность f_n фундаментальна в пространстве $\mathscr{L}^2(E)$. Из неравенства
$$\int\limits_E |g(x)|\,dx \leqslant \left(\int\limits_E g^2(x)\,dx\right)^{\dfrac{1}{2}} \sqrt{|E|}$$

вытекает, что последовательность f_n фундаментальна и в пространстве $\mathscr{L}(E)$.

Согласно лемме 3 некоторая её подпоследовательность f_{k_n} почти всюду сходится к суммируемой функции f. Поскольку последовательность f_n фундаментальна в среднем квадратичном, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $n_0(\varepsilon)$, что если $n, m \geqslant n_0(\varepsilon)$, то

$$\int\limits_E (f_n(x) - f_m(x))^2\, dx < \varepsilon^2 .$$

В частности , при достаточно больших индексов i верны неравенства

$$k_i \geqslant n_0(\varepsilon), \quad \int\limits_E (f_{k_i}(x) - f_n(x))^2\, dx < \varepsilon^2 .$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$, получаем (согласно теореме Фату) неравенство

$$\int\limits_E (f(x) - f_n(x))^2\, dx \leqslant \varepsilon^2 , \quad \text{если} \ \ n \geqslant n_0(\varepsilon) .$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это означает , что последовательность f_n сходится в среднем квадратичном к функции f.

Доказательство обратной импликации (сходимость влечёт за собой фундаментальность) значительно проще. Оно предлагается читателю в качестве самостоятельного упражнения.▶

Остановимся на приложениях интеграла Лебега к тригонометрическим рядам Фурье. Функции f класса $\mathscr{L}[-\pi, \pi]$ можно сопоставить две числовые последовательности

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x) \cos nx\, dx\, (n = 0, 1, \dots),\; b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f(x) \sin nx\, dx\, (n = 1, 2, \dots)$$

и тригонометрический ряд Фурье

$$\mathbf{S}(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

Существуют суммируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, ряды Фурье которых расходятся в каждой точке из $[-\pi, \pi]$. Первый пример подобной функции был построен в 1923 году студентом Московского университета А.Н. Колмогоровым[11].

Ситуация значительно лучше, если $f \in \mathscr{L}^2[-\pi, \pi]$. В этом случае можно гарантировать следующее.

[11] Колмогоров А.Н. (1903 - 1987) – русский математик

1° Ряд Фурье $\mathbf{S}(f)$ сходится к функции f в среднем квадратичном (теорема Ф. Рисса).

2° Справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \;=\; \frac{1}{\pi} \int\limits_{[-\pi,\pi]} f^2(x)\,dx\,.$$

3° Ряд $\mathbf{S}(f)$ сходится к функции f почти всюду (теорема Л. Карлесона[12]).

2.4.6 Обобщения интеграла Лебега

Остановимся на некоторых обобщениях интеграла Лебега.

а) Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.

Пусть $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ – функция, определённая на измеримом множестве E бесконечной меры. Положим $E_n = E \cap [n-1, n]$ $(n \in \mathbb{Z})$. Функцию f назовём интегрируемой по множеству E, если сходится ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_n} |f(x)|\,dx\,;$$

в этом случае полагаем по определению

$$\int\limits_{E} f(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_n} f(x)\,dx\,.$$

Сохраняются основные свойства интеграла : линейность, счётная аддитивность и монотонность. Теоремы Лебега, Б. Леви, и Фату остаются справедливыми и для интегралов по множествам бесконечной меры. Например, если $f_n \to f$ п.в., $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ п.в. и $\int\limits_E g(x)\,dx < \infty$, то последовательность f_n сходится к f в среднем, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E} |f_n(x) - f(x)|\,dx = 0-$$

вариант первой теоремы Лебега.

В случае $|E| = \infty$ несколько иначе определяется сходимость по мере. Обозначим через $S(E)$ совокупность измеримых и почти везде конечных на множестве E функций. Для каждой функции g класса $S(E)$ имеет смысл и конечен интеграл

$$[g]_S = \int\limits_{E} \frac{|g(x)|}{(1+|g(x))(1+x^2)}\,dx.$$

[12]Карлесон Л. (род. в 1928) – шведский математик

Последовательность f_n класса $S(E)$ сходится по мере к функции f того же класса, если $[f_n - f]_S \to 0$ при $n \to \infty$. При таком определении сходимости по мере сохраняются варианты второй теоремы Лебега и теоремы Ф. Рисса :

1) если $f_n \to f$ п.в, то $f_n \to f$ по мере;

2) если $f_n \to f$ по мере, то найдётся подпоследовательность f_{k_n}, такая, что $f_{k_n} \to f$ п.в.

В случае $E = (a, \infty)$ можно сравнить несобственный интеграл $I_1 = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ и интеграл Лебега $I_2 = \int\limits_{(a,\infty)} f(x)\,dx$. Если интеграл I_1 сходится абсолютно, то лебегов интеграл I_2 существует и имеет то же значение. Если же интеграл I_1 сходится лишь условно, то в лебеговом смысле функция $f(x)$ неинтегрируема. Например, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не суммируема на луче $(0, \infty)$, однако несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ существует и равен $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Интеграл Лебега для векторных и комплекснозначных функций.

Пусть E – подмножество действительной прямой , $f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x))T$ – вектор-функция на множестве E со значениями в пространстве $\mathbf{R}^m$. В этом случае скалярные функции $f_k \colon E \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \dots, m)$ называют компонентами вектор-функции f. Если E – измеримое подмножество прямой и $f_k \in \mathscr{L}(E)$ $(k = 1, \dots, m)$, то вектор-функцию f называют суммируемой по множеству E и полагают $\int\limits_E f(x)\,dx = \left(\int\limits_E f_1(x)\,dx \dots \int\limits_E f_m(x)\,dx\right)^T$. Данное равенство позволяет вывести свойства интеграла Лебега от векторных функций из свойств интеграла Лебега от скалярных функций.

Комплекснозначную функцию $f \colon E \to \mathbb{C}$ назовём интегрируемой по Лебегу, если её действительная и мнимая части интегрируемы по Лебегу. Положим $\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E Ref(x)\,dx + i\int\limits_E Imf(x)\,dx$. Интеграл Лебега от комплекснозначных функции обладает свойствами линейности и аддитивности ; говорить о монотонности интеграла в данном случае не приходится, поскольку поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел не упорядочено.

c) Интеграл Лебега для функций многих переменных

В случае функций многих переменных схема построения интеграла Лебега остаётся прежней. Необходимо лишь при определении внешней меры вместо интервалов (a, b) рассматривать открытые n - мерные брусы, а элементарными множествами считать множества, представимые в виде объединения брусов, каждый из которых есть прямое произведение одномерных промежутков. В многомерном случае новым моментом теории является теорема Фубини о сведении кратного интеграла к повторным интегралам меньшей кратности.

d) Абстрактный интеграл Лебега

Пусть на произвольном множестве X выделена σ - алгебра подмножеств $\sum(X)$ и счётно-аддитивная мера $\mu \colon \sum(X) \to [0, \infty]$. Это позволяет ввести измеримые множества (элементы $\sum(X)$), измеримые , простые и суммируемые функции. Интеграл от функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ по мере μ обозначается символом

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu(x)\,.$$

Такого рода интегралы играют важную роль в теории вероятностей.

Задачи по теме "Интеграл Лебега"

1. Пусть A_n - последовательность измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$,

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right), \qquad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) -$$

верхний и нижний пределы последовательности множеств A_n соответственно. Доказать неравенства

$|\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n| \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} |A_n|, \qquad |\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} |A_n|\,.$

2. Привести пример замкнутого множества $F \in [0,1]$, имеющего нулевую меру, но равномощного отрезку $[0,1]$.

3. Доказать, что если функции $f, g : [0,1] \to \mathbf{R}$ измеримы и $f(x) > 0$, то функция $h(x) = f(x)^{g(x)}$ также измерима.

4. Найти интеграл Лебега

$$\int\limits_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} n\ 1_{(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}]}(x)dx,$$

5. Будет ли суммируема в интервале $(0,1)$ функция $f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$?

6. Пусть функция $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ измерима и $A_n := \{x \in [0,1], |f(x)| \geqslant n\}$. Доказать, что суммируемость функции f по отрезку $[0,1]$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$.

7. Привести пример последовательности непрерывных и положительных на отрезке $[0,1]$ функций f_n, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\, dx = 0$, но $\max\{f_n(x), x \in [0,1]\} \to \infty$ при $n \to \infty$.

8. Найти норму в $\mathscr{L}^2(-\pi,\pi)$ функции $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\sin nx$.

9. При каких p функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\cos nx$$

принадлежит пространству $\mathscr{L}^2(-\pi,\pi)$?

10. При каких α функция $f(x) = x^{\alpha}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}^2(0,1)$?

Глава 3

Криволинейные и поверхностные интегралы

3.1 Криволинейные интегралы

3.1.1 Кусочно гладкие пути

Всюду далее символ U будет обозначать открытое подмножество n - мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ (наибольший интерес для нас представляют случаи $n = 2$ или $n = 3$). Путём в U назовём непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to U$, где $[a, b]$ – компактный отрезок действительной прямой $\mathbb{R}$. Путь γ называется путём класса C^1, если отображение γ принадлежит классу C^1, иначе говоря, если γ обладает произволной $\gamma'(t)$, непрерывно зависящей от $t \in [a, b]$. Как обычно, $\gamma'(a)$ это правая производная отображения γ в точке a, а $\gamma'(b)$ – левая производная в точке b. Путь $\gamma\colon [a, b] \to U$ назовем кусочно гладким класса C^1, если существует такое разбиение $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a, b]$, что сужение γ на любой отрезок $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ есть путь класса C^1. При этом $\gamma(a)$ называют начальной точкой пути, а $\gamma(b)$ – конечной точкой пути; говорят, что путь γ соединяет точки $\gamma(a), \gamma(b)$. Два пути $\gamma\colon [a, b] \to U$ $(t \in [a, b])$ и $\gamma_1\colon [a_1, b_1] \to U$ $(t_1 \in [a_1, b_1]$ называют эквивалентными, если существует такое строго монотонное отображение $\varphi\colon [a_1, b_1] \to [a, b]$, кусочно гладкое вместе с обратным $\varphi^{-1}\colon [a, b] \to [a_1, b_1]$, что

$$\gamma_(t_1) = \gamma[\varphi(t_1)]\,. \tag{1}$$

В этом случае говорят, что путь $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ получается из пути γ заменой параметра φ.

Определённое таким образом отношение эквивалентности кусочно гладких путей обладает стандартными свойствами эквивалентности: оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Очевидно, что (1) равносильно соотношению $\gamma = \gamma_1 \circ \varphi^{-1}$, что и доказывает симметричность введённого отношения эквивалентности. Суперпозиция строго монотонных и кусочно гладких вместе с обратным отображений отрезков есть снова строго монотонное и кусочно гладкое отображение отрезка. Отсюда без труда выводится транзитивность рассматриваемого отношения эквивалентности. Совокупность кусочно гладких путей разбивается на классы эквивалентных путей; эти классы именуют кусочно гладкими кривыми. Для задания гладкой кривой достаточно указать какой-либо кусочно гладкий путь, входящий в соответствующий класс эквивалентности.

Некоторые характеристики кусочно гладкого пути одинаковы для всех кусочно гладких путей, входящих в класс эквивалентности. Это позволяет ввести соответствующую характеристику данного класса, т.е. некоторой кривой. Примером такой характеристики кусочно гладкого пути является его длина . Напомним, что длина l кусочно гладкого пути $\gamma(t)$ $(t \in [a, b]$ может быть определена равенствами

$$l = V_a^b \gamma = \int\limits_{[a,\, b]} |\gamma'(t)|\, dt\,. \tag{2}$$

Здесь $V_a^b\gamma$ – вариация отображения γ, интеграл в правой части (2) рассматривается по неориенированному отрезку $[a, b]$ – эта оговорка необходима, поскольку возможны два случая : $a < b$ и противоположный случай $b < a$. Пусть $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi \colon [a_1, b_1] \to U$ – кусочно гладкий путь, получающийся из пути γ заменой параметра φ. Тогда формула (2) приводит к равенствам

$$l = V_{a_1}^{b_1} \gamma_1 = \int\limits_{[a_1,\, b_1]} |\gamma_1'(t_1)|\, dt_1\,. \tag{3}$$

Интегралы в правых частях (2), (3) одинаковы. Для доказательства совпадения интегралов достаточно применить правило замены переменных в интеграле Римана, полагая $t = \varphi(t_1)$ $(t_1 \in [a_1, b_1])$. Последовательно получаем

$$\int\limits_{[a,\, b]} |\gamma'(t)|\, dt = \int\limits_{[a_1,\, b_1]} |\gamma'[\varphi'(t_1)]|\, |\varphi'(t_1)|\, dt_1 = \int\limits_{[a_1,\, b_1]} |\gamma'(t_1)|\, dt_1\,.$$

Тот, кто помнит определение вариации отображения, сочтёт проведённые выкладки излишними, ибо равенство $V_a^b\gamma = V_{a_1}^{b_1}\gamma_1$ вытекает из простейших свойств вариации.

Предшествующие рассуждения позволяют приписать понятие длины любой кусочно гладкой кривой – классу эквивалентности кусочно гладких путей. В следующем пункте мы познакомимся с ещё одной характеристикой кусочно гладкого пути, обладающей аналогичным свойством инвариантности.

3.1.2 Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\gamma \colon [a, b] \to U$ – кусочно гладкий путь, $f \colon \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$ – числовая функция. Тогда имеет смысл суперпозиция $f \circ \gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Произведение

$f[\gamma(t)]\,|\gamma'(t)|$ определено всюду на отрезке $[a,b]$, за исключением точек разрыва t_k производной $\gamma'(t)$. В этих точках определим функцию $f[\gamma(t)]|\gamma'(t)|$ произвольным образом. Если функция $f\circ\gamma|\gamma'|\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема по отрезку $[a,b]$, то интеграл от неё именуют криволинейным интегралом первого рода от функции f по пути γ и обозначают символом $\int\limits_\gamma f(x)\,ds$. Итак,

$$\int\limits_\gamma f(x)\,ds \stackrel{def}{=} \int\limits_{[a,b]} f[\gamma(t)]|\gamma'(t)|\,dt\,. \tag{4}$$

Интеграл в правой части (4) существует, например, если числовая функция $f\colon \gamma([a,b])\to\mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\gamma([a,b])$. Он сохраняет постоянное значение на всех кусочно гладких путях, эквивалентных пути γ. Действительно, пусть $\gamma_1=\gamma\circ\varphi\colon [a_1,b_1]\to U$ – путь, получающийся из пути γ заменой переменной $t=\varphi(t_1)$ $(t_1\in[a_1,b_1])$. Справедливы равенства

$$\int\limits_{[a,b]} f[\gamma(t)]|\gamma'(t)|\;dt = \int\limits_{[a_1,b_1]} f[\gamma(\varphi(t_1))]|\gamma'(\varphi(t_1))|\;|\varphi'(t_1)|\,dt_1 =$$

$$= \int\limits_{[a_1,b_1]} f[\gamma_1(t_1)]|\gamma_1'(t_1)|\,dt_1\,,$$

из которых и вытекает упомянутое выше сойство инвариантности интеграла (4). Предшествующие рассуждение позволяет определить криволинейный интеграл по кривой $\Gamma=[\gamma]$ – классе эквивалентности, порождаемым кусочно гладким путём γ:

$$\int\limits_\Gamma f(x)\,ds \stackrel{def}{=} \int\limits_\gamma f(x)\,ds\,.$$

Иногда класс эквивалентности $\Gamma=[\gamma]$ отождествляют с порождающим его кусочно гладким путём γ.

