

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов

**Избранные задачи анализа
и вычислительной геометрии**

Часть II

Учебное пособие

Ярославль
ЯрГУ
2022

УДК 517+514(075.8)
ББК В16я73+В192.2я73
Н40

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2022 года*

Рецензенты:

кафедра математического анализа, теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского (заведующий кафедрой — доктор педагогических наук, профессор Е.И. Смирнов); Д. О. Бытев, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Ярославского государственного технического университета

Невский, Михаил Викторович.

Н40 Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии. Часть II : учебное пособие / М.В. Невский, А.Ю. Ухалов ; Яросл. гос. ун-т им. П.Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2022. – 92 с.

ISBN 978-5-8397-1224-9

В учебном пособии рассматриваются вопросы, связанные с многомерной интерполяцией на кубе и на шаре с помощью линейных функций. Приводятся различные неравенства для нормы интерполяционного проектора, отмечается связь с экстремальными задачами вычислительной геометрии. Излагаются вычислительные методы решения задач. Значительная часть материала в учебной литературе ранее не излагалась. Первая часть учебного пособия была опубликована в 2020 г.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Математика и компьютерные науки».

УДК 517+514(075.8)
ББК В16я73+В192.2я73

ISBN 978-5-8397-1224-9

© ЯрГУ, 2022

Оглавление

Предисловие	4
Основные определения и обозначения	5
1 Линейная интерполяция на n-мерном кубе	7
1.1 Постановка задачи интерполяции. Интерполяционный проектор	7
1.2 Соотношение между $\ P\ _{Q_n}$ и $\xi(S)$	10
1.3 Точные значения θ_n для $n = 1, 2, 3, 7$	15
1.4 Примеры и упражнения	25
2 Общие неравенства для θ_n	33
2.1 Симплексы максимального объёма в кубе. Оценки чисел ν_n	33
2.2 Многочлены Лежандра и мера множества $E_{n,\gamma}$	38
2.3 Неравенства вида $\theta_n \leq cn$	45
2.4 Оценка $\ P\ _{Q_n}$ через $\text{vol}(S)$	47
2.5 Неравенство $\theta_n > c\sqrt{n}$	49
2.6 Неравенство $\theta_n \leq \sqrt{n+1}$	52
3 Оценки θ_n для конкретных n	54
3.1 Верхние и нижние оценки θ_n	54
3.2 О выполнении неравенства $\xi_n < \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1$	59
4 Линейная интерполяция на n-мерном шаре	64
4.1 Соотношение между $\ P\ _B$ и $\xi(B; S)$	64
4.2 Норма проектора при интерполяции на шаре	66
4.3 Норма проектора для правильного симплекса, вписанного в шар	68
4.4 Точные значения $\theta_n(B_n)$ для $1 \leq n \leq 4$	75
4.5 Комментарии	76
4.6 Оценка $\ P\ _{B_n}$ через $\text{vol}(S)$	80
4.7 Соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$	83
Задания для самостоятельной работы	87
Литература	88

Предисловие

Первая часть учебного пособия «Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии» вышла в свет в 2020 году. В ней рассматривались экстремальные задачи комбинаторной и вычислительной геометрии, связанные с некоторыми числовыми характеристиками конечномерных выпуклых тел, в первую очередь симплексов и кубов. При определённом подходе эти задачи оказались тесно связанными с вопросами, возникающими при полиномиальной интерполяции функций многих переменных (оценками для норм интерполяционных проекторов, минимальными значениями этих норм, оптимальным и почти-оптимальным выбором узлов интерполяции и т. д.). Последние вопросы и находятся в центре наших интересов во второй части пособия. Мы ограничиваемся рассмотрением интерполяции на кубе и евклидовом шаре пространства \mathbb{R}^n с помощью многочленов степени ≤ 1 , т. е. линейных функций n переменных. По поводу обобщений на полиномиальную интерполяцию с помощью более широких пространств многочленов см. монографию [11].

Текст книги написан в основном по материалам работ М. В. Невского, сравнительно недавних совместных статей М. В. Невского и А. Ю. Ухалова, а также их учеников. Результаты, изложенные в учебном пособии, публиковались ранее только в статьях, в том числе и малодоступных. Для того чтобы заинтересованные читатели могли подробнее ознакомиться с изучаемыми вопросами и их историей, мы даём ссылки в тексте и обширный список литературы.

Некоторые вычисления, результаты которых представлены в учебном пособии, а также графики и иллюстрации были проделаны и подготовлены с помощью компьютерной системы Wolfram Mathematica (см., например, книги [37], [44], учебное пособие [3] и практикум [27]).

*М. В. Невский, А. Ю. Ухалов
Ярославль, 2022 г.*

Основные определения и обозначения

Как правило, мы сохраняем обозначения учебного пособия [20]; для удобства читателя мы их приводим и в этой книге.

Всюду далее $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \dots, x_n)$. Под $\|x\|$ будем понимать евклидову норму x :

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Через e_1, \dots, e_n обозначается канонический базис \mathbb{R}^n ; считаем $e := (1, \dots, 1)$. Положим $Q_n := [0, 1]^n$, $Q'_n := [-1, 1]^n$. Пусть

$$B(x^{(0)}; R) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^{(0)}\| \leq R\}$$

— евклидов n -мерный шар с центром $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $R > 0$. По определению, $B_n := B(0; 1)$.

Пусть Ω — *выпуклое тело* в \mathbb{R}^n , т.е. компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n с непустой внутренностью. Через $c(\Omega)$ обозначим центр тяжести Ω . Под $\sigma\Omega$ будем понимать результат гомотетии выпуклого тела Ω с центром гомотетии в точке $c(\Omega)$ и коэффициентом σ . Символом $\text{vol}(\Omega)$ будем обозначать объём Ω . Если Ω — выпуклый многогранник, то $\text{ver}(\Omega)$ есть совокупность вершин Ω . *Транслят* определяется как результат параллельного переноса. Таким образом, транслят Ω' выпуклого тела Ω имеет вид $\Omega' = \Omega + u$, где $u \in \mathbb{R}^n$. Если $x, y \in \mathbb{R}^n$, то $[x, y]$ есть отрезок с концами x, y , а (xy) — прямая, проходящая через эти точки.

По определению, n -мерный симплекс S есть выпуклая оболочка некоторых точек $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)} \in \mathbb{R}^n$:

$$S = \text{conv}(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}).$$

Симплекс S называется *невыврожденным*, если $\text{vol}(S) > 0$. В этом случае точки $x^{(j)}$ не лежат в одной $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости; они называются *вершинами симплекса*. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном невырожденные симплексы и под симплексом понимать невырожденный симплекс.

Будем говорить, что n -мерный симплекс S описан вокруг выпуклого тела Ω , если $\Omega \subset S$ и каждая $(n - 1)$ -мерная грань S содержит точку Ω . Примем по определению, что выпуклый многогранник вписан в Ω , если любая его вершина принадлежит границе Ω .

Определим $d_i(\Omega)$ как максимальную длину отрезка, содержащегося в выпуклом теле Ω и параллельного оси x_i . Величину $d_i(\Omega)$ будем называть *i -м осевым диаметром* Ω . Понятие осевого, или аксиального, диаметра (axial diameter) было введено Скоттом [39], [40].

Для выпуклых тел Ω_1, Ω_2 через $\xi(\Omega_1; \Omega_2)$ обозначим минимальное $\sigma \geq 1$, такое что $\Omega_1 \subset \sigma\Omega_2$. Равенство $\xi(\Omega_1; \Omega_2) = 1$ эквивалентно включению

$\Omega_1 \subset \Omega_2$. Величину $\xi(\Omega_1, \Omega_2)$ мы называем *коэффициентом поглощения выпуклого тела Ω_1 выпуклым телом Ω_2* . По определению, $\alpha(\Omega_1, \Omega_2)$ есть минимальное $\sigma > 0$, для которого выпуклое тело Ω_1 является подмножеством некоторого транслята выпуклого тела $\sigma\Omega_2$. Очевидно, что всегда $\alpha(\Omega_1, \Omega_2) \leq \xi(\Omega_1, \Omega_2)$. В этом учебном пособии в качестве Ω_1 берётся куб или евклидов шар, а в качестве Ω_2 — симплекс.

Обозначим $\xi(\Omega) := \xi(Q_n; \Omega)$, $\alpha(\Omega) := \alpha(Q_n; \Omega)$. Для выпуклого тела Ω

$$\xi_n(\Omega) := \min\{\xi(S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс, } S \subset \Omega, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Положим $\xi_n := \xi_n(Q_n)$.

Если $k \in \mathbb{Z}_+$, то $\Pi_k(\mathbb{R}^n)$ есть пространство многочленов от n переменных степени $\leq k$. Таким образом, под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ понимается линейная оболочка мономов $1, x_1, \dots, x_n$, иначе говоря, совокупность линейных функций на \mathbb{R}^n .

Через $C(\Omega)$ обозначается пространство непрерывных функций $f : C(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Пусть L и M — функции натурального аргумента n . Запись $L \asymp M$ означает, что существуют константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , с которыми выполняются неравенства $c_1 M(n) \leq L(n) \leq c_2 M(n)$.

Глава 1

Линейная интерполяция на n -мерном кубе

1.1 Постановка задачи интерполяции. Интерполяционный проектор

Пусть S — невырожденный симплекс в \mathbb{R}^n . Обозначим вершины S через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Введём в рассмотрение следующую *матрицу вершин* этого симплекса:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является невырожденной. Если $\Delta := \det(\mathbf{A})$, то $\text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j -й строки на строку $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Положим $\lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$. Из определения следует, что $\lambda_j \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, причём $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$, где δ_j^k — символ Кронекера. Эквивалентный и более простой способ построения этих многочленов состоит в следующем: коэффициенты многочлена λ_j составляют j -й столбец \mathbf{A}^{-1} . В дальнейшем полагаем $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, т. е.

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \quad (1.1)$$

Любой многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет равенству

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)}) \lambda_j(x). \quad (1.2)$$

Действительно, пусть q — многочлен из правой части (1.2). Тогда $q \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и для любого $k = 1, \dots, n+1$

$$q(x^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)}) \lambda_j(x^{(k)}) = \sum_{j=1}^{n+1} p(x^{(j)}) \delta_j^k = p(x^{(k)}).$$

Пусть $p(x) - q(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1}$. Система равенств $p(x^{(k)}) = q(x^{(k)})$ может быть записана в виде

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, имеем $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$, т. е. $p = q$, что совпадает с (1.2).

По нашей терминологии $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ называются *базисными многочленами Лагранжа, соответствующими симплексу S* . Применяя (1.2) к $p(x) = 1, x_1, \dots, x_n$, получим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)} = x. \quad (1.3)$$

Те же равенства следуют и из формул Крамера, согласно которым

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{(1)} & \dots & x_n^{(n+1)} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x) \\ \vdots \\ \lambda_n(x) \\ \lambda_{n+1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Равенства (1.3) означают, что числа $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ являются *барицентрическими координатами x относительно симплекса S* (см. [1, гл.12]). Уравнения $\lambda_j(x) = 0$ задают $(n-1)$ -мерные гиперплоскости, содержащие грани S , а для внутренних точек симплекса $0 < \lambda_j(x) < 1$. Имеет место представление

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, n+1\}. \quad (1.4)$$

Подробнее о многочленах λ_j см. [20, п.1.1].

Сформулируем задачу интерполяции с помощью $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ на произвольном выпуклом теле Ω . Будем говорить, что точки $x^{(j)} \in \Omega$, $j = 1, \dots, n+1$, составляют *допустимый набор узлов интерполяции*, если симплекс S с вершинами в этих точках является невырожденным. Это эквивалентно любому из условий $\text{vol}(S) \neq 0$ или $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, где \mathbf{A} — матрица вершин симплекса. Будем называть \mathbf{A} также *матрицей узлов*.

Постановка задачи интерполяции по указанному набору узлов заключается в следующем. Для функции $f \in C(\Omega)$ требуется найти многочлен $p \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$,

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПРОЕКТОР

удовлетворяющий равенствам $p(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Так как $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, для любой f существует единственный такой многочлен.

Теперь зафиксируем набор узлов $x^{(j)}$ и рассмотрим произвольные $f \in C(\Omega)$. Для каждой функции f существует свой интерполяционный многочлен p . Полагая $Pf := p$, введём в рассмотрение оператор $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Этот оператор определяется равенствами

$$Pf(x^{(j)}) = f_j := f(x^{(j)}), \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (1.5)$$

В силу (1.2) и (1.5) справедлив следующий аналог классической интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = p(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x). \quad (1.6)$$

Видно, что оператор P является линейным. Из единственности решения задачи интерполяции следует, что если $f \in \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, то $Pf = f$. Поэтому P является проектором из $C(\Omega)$ на $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$. Этот оператор $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ мы будем называть *интерполяционным проектором по набору узлов $x^{(j)}$* . Кроме того, мы будем говорить, что оператор P и симплекс S с вершинами в узлах соответствуют друг другу.

Обозначим через $\|P\|_\Omega$ норму P как оператора из $C(\Omega)$ в $C(\Omega)$:

$$\|P\|_\Omega := \sup_{\|f\|_{C(\Omega)} \leq 1} \|Pf\|_{C(\Omega)}.$$

Если $|f_j| \leq 1$, то

$$\left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) \right| \leq \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$$

с равенством при $f_j = \text{sign } \lambda_j(x)$. Из (1.6) следует, что

$$\begin{aligned} \|P\|_\Omega &= \sup_{|f_j| \leq 1} \max_{x \in \Omega} |Pf(x)| = \sup_{|f_j| \leq 1} \max_{x \in \Omega} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) \right| = \\ &= \max_{x \in \Omega} \sup_{|f_j| \leq 1} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) \right| = \max_{x \in \Omega} \max_{f_j = \pm 1} \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \max_{x \in \Omega} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если же Ω — выпуклый многогранник, то одновременно верно и соотношение

$$\|P\|_\Omega = \max_{x \in \text{ver}(\Omega)} \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i(x)|$$

(для $\Omega = Q_n$ см. лемму 1.1).

Величина $\|P\|_\Omega$ зависит от узлов $x^{(j)}$. Обозначим через $\theta_n(\Omega)$ минимальную норму проектора при условии, что узлы интерполяции принадлежат Ω :

$$\theta_n(\Omega) := \min_{x^{(j)} \in \Omega} \|P\|_\Omega.$$

Интерполяционный проектор P^* , для которого $\|P^*\|_\Omega = \theta_n(\Omega)$, будем называть *минимальным*. Обозначим $\theta_n := \theta_n(Q_n)$.

1.2 Соотношение между $\|P\|_{Q_n}$ и $\xi(S)$

Перейдём к случаю, когда Ω есть единичный n -мерный куб $Q_n = [0, 1]^n$. Существование минимального проектора установлено в [11, п. 2.3.3]. Кроме того, в [11, п. 2.3.1] показано, что минимальный проектор может быть реализован по набору узлов, принадлежащих границе куба. В центре наших интересов будут находиться вопросы об оценках и точных значениях величины $\theta_n = \min \|P\|_{Q_n}$, а также вопросы об описании минимальных и асимптотически минимальных интерполяционных проекторов. Напомним, что

$$\xi(S) = \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\},$$

$$\xi_n = \min\{\xi(S) : S \text{ — } n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \text{vol}(S) \neq 0\}.$$

Лемма 1.1. *Для любого интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и симплекса S с вершинами в его узлах имеют место равенства*

$$\|P\|_{Q_n} = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|, \quad (1.8)$$

$$\|P\|_{Q_n} = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in \text{ver}(Q_n) \right\}, \quad (1.9)$$

$$\xi(S) = (n+1) \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(x)) + 1, \quad (1.10)$$

$$\xi(S) = (n+1) \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\beta_j) : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in \text{ver}(Q_n) \right\} + 1. \quad (1.11)$$

Доказательство. Получим равенство (1.8). Выражение $\sum f_j \lambda_j(x)$ является линейным по x и f_1, \dots, f_{n+1} , поэтому

$$\|P\|_{Q_n} = \sup_{\|f\|_{C(Q_n)} \leq 1} \|Pf\|_{C(Q_n)} = \sup_{-1 \leq f_j \leq 1} \max_{x \in Q_n} \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) =$$

$$= \max_{f_j=\pm 1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \max_{f_j=\pm 1} \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Доказательство формулы (1.10) даётся в [20, п. 1.6]. Наконец, (1.9) и (1.11) вытекают соответственно из (1.8) и (1.10) с учётом того, что $\lambda_j(x)$ суть барицентрические координаты x . \square

Лемма 1.2. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\sum_j \beta_j = 1$ и среди чисел β_j имеется хотя бы одно неположительное. Обозначим $\beta := \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\beta_j)$. Тогда

$$\frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 \right) \leq \beta \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 \right). \quad (1.12)$$

Если среди чисел β_j имеется ровно μ отрицательных ($1 \leq \mu \leq n$), то

$$\frac{1}{2\mu} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 \right) \leq \beta. \quad (1.13)$$

Доказательство. Так как $-2\beta_j \leq |\beta_j| - \beta_j$, то

$$\begin{aligned} \beta &= \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\beta_j) \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq n+1} (|\beta_j| - \beta_j) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (|\beta_j| - \beta_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 \right), \end{aligned}$$

и правое неравенство из (1.12) получено. Условие $\sum \beta_j = 1$ означает, что хотя бы одно из чисел β_j является положительным; следовательно, количество неположительных чисел $\leq n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 &= \sum_{j=1}^{n+1} (|\beta_j| - \beta_j) = \sum_{j: \beta_j \leq 0} (|\beta_j| - \beta_j) \leq \\ &\leq 2n \max_{j: \beta_j \leq 0} (-\beta_j) \leq 2n \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\beta_j) = 2n\beta, \end{aligned}$$

что даёт левое неравенство из (1.12). Во втором равенстве этой цепочки мы использовали то, что хотя бы одно из чисел β_j неположительно. (В случае когда все $\beta_j > 0$, нижние оценки леммы не верны.)

Допустим теперь, что среди чисел β_j имеется ровно μ отрицательных, $1 \leq \mu \leq n$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 = \sum_{j=1}^{n+1} (|\beta_j| - \beta_j) = \sum_{j: \beta_j < 0} (|\beta_j| - \beta_j) \leq$$

$$\leq 2\mu \max_{j: \beta_j < 0} (-\beta_j) \leq 2\mu \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\beta_j) = 2\mu\beta,$$

и справедливо (1.13). \square

Пусть $1 \leq \mu \leq n$. Будем говорить, что точка $x \in \text{ver}(Q_n)$ является μ -вершиной Q_n относительно симплекса $S \subset Q_n$, если для интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство

$$\|P\|_{Q_n} = \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|$$

и среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно μ отрицательных. Следующее утверждение доказано в [9, теорема 3.1].

Теорема 1.1. *Для любого проектора P и соответствующего ему симплекса S справедливы соотношения*

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1. \quad (1.14)$$

Правое равенство в (1.14) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S . Если для некоторого μ , $1 \leq \mu \leq n$, имеется μ -вершина Q_n относительно S , то

$$\frac{n+1}{2\mu} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1 \leq \xi(S). \quad (1.15)$$

Доказательство. Из (1.12) следует, что для любых чисел β_j , удовлетворяющих условию леммы 1.2, справедливо неравенство

$$\frac{n+1}{2n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 \right) + 1 \leq (n+1)\beta + 1 \leq \frac{n+1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| - 1 \right) + 1. \quad (1.16)$$

Пусть $x \in \text{ver}(Q_n)$. Так как x не является внутренней точкой S , то не все $\lambda_j(x)$ являются положительными. Кроме того, $\sum \lambda_j(x) = 1$. Таким образом, числа $\beta_j := \lambda_j(x)$ удовлетворяют условию леммы 1.2. Применим к ним (1.16), а затем возьмём максимум по $x \in \text{ver}(Q_n)$. Для получения (1.14) теперь достаточно привлечь (1.9) и (1.11).

Если $v \in \text{ver}(Q_n)$ — μ -вершина относительно S , то числа $\beta_j = \lambda_j(v)$ удовлетворяют (1.13). Значит,

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2\mu} (\|P\| - 1) + 1 &= \frac{n+1}{2\mu} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(v)| - 1 \right) + 1 \leq \\ &\leq (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(v)) + 1 \leq \end{aligned}$$

$$\leq (n+1) \max_{1 \leq j \leq n+1, x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1 = \xi(S).$$

Мы применили (1.10). Таким образом, в случае существования μ -вершины выполняется (1.15).

Осталось показать, что выполнение правого равенства в (1.14) эквивалентно наличию 1-вершины. Пусть существует 1-вершина Q_n относительно S . Тогда (1.15) выполняется с $\mu = 1$, т. е.

$$\xi(S) \geq \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1.$$

С учётом (1.14) это даёт требуемое равенство.

Пусть теперь в правой части (1.14) выполняется равенство. Предположим, что 1-вершины Q_n не существует. Обозначим через U совокупность тех $x \in \text{ver}(Q_n)$, для которых $\sum |\lambda_j(x)| = \|P\|_{Q_n}$. Тогда для любой $x \in U$ среди $\lambda_j(x)$ имеется не менее двух отрицательных чисел. Значит, для $x \in U$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(x)) &< \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (|\lambda_j(x)| - \lambda_j(x)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| - 1 \right) = \frac{1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1). \end{aligned}$$

Если же $x \in \text{ver}(Q) \setminus U$, то $\sum |\lambda_j(x)| < \|P\|_{Q_n}$, поэтому

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(x)) &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} (|\lambda_j(x)| - \lambda_j(x)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| - 1 \right) < \frac{1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство

$$\max_{1 \leq j \leq n+1} (-\lambda_j(x)) < \frac{1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1)$$

справедливо для любой точки $x \in \text{ver}(Q_n)$. Взяв в нём максимум по $x \in \text{ver}(Q_n)$ и применив (1.10), получим

$$\xi(S) < \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1.$$

Это противоречит нашему предположению. Теорема доказана. \square

Следствие 1.1. Пусть имеется 1-вершина Q_n относительно S . Тогда для соответствующего проектора

$$\|P\|_{Q_n} = 2 \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1.$$

Для доказательства надо применить теорему 1.1 и равенство (1.10).

Отметим возможность оценивания нормы проектора через осевые диаметры соответствующего симплекса.

Следствие 1.2. *Для интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и симплекса S с вершинами в его узлах*

$$\|P\|_{Q_n} \geq \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1. \quad (1.17)$$

Равенство в (1.17) имеет место тогда и только тогда, когда существует 1-вершина Q_n относительно S и справедливо соотношение

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_1(x)) = \dots = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} (-\lambda_{n+1}(x)). \quad (1.18)$$

Доказательство. Для произвольного симплекса S

$$\xi(S) \geq \alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)}.$$

При этом $\xi(S) = \alpha(S)$ тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг куба Q_n , что эквивалентно (1.18). По поводу этих результатов см. [20, п. 1.7]. Из правого неравенства (1.14) имеем

$$\frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1 \geq \xi(S) \geq \alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)},$$

откуда и следует (1.17). Если же в (1.17) выполняется равенство, то, во-первых, равенство имеет место справа в (1.14), а во-вторых, справедливо $\xi(S) = \alpha(S)$. Это влечёт одновременно существование 1-вершины куба относительно S и выполнение соотношения (1.18). \square

Напомним, что осевые диаметры произвольного симплекса S (не обязательно принадлежащего Q_n) могут быть вычислены по коэффициентам соответствующих базисных многочленов Лагранжа:

$$\frac{1}{d_i(S)} = \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.19)$$

(доказательство см. в [20, теорема 1.1]). Поэтому (1.17) эквивалентно

$$\|P\|_{Q_n} \geq \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| - 1 \right) + 1 \quad (1.20)$$

с теми же условиями равенства, что и в следствии 1.2.

Двусторонняя оценка (1.14) приводит к следующему важному для нас результату (см. [9, теорема 3.2]).

Теорема 1.2. *Для любого n выполняются соотношения*

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 \leq \xi_n \leq \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1. \quad (1.21)$$

Доказательство. Из левого неравенства (1.14) следует, что для произвольного симплекса $S \subset Q_n$

$$\frac{n+1}{2n}(\theta_n - 1) + 1 \leq \xi(S).$$

Взятие минимума по S даёт левое соотношение в (1.21). Правая оценка (1.14) влечёт для любого интерполяционного проектора P

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2}(\|P\|_{Q_n} - 1) + 1.$$

После взятия минимума по P получается верхняя оценка ξ_n . □

Следствие 1.3. *Для любого n*

$$\xi_n \geq n, \quad \theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \quad (1.22)$$

Доказательство. Если $S \subset Q_n$, то очевидно $d_i(S) \leq 1$. Поэтому

$$\xi(S) \geq \alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \geq n.$$

Значит, всегда $\xi_n \geq n$. Эти соотношения отмечаются в [20]. Для получения правого неравенства (1.22) достаточно применить (1.21) и оценку $\xi_n \geq n$. □

1.3 Точные значения θ_n для $n = 1, 2, 3, 7$

В основном мы следуем монографии [11, пп. 2.4, 2.5, 3.8].

1.3.1. Случай $n = 1$. Одномерный случай совсем прост. Очевидно, $\xi_1 = 1$. Для любого проектора существует 1-вершина Q_1 относительно соответствующего симплекса (который в этой ситуации является отрезком). В силу теоремы 1.1 правое неравенство в (1.14) является равенством, из которого получаем $\theta_1 = 1$. Разумеется, значение θ_1 легко найти и непосредственно. Из интерполяционной формулы Лагранжа следует, что норма проектора P по узлам $x^{(1)}, x^{(2)} \in [0, 1], x^{(1)} < x^{(2)}$, равна

$$\|P\|_{Q_1} = \frac{\max(x^{(1)} + x^{(2)}, 2 - x^{(1)} - x^{(2)})}{x^{(2)} - x^{(1)}}.$$

Всегда $\|P\|_{Q_1} \geq 1$, причём $\|P\|_{Q_1} = 1$ тогда и только тогда, когда одновременно $x^{(1)} = 0, x^{(2)} = 1$. Это означает, что $\theta_1 = 1$. Интересно заметить, что минимальный проектор здесь является единственным, а его норма равна 1. При $n > 1$ каждое из этих свойств не имеет места.

1.3.2. Случай $n = 2$. Точное значение θ_2 вычисляется существенно труднее, а получающийся результат весьма интересен и красив. Обозначим через τ наименьший корень скалярного уравнения $t^2 - 3t + 1 = 0$. Тогда

$$\tau = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38196601\dots$$

Это число связано с хорошо известным «золотым сечением», так как

$$\frac{\tau}{1 - \tau} = \frac{1 - \tau}{1}.$$

Установим сначала следующую лемму о минимаксе.

Лемма 1.3. *Имеют место равенства*

$$\nu := \min_{0 \leq t \leq s < 1} \max \left(\frac{(1-s)(1-t)}{1-st}, \frac{s}{1-st} \right) = \frac{1-\tau}{1+\tau} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad (1.23)$$

Минимум в (1.23) достигается лишь при $s = t = \tau$.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi_1(s, t) := \frac{(1-s)(1-t)}{1-st}, \quad \Phi_2(s, t) := \frac{s}{1-st}.$$

В области $\Omega := \{(s, t) : 0 \leq t \leq s < 1\}$ равенство $\Phi_1(s, t) = \Phi_2(s, t)$ имеет место для $s = \frac{1-t}{2-t}$. Этим уравнением задаётся гипербола. Обозначим через Γ ту её часть, которая принадлежит Ω . Покажем, что на любом наклонном отрезке $s = rt$, $0 \leq t \leq \frac{1}{r}$, $1 \leq r < \infty$, а также на вертикальном отрезке $t = 0$, $0 \leq s < 1$ минимакс

$$\min_{s, t} \max(\Phi_1(s, t), \Phi_2(s, t))$$

достигается на пересечении рассматриваемого отрезка с Γ . Действительно, для $s = rt$

$$\Phi_1(s, t) = \varphi_1(t) := \frac{(1-rt)(1-t)}{1-rt^2}, \quad \Phi_2(s, t) = \varphi_2(t) := \frac{rt}{1-rt^2}.$$

При $0 \leq t \leq \frac{1}{r}$ функция $\varphi_1(t)$ убывает, а функция $\varphi_2(t)$ возрастает. Значения этих функций в концах отрезка $\left[0, \frac{1}{r}\right]$ равны

$$\varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_2\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{r}{r-1}.$$

Поэтому

$$\min_{0 \leq t \leq 1/r} \max \{ \varphi_1(t), \varphi_2(t) \} = \varphi_1(t') = \varphi_2(t'),$$

где t' — корень уравнения $rt = \frac{1-t}{2-t}$. Если же $t = 0$, то минимакс равен

$$\min_{0 \leq s < 1} \max(1-s, s) = \frac{1}{2}$$

и также достигается при $s = \frac{1-t}{2-t}$.

Пересечение прямой $s = t$ и гиперболы Γ имеет место в точке с координатами $s = t = \tau$. Итак,

$$\nu = \min_{0 \leq t \leq \tau} \Phi_2 \left(\frac{1-t}{2-t}, t \right) = \min_{0 \leq t \leq \tau} \frac{1-t}{2-2t+t^2}.$$

Функция

$$\eta(t) := \frac{1-t}{2-2t+t^2} = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{4-4t+2t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(4-4t)/t^2 + 2}$$

убывает. Значит,

$$\nu = \eta(\tau) = \frac{1-\tau}{2-2\tau+\tau^2} = \frac{1-\tau}{1+\tau} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Равенство (1.23) доказано. \square

Теорема 1.3. Для любого интерполяционного проектора $P : C(Q_2) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^2)$ по трём узлам, принадлежащим Q_2 , выполняется точное неравенство

$$\|P\|_{Q_2} \geq 2\nu + 1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89442719 \dots \quad (1.24)$$

Равенство в (1.24) имеет место лишь для проектора по узлам $(0, 0)$, $(1, \tau)$, $(\tau, 1)$ и для тех трёх проекторов, узлы которых получаются из указанных поворотами вокруг центра Q_2 на углы, равные $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$. Для других P , кроме этих четырёх отмеченных, в (1.24) выполняется строгое неравенство.

Доказательство. Используя редукцию, описанную в [11, п. 2.3.2], сведём задачу к оценке нормы проектора P по узлам

$$x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = (1, t), \quad x^{(3)} = (s, 1); \quad 0 \leq t \leq s < 1.$$

В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ s & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель \mathbf{A} равен $\Delta := 1 - st \neq 0$. Обратная матрица имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -1+t & 1 & -t \\ -1+s & -s & 1 \\ 1-st & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1}{\Delta} ((-1+t)x_1 + (-1+s)x_2 + 1-st), \\ \lambda_2(x) &= \frac{1}{\Delta} (x_1 - sx_2), \quad \lambda_3(x) = \frac{1}{\Delta} (-tx_1 + x_2). \end{aligned}$$

Справедливо равенство

$$\|P\|_{Q_2} = \frac{2}{\Delta} \max \{(1-s)(1-t), s\} + 1. \quad (1.25)$$

Действительно, Q_2 имеет 1-вершину относительно симплекса, соответствующего проектору P . Поэтому применимо следствие 1.1, согласно которому

$$\|P\|_{Q_2} = 2 \max_{1 \leq j \leq n+1} \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_j(x)) + 1.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) &= \frac{1}{\Delta} (1-s)(1-t), \\ \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) &= \frac{1}{\Delta} s, \quad \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)) = \frac{1}{\Delta} t. \end{aligned}$$

Так как $s \geq t$, то эти равенства дают (1.25).

Для завершения доказательства остаётся вспомнить, что $\Delta = 1-st$, и применить для оценки правой части (1.25) соотношение (1.23). Мы получим, что норма минимального проектора P^* равна

$$\begin{aligned} \|P^*\| &= \min_{0 \leq t \leq s < 1} \frac{2}{1-st} \max \{(1-s)(1-t), s\} + 1 = 2\nu + 1 = \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.89442719... \end{aligned}$$

Для произвольного проектора выполняется неравенство (1.24). Точность константы $1.8944\dots$, а также возможные варианты равенства следуют из леммы 1.3 и того обстоятельства, что норма проектора не зависит от поворота системы узлов относительно центра квадрата на любой из указанных углов.

Теорема доказана. \square

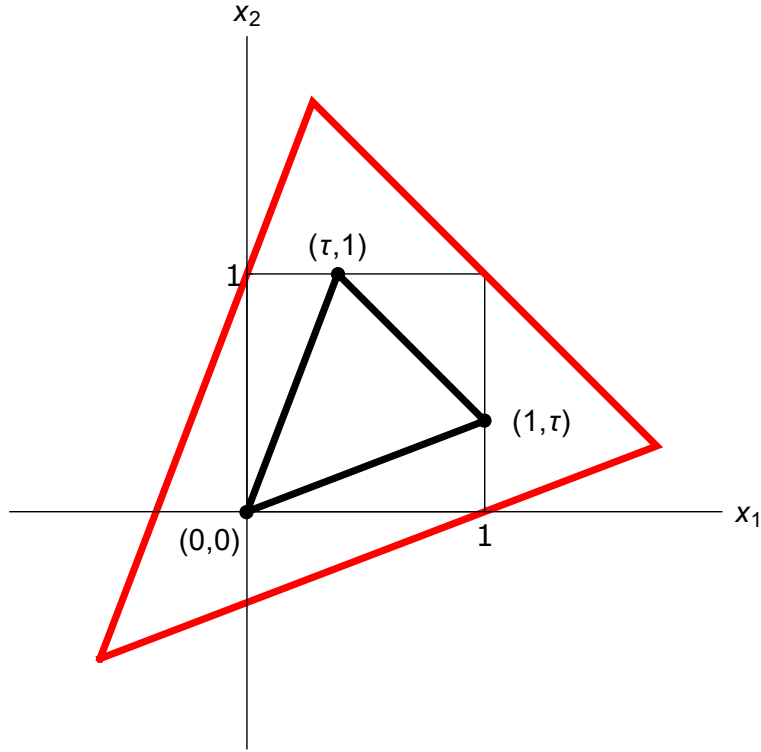


Рис. 1.1. Случай $n = 2$. Симплексы S и $\xi(S)S$

Из теоремы 1.3 следует, что

$$\theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1.$$

Неравенство (1.21) даёт оценку

$$\xi_2 \leq \frac{3}{2}(\theta_2 - 1) + 1 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1. \quad (1.26)$$

Для определения экстремального треугольника $S \subset Q_2$ (т. е. такого, для которого $\xi(S) = \xi_2$) применима редукция, описанная в [11, п. 2.4.2]. На этом пути получается, что минимальное значение $\xi(S)$, как и минимальное значение $\|P\|_{Q_2}$, реализуется на треугольнике с вершинами $(0,0)$, $(1,t)$, $(s,1)$ ($0 \leq t \leq s < 1$). Но, согласно теореме 1.1, для каждого такого треугольника S выполняется

$$\xi(S) = \frac{3}{2}(\|P\| - 1) + 1.$$

Отсюда следует, что в (1.26) первое соотношение является равенством. Итак,

$$\xi_2 = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1 = 2.34164078\dots$$

Описанные в теореме 1.3 экстремальные расположения узлов имеют красивые геометрические свойства. Каждый такой набор состоит из вершины квадрата $x^{(1)}$ и двух точек $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$, принадлежащих сторонам квадрата, не содержащим $x^{(1)}$. Точки $x^{(2)}$ и $x^{(3)}$ осуществляют «золотое сечение» сторон квадрата, на которых они находятся, причём меньший отрезок прилегает к ближайшей для $x^{(1)}$ вершине квадрата. Это приводит к тому, что оказываются равными площади всех трёх треугольников, которые отсекаются сторонами треугольника $S = x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}$ от углов квадрата. Но главное экстремальное свойство треугольника S состоит в том, что для него $\xi(S) = \xi_2 = 2.3416\dots$ Других треугольников, принадлежащих Q_2 , кроме отмеченных четырёх, с таким свойством нет. Интересно, что точное неравенство (1.24) содержит характеризацию классического «золотого сечения».