Более развёрнутая запись (4) выглядит следующим образом

$$\int\limits_\gamma f(x_1,\ldots,x_n)\,ds = \int\limits_{[a,b]} f[\gamma_1(t),\ldots,\gamma_n(t)]\sqrt{\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2+\cdots+\left(\frac{d\gamma_n}{dt}\right)^2}\,dt\,, \tag{5}$$

в котором $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ – компоненты отображения γ. Наиболее просто формула (4) выглядит при натуральной параметризации кривой $[\gamma]$, когда в качестве параметра s берётся длина сужения пути γ на отрезок $[a,t]$. Натуральный параметр s связан с параметром t соотношениями $\dfrac{ds}{dt}=|\gamma'(t)|$, $s(a)=0$. Если $|\gamma'(t)|>0$, то зависимость $t\to s$ строго монотонна и непрерывна. В этом случае

$$\int\limits_\gamma f(x)\,ds = \int\limits_0^l f[x(s)]\,ds\,. \tag{6}$$

Иногда именно равенство (6) берётся в качестве определения криволинейного интеграла первого рода. В этом случае криволинейный интеграл может быть определён для любого спрямляемого пути.

Из формул (4) - (6) легко вытекают следующие свойства криволинейного интеграла первого рода.

1° Линейность :

$$\int_\gamma [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, ds = \lambda \int_\gamma f(x)\, ds + \mu \int_\gamma g(x)\, ds\,.$$

2° Монотонность : если $f(x) \leqslant g(x)\, \forall x \in \gamma([a,b])$, то

$$\int_\gamma f(x)\, ds \ \leqslant \ \int_\gamma g(x)\, ds\,.$$

3° Аддитивность : если γ_1, γ_2 – сужения отображения γ на отрезки $[a,c]$ и $[c,b]$ $(c \in (a,b))$, то

$$\int_\gamma f(x)\, ds \ = \ \int_{\gamma_1} f(x)\, ds + \int_{\gamma_2} f(x)\, ds\,.$$

4° Нормировка :

$$\int_\gamma 1 \ \ ds = l\,.$$

Если параметр t меняется в отрезке $[a,b]$, то параметр $t_1 = b+a-t$ меняется в том же отрезке. Кусочно гладкий путь $\gamma(t)$ эквивалентен кусочно гдадкому пути $\gamma_1(t_1) = \gamma(b+a-t_1)$; направления обхода этих путей противоположны. Таким образом, криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода.

Остановимся на кинематической интерпретации криволинейного интеграла первого рода. Пусть в области U трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ задано поле скоростей $v(x,y,z)$; подходящим примером может служить неоднородная оптическая среда , в которой скорость света меняется от точки к точке. Если $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ – положение точки, перемещающейся в области U, в момент времени t и $\gamma(t)\,(t \in [a,b])$ – кусочно гладкая кривая, то время T прохождения рассматриваемой кривой вычисляется по формуле

$$T = \int_\gamma \frac{1}{|v(x,y,z)|}\, ds\,.$$

Она без труда следует из очевидного соотношения $\dfrac{ds}{dt} = |v(x,y,z)|$, эквивалентного дифференциальному равенству

$$dt \ = \ \frac{ds}{|v(x,y,z)|}\,.$$

3.1.3 Криволинейный интеграл второго рода

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to U \subset \mathbf{R}^n$ – кусочно гладкий путь со значениями в открытом подмножестве U n- мерного евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, $\gamma([a,b])$ – область значений отображения $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$ на отрезке $[a,b]$, $F_1, \dots, F_n$ – скалярные функции на $\gamma([a,b])$. В частности, определены функции $F_i[\gamma(t)]\gamma_i'(t)(i = 1, \dots, n)$ на отрезке $[a,b]$ (в тех точках, где производная γ' не существует, доопределяем отображение γ' произвольным образом). Если функция $F_i[\gamma(t)]\gamma_i'(t)$ интегрируема по отрезку $[a,b]$, то интеграл

$$\int\limits_a^b F_i[\gamma(t)]\gamma_i'(t)\,dt$$

обозначают символом

$$\int\limits_\gamma F_i(x)\,dx_i\,.$$

В приведённом определении возможны случаи $a < b$ и $b < a$. Если подобные интегралы существуют при любом индексе $i = 1, \dots, n$, то их сумму

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\gamma F_i(x)\,dx_i = \int\limits_a^b \left[\sum_{i=1}^n F_i[\gamma(t)]\gamma_i'(t)\right] dt \tag{7}$$

называют криволинейным интегралом по пути γ, иначе, интегралом от дифференциальной формы

$$\omega = \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i$$

по γ : его обозначения

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\gamma \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i \quad \text{или} \quad \int\limits_\gamma (F(x),\, dx)\,.$$

Интеграл (7) заведомо существует, если функции $F_i (i = 1, \dots, n)$ определены и непрерывны на открытом множестве U. Не оговаривая этого каждый раз особо, рассматриваем ниже лишь дифференциальные формы $\omega = F_1(x)\,dx_1 + \dots + F_n(x)\,dx_n$ с непрерывными на U коэффициентами.

Равенство (7) достаточно удобно и для запоминания, и для фактического вычисления криволинейного интеграла. Вместо x подставляется $\gamma(t)$, вместо dx_i – выражение $\gamma_i'(t)\,dt(i = 1, \dots, n)$. Ещё раз подчеркнём, что в правой части (7) рассматривается интеграл по ориентированному отрезку $[a,b]$, так что $\int\limits_a^b = -\int\limits_b^a$. Ввиду этого криволинейный интеграл второго рода зависит от направления обхода пути - при изменении направления обхода значение интеграла меняется на противоположное. Данное обстоятельство влечёт за собой необходимость изменения понятия эквивалентности двух путей. Два пути $\gamma(t)$ $(t \in [a,b])$ и $\gamma_1(t_1)$ $(t_1 \in [a_1,b_1])$ назовём эквивалентными, если существует такое строго возрастающее кусочно-гладкое (вместе с обратным) отображение $\varphi\colon [a_1,b_1] \to [a,b]$, что $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, т.е. $\gamma_1(t_1) = \gamma[\varphi(t_1)]$ $(t_1 \in [a_1,b_1])$.

Особенно просто формула (7) выглядит в случае , когда в качестве t берётся натуральный параметр s, изменяющийся от 0 до l (как и в предшествующем пункте l – длина пути интегрирования). В этом случае вектор $\vec{\tau}(s) = \gamma'(s)$ имеет единичную длину и направлен по касательной к пути $\gamma(s)$. Если ввести вектор-функцию $\overrightarrow{F}(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n = (F_1(x),\ldots,F_n(x))^T$, где $e_1,\ldots,e_n$ –координатные орты в пространстве $\mathbf{R}^n$, то

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\gamma \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i = \int\limits_0^l (\overrightarrow{F}[\gamma(s)], \vec{\tau}(s))\,ds\,. \tag{8}$$

Отметим некоторые свойства криволинейных интегралов второго рода.

1° Линейность : если ω_1, ω_2 – дифференциальные формы , k_1, k_2 – действительные числа, то

$$\int\limits_\gamma (k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = k_1 \int\limits_\gamma \omega_1 + k_2 \int\limits_\gamma \omega_2\,.$$

2° Аддитивность : если γ_1, γ_2 – сужения пути γ на отрезки $[a,c]$ и $[c,b]$ $(c \in (a,b))$ соответственно, то

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2} \omega\,.$$

3° Ограниченность :

$$\left| \int\limits_\gamma \sum_{i=1}^n F_i(x)dx_i \right| \leqslant \int\limits_\gamma |\overrightarrow{F}(x)|\,ds \leqslant \max_{x\in\gamma([a,b])} |F(x)| l\,, \tag{9}$$

здесь $|\overrightarrow{F}(x)|$ – евклидова длина вектора $\overrightarrow{F}(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n$, l – длина пути γ.

Свойства $1^\circ, 2^\circ$ следуют из линейности и аддитивности интеграла Римана, оценка (9) вытекает из формулы (8) и монотонности интеграла Римана.

Особенно просто криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \omega$ вычисляется в случае , когда существует такая непрерывно дифференцируемая на множестве U функция g, что дифференциальная форма $\omega = F_1(x)\,dx_1 + \cdots + F_n(x)\,dx_n$ совпадает с дифференциалом $dg = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}(x)\,dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial g}{\partial x_n}(x)\,dx_n$, т.е. выполнены условия

$$F_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \qquad (x \in U,\, i = 1, \ldots, n)\,. \tag{10}$$

В этом случае скалярную функцию $g\colon U \to \mathbb{R}$ называют потенциалом векторного поля $\overrightarrow{F}(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n$, а само поле $\overrightarrow{F}(x)$ – потенциальным в области U. Условия потенциальности обсуждаются ниже, а сейчас будет установлена

Теорема 1. *Пусть имеют место соотношения (10). Если* $\gamma\colon [a,b] \to U$ *– кусочно гладкий путь, то*

$$\int\limits_{\gamma} dg = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))\,. \tag{11}$$

◀ Достаточно рассмотреть случай, когда γ – путь класса C^1, ибо общий случай сводится к этому при помощи надлежащего разбиения отрезка $[a,b]$. Определим функцию $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, полагая $h = g \circ \gamma$ или , более подробно, $h(t) = g[\gamma(t)]\,(t \in [a,b])$. Функция $h(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и её производная находится по стандартному правилу дифференцирования суперпозиции функций :

$$\frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t)\,. \tag{12}$$

В силу формулы Ньютона - Лейбница справедливо равенство

$$\int\limits_a^b \frac{dh}{dt}(t)\, dt = h(b) - h(a) = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))\,. \tag{13}$$

Из соотношений (7), (12) вытекает, что левые части равенств (11), (13) совпадают. Правые части (11), (13) одинаковы, поэтому доказываемое утверждение есть простое следствие формулы Ньютона - Лейбница.▶

Следствие.*Если выполнены условия теоремы 1, то* $\int\limits_{\gamma} \omega$ *зависит только от начала* $\gamma(a)$ *и конца* $\gamma(b)$ *пути* γ.

К понятию криволинейного интеграла приводит ряд математических и прикладных задач. Пусть, например, на области U трёхмерного пространства $\mathbf{R}^3$ задана вектор-функция

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) , направленные вдоль координатных осей Ox, Oy, Oz, образующие стандартный ортогональный репер в пространстве $Oxyz$. В этом случае говорят, что в области U задано *векторное (силовое)* *поле*. Работой A непрерывного силового поля $\overrightarrow{F}: U \to \mathbf{R}^3$ вдоль кусочно гладкого пути $\gamma(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (a \leqslant t \leqslant b)$ называют криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \omega$ от дифференциальной формы $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, так что

$$A \;=\; \int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz \;=$$

$$= \;\int\limits_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right]\,dt\,.$$

Плоское силовое поле $\overrightarrow{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ можно рассматривать, как частный случай пространственного, если считать $R = 0$, а компоненты P, Q – зависящими лишь от x, y. В этой ситуации

$$A = \int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b \left[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\right]\,dt\,. \tag{14}$$

Возвращаясь к общему определению интеграла второго рода $\int\limits_\gamma \;\omega$, заметим, что за счёт применения интеграла Стилтьеса можно ослабить предположения и относительно пути интегрирования γ, и относительно дифференциальной формы ω. Заинтересованный читатель может познакомиться с соответствующими обобщениями, обратившись, например, к монографиям [17] - [19].

3.1.4 Примеры

Обсудим частные случаи формулы (14), применимой для вычисления интеграла $\int\limits_\gamma P\,dx{+}Q\,dy$ от произвольной дифференциальной формы $\omega = P\,dx{+}Q\,dy$ по произвольному плоскому кусочно гладкому пути γ.

Пример 1. Пусть $P(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, путь γ определяется соотношениями $x = R\cos t, y = R\sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, R > 0$. Имеем

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R\cos t}{R^2} R\cos t + \frac{R\sin t}{R^2} R\sin t\right)\,dt = 2\pi\,.$$

Приведённый пример интересен во многих отношениях. Во - первых , результат оказался не зависящим от параметра $R > 0$, во-вторых , если бы путь интегрирования γ_1 определялся бы соотношениями $x = R\cos 2t, y = R\sin 2t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, то области значений отображений γ, γ_1 были бы одинаковыми - окружность радиуса R с центром в начале координат, но $\int\limits_{\gamma_1} = 4\pi = 2\int\limits_\gamma$. Таким образом, не область значений отображения γ определяет криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma$, а само отображение γ. По этой причине выглядят бессмысленными задания типа вычислить криволинейный интеграл по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ или по астроиде $|x|^{\frac{2}{3}}+|y|^{\frac{2}{3}}=1$. Вместе с тем существует ряд ситуаций, в которых действуют некоторые стандарты, подразумевающие (по умолчанию) вполне определенный способ параметризации.

Пример 2. Если за параметр t можно взять переменное x, то путь γ имеет представление $y=y(x), \quad a\leqslant x\leqslant b$. Формула (14) принимает вид

$$\int\limits_\gamma P\,dx+Q\,dy=\int\limits_a^b \left[P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)\right]\,dx\,. \tag{15}$$

В данном случае начальной точкой пути γ является точка $A=(a,y(a))$, конечной – точка $B=(b,y(b))$. Конкретный пример - вычислить интеграл второго рода по кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания её параметра x :

$$\int\limits_\Gamma x\,dy-y\,dx,\quad \Gamma-\text{кривая}\ \ y=x^3, 0\leqslant x\leqslant 2\,.$$

Согласно формуле (15)

$$\int\limits_\Gamma x\,dy-y\,dx=\int\limits_0^2[3x^3-x^3]\,dx=8\,.$$

Пример 3. Стандартная параметризация отрезка $[A_0,A_1]$, соединяющего точки $A_0=(x_0,y_0), A_1=(x_1,y_1]$ имеет вид $x(t)=(1-t)x_0+tx_1, y(t)=(1-t)y_0+ty_1, \quad (0\leqslant t\leqslant 1)$. Это позволяет однозначно определить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{[A_0,A_1]} P\,dx+Q\,dy$$

по отрезку $[A_0,A_1]$. Интеграл по ломаной $\Gamma=[A_0,A_1,\dots,A_N]$ с вершинами $A_0,A_1,\dots,A_N$ естественно определить как сумму интегралов по звеньям, составляющим данную ломаную :

$$\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy=\sum_{k=1}^N\int\limits_{[A_{k-1},\,A_k]} P\,dx+Q\,dy\,.$$

Пример 4. Пусть D_y – криволинейный четырёхугольник на плоскости xOy, определяемый равенством

$$D_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant x \leqslant b, \eta_1(x) \leqslant y \leqslant \eta_2(x)\}\,.$$

Здесь $\eta_1(x), \eta_2(x)$ – кусочно гладкие на отрезке $[a,b]$ функции , причём $\eta_1(x) \leqslant \eta_2(x)\,\forall x \in [a,b]$. Введём в рассмотрение четыре точки

$$A_1 = (a, \eta_1(a), \quad A_2 = (b, \eta_1(b), \quad A_3 = (b, \eta_2(b)), \quad A_4 = (a, \eta_2(a)\,.$$

Из формулы (15) вытекают соотношения

$$\int\limits_a^b P[x, \eta_1(x)]\,dx = \int\limits_{A_1A_2} P(x,y)\,dx, \quad \int\limits_a^b P[x, \eta_2(x)]\,dx = \int\limits_{A_4A_3} P(x,y)\,dx\,,$$

в которых A_1A_2, A_4A_3 – кусочно-гладкие пути, определяемые равенствами $y = \eta_1(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ и $y = \eta_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ соответственно. Очевидны равенства

$$\int\limits_{[A_4,A_1]} P(x,y)\,dx = 0, \qquad \int\limits_{[A_2,A_3]} P(x,y)\,dx = 0\,.$$

Кусочно гладкий путь $\Gamma = A_1A_2 \cup [A_2, A_3] \cup A_3A_4 \cup [A_4, A_1]$ проходится против часовой стрелки. Из свойства аддитивности криволинейного интеграла и проведённых выше рассуждений вытекает формула

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \left[P(x, \eta_1(x)) - P(x, \eta_2(x))\right]\,dx \tag{16}$$

Предположим, что функция $P(x,y)$ и её частная производная $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ определены и непрерывны по совокупности переменных на множестве D_y. Из теоремы Фубини, формулы Ньютона-Лейбница и (16) следуют равенства

$$\iint\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy \ = \ \int\limits_a^b dx \int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \ =$$

$$= \int\limits_a^b \left[P(x, \eta_2(x)) - P(x, \eta_1(x))\right]\,dx \ = \ -\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx\,.$$

Отождествляя кусочно гладкий путь Γ с границей ∂D_y криволинейного четырёхугольника D_y, приходим к ключевому для дальнейшего соотношению

$$\iint\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial D_y} P(x,y)\,dx\,. \tag{17}$$

Пример 5. Если D_x – криволинейный четырёхугольник на плоскости xOy по отношению к оси Oy, т.е. с двумя горизонтальными сторонами, то для него справедливо аналогичное (17) равенство

$$\iint\limits_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\partial D_x} Q(x,y)\,dx\,. \tag{18}$$

В этом случае предполагается, что функция $Q(x,y)$ и её частная производная $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ определены и непрерывны по совокупности переменных на четырёхугольнике D_x.