Проектор по узлам $(0, 0)$, $(1, \tau)$, $(\tau, 1)$ был рассмотрен в [14], но там не была доказана его минимальность. Этот пробел был восполнен М.В. Невским в [7]. Экстремальный симплекс S изображен на рис. 1.1.

1.3.3. Случай $n = 3$. Покажем, что $\theta_3 = 2$, $\xi_3 = 3$. Эти точные значения получаются при использовании результатов, описанных выше, а также результатов работы Лассака [36]. Такой подход был реализован в статье [7] и монографии [11].

Пусть $P' : C(Q_3) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^3)$ — интерполяционный проектор, узлы которого имеют вид $x^{(1)} = (1, 0, 0)$, $x^{(2)} = (0, 1, 0)$, $x^{(3)} = (0, 0, 1)$, $x^{(4)} = (1, 1, 1)$. Симплекс S' с вершинами $x^{(j)}$ является правильным и вписанным в Q_3 . При этом каждая его вершина совпадает с вершиной Q_3 . Длина ребра S' равна $\sqrt{2}$. Центр тяжести S' совпадает с центром куба; каждой грани Q_3 принадлежат пара вершин S' . Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + 1), & \lambda_2(x) &= \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3 + 1), \\ \lambda_3(x) &= \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + 1), & \lambda_4(x) &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - 1), \end{aligned}$$

что даёт $\|P'\|_{Q_3} = 2$ (подробнее см. пример в п. 1.4.3).

Теорема 1.4. *Справедливы равенства $\theta_3 = 2$, $\xi_3 = 3$. Иначе говоря, для любого проектора $P : C(Q_3) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^3)$ и любого тетраэдра $S \subset Q_3$ выполняются точные неравенства*

$$\|P\|_{Q_3} \geq 2, \quad \xi(S) \geq 3. \quad (1.27)$$

Левое равенство в (1.27) достигается лишь для проекторов по узлам $(1 - t, 0, 0)$, $(t, 1, 0)$, $(0, t, 1)$, $(1, 1 - t, 1)$ при $t = 0$ и при $t = \frac{1}{2}$ и тем узлам,

1.3. ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ θ_N ДЛЯ $N = 1, 2, 3, 7$

которые сводятся к отмеченным с помощью замены переменных. Правое неравенство является равенством только для тех тетраэдров, которые соответствуют отмеченным проекторам.

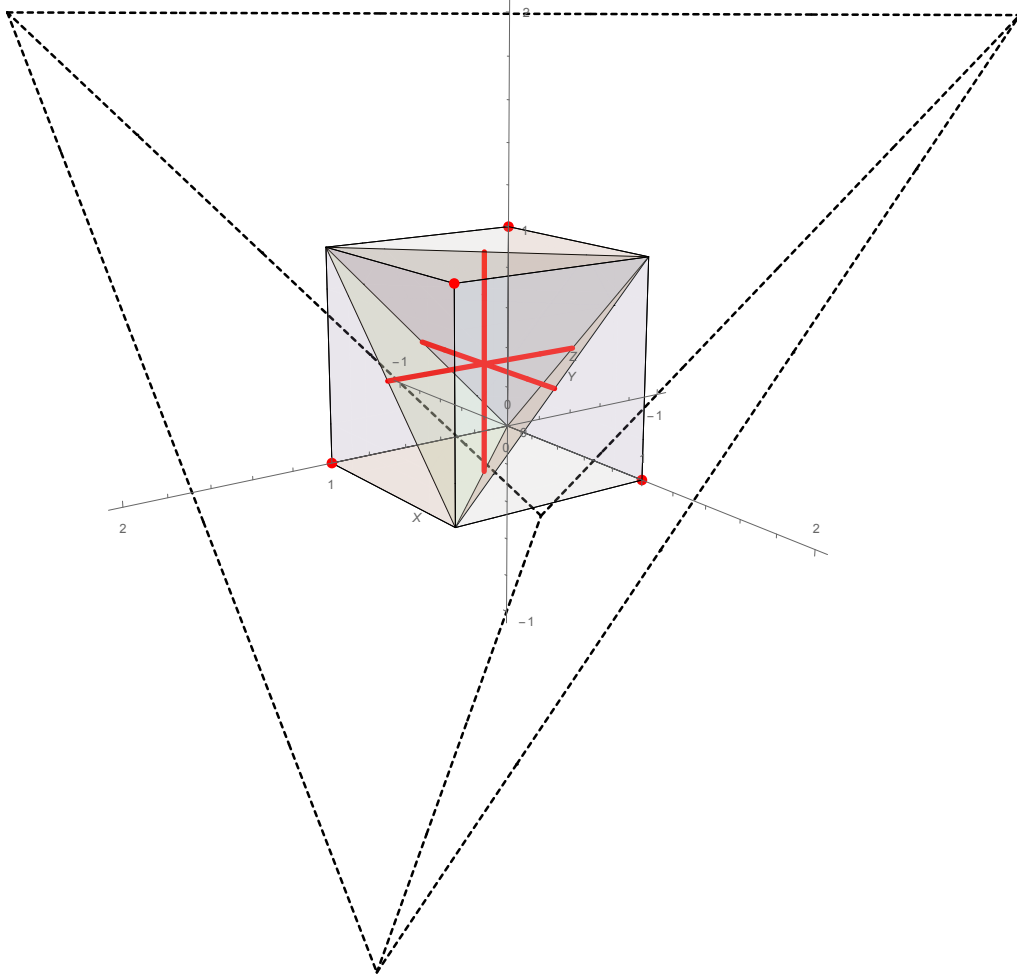


Рис. 1.2. Экстремальный симплекс для $n = 3$. Случай $t = 0$

Доказательство. Норма рассмотренного выше проектора P' равна 2. Поэтому $\theta_3 \leq 2$. Теперь воспользуемся следствием 1.3. Применяя при $n = 3$ правое неравенство (1.22), имеем $\theta_3 \geq 2$. Поэтому $\theta_3 = 2$. Левое соотношение (1.22) даёт $\xi_3 \geq 3$. Для оценки ξ_n сверху применим (1.21). При $n = 3$ это соотношение даёт

$$\xi_3 \leq 2(\theta_3 - 1) + 1 \leq 3.$$

Таким образом, $\xi_3 = 2(\theta_3 - 1) + 1 = 3$. Заметим, что равенство $\xi_3 = 3$ следует также из общих результатов для ситуации, когда $n+1$ — число Адамара; в этом случае $\xi_n = n$ (см. [20, п. 2.2], а также п. 3.1.1 настоящей книги).

Итак, рассмотренный выше проектор P' является минимальным — для него $\|P'\|_{Q_3} = \theta_3 = 2$. Из (1.14) получаем, что соответствующий тетраэдр S' обладает свойством $\xi(S') = \xi_n = 3$. Оказывается, что в трёхмерной ситуации есть и другие экстремальные P и S , которые не сводятся к указанным с помощью замены переменных. Заметим (см. [20, п. 1.7.6]), что для осевых диаметров любого тетраэдра S с условием $\xi(S) = 3$ выполняются равенства $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Иначе говоря, в каждом таком S содержится ровно один отрезок длины 1, параллельный любой из координатных осей.

Рассмотрим любой проектор P со свойством $\|P\|_{Q_3} = 2$. Для тетраэдра $S \subset Q_3$ с вершинами в его узлах соотношение (1.14) даёт $\xi(S) = 3$. Пусть $T = 3S$, тогда $S = \frac{1}{3}T$. Так как $\frac{1}{3}T \subset Q_3$, а куб является центрально-симметричным телом: $-Q_3 = Q_3$, то некоторый транслят симплекса $-\frac{1}{3}T$, а именно результат симметрии $\frac{1}{3}T$ относительно центра куба, содержится в кубе. В силу условия $Q_3 \subset T$ этот транслят принадлежит также T . Таким образом, он представляет собой не что иное, как $-\frac{1}{3}T$. Итак, справедливы включения

$$-\frac{1}{3}T \subset Q_3 \subset T.$$

Описание тетраэдров T с таким свойством дано в [36]. Из этого описания получается следующее. Если $\|P\|_{Q_3} = 2$, то невозможна никакая ситуация, кроме одной из перечисленных:

- 1) узлы P расположены в вершинах Q_3 и образуют правильный тетраэдр с длиной ребра $\sqrt{2}$;
- 2) узлы P имеют вид $(t, 0, 0)$, $(t, 1, 0)$, $(0, s, 1)$, $(1, s, 1)$, $0 \leq s, t \leq 1$, или сводятся к ним заменой переменных;
- 3) узлы P имеют вид $(1, 0, 0)$, $(0, u, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(s, t, 1)$, $0 \leq s, t, u \leq 1$, или сводятся к ним заменой переменных.

Остаётся проанализировать эти ситуации. В первом случае, как отмечалось в начале пункта, $\|P\|_{Q_3} = 2$. Во второй ситуации

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 0 & s & 1 & 1 \\ 1 & s & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ s-1 & -s & 1-t & t \\ 1 & 0 & t & -t \end{pmatrix}.$$

Поэтому базисные многочлены Лагранжа имеют вид

$$\lambda_1(x) = -x_2 + (s-1)x_3 + 1, \quad \lambda_2(x) = x_2 - sx_3,$$

$$\lambda_3(x) = -x_1 + (1-t)x_3 + t, \quad \lambda_4(x) = x_1 + tx_3 - t.$$

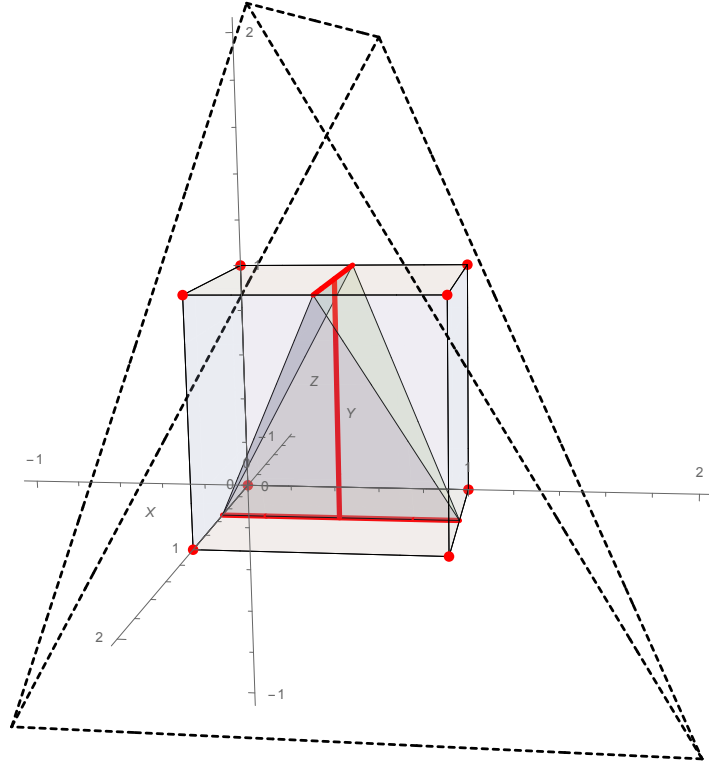


Рис. 1.3. Экстремальный симплекс для $n = 3$. Случай $t = \frac{1}{2}$

По формуле (1.8)

$$\begin{aligned} \|P\|_{Q_3} &= \max_{x \in \text{ver}(Q_3)} (|\lambda_1(x)| + |\lambda_2(x)| + |\lambda_3(x)| + |\lambda_4(x)|) = \\ &= \max(1 + 2t, 3 - 2t, 1 + 2s, 3 - 2s). \end{aligned}$$

В справедливости последнего равенства читателю предлагается убедиться самостоятельно. Так как $\max(1 + 2t, 3 - 2t) \geq 2$, то $\|P\|_{Q_3} \geq 2$. При этом $\|P\|_{Q_3} = 2$ лишь при $t = s = \frac{1}{2}$.

В третьем случае тетраэдр S с вершинами в узлах содержит вписанный в него транслят Q куба $\frac{1}{3} Q_3$, отличный от $\frac{1}{3} Q_3$, так как грань Q лежит на грани S , принадлежащей плоскости $x_3 = 0$. Из соображений подобия следует, что

некоторый транслят S^* тетраэдра $3S$ аналогичным образом содержит Q_3 , откуда $S^* \neq 3S$. Поэтому никакой транслят S^* , в том числе $3S$, не содержит Q_3 . Итак, в третьем случае включение $Q_3 \subset 3S$ невозможно. Значит, здесь $\xi(S) > 3$. Правое неравенство (1.14) даёт

$$2(\|P\|_{Q_3} - 1) + 1 \geq \xi(S) > 3.$$

Следовательно, для проекторов третьего типа всегда $\|P\|_{Q_3} > 2$.

Таким образом, если $\|P\|_{Q_3} = 2$, что эквивалентно $\xi(S) = 3$, то либо узлы интерполяции расположены в вершинах Q_3 и образуют правильный тетраэдр, либо они совпадают с серединами противоположных рёбер двух противоположных граней Q_3 и при этом не имеют общей плоскости. Эти расположения узлов и отмечены в условии.

Теорема доказана. \square

Подчеркнём, что для тетраэдра S , соответствующего любому минимальному проектору из условия теоремы 1.4, выполняется экстремальное свойство $\xi(S) = \xi_3 = 3$. Других тетраэдров, принадлежащих Q_3 , кроме отмеченных, с таким свойством нет.

Экстремальные симплексы для $n = 3$ изображены на рис. 1.2–1.3.

1.3.4. Случай $n = 7$. В силу того, что 8 есть число Адамара, справедливо равенство $\xi_7 = 7$ (общий результат устанавливается в [20, теорема 2.2]; см. также п. 3.1.1). Существует семимерный правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба. Таковым является, например, симплекс S с вершинами

$$\begin{aligned} (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), & \quad (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), & (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), & \quad (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & \quad (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0), & (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1), & \quad (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0). \end{aligned}$$

Для этого симплекса $\xi(S) = 7$. Так как $\xi_7 = 7$, из неравенства

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1$$

имеем $\theta_7 \geq \frac{5}{2}$. Однако для проектора, соответствующего S , верно $\|P\|_{Q_7} = \frac{5}{2}$. Следовательно, $\theta_7 = \frac{5}{2}$ и указанный проектор является минимальным.

В этом пункте указаны все известные на данный момент случаи, когда найдено точное значение θ_n :

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1, \quad \theta_3 = 2, \quad \theta_7 = \frac{5}{2}.$$

Отметим, что для каждого $n = 1, 2, 3, 7$ правое соотношение в (1.21) является равенством:

$$\xi_n = \frac{n+1}{2}(\theta_n - 1) + 1.$$

1.4 Примеры и упражнения

1.4.1. Пусть $n = 2$, S — двумерный симплекс (треугольник) с вершинами $x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{4}\right)$, $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x^{(3)} = (0, 0)$ (см. рис. 1.4). Для этого симплекса

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\Delta = \det \mathbf{A} = \frac{7}{8}$, $\text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{2} = \frac{7}{16}$. Заметим, что здесь $\text{vol}(S)$ есть двумерный объём S , т.е. обычная площадь треугольника. Коэффициенты базисных многочленов Лагранжа составляют столбцы матрицы \mathbf{A}^{-1} , поэтому

$$\lambda_1(x) = \frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2, \quad \lambda_2(x) = -\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2, \quad \lambda_3(x) = -\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1.$$

Поскольку $x^{(j)} \in Q_2 = [0, 1]^2$, то $S \subset Q_2$. Пусть $P : C(Q_2) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^2)$ — интерполяционный проектор с узлами $x^{(j)}$. В соответствии с (1.6) интерполяционная формула Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} Pf(x) &= p(x) = f_1\lambda_1(x) + f_2\lambda_2(x) + f_3\lambda_3(x) = \\ &= f_1\left(\frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2\right) + f_2\left(-\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2\right) + f_3\left(-\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1\right). \end{aligned}$$

Здесь $f_j = f(x^{(j)})$ — значения в узлах интерполируемой функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, а $p(x_1, x_2)$ — интерполяционный для f многочлен.