3.1.5 Формула Грина

Два множества M_1, M_2 на плоскости $\mathbf{R}^2$ называют гомеоморфными, если существует взаимно однозначное и непрерывное вместе с обратным отображение одного множества на другое. Соответствующее отображение называют гомеоморфизмом. Множество $L \subset \mathbf{R}^2$ именуют простым замкнутым контуром, если оно гомеоморфно окружности $C = \{(x,y)^T \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Каждую точку $(x,y)^T$ окружности C можно охарактеризовать полярным углом t . Поэтому гомеомофизм $C \to L$ порождает непрерывную вектор-функцию $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Когда t изменяется на отрезке $[0, 2\pi]$, соответствующая точка $\vec{r}(t)$ пробегает весь контур L. Возможны два способа обхода контура L. Если при возрастании t точка $\vec{r}(t)$ движется против часовой стрелки, то ограничиваемая контуром L область Ω остаётся слева. В этом случае контур L называют положительно ориентированным. Если же при возрастании t область Ω остаётся справа, то контур L именуют отрицательно ориентированным.

Здесь уместно привести формулировку хорошо известной в топологии теоремы Жордана.

Простой замкнутый контур L разбивает плоскость на две части, одна из которых ограничена и называется внутренностью L, а вторая часть неограничена и называется внешностью L. Внутренняя часть контура L гомеоморфна открытому кругу, внешняя часть контура гомеомофна внешней части окружности.

Если простой замкнутый контур L является границей ограниченной области Ω и положительно ориентирован, то используется обозначение $L = \partial^+\Omega$.

Лемма 1. *Пусть G – ограниченная плоская область и её граница $\partial^+ G$ является кусочно гладким простым замкнутым контуром. Пусть существует конечный набор криволинейных четырёхугольников Ω_i $(i = 1, \ldots, N)$ типа D_y, обладающий свойствами*

$$\mathring{\Omega}_i \cap \mathring{\Omega}_j = \varnothing \quad \textit{при } i \neq j, \qquad \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i \;=\; \overline{G}\,. \tag{19}$$

Пусть функция $P\colon \overline{G} \to \mathbb{R}$ *такова, что её сужение на каждое из множеств* Ω_i $(i = 1, \ldots, N)$ *непрерывно (вместе с частной производной* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$*). Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{\partial^+ G} P(x,y)\,dx = -\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\,. \tag{20}$$

◀ В силу формулы (17) имеем

$$\int\limits_{\partial^+ \Omega_i} P(x,y)\,dx \;=\; -\iint\limits_{\Omega_i} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy\,.\ (i = 1, \ldots, N)$$

Просуммируем эти равенства по всем i. В итоге придём к равенству

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\partial^+ \Omega_i} P(x,y)\,dx \;=\; -\sum_{i=1}^{N} \iint\limits_{\Omega_i} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{21}$$

Поскольку

$$G \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i \subset \bigcup_{i=1}^{N} \partial\Omega_i\,,$$

а каждое из множеств $\partial\Omega_i$ имеет меру нуль, то правая часть (21) равна правой части (20). Очевидно, что $\partial^+ G$ существенно отличается от объединения $\partial^+\Omega_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, однако участки $\partial^+\Omega_i$, не принадлежащие $\partial^+ G$, проходятся дважды во взаимно противоположных направлениях. Поэтому криволинейные интегралы по подобным участкам взаимно сокращаются и сумма в левой части (21) равна левой части (20). Это и завершает доказательство леммы.▶

Лемма 2.*Пусть* G *– ограниченная плоская область и её граница* $\partial^+ G$ *– кусочно гладкий простой замкнутый контур. Пусть существует конечный набор криволинейных четырёхугольников* Ω_i *типа* D_x*, удовлетворяющий предположениям (19). Пусть функция* $Q\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *такова, что её сужение на каждое из множеств* Ω_i $(i = 1, \ldots, N)$ *непрерывно (вместе с частной производной* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$*). Тогда имеет место равенство*

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\partial^+ G} Q(x,y)\,dx\,.$$

◀ Лемма 2 доказывается по той же схеме, что и лемма 1. Нужно лишь вместо формулы (17) использовать формулу (18).▶

Из лемм 1, 2 вытекает

Теорема 2. *Если выполнены условия лемм 1, 2, то справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\partial^+ G} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy\,, \tag{22}$$

называемое формулой Грина[13].

Остановимся на некоторых обобщениях формулы Грина. Пусть G – ограниченная плоская область и её граница состоит из $(m+1)$ - ой простых замкнутых кусочно-гладких кривых, обозначаемых символами $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Будем считать, что Γ_0 – внешняя кривая, а $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ – внутренние кривые. На каждой из кривых Γ_i определено положительное напрвление обхода (против часовой стрелки). Положительное направление обхода границы области таково, что при перемещении точки по границе область G остаётся слева. Символически это записывается следующим образом

$$\partial^+ G = \Gamma_0 - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_m\,.$$

Область G указанного вида называют $(m+1)$ - односвязной. В этом случае

$$\int\limits_{\partial^+ G} \omega = \int\limits_{\Gamma_0} \omega - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_i} \omega$$

для дифференциальной формы $\omega = P\,dx + Q\,dy$. Теорема 2 остаётся справедливой и в этом случае.

Усиливая предположения относительно коэффициентов P, Q дифференциальной формы $\omega = P\,dx + Q\,dy$, можно ослабить требования к области G. Например, если P, Q – гладкие в замкнутой области $\overline{G}$ функции, а $\overline{G}$ – компактная плоская область, ограниченная кусочно гладкими кривыми, то имеет место соотношение (22) – доказательство этого и существенно более общих результатов можно найти , например, в [3], [9], [15], [18], [19].

Отметим частный, но весьма полезный случай формулы Грина, возникающий при $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$. В этой ситуации формула (22) влечёт за собой равенство

$$\int\limits_{\partial^+ G} (-y\,dx + x\,dy) = \iint\limits_G 2\,dx\,dy = 2S(G)\,.$$

Если $\partial^+ G$ определяется параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, то площадь $S(G)$ фигуры G вычисляется по формуле

$$S(G) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right)\,dt\,.$$

[13]Грин Д. (1793 - 1841) – английский математик и физик

Важным представляется случай , когда выполняется условие $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$. В этом случае правая часть (22) обращается в нуль; если область G $m+1$ - связна и $\partial^+ G = \Gamma_0 - \Gamma_1 - \cdots - \Gamma_m$, то из формулы Грина вытекает равенство

$$\int\limits_{\Gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\,. \tag{23}$$

Равенство (23) позволяет свести вычисление интеграла по Γ_0 к вычислению интегралов по Γ_k $(k = 1, \ldots, m)$. Условие $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y}$ представляется довольно жёстким, но в ряде ситуаций оно является естественным.

3.2 Поверхностные интегралы первого рода

3.2.1 Понятие поверхности

Непустое подмножество $\mathscr{M}$ трёхмерного пространства $Oxyz$ называют гладкой поверхностью, если для каждой точки $A \in \mathscr{M}$ найдётся такая её окрестность $\mathscr{U}$ и такая непрерывно дифференцируемая функция $\Phi\colon \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, что

$$1)\mathscr{M} \cap \mathscr{U} = \{(x,y,z) \in \mathscr{U} : \Phi(x,y,z) = 0\}; \quad 2)\nabla\Phi(B) \neq 0\,\forall B \in \mathscr{U}\,.$$

Условие 1) означает, что пересечение $\mathscr{M} \cap \mathscr{U}$ задается уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$. Второе условие требует, чтобы для всех точек B из $\mathscr{U}$ хотя бы одна из частных производных $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(B), \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}(B), \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}(B)$ была отлична от нуля. Если $\Phi \in C^k(\mathscr{U})$,то $\mathscr{M}$ называют поверхностью класса C^k. Может случиться, что функция Φ не зависит от выбора точки A, т.е. вся поверхность $\mathscr{M}$ задаётся уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$. Такой способ задания поверхности называют неявным. Например, неявно заданными поверхностями являются сфера $x^2+y^2+z^2 = R^2$ $(R > 0)$ и гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ $(R > 0)$.

Частный случай неявного задания поверхности - это поверхность, определяемая как график функции двух переменных. Он возникает, если у каждой точки $A \in \mathscr{M}$ существует такая окрестность $\mathscr{V}$, что множество $\mathscr{V} \cap \mathscr{M}$ задаётся одним из уравнений $z = f(x,y)$ $(y = f(x,z),\ x = f(y,z))$. Следует заметить, что любая гладкая поверхность может быть задана как график функции двух переменных (по крайней мере локально). Действительно, из условия $\nabla\Phi(x_0,y_0,z_0) = 0$ следует, что одна из производных $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$ в точке $A = (x_0,y_0,z_0)$ не обращается в нуль. Пусть, например, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}(A) \neq 0$. Тогда уравнение $\Phi(x,y,z) = 0$

можно разрешить относительно z в некоторой окрестности $\mathscr{U}$ точки A. Следовательно, соотношения $(x, y, z) \in \mathscr{U}, \Phi(x, y, z) = 0$ эквивалентны соотношениям $z = f(x, y), (x, y) \in \mathscr{U}'$, где $\mathscr{U}'$ – проекция $\mathscr{U}$ на плоскость Oxy.

В дальнейшем часто будет использоваться параметрический способ задания поверхности. Пусть W - открытое подмножество плоскости $Ouv, \vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ – гомеоморфное отображение W на множество $\mathscr{M} \subset \mathbf{R}^3$. Пусть числовые функции $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ непрерывно дифференцируемы на множестве W и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

в каждой точке $(u, v) \in W$ равен 2. Докажем, что $\mathscr{M}$ – гладкая поверхность. Действительно, пусть $A = \vec{r}(u_0, v_0) \in \mathscr{M}$ и , например,

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} (u_0, v_0) \neq 0\,.$$

Тогда систему уравнений $x = x(u, v), y = y(u, v)$ можно разрешить относительно (u, v) (по крайней мере локально) так, что $u = u(x, y), v = v(x, y)$. В пределах малой окрестности точки A множество $\mathscr{M}$ задаётся уравнением $z = z[u(x, y), v(x, y)]$.

Из проведённых рассуждений вытекает, что все три способа задания поверхности (неявный, с помощью графика функции, параметрический) совершенно равноправны. Далее преимущественно будет применяться параметрический способ задания гладкой поверхности.

3.2.2 Сведения из векторной алгебры

Напомним некоторые сведения из векторной алгебры. Ниже $\mathbf{R}^3$ – трёхмерное евклидово пространство со скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{b})$. Ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ пространства $\mathbf{R}^3$ называют правым при выполнении следующего требования : если базисные векторы отложить от начала координат O, то кратчайший поворот вектора $\vec{e}_1$ в плоскости векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ до совмещения с вектором $\vec{e}_2$ осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{e}_3$. Если же кратчайший поворот от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$ осуществляется по часовой стрелке, то базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ именуют левым.

Условимся всюду в дальнейшем обозначать через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ правый ортонормированный базис в пространстве. В этом случае пространство называют ориентированным. Аналогичные соглашения и терминология используются и применительно к плоскости.

Пусть $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ – векторы в трёхмерном пространстве. Скалярное и векторное произведения этих векторов вычисляются по формулам

$$(\vec a,\vec b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\quad \vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Обозначим через $\Pi(\vec a,\vec b)$ – параллелограмм, натянутый на неколлинеарные векторы $\vec a,\vec b$:$\Pi(\vec a,\vec b)=\{\vec h\in\mathscr{R}^3, h=t\vec a+s\vec b, 0\leqslant t\leqslant 1, 0\leqslant s\leqslant 1\}$. Пусть S – площадь параллелограмма $\Pi(\vec a,\vec b)$. Как хорошо известно , $S=|\vec a||\vec b|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec a,\vec b$. Из равенств $(\vec a,\vec b)=|\vec a||\vec b|\cos\varphi$, $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}$ вытекает формула

$$S=\sqrt{|\vec a|^2|\vec b|^2-(\vec a,\vec b)^2}\,. \tag{1}$$

С другой стороны, $S=|\vec a\times\vec b|$, поэтому

$$S=\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2}\,. \tag{2}$$

Смешанным произведением векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, взятых в указанном порядке, называют число $(\vec a\times\vec b,\ \vec c)$. Для обозначения смешанного произведения векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ употребляется запись $(\vec a\ \vec b\ \vec c)$. Если

$$\vec a=a_1\vec i+a_2\vec j+a_3\vec k,\ \vec b=b_1\vec i+b_2\vec j+b_3\vec k,\ \vec c=c_1 i+c_2\vec j+c_3\vec k,$$

то

$$(\vec a\ \vec b\ \vec c)\ =\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

Из этого равенства и известных свойств определителей легко выводятся все свойства смешанного произведения. В частности, условие $(\vec a\ \vec b\ \vec c)=0$ эквивалентно компланарности векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$. Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ с точностью до знака равно объёму параллелипипеда $\Pi(\vec a,\ \vec b,\ \vec c)\overset{def}{=}\{\vec r=x\vec i+y\vec j+z\vec k,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$, построенного на векторах $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$.

Далее окажется полезной

Лемма 1. *Пусть Λ – линейное преобразование трёхмерного пространства $\mathbf{R}^3$ в себя. Тогда существует единственный вектор , обозначаемый символом $rot\,\Lambda$ и называемый ротором преобразования Λ, такой, что*

$$(\Lambda\,\vec a,\vec b)-(\vec a,\Lambda\vec b)=(\vec a\ \vec b\ rot\,\Lambda)\quad \textit{для всех векторов } \vec a,\ \vec b\quad \textit{из}\ \ \mathbf{R}^3\,. \tag{3}$$

◀ Пусть

$$\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23}\\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}\end{pmatrix} -$$

матрица, соответствующая отображению Λ в базисе $\vec{i},\ \vec{j}, \vec{k}$. Если $a = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k},\ b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, то

$$(\Lambda\vec{a},\ \vec{b}) - (\vec{a}, \Lambda\vec{b}) = \sum_{p,q=1}^{3} \lambda_{pq} a_q b_p - \sum_{p,q=1}^{3} \lambda_{qp} a_q b_p =$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} (\lambda_{32} - \lambda_{23}) + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} (\lambda_{13} - \lambda_{31}) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} (\lambda_{21} - \lambda_{12})\,.$$

Полученное равенство влечёт за собой соотношение (3), если положить

$$rot\,\Lambda = (\lambda_{32} - \lambda_{23})\vec{i} + (\lambda_{13} - \lambda_{31})\vec{j} + (\lambda_{21} - \lambda_{12})\vec{k}\,. \tag{4}$$

Тем самым не только доказано существование требуемого вектора $rot\,\Lambda$, но и указана явная формула для его нахождения. Единственность подобного вектора очевидна, поскольку вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ может быть произвольным трёхмерным вектором. ►

Несколько иной подход к определению понятия ротора линейного отображения читатель может найти в учебнике [3].