Норма P как оператора из $C(Q_2)$ в $C(Q_2)$ может быть вычислена по формуле (1.8):

$$\begin{aligned} \|P\|_{Q_2} &= \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (|\lambda_1(x)| + |\lambda_2(x)| + |\lambda_3(x)|) = \\ &= \max_{x_i=0,1} \left(\left| \frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 \right| + \left| -\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2 \right| + \left| -\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1 \right| \right). \end{aligned}$$

Можно записать и так:

$$\|P\|_{Q_2} = \max\{\lambda(0, 0), \lambda(1, 0), \lambda(0, 1), \lambda(1, 1)\},$$

где $\lambda(x) := |\lambda_1(x)| + |\lambda_2(x)| + |\lambda_3(x)|$. Имеем:

$$\lambda(0, 0) = 1, \quad \lambda(1, 0) = \frac{11}{7}, \quad \lambda(0, 1) = \frac{15}{7}, \quad \lambda(1, 1) = \frac{13}{7},$$

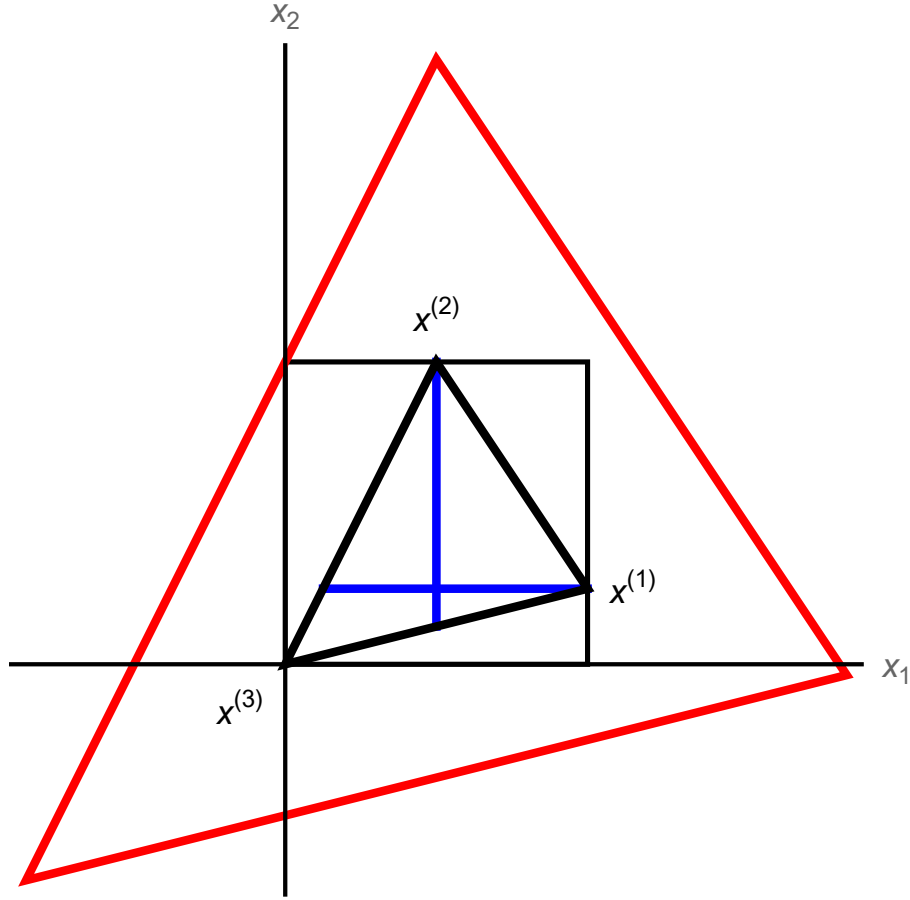


Рис. 1.4. Пример 1.4.1

$$\|P\|_{Q_2} = \max \left\{ 1, \frac{11}{7}, \frac{15}{7}, \frac{13}{7} \right\} = \frac{15}{7}.$$

Для каких μ существуют μ -вершины Q_2 относительно S ? Так как в n -мерной ситуации $1 \leq \mu \leq n$, то в двумерном случае возможны значения $\mu = 1$ и $\mu = 2$. Надо найти все вершины v квадрата Q_2 , для которых

$$\|P\|_{Q_2} = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} \lambda(x) = \lambda(v),$$

а затем для каждой такой вершины определить количество отрицательных чисел среди $\lambda_j(v)$; это число и будет равно показателю μ данной вершины v . Заметим, что $\max \lambda(x)$ достигается в единственной вершине квадрата $x^* = (0, 1)$, причём

$$\lambda_1(x^*) = -\frac{4}{7}, \quad \lambda_2(x^*) = \frac{6}{7}, \quad \lambda_3(x^*) = \frac{3}{7}.$$

Среди этих чисел имеется ровно одно отрицательное. Таким образом, $x^* = (0, 1)$ есть 1-вершина Q_2 относительно S , а 2-вершины в этом примере отсутствуют.

Найдём осевые диаметры $d_1(S)$, $d_2(S)$, а также величины $\alpha(S)$ и $\xi(S)$. Формула (1.19) даёт

$$\frac{1}{d_1(S)} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{7} + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} \right) = \frac{8}{7}, \quad \frac{1}{d_2(S)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{7} + \frac{8}{7} + \frac{4}{7} \right) = \frac{8}{7},$$

т. е. $d_1(S) = d_2(S) = \frac{7}{8}$. Как доказывается в [20, теорема 1.3], для произвольного симплекса

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (1.28)$$

Применяя осевые диаметры, в нашем случае имеем

$$\alpha(S) = \frac{1}{d_1(S)} + \frac{1}{d_2(S)} = \frac{8}{7} + \frac{8}{7} = \frac{16}{7}.$$

Тот же результат получается и из того, что величина $\alpha(S)$ равна полусумме модулей элементов двух первых строк матрицы \mathbf{A}^{-1} (см. правое выражение в (1.28)). Далее вычислим

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \max_{x_i=0,1} \left(-\frac{8}{7} x_1 + \frac{4}{7} x_2 \right) = -\lambda_1(0, 1) = \frac{4}{7},$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \max_{x_i=0,1} \left(\frac{2}{7} x_1 - \frac{8}{7} x_2 \right) = -\lambda_2(1, 0) = \frac{2}{7},$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)) = \max_{x_i=0,1} \left(\frac{6}{7} x_1 + \frac{4}{7} x_2 - 1 \right) = -\lambda_3(1, 1) = \frac{3}{7}.$$

По формуле (1.10)

$$\begin{aligned} \xi(S) &= 3 \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} \max_{1 \leq j \leq 3} (-\lambda_j(x)) + 1 = 3 \max_{1 \leq j \leq 3} \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_j(x)) + 1 = \\ &= 3 \cdot (-\lambda_1(0, 1)) + 1 = 3 \cdot \frac{4}{7} + 1 = \frac{19}{7}. \end{aligned}$$

Двойное неравенство (1.14) теоремы 1.1, т. е. соотношение

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1,$$

в этом примере принимает вид

$$\frac{15}{14} < \frac{19}{7} = \frac{19}{7}.$$

Равенство

$$\xi(S) = \frac{3}{2} (\|P\|_{Q_2} - 1) + 1$$

эквивалентно тому, что имеется 1-вершина Q_2 относительно S .

Заметим, что $\alpha(S) < \xi(S)$. Геометрически это неравенство равносильно тому, что симплекс $\xi(S)S$ не является описанным вокруг Q_2 , а численно — тому, что соотношение (1.18), т. е. в нашем случае условие

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)),$$

не имеет места.

1.4.2. Пусть $n = 2$, S — треугольник с вершинами $x^{(1)} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (см. рис. 1.5). В этом случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \det \mathbf{A} = -\frac{1}{4}, \quad \text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{2} = \frac{1}{8},$$

$$\lambda_1(x) = -2x_1 + 1, \quad \lambda_2(x) = 2x_2 - 1, \quad \lambda_3(x) = 2x_1 - 2x_2 + 1.$$

Для проектора $P : C(Q_2) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^2)$ с узлами $x^{(j)}$ и функции $f \in C(Q_2)$

$$Pf(x) = f_1(-2x_1 + 1) + f_2(2x_2 - 1) + f_3(2x_1 - 2x_2 + 1).$$

Пусть $\lambda(x) := |\lambda_1(x)| + |\lambda_2(x)| + |\lambda_3(x)|$. Тогда

$$\|P\|_{Q_2} = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} \lambda(x) = \max\{\lambda(0, 0), \lambda(1, 0), \lambda(0, 1), \lambda(1, 1)\}.$$

Так как $\lambda(0, 0) = \lambda(0, 1) = \lambda(1, 1) = 3$, $\lambda(1, 0) = 5$, то $\|P\|_{Q_2} = \lambda(1, 0) = 5$. Максимум функции $\lambda(x)$ достигается лишь в одной вершине $x^* = (1, 0)$, причём $\lambda_1(x^*) = \lambda_2(x^*) = -1$, $\lambda_3(x^*) = 3$. Таким образом, x^* является 2-вершиной Q_2 относительно S , а других μ -вершин в этом примере нет.

По формуле (1.19)

$$\frac{1}{d_1(S)} = \frac{1}{2} (2 + 0 + 2) = 2, \quad \frac{1}{d_2(S)} = \frac{1}{2} (0 + 2 + 2) = 2,$$

т. е. $d_1(S) = d_2(S) = \frac{1}{2}$. Этот результат хорошо виден и из рисунка. Значит,

$$\alpha(S) = \frac{1}{d_1(S)} + \frac{1}{d_2(S)} = 4.$$

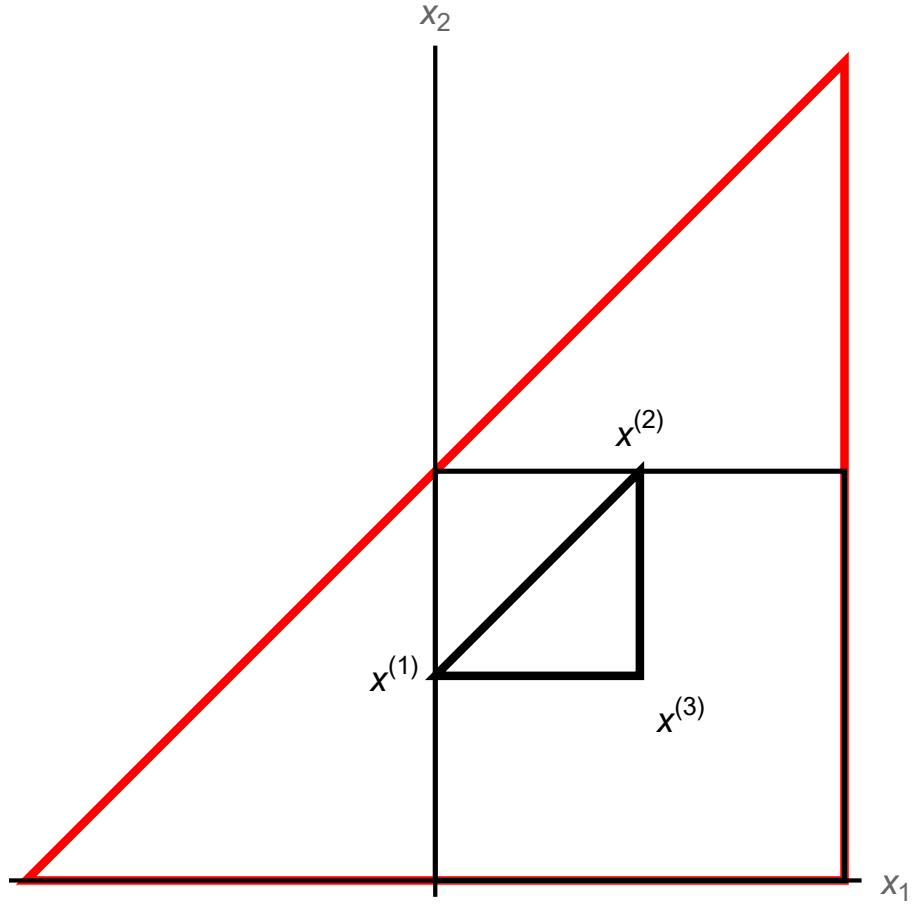


Рис. 1.5. Пример 1.4.2

Вычислим

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \max_{x_i=0,1} (2x_1 - 1) = -\lambda_1(1, 0) = -\lambda_1(1, 1) = 1,$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \max_{x_i=0,1} (-2x_2 + 1) = -\lambda_2(0, 0) = -\lambda_2(1, 0) = 1,$$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)) = \max_{x_i=0,1} (-2x_1 + 2x_2 - 1) = -\lambda_3(0, 1) = 1.$$

Следовательно,

$$\xi(S) = 3 \max_{1 \leq j \leq 3} \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_j(x)) + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4.$$

Максимум по j здесь реализуется при любом $j = 1, 2, 3$.

Соотношение

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1,$$

теоремы 1.1 в этом примере имеет вид $4 = 4 < 7$. Строгое неравенство

$$\xi(S) < \frac{3}{2} (\|P\|_{Q_2} - 1) + 1$$

эквивалентно тому, что не существует 1-вершины Q_2 относительно S .

Интересно, что в рассматриваемом примере $\alpha(S) = \xi(S) = 4$. Геометрически это равносильно тому, что симплекс $4S$ описан вокруг Q_2 , а численно — тому, что справедливо соотношение

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)).$$

Действительно, мы видели, что все величины в этой цепочке равны 1.

1.4.3. Пусть $n = 3$, S — тетраэдр с вершинами $x^{(1)} = (1, 0, 0)$, $x^{(2)} = (0, 1, 0)$, $x^{(3)} = (0, 0, 1)$, $x^{(4)} = (1, 1, 1)$. Это правильный тетраэдр, вписанный в куб $Q_3 = [0, 1]^3$ (см. рис. 1.2). Мы уже упоминали этот тетраэдр в пункте 1.3.3. Рассмотрим этот пример более подробно. В нашем случае

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \det(\mathbf{A}) = 2, \quad \text{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{6} = \frac{1}{3}.$$

Базисные многочлены Лагранжа —

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2 - x_3 + 1), \quad \lambda_2(x) = \frac{1}{2} (-x_1 + x_2 - x_3 + 1),$$

$$\lambda_3(x) = \frac{1}{2} (-x_1 - x_2 + x_3 + 1), \quad \lambda_4(x) = \frac{1}{2} (x_1 + x_2 + x_3 - 1).$$

Пусть $P : C(Q_3) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^3)$ есть интерполяционный проектор с узлами $x^{(j)}$. Интерполяционная формула Лагранжа имеет вид

$$Pf(x) = \frac{1}{2} \left[f_1(x_1 - x_2 - x_3 + 1) + f_2(-x_1 + x_2 - x_3 + 1) + \right. \\ \left. + f_3(-x_1 - x_2 + x_3 + 1) + f_4(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \right].$$

Пусть $\lambda(x) := |\lambda_1(x)| + |\lambda_2(x)| + |\lambda_3(x)| + |\lambda_4(x)|$. Найдём значения $\lambda(x)$ в вершинах куба:

$$\begin{aligned} \lambda(1, 0, 0) &= \lambda(0, 1, 0) = \lambda(0, 0, 1) = \lambda(1, 1, 1) = 1, \\ \lambda(0, 0, 0) &= \lambda(1, 1, 0) = \lambda(1, 0, 1) = \lambda(0, 1, 1) = 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|P\|_{Q_3} = \max_{x \in \text{ver}(Q_3)} \lambda(x) = 2.$$

Обратим внимание, что максимум функции $\lambda(x)$ в вершинах куба достигается в каждой из четырёх точек $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$. Любая из этих точек является 1-вершиной куба Q_3 относительно симплекса S . Например, для $x^* = (0, 0, 0)$ имеем

$$\lambda_1(x^*) = \lambda_2(x^*) = \lambda_3(x^*) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_4(x^*) = -\frac{1}{2}.$$

Среди значений многочленов λ_j в каждой из вершин $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ также имеется ровно одно отрицательное. Это и означает, что любая из четырёх указанных точек есть 1-вершина Q_3 относительно S . Других μ -вершин куба в этом примере нет.

Вычислим $d_i(S)$, $\alpha(S)$ и $\xi(S)$. Формула (1.19) даёт $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Максимальными в S отрезками, параллельными координатным осям, являются отрезки единичной длины, соединяющие середины противоположных (скрещивающихся) рёбер тетраэдра. Например, максимальный отрезок $[a, b] \subset S$, параллельный оси x_1 , имеет концы $a = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $b = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Указанные отрезки пересекаются в центре куба. Эти факты усматриваются из геометрических соображений, но следуют также и из формул, приведённых в [20, п. 1.3]. Вычисления для аналогичного правильного симплекса подробно описаны в [20, п. 1.9.2].

Поскольку $d_i(S) = 1$, получается

$$\alpha(S) = \frac{1}{d_1(S)} + \frac{1}{d_2(S)} + \frac{1}{d_3(S)} = 3.$$

При всех $j = 1, 2, 3, 4$

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_3)} (-\lambda_j(x)) = \frac{1}{2},$$

поэтому по формуле (1.10)

$$\xi(S) = 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3.$$

В этом примере соотношения $\xi(S) \geq \alpha(S) \geq n$ превращаются в равенства: $\xi(S) = \alpha(S) = 3$. Это, в частности, означает, что симплекс $3S$ описан вокруг куба Q_3 . Заметим, что равенство $\xi(S) = \alpha(S)$ эквивалентно соотношению

$$\max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_1(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_2(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_3(x)) = \max_{x \in \text{ver}(Q_2)} (-\lambda_4(x)).$$

Наличие 1-вершины означает, что в этом примере правое соотношение в (1.14) также является равенством:

$$\xi(S) = \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1.$$

В этом легко убедиться и непосредственно: так как $n = 3$, $\xi(S) = 3$, $\|P\|_{Q_3} = 2$, то это соотношение имеет вид $3 = 2 \cdot 1 + 1$.

1.4.4. Упражнения. Даны размерность n и вершины невырожденного симплекса $S \subset Q_n$. Найдите для S базисные многочлены Лагранжа, норму $\|P\|_{Q_n}$ соответствующего интерполяционного проектора, величины $d_i(S)$, $\alpha(S)$, $\xi(S)$. Укажите все μ -вершины куба Q_n относительно симплекса S . Как выглядит в данной ситуации соотношение (1.14) теоремы 1.1?

$$1) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (1, 0), \quad x^{(2)} = (0, 1), \quad x^{(3)} = (0, 0);$$

$$2) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = (1, 0), \quad x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);$$

$$3) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = (1, 0), \quad x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right);$$

$$4) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = (1, 0), \quad x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$5) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$6) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$7) \ n = 2, \quad x^{(1)} = (0, 0), \quad x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad x^{(3)} = \left(1, \frac{1}{2}\right);$$

$$8) \ n = 3, \quad x^{(1)} = (1, 0, 0), \quad x^{(2)} = (0, 1, 0), \quad x^{(3)} = (0, 0, 1), \quad x^{(4)} = (0, 0, 0);$$

$$9) \ n = 3, \quad x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \quad x^{(3)} = \left(0, \frac{1}{2}, 1\right), \quad x^{(4)} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right);$$

$$10) \ n \in \mathbb{N}, \quad x^{(1)} = (1, 0, \dots, 0), \dots, \quad x^{(n)} = (0, \dots, 0, 1), \quad x^{(n+1)} = (0, \dots, 0);$$

$$11) \ n \in \mathbb{N}, \quad x^{(1)} = (1, 0, \dots, 0), \dots, \quad x^{(n)} = (0, \dots, 0, 1), \quad x^{(n+1)} = (1, \dots, 1).$$

Глава 2

Общие неравенства для θ_n

2.1 Симплексы максимального объёма в кубе. Оценки чисел ν_n

В этом пункте для удобства читателя мы приводим некоторый материал из учебного пособия [20, пп. 2.2, 2.4], дополняя его другими полезными сведениями.

2.1.1. Матрицы и числа Адамара. Величина ν_n . *Матрицей Адамара порядка m* называется невырожденная $(m \times m)$ -матрица \mathbf{H}_m , каждый элемент которой равен 1 или -1 , и такая что

$$\mathbf{H}_m^{-1} = \frac{1}{m} \mathbf{H}_m^T.$$

Некоторые сведения о матрицах Адамара содержатся в монографии Холла [30]. Если \mathbf{H}_m существует, то $m = 1$, $m = 2$ или m кратно 4. Для бесконечного множества чисел вида $m = 4k$, включая степени $m = 2^l$, существование \mathbf{H}_m давно установлено. Наименьшее m , для которого неизвестно, существует ли матрица Адамара порядка m , на 2008 г. равнялось 668. По данным свежего обзора [31, Proposition 4], опубликованного в 2021 г., существование матрицы Адамара порядка $m = 668$ остаётся не установленным.

Если для натурального m матрица Адамара существует, то m мы будем называть *числом Адамара*, или *адамаровым числом*.

В случае когда $n+1$ — число Адамара, и только тогда, существует правильный симплекс S , вписанный в Q_n таким образом, что его вершины находятся в вершинах Q_n (см. [35, Theorem 4.5]). В статье [10] и монографии [11, § 3.2] разными способами доказано, что $\xi(S) = n$, что даёт $\xi_n = n$. В учебном пособии [20, п. 2.2] приводится иное доказательство этого факта, взятое из статьи авторов [38] и непосредственно связанное с матрицами Адамара. Это важное для нас утверждение имеет следующий вид.

Пусть $n + 1$ — число Адамара, $n \geq 1$. Тогда существует правильный симплекс S со следующими свойствами:

- 1) $\text{ver}(S) \subset \text{ver}(Q_n)$;
- 2) $\xi_n = \xi(S) = \alpha(S) = n$;
- 3) $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$;

4) симплекс nS описан вокруг куба Q_n , причём каждая $(n - 1)$ -мерная грань этого симплекса содержит ровно одну вершину Q_n .

Симплексом максимального объёма в кубе Q_n будем называть n -мерный симплекс $S \subset Q_n$, такой что для любого n -мерного симплекса $S' \subset Q_n$ верно $\nu_n := \text{vol}(S) \geq \text{vol}(S')$. Симплексы максимального объёма в кубе обладают рядом красивых свойств. Например, следствие из [20, п. 1.7.11] для случая $V = Q_n$ даёт такое свойство. Если симплекс $S \subset Q_n$ имеет максимальный объём, т. е. $\text{vol}(S) = \nu_n$, то для осевых диаметров S выполняются равенства $d_1(S) = \dots = d_n(S) = 1$.

В [35] отмечается, что в Q_n существует симплекс максимального объёма, некоторая вершина которого является вершиной куба. Как правило, мы будем рассматривать именно такие максимальные симплексы; это обстоятельство ниже специально не оговаривается.

Под a/b -матрицей будем понимать матрицу, каждый элемент которой равен одному из двух чисел a или b . Через h_n и g_n обозначим максимальные величины определителей $0/1$ и $-1/1$ -матриц порядка n соответственно.

Числа ν_n , g_n и h_n связаны соотношениями $g_{n+1} = 2^n h_n$, $h_n = n! \nu_n$ (см. [35, Theorem 2.1]). Для $n > 1$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\log(4/3)}{\log n} \right) n \log n < \log(2^{n-1} h_{n-1}) \leq \frac{1}{2} n \log n. \quad (2.1)$$

Они эквивалентны тому, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{3}{4} \right)^{(n+1)/2} \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n} < h_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n}, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{3}{4} \right)^{(n+1)/2} \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!} < \nu_n \leq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \quad (2.3)$$

Правое равенство в каждом из соотношений эквивалентно любому из следующих условий:

$n + 1$ — число Адамара;

в Q_n существует максимальный по объёму симплекс, который является правильным.

Двойное неравенство (2.1) объединяет результат Адамара [34] (правая оценка) и результат Клементса и Линдстрёма [32] (левая оценка).

Пусть $n + 1$ — число Адамара. В этом случае найдётся совокупность $n + 1$ вершин куба Q_n с одинаковыми попарными расстояниями между ними. Такая

2.1. СИМПЛЕКСЫ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЁМА В КУБЕ. ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ ν_N

система вершин в ряде работ называется *эквидистантной*. Другими словами, в этом случае существует правильный n -мерный симплекс, вершины которого совпадают с некоторыми из вершин Q_n . Из свойств матриц Адамара следует, что длина ребра S равна $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Величина ν_n совпадает с объёмом этого симплекса и равна правой части (2.3).

Отметим, что указанное свойство является характеристическим. Точнее (см. [35, Theorem 4.5]), для любого $n \in \mathbb{N}$ следующие три условия эквивалентны:

- 1) число $n+1$ — адамарово;
- 2) каждый симплекс максимального объёма в Q_n является правильным;
- 3) множество $\text{ver}(Q_n)$ содержит эквидистантную систему, содержащую $n+1$ элементов.

В некоторых случаях правое неравенство из (2.3) было улучшено. Так, если n — чётное, то

$$\nu_n \leq \frac{n^{n/2} \sqrt{2n+1}}{2^n n!}. \quad (2.4)$$

Если $n > 1$ и $n \equiv 1 \pmod{4}$, то

$$\nu_n \leq \frac{(n-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1} (n-1)!} \quad (2.5)$$

Для многих n значения ν_n , g_n и h_n известны точно. Подробная информация по данным на 1996 г. приводится в [35]. Первые 12 чисел ν_n суть

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 1, & \nu_2 &= \frac{1}{2}, & \nu_3 &= \frac{1}{3}, & \nu_4 &= \frac{1}{8}, & \nu_5 &= \frac{1}{24}, \\ \nu_6 &= \frac{1}{80}, & \nu_7 &= \frac{2}{315}, & \nu_8 &= \frac{1}{720}, & \nu_9 &= \frac{1}{2520}, \\ \nu_{10} &= \frac{1}{11340}, & \nu_{11} &= \frac{9}{246400}, & \nu_{12} &= \frac{3}{394240}. \end{aligned}$$

Правое равенство в (2.3) выполняется для бесконечного множества n , удовлетворяющих условию $n \equiv 3 \pmod{4}$, включая все такие $n < 667$. Из интервала $4 \leq n < 60$ равенство в (2.4) имеет место только для $n = 4, 12, 24, 40$. Из интервала $1 < n < 109$ равенство в (2.5) достигается только для $n = 5, 9, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 45, 61, 65, 73, 81, 85, 89, 97, 101$. Известны также точные значения ν_n для $n = 13, 16, 20$. Для $n = 14, 18, 21, 22, 26, 28$ значения ν_n к 1996 г. не были найдены.

2.1.2. Определители Кэли–Менгера. Приведём способ доказательства равенства

$$\nu_n = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}, \quad n+1 \text{ — адамарово,}$$

отмеченный в [11]. Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)} \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{Gr}(\cdot)$ определитель Грама системы векторов (\cdot) . Положим $a_{ij} := \|x^{(i)} - x^{(j)}\|$ и введём в рассмотрение определители

$$\Gamma(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}) := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & \dots & a_{2,n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n+1,1}^2 & a_{n+1,2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\delta(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}) := \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1,n+1}^2 \\ a_{21}^2 & 0 & \dots & a_{2,n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1}^2 & a_{n+1,2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Определитель (2.7) называется *определителем Кэли–Менгера точек $x^{(i)}$* (см. [2]).

Лемма 2.1. *Справедливо равенство*

$$\text{Gr}(\overline{x^{(1)}x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(1)}x^{(n+1)}}) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} \Gamma(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}). \quad (2.8)$$

Если точки $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ таковы, что определитель (2.6) отличен от нуля, то радиус R сферы, описанной вокруг симплекса с вершинами в $x^{(i)}$, удовлетворяет соотношению

$$R^2 = -\frac{1}{2} \frac{\delta(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)})}{\Gamma(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)})}. \quad (2.9)$$

Красивые соотношения (2.8)–(2.9) доказаны в [2, с. 290–293].

Теорема 2.1. *Пусть $n+1$ — адамарово. Тогда*

$$\nu_n = \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{2^n n!}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Произвольный симплекс, содержащийся в Q_n , находится внутри сферы, описанной вокруг Q_n . Известно, что максимальным объёмом из всех симплексов, находящихся внутри сферы, обладает правильный симплекс, вписанный в эту сферу (см. [33], [41]). Таковым, в частности, является симплекс с эквидистантной системой вершин, совпадающих с некоторыми из вершин Q_n . Как отмечалось выше, при указанном n этот правильный симплекс существует.

Заметим далее, что объём V правильного n -мерного симплекса с длиной ребра a равен

$$V = \frac{a^n \sqrt{n+1}}{2^{n/2} n!}. \quad (2.11)$$

2.1. СИМПЛЕКСЫ МАКСИМАЛЬНОГО ОБЪЁМА В КУБЕ. ОЦЕНКИ ЧИСЕЛ ν_N

Это известное равенство мы получим с помощью (2.8). Обозначим вершины указанного симплекса через $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ и применим (2.8) с $a_{ij} = a$.

$$\begin{aligned}
 V^2 &= \frac{1}{(n!)^2} \text{Gr}(\overline{x^{(1)}x^{(2)}}, \dots, \overline{x^{(1)}x^{(n+1)}}) = (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n (n!)^2} \Gamma(x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}) = \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n (n!)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & \dots & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 & \dots & a^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a^2 & a^2 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^{n+1} \frac{a^{2(n+2)}}{a^{42^n} (n!)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Последний числовой определитель порядка $n+2$ равен $(-1)^{n+1}(n+1)$. Поэтому

$$V^2 = \frac{a^{2n}(n+1)}{(n!)^2},$$

откуда и следует (2.11).

Длина ребра правильного симплекса с объёмом ν_n равна $\sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Как отмечалось, это следует из свойств матрицы Адамара порядка $n+1$. Интересно, что тот же результат получается и из (2.9). Положим $a_{ij} = a$ и вычислим определители (2.6) и (2.7) так, как было отмечено выше. Применяя (2.9), мы получим два известных эквивалентных равенства, связывающих длину a ребра любого правильного симплекса с радиусом R описанной сферы:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \quad a = R\sqrt{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}}. \quad (2.12)$$

Для симплекса максимального объёма

$$R = \frac{\text{diam}(Q_n)}{2} = \frac{\sqrt{n}}{2},$$

поэтому (2.12) даёт $a = \sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Наконец, подставляя в (2.11) это значение a , получим (2.10). Теорема доказана. \square

2.2 Многочлены Лежандра и мера множества $E_{n,\gamma}$

2.1.1. *Стандартизованным многочленом Лежандра степени n называется функция*

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!} [(t^2 - 1)^n]^{(n)}$$

(формула Родрига). По поводу свойств χ_n см., например, [24], [25]. Многочлены Лежандра ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $w(t) = 1$. Первые стандартизованные многочлены Лежандра имеют вид

$$\chi_0(t) = 1, \quad \chi_1(t) = t, \quad \chi_2(t) = \frac{1}{2} (3t^2 - 1), \quad \chi_3(t) = \frac{1}{2} (5t^3 - 3t),$$

$$\chi_4(t) = \frac{1}{8} (35t^4 - 30t^2 + 3), \quad \chi_5(t) = \frac{1}{8} (63t^5 - 70t^3 + 15t),$$

$$\chi_6(t) = \frac{1}{16} (231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5), \quad \chi_7(t) = \frac{1}{16} (429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t).$$

Справедливо рекуррентное соотношение

$$\chi_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t \chi_n(t) - \frac{n}{n+1} \chi_{n-1}(t).$$

Из него видно, что $\chi_n(1) = 1$. Если $n \geq 1$, то $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geq 1$. Обозначим через χ_n^{-1} функцию, обратную к χ_n на полуоси $[1, +\infty)$.

2.1.2. Мера множества $E_{n,\gamma}$. Появление многочленов Лежандра в круге наших вопросов связано с их следующим свойством. Для $\gamma \geq 1$ введём в рассмотрение множество

$$E_{n,\gamma} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right| \leq \gamma \right\}.$$

В 2003 г. М.В. Невский [6] доказал следующее утверждение (доказательство приводится также в [11]).

Теорема 2.2. *Имеют место соотношения*

$$\text{mes}_n(E_{n,\gamma}) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma - 1)^{n-i} (\gamma + 1)^i = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!}. \quad (2.13)$$

Доказательство. Установим сначала левое равенство в (2.13). Положим $E^{(1)} := \{x \in E_{n,\gamma} : \sum x_i > 1\}$, $E^{(2)} := \{x \in E_{n,\gamma} : \sum x_i \leq 1\}$. Найдём последовательно $m_1 = \text{mes}_n(E^{(1)})$ и $m_2 = \text{mes}_n(E^{(2)})$.