3.2.3 Площадь поверхности, заданной параметрически

Пусть $\mathscr{M}$ – гладкая поверхность в трёхмерном пространстве $Oxyz$, заданная в параметрической форме $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$; в координатной форме

$$x = x(u, v),\ \ y = y(u, v),\ \ z = z(u, v), \qquad (u, v) \in W\,. \tag{5}$$

Здесь W – открытое подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$, $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ – гладкая вектор - функция, причем векторы $\vec{r}_u(u, v) = x_u(u, v)\vec{i} + y_u(u, v)\vec{j} + z_u(u, v)\vec{k}$ и $\vec{r}_v(u, v) = x_v(u, v)\vec{i} + y_v(u, v)\vec{j} + z_v(u, v)\vec{k}$ линейно независимы для каждой точки (u, v) из W. Фиксируем содержащийся в области W прямоугольник Π с вершинами $(u, v), (u + \Delta u, v), (u, v + \Delta v, (u + \Delta u, v + \Delta v)$. Отображение $\vec{r}\colon W \to \mathbf{R}^3$ переводит вершины этого прямоугольника в в точки

$$A_0 = \vec{r}(u, v), A_1 = \vec{r}(u + \Delta u, v), A_2 = \vec{r}(u, v + \Delta v), A_3 = \vec{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)\,.$$

Очевидно, что

$$A_1 - A_0 = \vec{r}_u(u, v)\Delta u + o(\Delta u),\ \ A_2 - A_0 = \vec{r}_v(u, v)\Delta v + o(\Delta v)\,.$$

С точностью до бесконечно малых и параллельного сдвига образом прямоугольника Π является параллелограмм Π_1, построенный на векторах $\vec{r}_u(u, v)\Delta u$ и $\vec{r}_v(u, v)\Delta v$. Отношение площадей $S(\Pi_1), S(\Pi)$ параллелограммов Π_1 и Π равно

$$J(u, v) \stackrel{def}{=} |\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v)|\,. \tag{6}$$

Число $J(u,v)$ будем рассматривать как коэффициент локального искажения площади при отображении $\vec{r}$: $W \to \mathscr{M}$.

Предшествующие рассуждения носят эвристический характер; они призваны объяснить мотивировку даваемых ниже строгих определений. Пусть Ω – подмножество гладкой поверхности $\mathscr{M}$, заданной параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in W$. Обозначим через K прообраз множества Ω при гомеоморфизме $\vec{r}$, т.е.

$$K = \{(u,v) \in W, \qquad \vec{r}(u,v) \in \Omega\}\,.$$

Назовём множество $\Omega \subset \mathscr{M}$ квадрируемым, если K – квадрируемое множество, содержащееся вместе со своим замыканием в W и такое, что имеет смысл интеграл

$$\iint\limits_K J(u,v)\,du\,dv\,;$$

значение этого интеграла обозначим символом $S(\Omega)$ и назовём площадью квадрируемой фигуры Ω. Таким образом,

$$S(\Omega) \overset{def}{=} \iint\limits_K J(u,v)\,du\,dv = \iint\limits_K |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|(u,v)\,du\,dv\,. \tag{7}$$

В целях оправдания подобного подхода заметим, что для гладких поверхностей другие способы определения площади поверхности приводят к тому же результату. На первый взгляд площадь поверхности зависит от способа параметризации. Однако формула замены переменных в двойных интегралах позволяет установить независимость от способа параметризации ; рассуждения здесь вполне аналогичны проведённым выше применительно к длине кривой .

Введем обозначения :

$$\mathcal{E} = |\vec{r}_u|^2, \qquad \mathcal{G} = |\vec{r}_v|^2, \qquad \mathcal{F} = (\vec{r}_u, \vec{r}_v), \tag{8}$$

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{C} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, что $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ - непрерывные функции и $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \mathcal{A}\vec{i} + \mathcal{B}\vec{j} + \mathcal{C}\vec{k}$. Из определения функции J – равенства (6) – вытекают соотношения

$$J = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2} > 0\,.$$

Остановимся на конкретизациях (7) в частных случаях. Пусть поверхность $\mathscr{M}$ задаётся явным уравнением $z = z(x,y)$ $(x,y) \in W$, W – открытое подмножество плоскости Oxy. Тогда x, y можно взять в качестве параметров u, v. В этом случае $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}$, $\mathcal{E} = 1 + (z_x)^2$, $\mathcal{G} = 1 + (z_y)^2$, $\mathcal{F} = z_x z_y$, следовательно, $J = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}$. Из формулы (7) вытекает равенство

$$S(\Omega) = \iint\limits_K \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2}\, dx\, dy\,;$$

здесь K – квадрируемое подмножество W, $\Omega = \vec{r}(K)$ и , таким образом K есть проекция Ω на плоскость Oxy.

В качестве второго примера рассмотрим поверхность $\mathscr{M}$, возникающую при вращении вокруг оси абсцисс кривой Γ, расположенной в плоскости Oxy и определяемой параметрическими уравнениями $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, где $\varphi(u)$, $\psi(u)$ – непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a,b]$ функции и $\psi(u) \geqslant 0\, \forall t \in [a,b]$. Поверхность $\mathscr{M}$ может быть задана параметрически :

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u)\cos v, \quad z = \psi(u)\sin v\,.$$

Параметр v имеет простой геометрический смысл: это угол поворота кривой Γ относительно плоскости Oxy. В этом случае

$$\vec{r}(u,v) = \varphi(u)\vec{i} + \psi(u)\cos v\vec{j} + \psi(u)\sin v\vec{k}, \quad J = \psi(u)\sqrt{\varphi_u^2(u) + \psi_u^2(u)}\,.$$

Площадь фигуры $\Omega \subset \mathscr{M}$, для которой $(u,v) \in K = [a,b] \times [\alpha,\beta]$, определяется по формуле

$$S(\Omega) = \iint\limits_K J(u,v)\, du\, dv = (\beta - \alpha)\int\limits_a^b \psi(u)\sqrt{\varphi_u^2(u) + \psi_u^2(u)}\, du\,. \tag{10}$$

Интеграл в правой части (10) совпадает с криволинейным интегралом первого рода $\int\limits_\Gamma y\, ds$, следовательно, (10) может быть записано в виде

$$S(\Omega) = (\beta - \alpha)\int\limits_\Gamma y\, ds\,.$$

Если l – длина кривой Γ, то числа

$$x_c = \frac{1}{l}\int\limits_\Gamma x\, ds, \quad y_c = \frac{1}{l}\int\limits_\Gamma y\, ds$$

задают координаты центроида кривой Γ (центра масс при однородном её распределении). Формулу (10) можно записать в виде

$$S(\Omega) = (\beta - \alpha)y_c l\,. \tag{11}$$

Из равенства (11) следует

Теорема 1 (Теорема Гюльдена[14].) *Площадь поверхности , образованной вращением плоской линии* Γ*, вокруг оси , лежащей в этой плоскости и не пересекающей её, равна произведению длины* l *кривой* Γ *на длину дуги , описываемой центроидом кривой* Γ*.*

Теоремой Гюльдена особенно удобно пользоваться в случае, когда положение центра масс легко находится. Пусть, например, Γ это окружность , задаваемая параметрическими уравнениями $x = R\cos t, y = a + R\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ 0 < R < a$. Ясно, что центр масс совпадает с центром окружности, поэтому $y_c = a$. Из формулы (10) следует равенство $S(\Omega) = (\beta - \alpha)a \cdot 2\pi R$. В рассматриваемом случае поверхность $\mathscr{M}$ является тором, его площадь $S(\mathscr{M}) = 4\pi^2 aR$.

В качестве упражнения читателю предлагаются задачи, рассмотренные ещё Кеплером[15] в знаменитом сочинении "Стереометрия винных бочек". Пусть хорда AB делит круг на две неравные части. При вращении меньшей из этих частей вокруг прямой AB образуется тело, которое Кеплер назвал "лимоном" , а при вращении большей части - тело, названное им "яблоком". Зная, что высота "лимона"(т.е. длина отрезка равна $2a$, а его толщина в наиболее широком месте равна $2b$, вычислите площадь поверхности "лимона". Решите аналогичную задачу для "яблока".

Возвращаясь к общему случаю, обозначим через $\sum(\mathscr{M})$ совокупность квадрируемых подмножеств гладкой поверхности $\mathscr{M}$. Вместе с множествами Ω_1, Ω_2 класс $\sum(\mathscr{M})$ содержит их объдинение $\Omega_1 \cup \Omega_2$, пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$ и разность $\Omega_1 \setminus \Omega_2$. Площадь аддитивна на $\sum(\mathscr{M})$:

$$S(\Omega_1 \cup \Omega_2) = S(\Omega_1) + S(\Omega_2) - S(\Omega_1 \cap \Omega_2)\,.$$

Свойство аддитивности площади следует из равенства (7) и аддитивности интеграла.

3.2.4 Определение интеграла первого рода

Пусть $\mathscr{M}$ – гладкая поверхность в трёхмерном пространстве, определяемая равенствами (5), D – квадрируемое подмножество поверхности $\mathscr{M}$. Систему $T = \{D_1, \ldots, D_N\}$ квадрируемых подмножеств D назовём разбиением множества D, если

$$D \ = \ \bigcup_{p=1}^{N} D_p \quad \text{и} \quad S(D_p \bigcap D_q) = 0 \quad \text{при } p \neq q\,.$$

Ограниченной функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ и разбиению $T = \{D_1, \ldots, D_N\}$ сопоставим числа

$$M_p = \sup_{\xi \in D_p} f(\xi), \qquad m_p = \inf_{\xi \in D_p} f(\xi), \quad \omega_p = M_p - m_p, \quad (p = 1, \ldots, N)$$

[14]Гюльден П.(1577 - 1643) – швейцарский математик
[15]Кеплер И.(1571 - 1630) – немецкий астроном и математик

и суммы

$$\overline{S}_T(f) := \sum_{p=1}^{N} M_p S(D_p), \quad \underline{S}_T(f) := \sum_{p=1}^{N} m_p S(D_p)\,,$$

называемые *верхней* и *нижней суммами Дарбу* функции f соотвественно. Совокупность сумм Дарбу $\overline{S}_T(f)(\underline{S}_T(f))$, соответствующих всевозможным разбиениям Ω, является ограниченным числовым множеством. Имеют смысл числа

$$I^*(f, D) = \inf_T \overline{S}_T(f), \quad I_*(f, D) = \sup_T \underline{S}_T(f)\,,$$

называемые верхним и нижним интегралами функции f по квадрируемому множеству D.

Если $I^*(f, D) = I_*(f, D)$, то общее значение $I^*(f, D)$ и $I_*(f, D)$ называют *поверхностным интегралом первого рода от функции f по множеству D* и обозначают символом

$$\iint\limits_D f(x, y, z)\, dS\,.$$

Совокупность интегрируемых по квадрируемому множеству $D \subset \mathscr{M}$ функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ обозначим через $\mathscr{R}(D)$. Справедлив

Критерий Римана интегрируемости. *Ограниченная на множестве D функция интегрируема, если и только если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое разбиение T множества D, что $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$.*

◀ Доказательство проводится по стандартной схеме, поэтому опускается. ▶

Поверхностный интеграл первого рода сводится к двойному интегралу.

Теорема 2. *Пусть K – прообраз множества D при отображении $\vec{r}\colon W \to \mathscr{M}$. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_D f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_K f[\vec{r}(u, v)]J(u, v)\, du\, dv, \tag{12}$$

причём интегралы в левой и правой частях равенства (12) существуют (или несуществуют) одновременно.

◀ Пусть $f \in \mathscr{R}(D)$, $\varepsilon > 0$, $T = \{D_1, \ldots, D_N\}$ – такое разбиение квадрируемого множества D, для которого $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$, K_p – прообраз D_p при отображении $\vec{r}$,

$$M_p = \sup_{\xi \in D_p} f(\xi), \quad (p = 1, \ldots, N), \quad g(u, v) = f[\vec{r}(u, v)]J(u, v)\,.$$

Множества $K_1, \ldots, K_N$ образуют разбиение множества K. Если $(u, v) \in K_p$, то $\vec{r}(u, v) \in D_p$, поэтому $f[\vec{r}(u, v)] \leqslant M_p$. Умножая это равенство на положительную функцию $J(u, v)$ и беря верхний интеграл по множеству K_p, приходим к неравенствам

$$I^*(g, K_p) \leqslant M_p I^*(J, K_p) = M_p S(\Omega_p), \quad (p = 1, \ldots, N)$$

Суммируя данные неравенства по всем p от 1 до N, получаем оценку $I^*(g, K) \leqslant \overline{S}_T(f)$. Аналогичным образом устанавливается оценка для нижнего интеграла : $I_*(g, K) \geqslant \underline{S}_T(f)$. Поскольку $\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) < \varepsilon$, то $I^*(g, K) - I_*(g, K) < \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает интегрируемость функции g по множеству K и равенство (12). Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь существует интеграл в правой части (12). Функция $J(u, v)$ положительна и непрерывна на W, а поскольку $\overline{K}$ – компактное подмножество W, то найдутся такие положительные числа λ_1, λ_2, что $\lambda_1 \leqslant J(u, v) \leqslant \lambda_2$ для всех (u, v) из $\overline{K}$. Отсюда следует интегрируемость функции $g_1(u, v) = f[\vec{r}(u, v)]$ на множестве K. Если $\{K_1, \ldots, K_N\}$ – разбиение множества K и $D_p = \vec{r}(K_p)$, $(p = 1, \ldots, N)$, то $T = \{D_1, \ldots, D_N\}$ – разбиение множества Ω. Колебание ω_p функции f на множестве D_p совпадает с колебанием функции g_1 на множестве K_p $(p = 1, \ldots, N)$. Имеют место соотношения

$$\overline{S}_T(f) - \underline{S}_T(f) = \sum_{p=1}^{N} \omega_p S(\Omega_p) = \sum_{p=1}^{N} \omega_p \int\limits_{K_p} J(u, v)\, du\, dv \leqslant \lambda_2 \sum_{p=1}^{N} \omega_p S(K_p)\,.$$

Так как функция g_1 интегрируема по множеству K, правая часть последнего соотношения может быть сделана сколь угодно малой (за счёт выбора разбиения $K_1, \ldots, K_N$ множества K.) Это влечёт за собой интегрируемость функции f по множеству D, а в силу уже доказанного - и равенство (12).▶

Внимательный читатель несомненно заметил сходство равенства (12) с правилом замены переменных в кратном интеграле. Само равенство (12) выглядит как правило замены переменных. Вместо переменных x, y, z подставляются их выражения через параметры u, v, вместо элемента площади dS – значение элемента площади $J(u, v)\, du\, dv$ в координатах u, v, наконец, область интегрирования D заменяется её прообразом K. С вычислительной точки зрения поверхностные интегралы первого рода не приводят к новым задачам. Они обладают обычными свойствами интеграла : линейность, монотонность, аддитивность и нормировка. Эти свойства следуют из формулы (12). В некоторых руководствах равенство (12) принимается в качестве определения поверхностного интеграла первого рода. Из теоремы 2 вытекает интегрируемость непрерывных функций. Если K – компактное квадрируемое подмножество W, то множество $D = \vec{r}(K)$ есть квадрируемое подмножество поверхности $\mathscr{M}$.

3.2.5 Дополнения и замечания

Предшествующие построения относились к гладким поверхностям, задаваемых одним параметрическим уравнениям. Эти ограничения представляются слишком жёсткими. Например, поверхность известного любому школьнику тетраэдра не является гладкой, сфера в трёхмерном пространстве - гладкая поверхность, но задать её единым параметрическим уравнением не удаётся. Поэтому возникает необходимость в некотором обобщении введённых выше понятий.

Пусть $\mathscr{M}$ – объединение N гладких поверхностей $\mathscr{M}_p$, $(p = 1, \ldots, N)$, заданных параметрически, $D \subset \mathscr{M}$, f – скалярная функция на множестве D. Положим

$$C_p = D \cap \mathscr{M}_p \, (p = 1, \ldots, N), \, B_1 = C_1, \quad B_p = C_p \setminus \bigcup_{q=1}^{p-1} C_q \, (p = 2, \ldots, N) \, .$$

Множества $B_1, \ldots, B_p$ попарно не пересекаются, их объединение совпадает с множеством D. Если существуют интегралы

$$\iint\limits_{B_p} f(x, y, z) \, dS \qquad (p = 1, \ldots, N) \, ,$$

то положим по определению

$$\iint\limits_{D} f(x, y, z) \, dS = \sum_{p=1}^{N} \int\limits_{B_p} f(x, y, z) \, dS \, . \tag{13}$$

Используя свойство аддитивности интеграла и правило замены переменных в кратном интеграле, можно показать независимость правой части (13) от способа разбиения множества $\mathscr{M}$ на объединение гладких поверхностей, а также от способа параметризации этих поверхностей.