Временно зафиксируем k и рассмотрим непустое подмножество $G \subset E^{(1)}$, соответствующее неравенствам $x_1, \dots, x_k \geq 0$; $x_{k+1}, \dots, x_n < 0$. Ясно, что $1 \leq k \leq n$. Пусть $y_1 = x_1, \dots, x_k$; $y_{k+1} = -x_{k+1}, \dots, y_n = -x_n$. Тогда

$$G = \{y : 1 + y_{k+1} + \dots + y_n \leq y_1 + \dots + y_k \leq \frac{\gamma+1}{2}, y_i \geq 0\},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(G) &= \int_1^\alpha dy_1 \int_1^{\alpha-y_1} dy_2 \dots \int_1^{\alpha-y_1-\dots-y_{k-1}} dy_k \cdot \\ &\cdot \int_0^{y_1+\dots+y_k-1} dy_{k+1} \int_0^{y_1+\dots+y_k-1-y_{k+1}} dy_{k+2} \dots \int_0^{y_1+\dots+y_k-1-y_{k+1}-\dots-y_{n-1}} dy_n. \end{aligned}$$

В этом доказательстве $\alpha := \frac{\gamma+1}{2}$. Так как при $b > 0$

$$\int_0^b dz_1 \int_0^{b-z_1} dz_2 \dots \int_0^{b-z_1-\dots-z_m} dz_l = \frac{b^l}{l!},$$

то

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(G) &= \\ &= \int_1^\alpha dy_1 \int_1^{\alpha-y_1} dy_2 \dots \int_1^{\alpha-y_1-\dots-y_{k-1}} \frac{1}{(n-k)!} (y_1 + \dots + y_k - 1)^{n-k} dy_k = \\ &= \left(\int_{y_1+\dots+y_k \leq \alpha} - \int_{y_1+\dots+y_k \leq 1} \right) \frac{1}{(n-k)!} (y_1 + \dots + y_k - 1)^{n-k} dy_1 \dots dy_k = \\ &= J_1 - J_2. \end{aligned}$$

Первый интеграл равен

$$J_1 = \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!} \frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{(-1)^{n+k}}{n!}.$$

Значение J_2 получается из последнего выражения, если вместо α взять 1. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(G) &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \frac{(\alpha-1)^{n-k+j}}{(n-k+j)!} \frac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i. \end{aligned}$$

Множество $E^{(1)}$ есть объединение всех подобных множеств G с различными $k = 1, \dots, n$, поэтому мера $E^{(1)}$ равна

$$m_1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (\alpha - 1)^{n-i} (-\alpha)^i.$$

Преобразуем последнее выражение, меняя порядок суммирования и используя тождество

$$\sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^i \binom{n-1}{i} \quad (2.14)$$

(см., например, [23]):

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (\alpha - 1)^{n-i} (-\alpha)^i \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n}{k} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} (\alpha - 1)^{n-i} \alpha^i. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Перейдём теперь к $E^{(2)}$. Прежде всего заметим, что $E^{(2)}$ содержит область $S := \{x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1\}$, мера которой равна $\frac{1}{n!}$. Далее, фиксируя k в пределах от 1 до n , рассмотрим подмножество $G' \subset E^{(2)}$, соответствующее неравенствам $x_1, \dots, x_k < 0$; $x_{k+1}, \dots, x_n \geq 0$. Положим $y_1 = -x_1, \dots, y_k = -x_k$; $y_{k+1} = x_{k+1}, \dots, y_n = x_n$, тогда

$$G' = \{y : y_{k+1} + \dots + y_n \leq 1 + y_1 + \dots + y_k \leq \frac{\gamma - 1}{2}, y_i \geq 0\}.$$

Обозначим $\beta := \frac{\gamma - 1}{2}$. Имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \text{mes}_n(G') &= \int_0^\beta dy_1 \int_0^{\beta - y_1} dy_2 \dots \int_0^{\beta - y_1 - \dots - y_{k-1}} dy_k \cdot \\ &\cdot \int_0^{1 + y_1 + \dots + y_k} dy_{k+1} \int_0^{1 + y_1 + \dots + y_k - y_{k+1}} dy_{k+2} \dots \int_0^{1 + y_1 + \dots + y_k - y_{k+1} - \dots - y_{n-1}} dy_n = \\ &= \int_0^\beta dy_1 \int_0^{\beta - y_1} dy_2 \dots \int_0^{\beta - y_1 - \dots - y_{k-1}} \frac{(1 + y_1 + \dots + y_k)^{n-k}}{(n-k)!} dy_k = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \frac{(1 + \beta)^{n-j} \beta^j}{(n-j)! j!} + \frac{(-1)^k}{n!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{n!} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1+\beta)^{n-j} (-\beta)^j - 1 \right).$$

Область $E^{(2)}$ есть объединение всех таких множеств G' , отвечающих различным $k = 1, \dots, n$, а также симплекса S . Поэтому

$$m_2 = \text{mes}_n(E^{(2)}) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1+\beta)^{n-j} (-\beta)^j - 1 \right) + 1 \right).$$

Заметим, что $1+\beta = \frac{\gamma+1}{2} = \alpha$, $\beta = \frac{\gamma-1}{2} = \alpha-1$. С помощью замены $i = n-j$ во внутренней сумме получаем

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{n!} \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left((-1)^n \sum_{i=n-k+1}^n \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i - 1 \right) \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \sum_{i=n-k+1}^n \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i. \end{aligned}$$

Мы учли, что

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} + 1 = 0.$$

Меняя порядок суммирования, приходим к равенству

$$m_2 = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (\alpha-1)^{n-i} (-\alpha)^i \sum_{k=n+1-i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}.$$

В соответствии с (2.14)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1-i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=n+1-i}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{n-k} = \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{n-j+1} \binom{n}{j} = (-1)^{n+i} \binom{n-1}{j-1}, \end{aligned}$$

поэтому

$$m_2 = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n-1}{i-1} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i. \quad (2.16)$$

Равенства (2.15) и (2.16) означают, что

$$\begin{aligned}
 \text{mes}_n(E_{n,\gamma}) &= m_1 + m_2 = \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \binom{n-1}{i} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i + \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n-1}{i-1} (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i = \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i + \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \left((\alpha-1)^n + \alpha^n \right) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\alpha-1)^{n-i} \alpha^i = \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i} (\gamma+1)^i.
 \end{aligned}$$

Мы приняли во внимание, что

$$\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}.$$

Левое равенство в (2.13) установлено.

Правое равенство в (2.13) следует из тождества

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 t^i = (1-t)^n \chi_n\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

(см. [23]). Положим $t = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, тогда

$$(1-t)^n = 2^n (\gamma+1)^{-n}, \quad \frac{1+t}{1-t} = \gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \text{mes}_n(G) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i} (\gamma+1)^i = \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma+1)^{n-i} (\gamma-1)^i = \\
 &= \frac{1}{2^n n!} (\gamma+1)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^i = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!}.
 \end{aligned}$$

Теорема полностью доказана. □

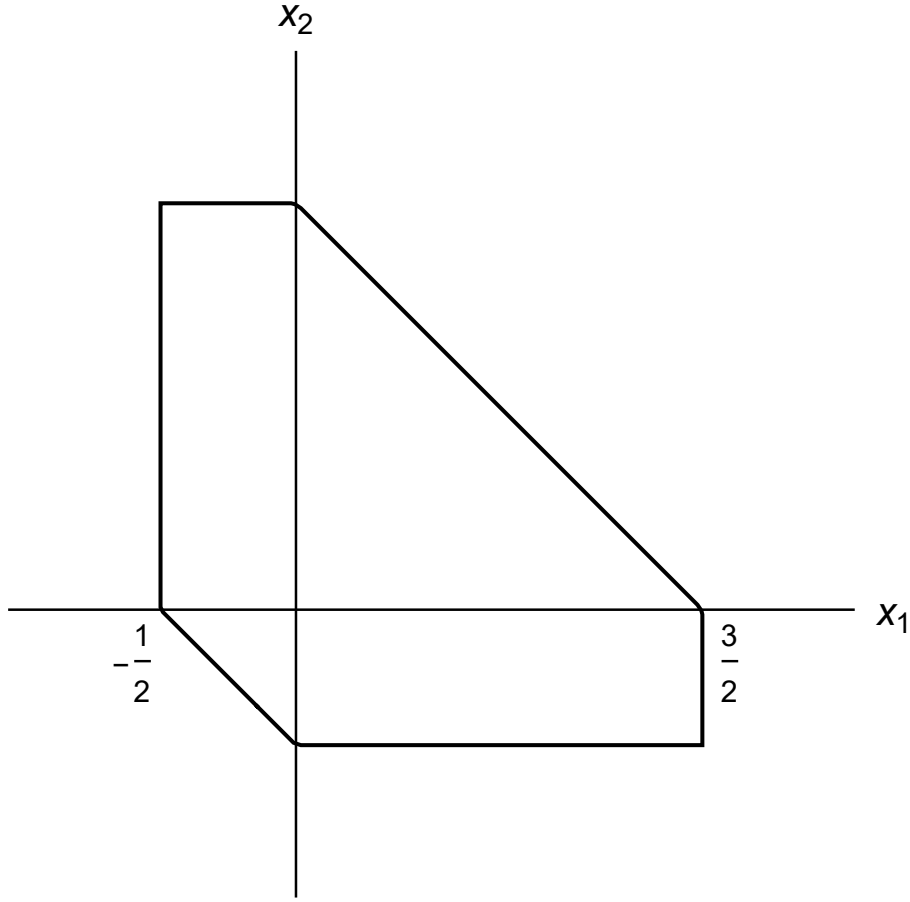


Рис. 2.1. Множество $E_{2,2}$

2.1.3. Примеры. Пусть $n = 1$. Нетрудно убедиться, что множество

$$E_{1,2} = \{x \in \mathbb{R} : |x| + |1 - x| \leq 2\}$$

представляет собой отрезок $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Число $\text{mes}_1(E_{1,2})$ есть его длина. Так как $\chi_1(t) = t$, то

$$\text{mes}_1(E_{1,2}) = \frac{\chi_1(2)}{1!} = 2,$$

что соответствует (2.13) в случае $n = 1$, $\gamma = 2$.

Двумерное множество

$$E_{2,2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| + |1 - x_1 - x_2| \leq 2\}$$

изображено на рис. 2.1. Оно представляет собой выпуклый шестиугольник, разбивающийся на два треугольника и два примыкающих к ним прямоугольника.

Стороны треугольников равны $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{2}$, поэтому площадь $E_{2,2}$ равна

$$\text{mes}_2(E_{2,2}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{11}{4}.$$

Поскольку $\chi_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$, имеем $\chi_2(2) = \frac{11}{2}$. Таким образом,

$$\text{mes}_2(E_{2,2}) = \frac{\chi_2(2)}{2!}.$$

Это равенство совпадает с соотношением (2.13) для $n = 2, \gamma = 2$.

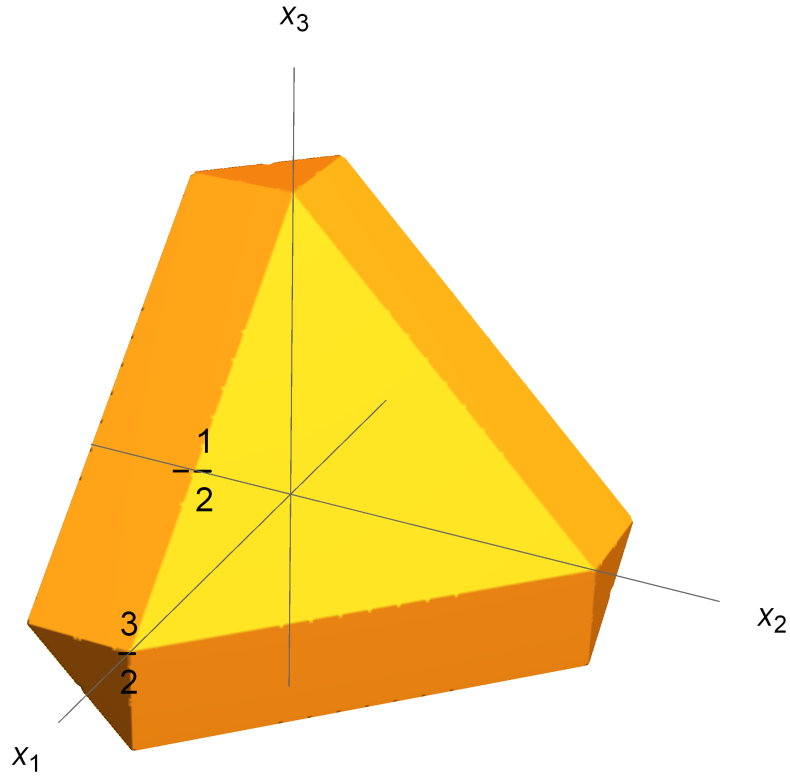


Рис. 2.2. Множество $E_{3,2}$

Трёхмерное множество

$$E_{3,2} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| + |1 - x_1 - x_2 - x_3| \leq 2\}$$

представлено на рис. 2.2 и 2.3. Оно соответствует $n = 3, \gamma = 2$. На этот раз $\text{mes}_3(E_{3,2})$ есть объём многогранника $E_{3,2}$, который можно найти, разбивая многогранник на составные части. Убедитесь самостоятельно, что $\text{mes}_3(E_{3,2}) = \frac{17}{6}$, а соотношение (2.13) выполняется и в этой ситуации.

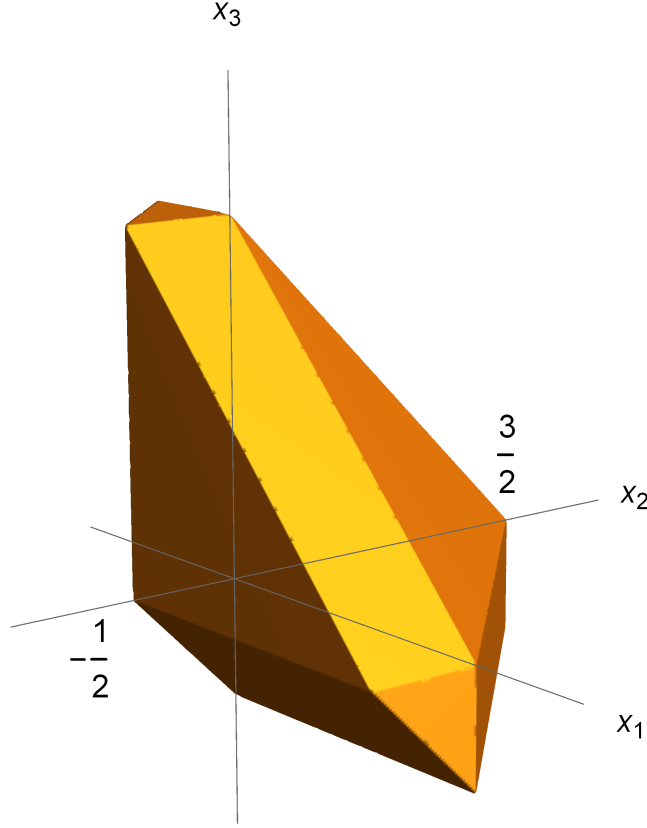


Рис. 2.3. Множество $E_{3,2}$

2.3 Неравенства вида $\theta_n \leq cn$

В дальнейшем мы установим оценки $\theta_n > c\sqrt{n}$ для всех n и $\theta_n \leq \sqrt{n+1}$ для случаев, когда $n+1$ есть число Адамара. Однако прежде всего отметим, что $\theta_n = O(n)$. Неравенства вида $\theta_n \leq cn$ можно получить различными способами и сравнительно легко.

2.3.1. Угловой симплекс. Рассмотрим интерполяционный проектор P , узлы которого имеют вид $x^{(1)} = e_1, \dots, x^{(n)} = e_n, x^{(n+1)} = 0$. Соответствующий симплекс S мы называем *угловым*. В этом случае

$$\lambda_1(x) = x_1, \dots, \lambda_n(x) = x_n, \lambda_{n+1}(x) = -\sum_{j=1}^n x_j + 1.$$

Следовательно,

$$\|P\|_{Q_n} = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max_{x_j=0,1} \left(\sum_{j=1}^n x_j + \left| 1 - \sum_{j=1}^n x_j \right| \right) =$$

$$= \max_{1 \leq k \leq n} (2k - 1) = 2n - 1$$

(здесь k обозначает число единиц в наборе x). Таким образом, $\theta_n \leq 2n - 1$.

2.3.2. Симплекс максимального объёма в кубе. Пусть P — интерполяционный проектор, соответствующий симплексу S максимального объёма в Q_n . Воспользуемся формулой

$$\|P\|_{Q_n} = \frac{1}{|\Delta|} \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\Delta_j(x)|. \quad (2.17)$$

Так как $S \subset Q_n$ имеет максимальный объём, то Δ имеет максимальное по модулю значение из всех определителей, строки которых соответствуют различным узлам, принадлежащим кубу. Достаточно использовать связь между определителями и объёмами. Выполняются равенства

$$|\Delta| = n! \text{vol}(S) = n! \nu_n = h_n.$$

При таком выборе узлов для любого $x \in Q_n$ и любого j справедливо неравенство $|\Delta_j(x)| \leq |\Delta|$. Поэтому из (2.17) сразу получаем $\|P\|_{Q_n} \leq n + 1$. Тем самым $\theta_n \leq n + 1$.

2.3.3. Жёсткий симплекс. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим симплекс S , одна из вершин которого является нулевой, а остальные n вершин совпадают с вершинами куба, соседними с $(1, \dots, 1)$:

$$x^{(1)} = (0, 1, \dots, 1), \quad x^{(2)} = (1, 0, \dots, 1), \quad \dots, \quad x^{(n)} = (1, 1, \dots, 0), \quad x^{(n+1)} = 0.$$

По терминологии статьи [35] этот симплекс называется *жёстким* (*rigid*). Объяснение этого термина даётся в [20, п. 2.3]. Здесь

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} -n+2 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & -n+2 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -n+2 & \dots & 1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -n+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{pmatrix},$$

$\Delta = \det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-1}(n-1)$, $\text{vol}(S) = \frac{n-1}{n!}$. Коэффициенты многочленов λ_j составляют столбцы \mathbf{A}^{-1} , поэтому

$$\lambda_j(x) = \frac{1}{n-1} \left[(-n+2)x_j + \sum_{k \neq j} x_k \right], \quad 1 \leq j \leq n;$$

$$\lambda_{n+1}(x) = -\frac{1}{n-1} \left[\sum_{k=1}^n x_k + n-1 \right].$$

С применением этих равенств доказывается, что норма соответствующего проектора выражается равенством

$$\|P\|_{Q_n} = \begin{cases} 3 & , \quad n = 2, \\ \frac{n+1}{2} & , \quad n \geq 3 \text{ нечётное}, \\ \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2(n-1)} & , \quad n > 3 \text{ чётное} \end{cases}$$

(см. [6], [11, теорема 3.2.3]). Так как $\theta_1 = 1$, то отсюда следует, что

$$\theta_n \leq \frac{n+1}{2}, \quad n \neq 2. \quad (2.18)$$

2.4 Оценка $\|P\|_{Q_n}$ через $\text{vol}(S)$

Метод получения нижних оценок чисел θ_n с применением многочленов Лежандра был предложен М. В. Невским в [6] и затем модифицирован в [7]. Сначала покажем, что норма произвольного интерполяционного проектора может быть оценена снизу через определитель матрицы узлов или объём соответствующего симплекса.