Остановимся на физическом смысле поверхностных интегралов первого рода. Пусть распределение массы на поверхности $\mathscr{M}$ характеризуется плотностью $\rho(x, y, z)$, определяемой как предел средней поверхностной плотности при стягивании к точке (x, y, z). Тогда масса $m(D)$ части D поверхности $\mathscr{M}$ находится по формуле

$$m(D) \; = \; \iint\limits_{D} \rho(x, y, z) \, dS \, . \tag{14}$$

Равенство (14) верно, например, если плотность $\rho(x, y, z)$ есть непрерывная функция, а D – квадрируемая фигура. Обычным образом можно ввести понятия геометрии масс - моменты инерции поверхности $\mathscr{M}$ относительно точки, прямой, плоскости, центра масс и центроида. Основные конструкции здесь аналогичны использованным для кратных интегралов.

3.3 Поверхностные интегралы второго рода

3.3.1 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $\mathscr{M}$ – гладкая поверхность в пространстве $Oxyz$, $A \in \mathscr{M}$. Тогда найдется такая окрестность $\mathscr{U}$ точки A и такая гладкая функция $\Phi \colon \mathscr{U} \to \mathbb{R}$, что пересечение $\mathscr{U}$ с $\mathscr{M}$ задаётся уравнением $\Phi(x,y,z)=0$ и градиент функции Φ отличен от нуля :

$$\nabla\Phi(B) \;=\; \frac{\partial\Phi}{\partial x}(B)\vec{i} \;+\; \frac{\partial\Phi}{\partial y}(B)\vec{j} \;+\; \frac{\partial\Phi}{\partial z}(B)\vec{k} \;\neq\; \vec{0}$$

для всех точек B из $\mathscr{U}$. Как было выяснено ранее, вектор $\nabla\Phi(A)$ перпендикулярен поверхности $\mathscr{M}$ в точке A. Это означает, что $\nabla\Phi(A)$ ортогонален к любой гладкой кривой, принадлежащей $\mathscr{M}$ и проходящей через точку A. Под углом между $\nabla\Phi(a)$ и гладкой кривой понимается угол между $\nabla\Phi(A)$ и касательной к кривой. Совокупность касательных ко всем возможным кривым, проходящим через точку $A=(x_0,y_0,z_0)$, образует плоскость $T(A)$, называемую касательной плоскостью к поверхности $\mathscr{M}$ в точке A. Уравнение касательной плоскости $T(A)$ имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(A)(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(A)(z-z_0)=0\,. \tag{1}$$

Вектор $\vec{N}(A)$, перпендикулярный плоскости $T(A)$, называется нормалью к поверхности $\mathscr{M}$ в точке A. В качестве $\vec{N}(A)$ можно взять, например, градиент $\nabla\Phi(A)$ функции Φ в точке A.

Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x,y)$, то касательная плоскость к этой поверхности в точке $A=(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{M}$, определяется уравнением

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\,. \tag{2}$$

Очевидно, что уравнение (2) это частный случай уравнения (1), возникающий при $\Phi(x,y,z)=f(x,y)-z$. Нормаль к этой поверхности в точке $A=(x_0,y_0,z_0)$ может быть задана равенством $\vec{N}(A)=\pm(f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}-\vec{k})$.

Пусть поверхность $\mathscr{M}$ задана параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(w)$, где $w=(u,v)\in W\subset\mathbf{R}^2$. Пусть $w_0=(u_0,v_0)\in W$ и $A=\vec{r}(w_0)$. Гладкие кривые $\vec{r}=\vec{r}(u,v_0),\vec{r}=\vec{r}(u_0,v)$ проходят через точку A, векторы $\vec{r}_u(w_0),\vec{r}_v(w_0)$ неколлинеарны и направлены по касательным к данным кривым в точке A. Таким образом , вектор

$$\vec{N}(A) \;=\; \vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0) \;=\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}(w_0) \tag{3}$$

есть нормаль к поверхности $\mathscr{M}$ в точке A. Разумеется, нормаль определяется с точностью до ненулевого множителя.

В рассмотренных примерах для каждой точки A гладкой поверхности $\mathscr{M}$ существует такая окрестность $\mathscr{U}$, что в каждой точке $B\in\mathscr{M}\cap\mathscr{U}$ можно определить нормаль $\vec{N}(B)$, непрерывно зависящую от точки B. Естественно, возникает вопрос - на всякой ли гладкой поверхности существует непрерывное векторное поле нормалей. Оказывается, есть поверхности, на которых не существует непрерывного поля нормалей, заданного на всей поверхности(в целом). Примером может служить известный лист Мёбиуса[16] . (Эта поверхность получается из прямоугольника с вершинами $A = (0,0), B = (0,1), A' = (0,2), B' = (2,1)$ путём склеивания сторон AB и $A'B$ таким образом, что при этом совпадают точки A и B', и точки A' и B.)

Поверхности, на которых в целом существует непрерывное векторное поле нормалей, будем называть *двусторонними*. Поверхности, на которых в целом такого поля не существует, будем называть *односторонними*. Плоскость , сферы, гиперболоиды - односторонние поверхности, лист Мёбиуса – односторонняя поверхность. Достаточно общий пример двусторонней поверхности доставляет поверхность $\mathscr{M}$, задаваемая уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, где Φ – гладкая функция на $\mathbf{R}^3$ и $\nabla\Phi(A) \neq \vec{0}$ при $A \in \mathscr{M}$. Непрерывное векторное поле нормалей можно задать равенством $\vec{N}(A) = \nabla\Phi(A)$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь двусторонние поверхности.

Пусть $\vec{N}(A)$ – непрерывное поле нормалей на двусторонней поверхности $\mathscr{M}$. Поле $\vec{N}(A)$ можно нормировать, полагая $\vec{n}(A) = \dfrac{\vec{N}(A)}{|\vec{N}(A)|}$. Очевидно, что поле $\vec{n}(A)$ непрерывно, $|\vec{n}(A)| = 1$ и в каждой точке $A \in \mathscr{M}$ вектор $\vec{n}(A)$ направлен по нормали к поверхности $\mathscr{M}$. Вместе с $\vec{N}(A), \vec{n}(A)$ противоположные к ним поля $-\vec{N}(A)$, $-\vec{n}(A)$ также будут непрерывными. Задать ориентацию поверхности означает выбрать одно из двух векторных полей нормалей, которые и называются *ориентациями поверхности*. Поверхность с фиксированной ориентацией называется *ориентированной*.

Рассмотрим несколько характерных примеров. Если поверхность $\mathscr{M}$ задана неявным уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, то поле $\vec{n}(A) = \dfrac{\nabla\Phi(A)}{|\nabla\Phi(A)|}$ и противоположное к нему $-\vec{n}(A)$ определяют две ориентации поверхности $\mathscr{M}$. Второй пример - поверхность $\mathscr{M}$ задана параметрически $\vec{r} = \vec{r}(w)$ $(w = (u, v) \in W \subset \mathbf{R}^2)$. Поле нормалей можно определить равенством

$$\vec{n}(A) = \frac{\vec{r}_u(w) \times \vec{r}_v(w)}{|\vec{r}_u(w) \times \vec{r}_v(w)|}, \tag{4}$$

где $A = \vec{r}(w)$. Наконец, рассмотрим случай, когда поверхность $\mathscr{M}$ совпадает с границей ограниченной области Ω трёхмерного пространства. В этой ситуации можно рассматривать поле внешних нормалей $\vec{n}(A)$ и поле внутренних нормалей $-\vec{n}(A)$. Границу области Ω с ориентацией , задаваемой полем внешних нормалей $\vec{n}(A)$, будем обозначать символом $\partial^+\Omega$.

[16]Мёбиус А. (1790 - 1868) – немецкий математик и астроном

3.3.2 Поток векторного поля

Пусть $\mathscr{M}$ – двусторонняя гладкая поверхность в трёхмерном пространстве $Oxyz$, $\vec{n}(A)$ – непрерывное векторное поле нормалей на $\mathscr{M}$, т.е. вектор $\vec{n}(A)$ перпендикулярен поверхности $\mathscr{M}$ в каждой точке A поверхности $\mathscr{M}$, вектор-функция $\vec{n}(A)$ непрерывна и $|\vec{n}(A)| = 1\ \forall A \in \mathscr{M}$. Вектор $\vec{n} = \vec{n}(A)$ образует с базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ углы α, β, γ соответственно. Очевидны равенства

$$\cos\alpha = (\vec{n}, \vec{i}),\ \cos\beta = (\vec{n}, \vec{j}),\ \cos\gamma = (\vec{n}, \vec{k}),\ \vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma\,.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ именуют направляющими косинусами нормали $\vec{n}$. Их можно рассматривать как координаты вектора $\vec{n}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$; они непрерывно зависят от точки A.

Пусть на поверхности $\mathscr{M}$ определено векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, где P, Q, R – скалярные функции на $\mathscr{M}$. Скалярное произведение

$$(\vec{F}, \vec{n}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

есть числовая функция, определённая на поверхности $\mathscr{M}$. Если эта функция интегрируема по квадрируемой фигуре $D \subset \mathscr{M}$, то соответствующий интеграл называют *потоком векторного поля* $\vec{F}$ через фигуру D и обозначают символом $I(\vec{F}, D)$. Итак,

$$I(\vec{F}, D) \stackrel{def}{=} \iint\limits_D (\vec{F}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_D (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS\,.$$

Происхождение термина поток связано с его гидродинамической интерпретацией. Пусть трёхмерная область Ω заполнена движущущейся жидкостью и вектор $\vec{F}(A)$ в каждой точке $A \in \Omega$ есть скорость частицы в точке A. Пусть двусторонняя гладкая поверхность $\mathscr{M}$ содержится в области Ω. Подсчитаем количество жидкости, протекающей через квадрируемую фигуру $D \subset \mathscr{M}$ за промежуток времени dt.

Выделим в фигуре D элементарную площадку dS; пренебрегая изменением вектора $\vec{F}$ на dS, можем считать, что жидкость, протекающая через dS за время dt, заполняет цилиндр с основанием dS и образующей $F(A)\, dt$. Суммируя полученные величины по всем площадкам dS , найдём, что количество жидкости, протекающей за время dt через всю фигуру D, равно

$$dt\ \iint\limits_D (\vec{F}, \vec{n})\, dS = dt\ I(\vec{F}, D)\,.$$

Таким образом, поток $I(\vec{F}, D)$ может быть истолкован как объёмная скорость течения жидкости через фигуру D. Возникшее в гидродинамике понятие потока встречается в различных вопросах физики.

Приведём формулу для вычисления потока в случае, когда $\mathscr{M}$ – гладкая поверхность в пространстве $Oxyz$, заданная параметрическим уравнением $\vec{r} = \vec{r}(w)$ $(w = (u,v) \in W \subset \mathbf{R}^2$. Предполагаются выполнеными стандартные предположения относительно вектор-функции $\vec{r}(w) = x(w)\vec{i} + y(w)\vec{j} + z(w)\vec{k}$. В частности, функции $x(w), y(w), z(w)$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве W и частные производные $\vec{r}_u(w)$, $\vec{r}_v(w)$ отличны от нуля и неколлинеарны в каждой точке $w \in W$. Зададим непрерывное поле нормалей на поверхности $\mathscr{M}$ равенством (4). Вычислим поток непрерывного векторного поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ через квадрируемую фигуру $D = \vec{r}(K) \subset \mathscr{M}$. Справедлива цепь соотношений (комментарии приводятся ниже)

$$I(\vec{F}, D) \stackrel{(I)}{=} \iint\limits_D (\vec{F}, \vec{N})\, dS \stackrel{(II)}{=} \iint\limits_K \left(\vec{r}(w), \frac{\vec{r}_u(w) \times \vec{r}_v(w)}{|\vec{r}_u(w) \times \vec{r}_v(w)|} \right) |\vec{r}_u(w) \times \vec{r}_v(w)|\, du\, dv =$$

$$\stackrel{(III)}{=} \int\limits_K (\vec{F}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v)(w)\, du\, dv \stackrel{(IV)}{=} \iint\limits_K \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du\, dv\,. \qquad (5)$$

Теперь обещанные пояснения : равенство (I) справедливо по определению потока $I(\vec{F}, D)$, (II) верно в силу выбора поля нормалей $\vec{n}$, переход (III) очевиден, последний переход основан на формуле для смешанного произведения трёх векторов (см. п. 3.3.2). В правой части (5) под знаком интеграла находятся функции переменных u, v; например, $P = P[\vec{r}(u,v)]$, аналогичные замечания относятся и функциям $Q, R, \ldots, z_v$.

Раскрывая определитель третьего порядка по верхней строке, получаем

$$I(\vec{F}, D) = \iint\limits_K \left[P \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + Q \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + R \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \right] du\, dv\,. \qquad (6)$$

Интеграл в правой части (6) мы будем обозначать также следующим образом:

$$\iint\limits_{\mathscr{M}} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy\,.$$

Его называют поверхностным интегралом второго рода по поверхности $\mathscr{M}$ от дифференциальной формы $\omega = P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$: самое короткое его обозначение $\iint\limits_M \omega$.

Понятие поверхностного интеграла второго рода естественно распространяется на случай, когда поверхность M можно представить в виде объединения нескольких поверхностей $M_1, \ldots, M_N$, заданных параметрически. Такого рода обобщение для поверхностного интеграла первого рода описано в предшествующем разделе. Поскольку поверхностный интеграл второго рода сводится к поверхностному интегралу первого рода, то соответствующее обобщение реализуется автоматически.

3.3.3 Формула Гаусса-Остроградского

Вначале приведём весьма частный , но важный для дальнейшего вариант формулы (6). Пусть W – открытое подмножество плоскости Oxy, $h\colon W \to \mathbb{R}$ – гладкая функция на W, $\mathscr{M}$ – поверхность в пространстве $Oxyz$, определяемая уравнением $z = h(x,y)$ $((x,y) \in W)$. Очевидно, $\mathscr{M}$ – гладкая ориентируемая поверхность. Непрерывное векторное поле нормалей на $\mathscr{M}$ можно определить равенством

$$\vec{n}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}(-h_x\vec{i} - h_y\vec{j} + \vec{k})\,.$$

При таком выборе поле $\vec{n}$ составляет острый угол с ортом $\vec{k}$, т.е. поле нормалей к поверхности $\mathscr{M}$ направлено вверх.

Рассмотрим определенное на поверхности $\mathscr{M}$ векторное поле $\vec{F}$ специального вида : $\vec{F}(x,y,z) = R(x,y,z)\vec{k}$, где $R\colon \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. В этом случае существенно упрощаются и выкладки, приводящие к (6), и сама формула (6). Если D – квадрируемое подмножество поверхности $\mathscr{M}$, то

$$I(\vec{F}, D) = \iint\limits_K R[x,y,h(x,y)]\,dx\,dy\,, \tag{7}$$

где K – проекция фигуры D на плоскость Oxy.

Рассмотрим область G_z в трёхмерном пространстве $Oxyz$, определяемую соотношениями

$$G_z = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3, (x,y) \in K, \alpha(x,y) < z < \beta(x,y)\}\,,$$

где $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ – функции, определённые и непрерывно дифференцируемые на некотором открытом подмножестве W плоскости Oxy, K – принадлежащий W квадрируемый компакт с кусочно гладкой границей ∂K. Краткости ради, область G_z, удовлетворяющую перечисленным условиям , будем называть выпуклой относительно оси Oz. Граница ∂G_z области G_z состоит из трёх частей $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, \mathscr{M}_0$, где

$$\mathscr{M}_1 = \{(x,y,z) : z = \beta(x,y), (x,y) \in \mathring{K}\} - \quad \text{верхняя часть границы}\,,$$

$$\mathscr{M}_2 = \{(x,y,z) : z = \alpha(x,y), (x,y) \in \mathring{K}\} - \quad \text{нижняя часть границы}\ \,,$$

$$\mathscr{M}_3 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial K, \alpha(x,y) \leqslant z \leqslant \beta(x,y)\} - \quad \text{боковая часть границы}\ \,.$$

Очевидно, что $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2$ - гладкие поверхности, гладкость $\mathscr{M}_3$ зависит от гладкости ∂K. В качестве нормали n берём внешнюю к G_z нормаль. Если поле $\vec{F} = R\vec{k}$, то справедливы соотношения

$$I(\vec{F}, \partial G_z) \overset{(I)}{=} I(\vec{F}, \mathscr{M}_1) \ + \ I(\vec{F}, \mathscr{M}_2) \ + \ I(\vec{F}, \mathscr{M}_3) \ =$$

$$\stackrel{(II)}{=} \int\limits_K \left(R[x, y, \beta(x, y)] - R[x, y, \alpha(x, y)]\right)\, dx\, dy\,. \tag{8}$$

Соотношение (I) - это определение потока поля $\vec{F}$ в рассматриваемом случае. Для доказательства (II) достаточно установить равенства

$$I(\vec{F}, \mathscr{M}_1) \;=\; \int\limits_K R[x, y, \beta(x, y)]\, dx\, dy\,, \tag{9}$$

$$I(\vec{F}, \mathscr{M}_2) \;=\; -\iint\limits_K R[x, y, \alpha(x, y)]\, dx\, dy\,, \tag{10}$$

$$I(\vec{F}, \mathscr{M}_3) \;=\; 0\,. \tag{11}$$

Равенство (9) следует из (7). Для доказательства (10) достаточно учесть, что внешняя нормаль к области G_z в точках из $\mathscr{M}_2$ направлена вниз, а кроме того следует снова воспользоваться равенством (7). Равенство (10) очевидно, поскольку нормаль в точках поверхности $\mathscr{M}_3$ перпендикулярна к вектору $\vec{k}$.

Предположим, что функция $R(x, y, z)$ и её частная производная $\dfrac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$ определены и непрерывны по совокупности переменных в области G_z. Из теоремы Фубини, формулы Ньютона-Лейбница и равенства (8) последовательно получаем

$$\iiint\limits_{G_z} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \;=\; \iint\limits_K \, dx\, dy \int\limits_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dz$$

$$= \iint\limits_K \left(R[x, y, \beta(x, y)] - R[x, y, \alpha(x, y)]\right)\, dy \;=\; I(R\vec{k}, \partial G_z)\,. \tag{12}$$

Фигуру G в трёхмерном пространстве $Oxyz$ назовём простой (относительно оси z), если существуют выпуклые относительно оси z области $G_1, \ldots, G_N$ такие, что

$$G = \bigcup_{p=1}^{N} G_p,\ \ \mathring{G}_p \bigcap \mathring{G}_q = \varnothing\,. \tag{13}$$

Лемма 1 . *Пусть G – простая относительно оси z фигура. Пусть сужение функции $R\colon G \to \mathbb{R}$ на каждую из областей G_p, фигурирующих в (13), непрерывно вместе с частной производной $\dfrac{\partial R}{\partial z}$. Тогда имеет место равенство*

$$I(R\vec{k}, \partial^+ G) = \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,. \tag{14}$$

◀ Согласно формуле (12) справедливы соотношения

$$I(R\vec{k}, \partial G_p) = \iiint\limits_{G_p} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.\ (p = 1, \ldots, N)$$

Суммируя данные соотношения по всем p от 1 до N, приходим к равенству

$$\sum_{p=1}^{N} I(R\vec{k}, \partial G_p) \ = \ \sum_{p=1}^{N} \iiint\limits_{G_p} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,. \tag{15}$$

Повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве леммы 1 пункта 3.1.5 , получаем, что правая часть (15) равна правой части (14) - в сущности это вытекает из свойства аддитивности интеграла. Несколько сложнее усматривается, что левая часть (15) равна левой части (14). Здесь следует учесть, что если границы областей G_p и G_q пересекаются по какой-то фигуре D, то внешние нормали к областям G_p и G_q в точках из D имеют противоположное направление. Это влечёт за собой противоположность соответствующих поверхностных интегралов и совпадение левой и правой частей (14), (15).▶

Аналогичным образом вводится понятие фигуры, простой относительно координатных осей Ox и Oy. Именно, фигура G называется простой относительно оси Ox (Oy), если существуют выпуклые относительно оси Ox (соответственно, относительно оси Oy) области G_p $(p = 1, \ldots, N)$, удовлетворяющие условиям (13). Верен следующий вариант леммы 1.

Лемма 2. *Пусть G – простая фигура относительно оси Ox (или относительно оси Oy). Пусть сужение функции $P\colon G \to \mathbb{R}$ на каждую из областей G_p, фигурирующих в (13), непрерывно вместе с частной производной $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)$ (соответственно сужение функции $Q\colon G \to \mathbb{R}$ на области G_p непрерывно вместе с частной производной $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)$). Тогда имеет место равенство*

$$I(P\vec{i}, \partial^+ G) \ = \ \iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,, \tag{16}$$

соответственно,

$$I(Q\vec{j}, \partial^+ G) \ = \ \iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\ dy\,dz\,. \tag{17}$$

◀ Доказательство леммы 2 совершенно аналогично доказательству леммы 1, поэтому опускается.▶

Формула Гаусса - Остроградского связывает поверхностный и тройной интегралы.

Теорема 1. *Пусть фигура G и функции P, Q, R удовлетворяет условиям лемм 1, 2. Тогда имеет место соотношение*

$$\iint\limits_{\partial^+ G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,, \qquad (18)$$

называемое формулой Гаусса - Остроградского.

◀ Достаточно сложить равенства (14), (16) и (17). ▶

Более выразителен и нагляден векторный аналог формулы (18). Сопоставим тройке функций P, Q, R непрерывное векторное поле $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ и скалярную функцию

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\,,$$

называемую *дивергенцией (расходимостью)* поля F и обозначаемую символом $div\vec{F}$. Это понятие один раз уже вводилось в нашем курсе (формула Лиувилля дифференцирования интегралов по переменной области интегрирования). Формула (18) в векторных обозначениях выглядит следующим образом

$$I(\vec{F}, \partial^+ G) = \iiint\limits_G \; div\,\vec{F}\,dx\,dy\,dz\,. \qquad (19)$$

В литературе встречается ещё одна версия формулы (18):

$$\iint\limits_{\partial G} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz\,. \qquad (20)$$

Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности ∂G, ограничивающей фигуру G.

Можно показать, что формула Гаусса - Остроградского справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа гладких плверхностей. Доказательство этого факта можно найти в более подробных руководствах по математическому анализу (см., например, [9],[15],[18],[19]). Мы же обратимся к некоторым следствиям данной формулы.

3.3.4 Следствия формулы Гаусса-Остроградского

Ниже G – область в пространстве $Oxyz$ с гладкой границей $\partial G, \vec{n}$ – поле внешних нормалей к ∂G, α, β, γ – углы, образованные внешней нормалью $\vec{n}$ с координатными ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Считаем , что векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и область G удовлетворяют предположениям, гарантирующим справедливость формулы Гаусса-Остроградского.

Следствие 1. *Если* $div\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \equiv 1$ *, то объём области* G *равен интегралу*

$$\iint\limits_{\partial G} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,; dS$$

в частности, справедлива чаще всего используемая формула

$$V(G) = \frac{1}{3}\int\limits_{\partial G} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS\,.$$

Следствие 2. (Правило интегрирования по частям для кратных интегралов). *Пусть* u, φ *– непрерывно диференцируемые на открытом множестве* $\mathscr{U} \supset \overline{G}$ *функции. Тогда справедливы формулы интегрирования по частям*

$$\iiint\limits_{G} u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} u\varphi\cos\alpha\, dS - \iiint\limits_{G} \varphi\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\,, \tag{21}$$

$$\iiint\limits_{G} u\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} u\varphi\cos\beta\, dS - \iiint\limits_{G} \varphi\frac{\partial u}{\partial y}\, dx\, dy\, dz\,, \tag{22}$$

$$\iiint\limits_{G} u\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} u\varphi\cos\gamma\, dS - \iiint\limits_{G} \varphi\frac{\partial u}{\partial z}\, dx\, dy\, dz. \tag{23}$$

◀ Для доказательства (21) применим равенство (20) в случае $P = u\varphi, Q = R = 0$. Имеем тогда

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\partial G} u\varphi\cos\alpha\, dS\,. \tag{24}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial x}(u\varphi) = u\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\varphi$, то (24) влечёт за собой (21). Равенства (22), (23) доказываются аналогично.▶

Особенно просто формулы (21)- (23) в случае, если $\varphi = 0$ на ∂G. Например, формула (21) приводит к равенству

$$\iiint\limits_{G} u\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = -\iiint\limits_{G} \varphi\frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Это равенство легко обобщается на n - мерный случай. Например, для любой n – мерной области Ω и любых функций u, φ класса $C^1(\Omega)$, причём функция φ финитна, т.е. равна 0 вблизи $\partial\Omega$, имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx\,. \tag{25}$$

Равенство (25) было использовано Соболевым[16] для обобщения понятия производной. Пусть, например, u, v – интегрируемые в области Ω функции. Если для любой финитной гладкой функции φ верно равенство

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega}\varphi v\,dx\,,$$

то функцию v называют производной функции u по переменной x_i (производная в смысле Соболева). Это определение оказалось весьма плодотворным и в сочетании с многомерным интегралом Лебега часто используется в математической физике.

Следствие 3. *Пусть в трёхмерном открытом множестве Ω задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{F}\colon \Omega \to \mathbf{R}^3$. Пусть $A \in \Omega, \mathscr{B}(A,\varepsilon)$ - содержащийся в Ω шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке A, $S^+\varepsilon$ – граница этого шара, ориентированная посредством внешней нормали. Тогда имеет место равенство*

$$div\,F(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I(\vec{F}, S^+\varepsilon)}{V(\mathscr{B}(A,\varepsilon))}\,. \tag{26}$$

◀ В силу формулы Гаусса-Остроградского

$$I(\vec{F}, S^+\varepsilon) = \iiint\limits_{B(A,\varepsilon)} div\vec{F}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Теперь требуемое утверждение вытекает из непрерывности скалярной функции $A \to divF(A)$.▶

Величины, входящие в правую часть (26), не зависят от выбора системы координат. Поэтому отсюда следует, что дивергенция векторного поля также не зависит от выбора системы координат.

В качестве примера рассмотрим векторное поле

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\,, \tag{27}$$

возникающее в задачах геометрии и физики.

Упражнение 1. *Проверьте, что поле (27) всюду вне нулевой точки непрерывно дифференцируемо и $div\vec{F}(\vec{r}) = 0$.*

Упражнение 2. *Покажите, что поток векторного поля (27) через гладкую, гомеоморфную сфере поверхность $\mathscr{M}$, охватывающую начало координат, равен потоку этого же поля через поверхность сколь угодно малой сферы $|x| = \varepsilon$. Проверьте, что этот поток равен 4π.*

Упражнение 3. *Вычислите поток векторного поля (27) по границе компактной области G, рассмотрев как случай, когда G содержит внутри себя начало координат O, так и случай, когда O лежит вне фигуры G.*

[16] Соболев С.Л. (1908 - 1989) – русский математик

3.3.5 Формула Стокса

Пусть векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ определено в некоторой окрестности $\mathscr{U}(A)$ точки A. Поле $\vec{F}$ дифференцируемо в точке A, если его приращение может быть представлено в виде

$$\Delta\vec{F} = \Lambda\Delta\vec{r} + o(|\Delta\vec{r}|)\,,$$

где Λ – линейное отображение в пространстве $\mathbf{R}^3$. Назовём ротором векторного поля $\vec{F}$ в точке A ротор линейного отображения Λ.

Матрица линейного отображения Λ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix}.$$

Поэтому согласно формулам , установленным в пункте (3.2.2), получим

$$rot\vec{F} = (R_y - Q_z)\vec{i} + (P_z - R_x)\vec{j} + (Q_x - P_y)\vec{k}\,. \tag{28}$$

Введём символический векторный дифференциальный оператор набла (оператор Гамильтона[17])

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Если теперь, следуя Гамильтону, обращаться с ∇ как с заданным в декартовых координатах векторным полем, то приходим к следующему представлению ротора

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\,. \tag{29}$$

С той же степенью условности можно сказать, что применение оператора ∇ к числовой функции $f(x, y, z)$ даёт векторное поле

$$\nabla f = \vec{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}\,, \tag{30}$$

т.е. оператор набла есть записанный в других обозначениях оператор вычисления градиента функции f. Дивергенция векторного поля $\vec{F}$ также выражается через оператор ∇. Действительно,

$$div\ F = (\nabla, \vec{F}) = P_x + Q_y + R_z\,. \tag{31}$$

[17]Гамильтон У.(1805 - 1865) – ирландский математик и астроном

Соотношения между операциями (29) - (31) анализируются в следующем разделе. При этом оказываются верными равенства, которые возникают , если считать ∇ не формальным, а настоящим вектором.

Пусть $\mathscr{M}$ – гладкая поверхность в трёхмерном пространстве $Oxyz$, определяемая параметрическим уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k};$$

здесь $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ – функции, определённые и дважды непрерывно дифференцируемые на открытом множестве $W \subset \mathbf{R}^2$. Пусть $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ – непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности поверхности $\mathscr{M}$ векторное поле. В частности, определена и непрерывно дифференцируема в области W суперпозиция $\vec{F} \circ \vec{r}$: $W \to \mathbf{R}^3$; частные производные от функции $\vec{F} \circ \vec{r}$ могут быть вычислены по обычным правилам дифференцирования суперпозиции функций. В силу предположений относительно вектор-функций $\vec{F}, \vec{r}$ в области W определена и непрерывна функция

$$H(u,v) \ = \ \frac{\partial}{\partial u}\left(\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_v\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_u\right) .$$

Имеют место соотношения (комментарии к ним проводятся ниже)

$$H(u,v) \stackrel{(I)}{=} (\vec{F}'(\vec{r})\vec{r}_u, \vec{r}_v) + (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_{uv}) - (\vec{F}'(\vec{r})\vec{r}_v, \vec{r}_u) - (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_{vu}) =$$

$$\stackrel{(II)}{=} (\vec{F}'(\vec{r})\vec{r}_u, \vec{r}_v) - (\vec{r}_u, \vec{F}'(\vec{r})\vec{r}_v) \stackrel{(III)}{=} (rot\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_u \times \vec{r}_v) .$$

Теперь необходимые пояснения : первое равенство - используется правило дифференцирования суперпозиции, соотношение (II) вытекает из совпадения частных производных $\vec{r}_{uv}$ и $\vec{r}_{vu}$, наконец, третий переход основан на определении ротора и лемме 1 п. 3.2.2.

Пусть γ – кусочно гладкий путь, содержащийся в открытом множестве W и определяемый уравнениями $u = u(t),\ v = v(t),\ \ a \leqslant t \leqslant b$. Тогда суперпозиция $\Gamma = \vec{r} \circ \gamma$ есть кусочно гладкий путь, принадлежащий поверхности $\mathscr{M}$, определяемый уравнениями

$$x = x[u(t), v(t)],\ \ y = y[u(t), v(t)],\ \ z = z[u(t), v(t)]\ \ (a \leqslant t \leqslant b) .$$

Справедливы равенства

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b P[x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))] x_t'(u(t),v(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{\gamma} P[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial u} \, du + \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \, dv \right] .$$

Аналогичным образом устанавливаются соотношения

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x,y,z)\, dy \ = \ \int\limits_{\gamma} Q[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \left[\frac{\partial y(u,v)}{\partial u} \, du + \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \, dv \right] ,$$

$$\int\limits_{\Gamma} R(x,y,z)\, dz \ = \ \int\limits_{\gamma} R[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \left[\frac{\partial z(u,v)}{\partial u} \, du + \frac{\partial z(u,v)}{\partial v} \, dv \right] .$$

Складывая полученные равенства и используя векторную символику, приходим к формуле замены переменных в криволинейном интеграле второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \ = \ \int\limits_{\gamma} (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_u)\, du + (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_v)\, dv\,. \tag{32}$$

Предположим теперь, что γ совпадает с положительно ориентированной границей $\partial^+\Omega$ плоской области $\Omega \subset W$, для которой справедлива формула Грина. Пусть

$$\vec{n} \ = \ \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

– ориентация на поверхности $\mathscr{M}$, $G = \vec{r}(\Omega)$ – образ области Ω при отображении $\vec{r}$. В этом случае говорят, что контур Γ ограничивает поверхность G и пишут $\Gamma = \partial^+ G$.