Теорема 2.3. *Для интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующих матрицы узлов \mathbf{A} и симплекса S*

$$\|P\|_{Q_n} \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{n!}{|\det(\mathbf{A})|} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\text{vol}(S)} \right). \quad (2.19)$$

Доказательство. Для каждого $i = 1, \dots, n$ вычтем из i -й строки матрицы \mathbf{A} её $(n+1)$ -ю строку. Обозначим через \mathbf{B} подматрицу порядка n , которая будет располагаться в первых n строках и столбцах преобразованной матрицы. По свойствам определителя $|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n! \text{vol}(S) \leq n! \nu_n$. Иначе говоря,

$$\frac{|\det(\mathbf{B})|}{n! \nu_n} \leq 1. \quad (2.20)$$

Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}$ — узлы P . Как мы показали (см. лемму 1.1),

$$\|P\|_{Q_n} = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in \text{ver}(Q_n) \right\}.$$

Тот же результат получится, если вместо $x \in \text{ver}(Q_n)$ записать $x \in Q_n$. Кроме этого, заменим β_{n+1} равной величиной $1 - \sum_{j=1}^n \beta_j$. Условие $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in Q_n$ эквивалентно $\sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in Q_n - x^{(n+1)}$. Таким образом,

$$\|P\|_{Q_n} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |\beta_j| + |1 - \sum_{j=1}^n \beta_j| \right\}. \quad (2.21)$$

Максимум в (2.21) берётся по совокупности всех числовых наборов $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, для которых

$$\beta_1(x^{(1)} - x^{(n+1)}) + \dots + \beta_n(x^{(n)} - x^{(n+1)}) \in Q' := Q_n - x^{(n+1)}.$$

Очевидно, $\text{vol}(Q') = \text{vol}(Q_n) = 1$.

Рассмотрим невырожденный линейный оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопоставляющий точке $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ точку $x = F(\beta)$ по правилу

$$x = \sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}).$$

Справедливо матричное равенство $F(\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mathbf{B}$, где \mathbf{B} — введённая выше матрица порядка n с элементами $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$. Положим

$$\gamma^* := \chi_n^{-1} \left(\frac{n!}{|\det \mathbf{B}|} \right).$$

Это определение является корректным, поскольку в силу (2.20)

$$\frac{n!}{|\det(\mathbf{B})|} \geq \frac{1}{\nu_n} \geq 1.$$

Заметим, что

$$\chi_n(\gamma^*) = \frac{n!}{|\det(\mathbf{B})|}.$$

Для $\gamma \geq 1$ рассмотрим множество

$$E_{n,\gamma} := \{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |\beta_j| + |1 - \sum_{j=1}^n \beta_j| \leq \gamma \}.$$

Убедимся, что $Q' \not\subset F(E_{n,\gamma})$, если $\gamma < \gamma^*$. Для этого достаточно проверить, что $\text{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \text{mes}_n(Q') = 1$. Последнее следует из теоремы 2.2:

$$\text{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \text{mes}_n(F(E_{n,\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \text{mes}_n(E_{n,\gamma^*}) = |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\chi_n(\gamma^*)}{n!} = 1.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x^{(\varepsilon)} = \sum \beta_j^{(\varepsilon)}(x^{(j)} - x^{(n+1)})$, принадлежащая Q' , такая что $|\sum \beta_j^{(\varepsilon)}| + |1 - \sum \beta_j^{(\varepsilon)}| \geq \gamma^* - \varepsilon$. В силу (2.21) это гарантирует неравенство $\|P\|_{Q_n} \geq \gamma^* - \varepsilon$. Отсюда ввиду произвольности ε

$$\|P\|_{Q_n} \geq \gamma^* = \chi_n^{-1} \left(\frac{n!}{|\det(\mathbf{B})|} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{n!}{|\det(\mathbf{A})|} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\text{vol}(S)} \right).$$

Мы применили равенство $|\det(\mathbf{A})| = n! \text{vol}(S)$. Таким образом, выполняется соотношение (2.19). Теорема доказана. \square

Отметим ещё следующий результат (см. [6, замечание 6]). Для любого проектора P выполняется неравенство

$$\|P\|_{Q_n} > \frac{1}{2e} \cdot \left(\frac{n^{n+1}}{|\det \mathbf{A}|} \right)^{1/n}. \quad (2.22)$$

Действительно, если взять γ равным правой части (2.22), то для соответствующего множества $E_{n,\gamma}$ будет иметь место $|\det \mathbf{B}| \cdot \text{mes}_n(E_{n,\gamma}) < 1$. Это означает, что справедливо (2.22). Например, если $|\det \mathbf{A}| \leq n$, то $\|P\|_{Q_n} > \frac{n}{2e}$.

Следствие 2.1. Для любого n

$$\theta_n \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right). \quad (2.23)$$

Доказательство. В обозначениях теоремы верно $\text{vol}(S) \leq \nu_n$, поэтому

$$\|P\|_{Q_n} \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\text{vol}(S)} \right) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right).$$

В силу произвольности P отсюда следует (2.23). \square

2.5 Неравенство $\theta_n > c\sqrt{n}$

Перейдём к конкретизации неравенства (2.23).

2.5.1. Оценка $\theta_n > \frac{\sqrt{n-1}}{e}$. Нам потребуется формула Стирлинга [28]

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot e^{\zeta_n/(12n)}, \quad 0 < \zeta_n < 1.$$

Из неё вытекает, что при всех n

$$n! > \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (2.24)$$

Отметим также, что имеет место неравенство

$$\chi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}\right)^{1/n}, \quad n > 1. \quad (2.25)$$

Действительно, в соответствии с (2.13) при любом $t \geq 1$ и $n > 1$

$$\begin{aligned} \chi_n(t) &= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (t-1)^{n-i} (t+1)^i < \\ &< \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (t-1)^{n-i} (t+1)^i = \\ &= \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \cdot (2t)^n \cdot 2^{-n} = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} t^n. \end{aligned}$$

Отсюда получается (2.25). Если n — чётное, то $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{n/2} = (n!)/((n/2)!)^2$, значит,

$$\chi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s((n/2)!)^2}{n!}\right)^{1/n}. \quad (2.26)$$

Если же n — нечётное, то

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \frac{n!}{\frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}!},$$

и (2.25) имеет вид

$$\chi_n^{-1}(s) > \left(\frac{s \frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}!}{n!}\right)^{1/n}. \quad (2.27)$$

Перед конкретизацией оценки следствия 2.1 отметим следующее обстоятельство. Так как $\theta_n \geq 1$, то неравенство $\theta_n > c$ в случае $c < 1$ может быть автоматически заменено на оценку $\theta_n \geq 1$.

Теорема 2.4. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\theta_n > \frac{\sqrt{n-1}}{e}. \quad (2.28)$$

Доказательство. Случай $n = 1$ тривиален. Если $n > 1$, мы можем применять неравенства (2.25)–(2.27). Кроме того, для оценки ν_n сверху воспользуемся

правым неравенством из (2.3). В случае чётного n из (2.23), (2.24) и (2.26) получаем:

$$\begin{aligned}\theta_n &\geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{2^n n!}{(n+1)^{(n+1)/2}} \right) > 2 \left(\frac{[(n/2)!]^2}{(n+1)^{(n+1)/2}} \right)^{1/n} > \\ &> \frac{2}{(n+1)^{1/2+1/(2n)}} \left(\sqrt{\pi n} \left(\frac{n}{2e} \right)^{n/2} \right)^{2/n} = \frac{(\pi n)^{1/n} n}{e(n+1)^{1/2+1/(2n)}} > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.\end{aligned}$$

В случае нечётного n применим (2.27):

$$\begin{aligned}\theta_n &\geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{2^n n!}{(n+1)^{(n+1)/2}} \right) > \left(\frac{2^n \frac{n+1}{2}! \frac{n-1}{2}!}{(n+1)^{(n+1)/2}} \right)^{1/n} > \\ &> 2 \left(\frac{\pi \sqrt{n^2-1} (n^2-1)^{(n-1)/2} (n+1)}{(2e)^n} \right)^{1/n} = \\ &= \frac{1}{e} \pi^{1/n} \sqrt{n-1} (n+1)^{1/(2n)} > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Таким образом, (2.28) имеет место при всех n . \square

В некоторых ситуациях оценки теоремы 2.4 могут быть улучшены.

Теорема 2.5. Для всех чётных n верно $\theta_n > \frac{\sqrt{n}}{e}$. Для всех $n > 1$, таких что $n \equiv 1 \pmod{4}$, выполняется $\theta_n > \frac{n}{e\sqrt{n-1}}$.

Доказательство. Достаточно использовать схему доказательства теоремы 2.4 и оценки (2.4)–(2.5). \square

Неравенство (2.28) означает, что $\theta_n > c\sqrt{n}$. Следует отметить, что для первых значений n оценка (2.28) и неравенства теоремы 2.5 малоэффективны. Например, правая часть (2.28) больше 1 лишь при $n \geq 9$.

2.5.2. Соберём вместе основные полученные оценки θ_n снизу. Во-первых, выполняется правое неравенство (1.22) следствия 1.3:

$$\theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}.$$

Во-вторых, цепочка соотношений (2.29) в конце доказательства теоремы 2.4 означает, что

$$\theta_n \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Таким образом, при любом n

$$\theta_n \geq \max \left[3 - \frac{4}{n+1}, \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) \right] > \frac{\sqrt{n-1}}{e}.$$

Подходящей оценкой вида $\theta_n > c\sqrt{n}$ является неравенство

$$\theta_n > \frac{2\sqrt{2}}{3e} \sqrt{n}. \quad (2.30)$$

Действительно, если $n \leq 8$, то правая часть (2.30) меньше 1; достаточно заметить, что $8 < 3e$. Поэтому при $1 \leq n \leq 8$ неравенство (2.30) верно. Если же $n \geq 9$, то с учётом предыдущего

$$\theta_n > \frac{\sqrt{n-1}}{e} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3e} \sqrt{n}$$

(последнее неравенство эквивалентно $n \geq 9$). Заметим, что $\frac{2\sqrt{2}}{3e} = 0.3468\dots$

2.6 Неравенство $\theta_n \leq \sqrt{n+1}$

Приведём верхнюю оценку величины θ_n в предположении, что $n+1$ есть число Адамара.

Теорема 2.6. *Если $n+1$ — число Адамара, то $\theta_n \leq \sqrt{n+1}$.*

Доказательство. Положим $m = n+1$. Так как m — число Адамара, то для любого куба существует правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах этого куба. Вычисления удобно провести для куба $Q'_n := [-1, 1]^n$. Переход к Q_n осуществляется с помощью соображений подобия.

Пусть \mathbf{H}_m — матрица Адамара, m -й столбец которой состоит из 1. Возьмём в качестве $P : C(Q'_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ интерполяционный проектор по узлам, соответствующим строкам \mathbf{H}_m (координаты узлов содержатся в первых $m-1$ столбцах). Для $f \in C(Q'_n)$ обозначим через p интерполяционный многочлен, соответствующий значениям в узлах f_1, \dots, f_m . Учитывая, что $\mathbf{H}_m^{-1} = \frac{1}{m} \mathbf{H}_m^T$, для нормы проектора P получаем равенство:

$$\begin{aligned} \|P\|_{Q'_n} &= \sup_{\|f\|_{C(Q'_n)}=1} \|p\|_{C(Q'_n)} = \max_{x_j, f_k=\pm 1} \left| \left[(x_1, \dots, x_{m-1}, 1) \frac{1}{m} \mathbf{H}_m^T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \right]^T \right| = \\ &= \max_{f_k=\pm 1} \max_{x_j=\pm 1} (f_1, \dots, f_m) \frac{1}{m} \mathbf{H}_m \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \max_{x_1, \dots, x_{m-1}=\pm 1} \sum_{i=1}^m |(\bar{x}, h^{(i)})|. \end{aligned}$$

Здесь $\bar{x} := (x_1, \dots, x_{m-1}, 1)$, $h^{(i)}$ — строки \mathbf{H}_m , (\cdot, \cdot) — стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^m . Так как $\left\{ \frac{1}{\sqrt{m}} h^{(i)} \right\}$ — ортонормированный базис \mathbb{R}^m , то

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m \frac{(\bar{x}, h^{(i)})}{\sqrt{m}} \frac{h^{(i)}}{\sqrt{m}}, \quad (\bar{x}, \bar{x}) = m = \sum_{i=1}^m \frac{(\bar{x}, h^{(i)})^2}{m}.$$

Значит, $\sum (\bar{x}, h^{(i)})^2 = m^2$. Применяя неравенство Коши, получим

$$\sum_{i=1}^m |(\bar{x}, h^{(i)})| \leq \sqrt{m} \left(\sum_{i=1}^m (\bar{x}, h^{(i)})^2 \right)^{1/2} = m\sqrt{m}.$$

Поэтому

$$\|P\|_{Q'_n} = \frac{1}{m} \max_{x_1, \dots, x_{m-1} = \pm 1} \sum_{i=1}^m |(\bar{x}, h^{(i)})| \leq \frac{m\sqrt{m}}{m} = \sqrt{m}.$$

Таким образом,

$$\theta_n(Q'_n) \leq \|P\|_{Q'_n} \leq \sqrt{m} = \sqrt{n+1}.$$

Поскольку $\theta_n = \theta_n(Q_n) = \theta_n(Q'_n)$, отсюда следует утверждение теоремы.

Теорема доказана □

Из доказательства теоремы 2.6, соображений подобия и доказанной выше оценки $\theta_n > c\sqrt{n}$, справедливой для всех n , получается следующий результат.

Теорема 2.7. Пусть $n+1$ — число Адамара. Интерполяционный проектор $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, узлы которого находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в куб, является почти-минимальным в следующем смысле: с константами, не зависящими от n , выполняется соотношение $\|P\|_{Q_n} \asymp \theta_n$.

Другое доказательство утверждений этого пункта, связанное с интерполяцией на шаре, даётся в конце пункта 4.3.

Глава 3

Оценки θ_n для конкретных n

3.1 Верхние и нижние оценки θ_n

Настоящий пункт написан по материалам обзорной статьи авторов [21].

Как уже отмечалось, на данный момент точные значения θ_n известны лишь в случаях $n = 1, 2, 3$ и 7. Для остальных n известны некоторые общие оценки, часть из которых приведена выше. В ряде случаев эти оценки удалось уточнить с помощью компьютерных вычислений.

В таблице 3.1 даются наиболее точные из полученных авторами оценок θ_n сверху для $1 \leq n \leq 27$. В случаях когда известно точное значение θ_n , приводится это точное значение. Для получения оценок может быть применена идея, описанная в [11]. Верхняя оценка θ_n получается из рассмотрения интерполяционного проектора, узлы которого находятся в вершинах симплекса максимального объема в Q_n . Впервые этот метод был применён в статье М. В. Невского и И. В. Хлестковой [22].

Значительная часть оценок, приведенных в данном пункте, получена с применением именно этой методики. Для построения таких симплексов при данном n использованы максимальные $(-1, 1)$ -определители порядка $n + 1$ с сайта <http://www.indiana.edu/~maxdet/>. Матрицы Адамара импортировались с сайта <http://www.maths.gla.ac.uk/~es/hadamard/hadamard.php>.

Максимальность $(-1, 1)$ -определителей порядка $1, \dots, 21$, импортированных с сайта www.indiana.edu/~maxdet, доказана. Более того, на указанном сайте приведены все (с точностью до эквивалентности матриц) максимальные определители порядка ≤ 21 . При получении оценок нами были использованы все эти данные. Максимальность определителей порядков 22, 23 и 27 не установлена. Такие ситуации отмечены в таблице знаком вопроса. Неясно, является ли исчерпывающим приведённый на сайте набор максимальных определителей порядков 25 и 26.

Для уточнения верхней оценки θ_n рассматривались все известные нам мак-

3.1. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ θ_N

Таблица 3.1. Верхние оценки θ_n ($1 \leq n \leq 27$)

n	min P 	N	$\theta_n \leq$	
1	1	1	$\theta_1 = 1$	N
2	3	1	$\theta_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} + 1 = 1.8944 \dots$	N
3	2	1	$\theta_3 = 2$	N
4	$\frac{7}{3} = 2.3333 \dots$	1	$\frac{3(4+\sqrt{2})}{7} = 2.3203 \dots$	K
5	$\frac{13}{5} = 2.6$	1	2.448804	NU
6	3	1	2.60004...	L
7	$\frac{5}{2} = 2.5$	1	$\theta_7 = \frac{5}{2} = 2.5$	N
8	$\frac{22}{7} = 3.1428 \dots$	1	$\frac{22}{7} = 3.1428 \dots$	M
9	3	1	3	M
10	$\frac{19}{5} = 3.8$	3	$\frac{19}{5} = 3.5186 \dots$	L
11	3	1	3	H
12	$\frac{17}{5} = 3.4$	1	$\frac{17}{5} = 3.4$	M
13	$\frac{49}{13} = 3.7692 \dots$	1	$\frac{49}{13} = 3.7692 \dots$	M
14	$\frac{21}{5} = 4.2$	1	$\frac{21}{5} = 4.0156 \dots$	L
15	$\frac{7}{2} = 3.5$	5	$\frac{7}{2} = 3.5$	H
16	$\frac{21}{5} = 4.2$	3	$\frac{21}{5} = 4.2$	M
17	$\frac{139}{34} = 4.0882 \dots$	3	$\frac{139}{34} = 4.0882 \dots$	M
18	$\frac{95}{17} = 5.5882 \dots$	3	5.14006...	L
19	4	3	4	H
20	$\frac{137}{29} = 4.7241 \dots$	7	4.68879...	L
21	$\frac{251}{50} = 5.02$	1	$\frac{251}{50} = 5.02$	M?
22	$\frac{1817}{335} = 5.4238 \dots$	1	$\frac{1817}{335} = 5.4238 \dots$	M?
23	$\frac{9}{2} = 4.5$	60	$\frac{9}{2} = 4.5$	O
24	$\frac{103}{21} = 4.9047 \dots$	2	$\frac{103}{21} = 4.9047 \dots$	M
25	5	3	5	M
26	$\frac{474}{91} = 5.2087 \dots$	1	$\frac{474}{91} = 5.2087 \dots$	M?
27	5.0	487	5.0	U

симметричные $(-1, 1)$ -определители порядка $n + 1$, так как соответствующие проекторы могут иметь различную норму. Вычисления по формуле

$$\|P\|_{Q_n} = \max_{x \in \text{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|. \quad (3.1)$$

требуют перебора всех 2^n вершин Q_n . При больших n вычисления становятся довольно трудоёмкими. По этой причине были рассмотрены только случаи $1 \leq n \leq 27$.