Теорема 2. *Пусть векторное поле $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и поверхность G удовлетворяют перечисленным выше условиям гладкости. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{\partial^+ G} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{G} (rot\vec{F}, \vec{n})\, dS\,, \tag{33}$$

называемое формулой Стокса[18].

◀ Равенство (33) вытекает из цепи соотношений

$$\int\limits_{\partial^+ G} P\, dx + Q\, dy + R\, dz \overset{(I)}{=} \int\limits_{\gamma} (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_u)\, du + (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_v)\, dv \ =$$

$$\overset{(II)}{=} \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial u} (\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_v)) - \frac{\partial}{\partial v} (\vec{F}(\vec{r}) \vec{r}_u \right] du\, dv \ = \ \iint\limits_{\Omega} H(u,v)\, du\, dv \ =$$

$$\overset{(III)}{=} \iint\limits_{\Omega} (rot\vec{F}(\vec{r}), \vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv \overset{(IV)}{=} \int\limits_{G} (rot\vec{F}, \vec{n})\, dS\,.$$

[18]Стокс Д. (1819 - 1903) – английский физик и математик

Осталось лишь дать пояснения. Соотношение (I) следует из формулы (32), (II) – результат применения формулы Грина к области Ω, переход (III) основан на выведенной в начале пункта формуле для представления функции $H(u,v)$, наконец , (IV) это по существу определение потока векторного поля $rot\vec{F}$ через поверхность G. ▶

Координатный вариант формулы Стокса имеет вид

$$\int\limits_{\partial^+ G} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{G} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \tag{34}$$

или

$$\int\limits_{\partial^+ G} P\,dx \ + \ Q\,dy \ + \ R\,dz \ =$$

$$= \int\limits_{G} \left[(R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma \right] dS\,. \tag{35}$$

Обсудим способ выбора нормали $\vec{n}$ на примере поверхности $\mathscr{M}$, определяемой как график функции $z = h(x,y)$, $((x,y) \in W \subset \mathbf{R}^2$. Пусть γ совпадает с положительно ориентированной границей $\partial^+\Omega$ области Ω, принадлежащей вместе с замыканием открытому множеству W. В этом случае контур γ является проекцией контура Γ на плоскость Oxy. Нормаль $\vec{n}$, как было показано ранее, направлена вверх, т.е. образует острый угол с осью Oz. Поэтому если смотреть на поверхность G с положительного направления оси Oz, то контур Γ будет ориентирован против часовой стрелки.

Это эквивалентно тому, что наблюдатель, обходящий поверхность G по ориентированному контуру Γ и смотрящий на поверхность G из конца нормали $\vec{n}$, видит поверхность G слева. Такая интерпретация согласованности ориентации нормали $\vec{n}$ и контура Γ имеет то преимущество, что она не связана с выбором системы координат и верна для любой поверхности G, рассматриваемой в теореме Стокса.

Остановимся на некоторых обобщениях формулы Стокса. Прежде всего заметим, что формула Стокса остаётся справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура и противоположные нормали. Действительно, в этом случае обе части равенства (33) изменят знак на противоположный.

Формула Стокса может быть доказана и для кусочно гладкой поверхности. Пусть, например, поверхность можно разрезать на конечное число гладких кусков, для которых формула Стокса справедлива. Запишем формулу Стокса для каждого куска и сложим соответствующие равенства. При сложении криволинейные интегралы по разрезам взаимно уничтожатся, так как разрезы входят в ориентированные куски с противоположными ориентациями. Останутся только криволинейные интегралы по краю рассматриваемой поверхности. Сумма потоков через куски даст, в силу аддитивности интеграла, поток через всю поверхность, следовательно, формула Стокса справедлива и для кусочно гладкой поверхности.

Предполагаемое в теореме 2 условие двукратной непрерывной дифференцируемости отображения $\vec{r}$ было наложено только для простоты доказательства. Формула (33) остаётся верной и в предположении однократной непрерывной дифференцируемости функции $\vec{r}$. Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

Формула Стокса даёт возможность получить геометрический подход к понятию ротора векторного поля.

Теорема 3. *Пусть векторное поле* $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ *определено и непрерывно дифференцируемо в трёхмерной области* $\mathscr{U}$. *Пусть* $A \in \mathscr{U}$, $\vec{n}$ *– произвольный вектор единичной длины,* Π *–плоскость, проходящая через точку* A *с нормалью* $\vec{n}$, $\mathscr{K}_\varepsilon$ *– принадлежащий* $\Pi \cap \mathscr{U}$ *круг с центром в точке* A *радиуса* ε. *Тогда*

$$(rot\vec{F}(A), \vec{n}) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\partial^+ \mathscr{K}_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,. \tag{36}$$

◄ По формуле Стокса

$$\int\limits_{\partial^+ \mathscr{K}_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\mathscr{K}_\varepsilon} (rot\vec{F}, \vec{n})\,dS\,.$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{\mathscr{K}_\varepsilon} (rot\vec{F}, \vec{n})\,dS = \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{\partial^+ \mathscr{K}_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

В силу гладкости векторного поля $\vec{F}$ предел левой части последнего равенства при $\varepsilon \to 0$ существует и равен левой части (36). Это и приводит к доказываемому утверждению.►

Из равенства (36) следует, что правая часть этого равенства может быть принята за определение проекции поля $\vec{F}$ на произвольный нормированный вектор $\vec{n}$. Это приводит к новому определению ротора, поскольку достаточно взять три взаимно ортогональных вектора $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, проекциями на которые однозначно определяется любой вектор.

Можно показать, что правая часть (36) не зависит от выбора правой декартовой системы координат. Поэтому и $rot\vec{F}$ не зависит от выбора правой координатной системы. При изменении ориентации пространства вектор $rot\vec{F}$ меняет знак.

Сходство в формулах Грина, Гаусса-Остроградского , Стокса наводят на мысль о существовании некоего их обобщения. Соответствующее обобщение на языке дифференциальных форм для поверхностей в $\mathbf{R}^n$, было, по-видимому, впервые предложено Пуанкаре[19]. Оно выглядит исключительно элегантно

$$\int\limits_G d\omega = \int\limits_{\partial^+ G} \omega$$

– формула Ньютона - Лейбница - Грина - Гаусса - Остроградского - Стокса - Пуанкаре. Историки настаивают на неполноте этого названия. Основная возникающая здесь трудность связана с аккуратным определением встречающихся понятий - дифференциальная форма, ориентация, многообразие и т.п. В настоящее время имеется немало монографий, в которых соответствующая теория изложена с исключительной ясностью (см., например, [1], [3], [7], [9] - [11], [13] - [16], [18], [19]; приведённый список также не претендует на полноту) .

3.4 Потенциальные и соленоидальные векторные поля

3.4.1 Потенциальные гладкие векторные поля

Напомним некоторые определения. Пусть Ω – область в $\mathbf{R}^n$, т.е. открытое линейно связное множество в $\mathbf{R}^n$. Это равносильно следующим условиям : множество Ω открыто и для любых двух точек из Ω существует ломаная линия, соединяющая эти точки и содеожащаяся в множестве Ω.

Отображение $F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ называют векторным полем. Терминология взаимствована из физики, где $F(x)$ обычно интерпретируется как сила, приложенная к точке x: в этом случае F называют силовым полем. Иногда F интерпретируется как поле скоростей перемещающейся в области Ω частицы. С такого рода интерпретацией мы знакомились, когда выясняли гидродинамический смысл потока жидкости через поверхность.

Поле $F(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n$ называют потенциальным, если существует такая дифференцируемая на области Ω функция $g(x) = g(x_1, \ldots, x_n)$, что $\dfrac{\partial g}{\partial x_i} = F_i(x)$ $(x \in \Omega,\ i = 1, \ldots, n)$. В векторном виде это может быть записано следующим образом

$$F(x) = \nabla g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)e_i\,. \tag{1}$$

Функция $g(x)$ называется потенциалом векторного поля $F(x)$. Если $g_1(x)$ – еще один потенциал векторного поля $F(x)$, то $\nabla(g(x)-g_1(x)) \equiv 0$ в области Ω, поэтому функция $g(x) - g_1(x)$ постоянна в Ω. Таким образом, потенциал векторного поля определяется однозначно (с точностью до постоянного слагаемого).

[19]Пуанкаре А. (1854 - 1912) – французский математик и астроном

Далее рассматриваются лишь непрерывные векторные поля. Не всякое векторное поле потенциально. Для непрерывно дифференцируемых векторных полей можно указать легко проверяемое необходимое условие потенциальности.

Теорема 1._Если поле_ $F(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n$ _потенциально, то_

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad (x \in \Omega;\ i, j = 1, \ldots, n)\,. \tag{2}$$

◀ Пусть выполнено соотношение (1), т.е. $F_i(x) = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x)$ $(x \in \Omega; i = 1, \ldots, n)$. Тогда $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$. Аналогичным образом устанавливается равенство $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. Теперь теорема 1 вытекает из совпадения смешанных производных.▶

Пусть $n = 3, F(x) = F_1(x)e_1 + F_2(x)e_2 + F_3(x)e_3$. Сопоставим гладкому векторному полю $F(x)$ непрерывное векторное поле

$$rot F(x) := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}\,,$$

называемое ротором векторного поля $F(x)$. Из теоремы 1 вытекает

Следствие. _Для потенциальности гладкого трёхмерного векторного поля_ $F(x)$ _необходимо, чтобы_ $rot F(x) = 0\ \forall x \in \Omega$.

Для некоторых областей условие (2) не только необходимое , но и достаточное условие потенциальности. Назовём область Ω звёздной относительно точки x_0, если для любого элемента x из Ω отрезок $[x_0, x] \overset{def}{=} \{z \in \mathbf{R}^n, z = x_0 + t(x - x_0),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ принадлежит области Ω. Выпуклая область звёздна относительно любой точки x_0 из Ω. Бывают области , звёздные относительно точки , но невыпуклые. Достаточно, например, рассмотреть множество точек x в $\mathbf{R}^n$, координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{|x_i|}\ <\ 1\,.$$

Теорема 2. _Пусть область_ Ω _звёздна относительно некоторой точки_ x_0 _из_ Ω , $F(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n$ _– векторное поле класса_ $C^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$ _и выполнено условие (2). Тогда_ F _– потенциальное векторное поле._

◀ Будем считать, что область Ω звёздна относительно начала координат. Это означает, что вместе с точкой x область Ω содержит отрезок $[0, x]$, т.е. $tx \in \Omega$ для всех t из отрезка $[0, 1]$. Введем в рассмотрение функцию

$$g(x)\ =\ \int\limits_0^1 (F(tx), x)\,dt\,. \tag{3}$$

Покажем, что функция $g(x)$ есть потенциал векторного поля $F(x)$. Фиксируем элементы x из Ω и h из $\mathbf{R}^n$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda) = g(x+\lambda h) = \int_0^1 (x+\lambda h, F(t(x+\lambda h)))\,dt\,.$$

Функция $\varphi(\lambda)$ дифференцируема по λ; производную $\varphi'(\lambda)$ можно найти по правилу Лейбница. Последовательно получаем равенства

$$\varphi'(\lambda) \;=\; \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\lambda}(x+\lambda h, F(t(x+\lambda h)))\,dt \;=$$

$$= \int_0^1 (h, F(t(x+\lambda h)))\,dt \;+\; \int_0^1 (x+\lambda h, F'(t(x+\lambda h))th)\,dt\,;$$

в частности,

$$\varphi'(0) = \int_0^1 (h, F(tx))\,dt \;+\; \int_0^1 t(x, F'(tx)h)\,dt\,.$$

В силу условий (2) матрица $F'(x) = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ симметрична, поэтому

$$(x, F'(tx)h) = (F'(tx)x, h) \;\text{ и }\; (x, F'(tx)h) = (F'(tx)x, h) = \frac{d}{dt}((F(tx), h))\,.$$

Объединяя установленные равенства, получаем цепь соотношений

$$g'(x,h) \;=\; \varphi'(0) \;=\; \int_0^1 (h, F(tx))\,dt \;+$$

$$+\int_0^1 t\frac{d}{dt}(F(tx), h)\,dt \overset{(I)}{=}\; t\,(F(tx), h)\big|_0^1 \;=\; (F(x), h)\,.$$

Соотношение (I) вытекает из правила интегрирования по частям и формулы Ньютона-Лейбница. При $h = e_i$ имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = g'(x, e_i) = F_i(x)\;(i \;=\; 1, \ldots, n)\,,$$

что и требовалось доказать.▶

Теорема 2 – весьма частный случай общего результата Пуанкаре, формулируемого в терминах дифференциальных форм. Предположения о векторном поле F и области Ω достаточно обозримы, но выглядят слишком жёсткими. Приведём несколько примеров.

Пример 1. Поле вида $F(x) = \psi(|x|)x$, где ψ – произвольная непрерывная на луче $(0, \infty)$ функция, называется *центральным полем.* Оно определено и непрерывно в области $\Omega = \mathbf{R}^n \setminus \mathbf{0}$. Каждое центральное поле потенциально. Действительно, положив

$$g(x) = \int\limits_1^{|x|} \psi(s)s\,ds,$$

мы получим, что $F(x) = \nabla g(x)$. В этом примере область Ω не является звёздной, за счёт выбора функции ψ можно добиться, что поле F не будет дифференцируемой ни в одной точке области Ω.

Пример 2. Пусть $n = 2, \Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ – плоскость с выколотым началом координат, $F_1(x_1, x_2) = \dfrac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$, $F_2(x_1, x_2) = -\dfrac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. Векторное поле $F(x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2)e_1 + F_2(x_1, x_2)e_2$ непрерывно дифференцируемо в области Ω и удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\,.$$

Вместе с тем в рассматриваемой области поле $F = F_1e_1 + F_2e_2$ непотенциально. Действительно, пусть γ – окружность на плоскости, определяемая уравнениями $x_1 = R\cos t, x_2 = R\sin t$ $(R > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Подсчёт показывает, что

$$\int\limits_\gamma F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 = 2\pi \neq 0\,.$$

Поэтому поле F не может быть потенциальным.

3.4.2 Потенциальные непрерывные векторные поля

Обсудим некоторые модификации теоремы 2, а заодно укажем способ построения потенциала векторного поля. Ниже Ω – область в $\mathbf{R}^n$,$F(x) = F_1(x)e_1 + \cdots + F_n(x)e_n$ – непрерывное векторное поле в области Ω.

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны :*

1) векторное поле F потенциально;

2) для любого кусочно гладкого замкнутого пути γ, содержащегося в области Ω, верно равенство

$$\int\limits_\gamma \sum_{i=1}^n F_i(x)\,dx_i = 0\,; \tag{4}$$

3) интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{A_0A_1}} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\,dx_i$$

не зависит от кусочно гладкого пути $\Gamma_{A_0A_1}$, соединяющего точки A_0A_1 из Ω и принадлежащего области Ω.

◀ Доказательство проводится по схеме 1) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 2).

Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) доказывалась ранее (см.(п. 3.1.3)). Установим противоположную импликацию : 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть x_0 – фиксированная точка области Ω. Для любой точки x из области Ω существует кусочно гладкий путь Γ_{x_0x}, соединяющий точки x_0, x и содержащийся в области Ω ; в качестве подобного пути можно всегда взять ломаную линию. Докажем, что функция

$$g(x) = \int\limits_{\Gamma_{x_0x}} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\,dx_i \tag{5}$$

есть потенциал векторного поля F. Выбор пути , соединяющего точки x_0, x не имеет значения. Пусть шар $\mathscr{B}(x,R) = \{z \in \mathbf{R}^n, |z-x| \leqslant R\}$ при некотором положительном R принадлежит области Ω. Фиксируем ненулевой вектор h из $\mathbf{R^n}$. Если $s \in \mathbb{R}$ и $|s| \leqslant \frac{R}{|h|}$, то элемент $x+sh$ принадлежит шару $\mathscr{B}(x,R)$, а, значит, и области Ω. Следовательно, функция $\varphi(s) = g(x+sh)$ определена на некотором отрезке $[0,\delta]$ положительной длины δ. Если Γ_{x_0x} – путь, соединяющий точки x_0, x, то путь

$$\Gamma_{x_0\ x+sh} \ = \ \Gamma_{x_0x} \cup [x, x+sh] \qquad (|s| \leqslant \delta)$$

соединяет точки x_0 и $x+sh$. Отсюда вытекают равенства

$$g(x+sh) - g(x) = \int\limits_{\Gamma_{x_0\ x+sh}} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\,dx_i - \int\limits_{\Gamma_{x_0\ x}} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\,dx_i \ =$$

$$= \int\limits_{[x\,x+sh]} \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\,dx_i \ = \int\limits_0^s (F(x+th), h)\,dt\,,$$

$$\frac{g(x+sh)-g(x)}{s} \ = \ \frac{1}{s}\int\limits_0^s (F(x+th), h)\,dt \quad (0 < |s| \leqslant \delta)\,.$$

Устремляя s к нулю, получаем в пределе соотношение $g'(x,h) = (F(x),h)$, из которого (ввилу произвольности вектора h) и вытекает требуемый результат: $\nabla g(x) = F(x)$. Таким образом, 3) $\Rightarrow$ 1).

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Действительно, пусть $\omega = F_1\,dx_1 + \cdots + F_n\,dx_n$ – дифференциальная форма , γ_1, γ_2 – два пути, содиняющих точки A_0, A. Тогда

$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ – замкнутый путь, поэтому $\int\limits_\gamma \omega = 0$, а это эквивалентно тому, что $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2} \omega$.

Наконец, установим импликацию 3) $\Rightarrow$ 2). Любой замкнутый путь γ можно представить в виде объединения путей γ_1 и $-\gamma_2$, где γ_1, γ_2 – пути, соединяющие точки A_0, A_1 , принадлежащие пути γ. Поэтому

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2} = 0\,. \blacktriangleright$$

Теорема 3 является обобщением теоремы 2. Однако её применение затруднительно, поскольку возникает необходимость проверки равенства (4) для любого содержащегося в области Ω кусочно гладкого пути. Из доказательства теоремы 3 следует , что достаточно ограничиться проверкой этого равенства лишь для замкнутых ломаных. Отметим конструктивный характер проведённого доказательства. Оно содержит способ фактического нахождения потенциала g. В качестве пути, соединящего фиксированную точку A_0 с переменной точкой A, обычно берут ломаную линию со звеньями, параллельными осям координат. Отметим без доказательства следующий факт.

Теорема . *Пусть область Ω такова, что любой замкнутый кусочно гладкий путь $\Gamma \subset \Omega$ непрерывно стягивается в точку, не выходя за пределы области Ω. Тогда гладкое векторное поле $F\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющее условию (2), потенциально.*

3.4.3 Повторные операции векторного поля

Пусть в области Ω трёхмерного пространства $\mathbf{R}^3$ заданы скалярная функция $u(x)$ класса C^2 и векторное поле $\vec{F}(z)$ класса C^2. В этом случае градиент ∇u представляет дифференцируемое векторное поле в Ω, $div\vec{F}$ – скалярную дифференцируемую функцию , а $rotF$ – дифференцируемое векторное поле. Поэтому возможны следующие повторные операции

$$rot\,\nabla u, \quad div\,\nabla u, \quad \nabla\, div\,\vec{F}, \quad div\,rot\,\vec{F}, \quad rot\,rot\vec{F}\,.$$

Справедливы равенства

$$rot\,\nabla u = 0, \qquad div\,rot\,\vec{F} = 0\,. \tag{6}$$

Левое из равенств (6) уже доказывалось. Для доказательства правого равенства введём в пространстве $\mathbf{R}^3$ прямоугольную систему координат $Oxyz$. В этой системе векторное поле $\vec{F}$ определяется равенством $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные орты, $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ – дважды непрерывно дифференцируемые в области Ω функции, координаты вектора $\vec{F}$. Поле $rot\,\vec{F}$ имеет координаты $\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)$, $\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)$, $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Из определения дивергенции векторного поля следуют равенства

$$div\, rot\vec{F} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0\,.$$

Таким образом, доказано правое из равенств (6) справедливо для системы координат . Отсюда вытекает его справедливость в любой системе координат.

Особый интерес представляет оператор $\triangle \overset{def}{=} div\,\nabla$, называемый оператором Лапласа. Он действует по формуле

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,.$$

С его помощью записываются важнейшие уравнения математической физики.

Оператор $\triangle$ можно применять и к векторным полям, воздействуя на каждую компоненту в отдельности: $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$, то

$$\triangle\vec{F}=(\triangle P)\vec{i}+(\triangle Q)\vec{j}+(\triangle R)\vec{k}\,.$$

Упражнение 1. *Имеет место формула*

$$rot(rot\,\vec{F})=\nabla\,div\vec{F}-\triangle\vec{F}\,.$$

Упражнение 2. *Пусть функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой области G трёхмерного пространства $Oxyz$. Показать, что*

$$v\,\triangle u - u\triangle v = div(v\,\nabla u - u\nabla v)\,.$$

Упражнение 3. *Пусть функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в замкнутой области $\overline{G}$ с гладкой границей ∂^+G. Доказать равенство*

$$\iiint\limits_G (v\triangle u - u\triangle v)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iint\limits_{\partial^+G}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\,dS,$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n}=(\nabla u,\vec{n}),\quad \frac{\partial v}{\partial n}=(\nabla v,\vec{n})\,,$$

$\vec{n}$ *–внешняя нормаль к ∂G.*

3.4.4 Соленоидальные векторные поля

Векторное поле $\vec{F}$, определённое в трёхмерной области Ω , называют *соленоидальным*, если в области Ω существует векторное поле $\vec{W}$, такое, что $rot\vec{W}=\vec{F}$. Поле $\vec{W}$ называют векторным потенциалом поля $\vec{F}$. Для гладкого векторного поля $\vec{F}$ легко указать критерий соленоидальности. Вначале приведём необходимое условие соленоидальности. Из отмечавшегося выше равенства $div\,rot\vec{W}=0$ следует

Теорема 4. *Если гладкое поле $\vec{F}$ соленоидально, то* $div\vec{F} = 0$.

В случае звёздной области Ω условие $div\vec{F} = 0$ достаточно для потенциальности поля $\vec{F}$. Справедлив следующий аналог теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть область Ω звёздна относительно какой-нибудь точки $O \in \Omega$. Пусть векторное поле $\vec{F}$ непрерывно дифференцируемо в области Ω и $div\vec{F} = 0$. Тогда поле $\vec{F}$ соленоидально.*

◀ Ограничимся лишь указанием способа построения векторного потенциала для случая, когда область Ω звёздна относительно начала координат $\vec{0}$. Искомый потенциал $\vec{W}$ может быть определён равенством

$$\vec{W}(\vec{r}) = \int\limits_0^1 t\vec{F}(t\vec{r}) \times \vec{r}\, dt\,. \quad (\vec{r} \in \Omega) \tag{7}$$

Векторное равенство (7) эквивалентно трём скалярным равенствам , связывающим компоненты векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{W}$. Именно, пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – ортонормированный базис в $\mathbf{R}^3$,

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad \vec{W} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}\,.$$

Соотношение $rot\vec{W} = \vec{F}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial z} = P, \\ \dfrac{\partial A}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial x} = Q, \\ \dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial y} = R \end{cases} \tag{8}$$

относительно функций A, B, C. Покомпонентная запись (7) выглядит более громоздко :

$$A(x,y,z) = \int\limits_0^1 t(Q(tx,ty,tz)z - R(tx,ty,tz)y)\, dt\,,$$

$$B(x,y,z) = \int\limits_0^1 t(R(tx,ty,tz)x - P(tx,ty,tz)z)\, dt\,,$$

$$C(x,y,z) = \int\limits_0^1 t(P(tx,ty,tz)y - Q(tx,ty,tz)x)\, dt\,.$$

Определённые таким образом функции A, B, C удовлетворяют системе (8) (проверяется непосредственно). ▶

Поскольку для любого потенциального поля $\vec{W}_0$ имеем $rot\vec{W}_0 = 0$, то векторный потенциал соленоидального поля определяется с точностью до слагаемого, являющегося потенциальным полем. Один из векторных потенциалов $\vec{W} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ поля $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ получают следующим образом: полагают $A = 0$; за B берут одну из первообразных функции R относительно переменной x; тогда C будет та из первообразных функции $-Q$ относительно переменной x, которая отвечает уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = P\,.$$

Таким образом,

$$B = \int R\,dx,\; C = -\int Q\,dx + \varphi(y,z),$$

где функция $\varphi(y,z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = P + \frac{\partial}{\partial z}Q + \frac{\partial}{\partial y}\int Q\,dx\,.$$

Выбирая одно из решений этого уравнения, окончательно определяем функции $A = 0, B, C$.

Приведём два примера соленодальных векторных полей. Первый пример связан с гидродинамикой : это поле скоростей несжимаемой жидкости. Второй пример относится к электродинамике - вектор напряжённости магнитного поля. Справедливости ради следует заметить, что основы векторных полей (в том числе и операции ∇, div, rot) были вначале изучены в работах физиков. Например, термин "вектор"и оператор ∇ введены Гамильтоном ; в знаменитой системе уравнений Максвелла[20], описывающей эволюцию электромагнитного поля, появляются операции div и rot.

3.4.5 Разное

Приложение 1. Теорема Гельмгольца[21]. Потенциальные и соленоидальные поля образуют специальные и достаточно узкие классы. Вместе с тем справедлива

Теорема Гельмгольца. *Произвольное гладкое векторное поле представимо в виде суммы потенциального и соленоидального векторных полей.*

◀ Пусть $\vec{F}$ – гладкое в трёхмерной области векторное поле, степень гладкости уточняется ниже. Положим $\vec{u} = \nabla\Phi, \vec{v} = \vec{F} - \nabla\Phi$, где Φ – гладкая функция, определяемая из условия $div\vec{v} = 0$, эквивалентного уравнению

$$\triangle\Phi = div\vec{F}\,, \tag{9}$$

[20]Максвелл Д.(1831 - 1879) – английский физик

[21]Гельмгольц Г. (1821 - 1893) – немецкий физик, математик, физиолог и психолог

называемого уравнением Пуассона. Уравнение (9) при весьма необременительных предположениях относительно функции F имеет решение Φ класса $C^2(\Omega)$ (достаточно, например, чтобы первые производные функции F удовлетворяли в области Ω какому- нибудь условию Гёльдера). Разложение $\vec{F} = \vec{u} + \vec{v}$ является искомым, поскольку потенциальность поля $\vec{u} = \nabla\Phi$ очевидна. ▶

Приложение 2. Вариант формулы Грина. В ряде случаев предпочтителен следующий вариант формулы Грина

$$\int\limits_{\partial G} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy\,.$$

Предположения относительно области G и функциях P, Q – такие же, как в ранее установленной формуле Грина, $\cos\alpha, \cos\beta$ – направляющие косинусы внешней (по отношению к области G) нормали.

Приложение 3. Поверхностные интегралы первого рода от векторных функций . Выше рассматривались поверхностные интегралы первого рода от скалярных функций. Это понятие легко переносится на векторные функции . Пусть $F(A) = F_1(A)e_1 + \cdots + F_p(A)e_p$ – векторная функция на поверхности $\mathscr{M}$ со значениями в пространстве $\mathbf{R}^p$. Определим интеграл от этой функции по поверхности $\mathscr{M}$, полагая

$$\iint\limits_{\mathscr{M}} F(A)\, dS = \sum_{q=1}^{p} e_q \iint\limits_{\mathscr{M}} F_q(A)\, dS\,.$$

Его называют *поверхностным интегралом первого рода от векторной функции* F. Значение этого интеграла представляет собой вектор. Интегралы данного вида возникают в задаче о вычислении силы, с которой материальная поверхность притягивает материальную точку.

В качестве примера установим равенство

$$\iint\limits_{\mathscr{M}} \vec{n}(A)\, dS = \vec{0}\,, \tag{10}$$

где $\mathscr{M}$ – граница ограниченной трёхмерной области D, к которой применима формула Гаусса-Остроградского, $\vec{n}(A)$ – внешняя нормаль к поверхности $\mathscr{M}$ в точке A . Для доказательства достаточно заметить, что дивергенция постоянного векторного поля равна нулю, поэтому для любого вектора $\vec{v}$ справедливо равенство

$$\iint\limits_{\mathscr{M}} (\vec{n}(A), \vec{v})\, dS = 0\,,$$

из которого и следует требуемый результат.

В случае выпуклой области D с достаточно регулярной границей $\mathscr{M}$ равенство (10) геометры записывают в виде

$$\iint\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi}{K(\xi)}\, dS = 0\,.$$

Здесь $K(\xi)$ – гауссова кривизна поверхности $\mathscr{M}$ в точке с внешней нормалью ξ.

Приложение 4. Повторные поверхностные интегралы. На поверхностные интегралы без труда переносится теорема Фубини о перестановке порядка интегрирования. В частности, пусть G_1, G_2 – ограниченные трёхмерные области с кусочно гладкими границами $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, f$ – скалярная функция , определённая и непрерывная на $\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2$. Тогда верно равенство

$$\iint\limits_{\mathscr{M}_2} dS_2 \iint\limits_{\mathscr{M}_1} f(A_1, A_2)\, dS_1 = \iint\limits_{\mathscr{M}_1} dS_1 \iint\limits_{\mathscr{M}_2} f(A_1, A_2)\, dS_2 -$$

теорема Фубини.

В качестве примера на применение теоремы Фубини читателю предлагается вывести один из геометрических результатов Коши. Именно, пусть K – выпуклое ограниченое тело в пространстве $\mathbf{R}^3$ с границей $\mathscr{M}$, $\Pi_{\vec{v}}$ – плоскость, проходящая через начало координат и перпендикулярная вектору $\vec{v}$, принадлежащему сфере $|\vec{w}| = 1$, $\Phi(\vec{v})$ – площадь проекции тела K на плоскость $\Pi_{\vec{v}}$, $S(M)$ – площадь поверхности $\mathscr{M}$. Справедлива формула Коши

$$S(M) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|\vec{v}|=1} \Phi(\vec{v})\, dS\,.$$

При доказательстве помимо теоремы Фубини следует использовать геометрически очевидное равенство

$$\Phi(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int\limits_{\mathscr{M}} |(\vec{n}(A), \vec{v})|\, dS\,,$$

в котором $\vec{n}(A)$ – вектор внешней нормали к поверхности $\mathscr{M}$ в точке A.

Литература

I. Основные учебники по математическому анализу

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. II. Изд. стереотип. 1980. М.: Наука.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. II, III. М.: Высшая школа, 1981.

5. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т. II. М.: Наука, 1990.

II. Дополнительная литература

6. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.

7. Булдырев В.С., Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных. Ленинград: Изд. ЛГУ , 1985.

8. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

9. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. II. М.: Наука, 1990.

10. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.

11. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.

13. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

14. Соболев В.И., Покорный В.В., Аносов В.И. Краткий курс математического анализа. Ч. II. Воронеж, 1984.

15. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

16. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

17. Фихтенгольц Г.М. Курс математического анализа. Т. III, М., Физматгиз, 1962.

18. Шварц Л. Анализ. Т. I, II. М.: Мир, 1972.

19. Шилов Г.Е. Математический анализ, функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.

20. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т. I, II, М.: Мир, 1985.