Во всех ситуациях, когда $n+1$ есть число Адамара, нами использован полный набор адамаровых матриц соответствующего порядка. В частности, для получения оценки θ_{23} были рассмотрены все существующие 60 матриц Адамара порядка 24. Этот случай был изучен А. Ю. Ухаловым и Е. А. Озеровой [4]. Оценка θ_{27} получена А. Ю. Ухаловым и Е. Д. Удовенко [26], [42]. Для оценивания этой величины пришлось рассмотреть 487 матриц Адамара порядка 28.

Вычисление норм проекторов с узлами в вершинах симплексов максимального объема проводилось с помощью системы Wolfram Mathematica с применением точной арифметики. Поэтому приведённые в таблице значения являются точными. Ввиду трудоёмкости вычислений для оценивания θ_{27} счёт проводился с помощью программы на языке C++ с использованием арифметики с плавающей точкой. В таблице приведено значение верхней границы 5.0.

Оценки θ_n для $n = 4, 5, 6, 10, 14, 18, 20$ были уточнены численными методами путём минимизации функции из правой части (3.1). Ссылки на соответствующие работы приведены в описании таблицы.

Авторы предполагают, что $\theta_4 = \frac{3(4 + \sqrt{2})}{7} = 2.320377 \dots$

В первом столбце таблицы 3.1 даётся размерность пространства n . Вторым столбцом содержит минимальную норму проектора, полученную из рассмотрения максимальных $(-1, 1)$ -определителей порядка $n + 1$. В третьем столбце приводится количество N матриц порядка $n + 1$, рассмотренных для получения результата второго столбца. В четвертом столбце даётся лучшая известная верхняя оценка θ_n для данного n . Последний столбец таблицы содержит комментарий о способе получения верхней границы θ_n , указанной в четвертом столбце. При этом используются следующие обозначения.

- Н — число $n+1$ является адамаровым. Использован правильный симплекс, построенный из соответствующей матрицы Адамара.
- К — оценка сверху получена И. С. Кудрявцевым (см. [4]).
- L — оценка сверху получена А. В. Лютенковым в [5].
- М — использован симплекс максимального объема в Q_n , построенный из максимального $(-1, 1)$ -определителя порядка $n + 1$.

- М? — использован симплекс, построенный из наибольшего известного определителя порядка $n + 1$. Максимальность данного определителя не доказана.
- N — точное значение θ_n получено М. В. Невским (см. [11]).
- NU — оценка сверху получена М. В. Невским и А. Ю. Ухаловым в [16].
- O — оценка сверху получена Е. А. Озеровой (см. [4]).
- U — оценка сверху получена Е. Д. Удовенко в [26].

При $n = 5$ в выпускной квалификационной работе Е. В. Спасовой (2020), выполненной под руководством М. В. Невского, был построен интерполяционный проектор, для которого $\|P\|_{Q_5} = \frac{5}{2} = 2.5$. Эта величина превосходит наименьшую известную верхнюю границу $2.4488\dots$ для θ_5 , установленную в [16]. Однако узлы P имеют достаточно простой вид — они находятся в вершинах или серединах ребер куба. Например, подходящими являются точки

$$(0, 0, 0, 0, 0), \quad \left(0, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\right), \quad \left(0, 1, \frac{1}{2}, 0, 1\right),$$

$$(0, 1, 1, 1, 0), \quad \left(1, 0, 1, 0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(1, 1, 0, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Еще в 2006 г. в [7] был построен проектор с узлами в вершинах Q_5 , норма которого равна 2.6, и на протяжении не менее 10 лет оценка $\theta_5 \leq 2.6$ была лучшей из известных.

Теперь перейдем к оценкам θ_n снизу. В таблицах 3.2, 3.3 и 3.4 представлены наибольшие из известных нижних границ этих чисел. Для получения оценок использовалось неравенство

$$\theta_n \geq \max \left[3 - \frac{4}{n+1}, \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) \right]. \quad (3.2)$$

Для каждого n приводятся значения функций $\chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right)$ и $3 - \frac{4}{n+1}$, а также максимальное из них. Этот максимум и является наиболее точной нижней границей θ_n . В таблицах отсутствуют значения для $n = 104$ и $n = 116$, так как на сайте www.indiana.edu/~maxdet были не приведены максимальные определители порядков 105 и 117.

Графики функций $\chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right)$, $3 - \frac{4}{n+1}$ и $\frac{\sqrt{n-1}}{e}$ изображены на рис. 3.1. Эти функции определены для целочисленных значений аргумента, однако

Таблица 3.2. Нижние оценки θ_n ($1 \leq n \leq 54$)

n	$\chi_n^{-1}(\frac{1}{\nu_n})$	$3 - \frac{4}{n+1}$	Max	n	$\chi_n^{-1}(\frac{1}{\nu_n})$	$3 - \frac{4}{n+1}$	Max
1	1	1	1	28	2.2768	2.8621	2.8621
2	1.291	1.6667	1.6667	29	2.3074	2.8667	2.8667
3	1.2492	2	2	30	2.3487	2.871	2.871
4	1.3478	2.2	2.2	31	2.3452	2.875	2.875
5	1.4284	2.3333	2.3333	32	2.3955	2.8788	2.8788
6	1.5018	2.4286	2.4286	33	2.4259	2.8824	2.8824
7	1.4678	2.5	2.5	34	2.4642	2.8857	2.8857
8	1.5626	2.5556	2.5556	35	2.4601	2.8889	2.8889
9	1.6034	2.6	2.6	36	2.5019	2.8919	2.8919
10	1.6699	2.6364	2.6364	37	2.5348	2.8947	2.8947
11	1.6488	2.6667	2.6667	38	2.5722	2.8974	2.8974
12	1.7086	2.6923	2.6923	39	2.5697	2.9	2.9
13	1.7659	2.7143	2.7143	40	2.6056	2.9024	2.9024
14	1.8211	2.7333	2.7333	41	2.641	2.9048	2.9048
15	1.8108	2.75	2.75	42	2.6759	2.907	2.907
16	1.8778	2.7647	2.7647	43	2.6747	2.9091	2.9091
17	1.9156	2.7778	2.7778	44	2.7179	2.9111	2.9111
18	1.965	2.7895	2.7895	45	2.743	2.913	2.913
19	1.9587	2.8	2.8	46	2.7791	2.9149	2.9149
20	2.0159	2.8095	2.8095	47	2.7756	2.9167	2.9167
21	2.0588	2.8182	2.8182	48	2.8201	2.9184	2.9184
22	2.1039	2.8261	2.8261	49	2.8413	2.92	2.92
23	2.0958	2.8333	2.8333	50	2.8805	2.9216	2.9216
24	2.1408	2.84	2.84	51	2.8729	2.9231	2.9231
25	2.1847	2.8462	2.8462	52	2.9173	2.9245	2.9245
26	2.2278	2.8519	2.8519	53	2.9362	2.9259	2.9362
27	2.2242	2.8571	2.8571	54	2.9735	2.9273	2.9735

3.2. О ВЫПОЛНЕНИИ НЕРАВЕНСТВА $\xi_N < \frac{N+1}{2} (\theta_N - 1) + 1$

для удобства восприятия при построении графиков использовались непрерывные линии различных типов. Неравенство

$$\chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) > 3 - \frac{4}{n+1}$$

выполняется при $n \geq 53$.

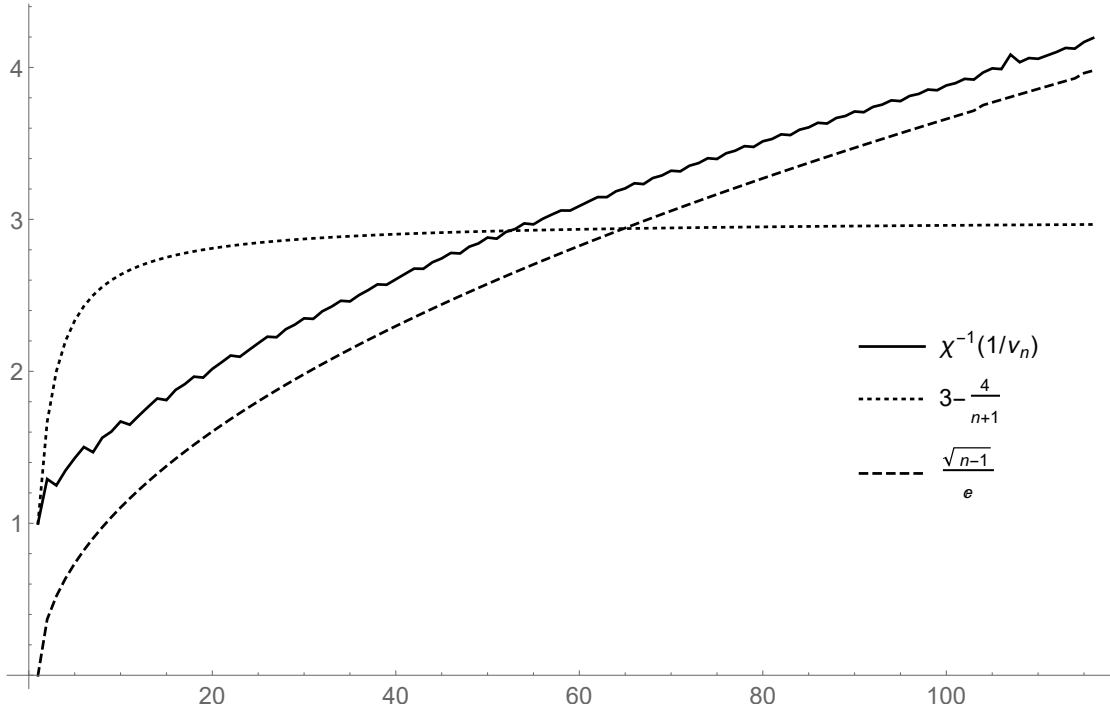


Рис. 3.1. Графики функций $\chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right)$, $3 - \frac{4}{n+1}$ и $\frac{\sqrt{n-1}}{e}$

3.2 О выполнении неравенства $\xi_n < \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1$

Как отмечалось в п.1.2 (см. правое соотношение в (1.21)), при любом n справедливо неравенство

$$\xi_n \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1. \quad (3.3)$$

На настоящий момент мы знаем лишь четыре значения n , при котором в этом соотношении имеет место равенство: $n = 1, 2, 3$ и 7 . Это ровно те случаи, в которых известны точные значения θ_n и ξ_n . В [15] авторы выдвинули предположение, что минимальное n , при котором неравенство в (3.3) является строгим, равно 4.

Таблица 3.3. Нижние оценки θ_n ($55 \leq n \leq 109$)

n	$\chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right)$	$3 - \frac{4}{n+1}$	Max	n	$\chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right)$	$3 - \frac{4}{n+1}$	Max
55	2.9669	2.9286	2.9669	82	3.5595	2.9518	3.5595
56	3.0034	2.9298	3.0034	83	3.5546	2.9524	3.5546
57	3.0315	2.931	3.0315	84	3.5899	2.9529	3.5899
58	3.0583	2.9322	3.0583	85	3.6053	2.9535	3.6053
59	3.058	2.9333	3.058	86	3.6355	2.954	3.6355
60	3.0877	2.9344	3.0877	87	3.6307	2.9545	3.6307
61	3.1173	2.9355	3.1173	88	3.667	2.9551	3.667
62	3.1465	2.9365	3.1465	89	3.6803	2.9556	3.6803
63	3.1463	2.9375	3.1463	90	3.7099	2.956	3.7099
64	3.1849	2.9385	3.1849	91	3.7052	2.9565	3.7052
65	3.2039	2.9394	3.2039	92	3.7401	2.957	3.7401
66	3.2375	2.9403	3.2375	93	3.755	2.9574	3.755
67	3.2322	2.9412	3.2322	94	3.783	2.9579	3.783
68	3.2717	2.942	3.2717	95	3.7781	2.9583	3.7781
69	3.2888	2.9429	3.2888	96	3.8121	2.9588	3.8121
70	3.32	2.9437	3.32	97	3.8258	2.9592	3.8258
71	3.3158	2.9444	3.3158	98	3.8542	2.9596	3.8542
72	3.3529	2.9452	3.3529	99	3.8497	2.96	3.8497
73	3.3703	2.9459	3.3703	100	3.8814	2.9604	3.8814
74	3.4023	2.9467	3.4023	101	3.8964	2.9608	3.8964
75	3.3973	2.9474	3.3973	102	3.9246	2.9612	3.9246
76	3.4348	2.9481	3.4348	103	3.92	2.9615	3.92
77	3.4521	2.9487	3.4521	105	3.9662	2.9623	3.9662
78	3.4818	2.9494	3.4818	106	3.9936	2.9626	3.9936
79	3.4769	2.95	3.4769	107	3.989	2.963	3.989
80	3.5138	2.9506	3.5138	108	4.0841	2.9633	4.0841
81	3.5288	2.9512	3.5288	109	4.034	2.9636	4.034

3.2. О ВЫПОЛНЕНИИ НЕРАВЕНСТВА $\xi_N < \frac{N+1}{2} (\theta_N - 1) + 1$

Таблица 3.4. Нижние оценки θ_n ($110 \leq n \leq 118$)

n	$\chi_n^{-1}(\frac{1}{\nu_n})$	$3 - \frac{4}{n+1}$	Max	n	$\chi_n^{-1}(\frac{1}{\nu_n})$	$3 - \frac{4}{n+1}$	Max
110	4.0615	2.964	4.0615	114	4.1281	2.9652	4.1281
111	4.0568	2.9643	4.0568	115	4.1234	2.9655	4.1234
112	4.0789	2.9646	4.0789	117	4.167	2.9661	4.167
113	4.101	2.9649	4.101	118	4.1937	2.9664	4.1937

Заметим, что точное значение $\xi_n = n$ известно для всех n , когда $n + 1$ есть число Адамара, а также для $n = 5$ и $n = 9$ (см. [20]). Во всех этих случаях (3.3) эквивалентно $\theta_n \geq 3 - \frac{4}{n+1}$, а равенство в (3.3) равносильно $\theta_n = 3 - \frac{4}{n+1}$. Такое точное значение θ_n достигается лишь в ситуации, когда для некоторого симплекса S с условием $\xi(S) = \xi_n$ существует 1-вершина Q_n относительно S (см. п. 1). Однако вычисления показывают, что для всех отмеченных $n \leq 24$, когда $\xi_n = n$, 1-вершины куба относительно симплекса, экстремального в смысле ξ_n , существуют только для $n = 1, 2, 3, 7$.

Из соотношений $\xi_n \asymp n$, $\theta_n \geq c\sqrt{n}$ следует, что для всех достаточно больших n справедливо строгое неравенство

$$\xi_n < \frac{n+1}{2} (\theta_n - 1) + 1. \quad (3.4)$$

Обозначим через n_0 минимальное натуральное число, такое что при $n \geq n_0$ верно (3.4). Вопрос о точном значении n_0 является очень трудным. Известные нижняя и верхняя границы различаются весьма существенно. Из предыдущего имеем оценку снизу $n_0 \geq 8$. Применяя неравенство (2.23) и асимптотические свойства многочленов Лежандра, М. В. Невский в 2009 г. доказал, что $n_0 \leq 57$ (см. [9], [11, § 3.7]). Достаточным условием для выполнения (3.4) при $n > 2$ является неравенство

$$\chi_n \left(\frac{3n-5}{n-1} \right) \cdot \nu_n < 1. \quad (3.5)$$

Более поздние вычисления позволили несколько понизить верхнюю границу числа n_0 . Эти результаты описаны в [18].

Первый подход использует верхние границы чисел ξ_n , приведённые в [17], и нижние границы чисел θ_n , приведённые в [18]. Можно использовать и данные, приведённые в [20, п. 3.8], а также в предыдущем пункте настоящего пособия. Обозначим указанные границы через a_n и b_n соответственно. Положим $c_n := \frac{n+1}{2} (b_n - 1) + 1$. Нас интересует то значение n , начиная с которого $a_n < c_n$. Располагая оценками для $n \leq 118$, авторы обнаружили, что указанное

соотношение для a_n и c_n выполняется начиная с $n = 53$. Данные для $41 \leq n \leq 60$ приводятся в таблице 3.5.

Второй подход базируется на условии (3.5), гарантирующем строгое неравенство (3.4). Вычисления показывают, что (3.5), а с ним и (3.4) выполняются при $n \geq 54$. Поведение величины $\chi_n \left(\frac{3n-5}{n-1} \right) \cdot \nu_n$ представлено на рис. 3.2–3.3.

Таблица 3.5. Числа a_n и c_n для $41 \leq n \leq 60$

n	a_n	c_n	a_n – c_n	n	a_n	c_n	a_n – c_n
41	41.361	35.4612	5.89973	51	51	49.6955	1.30445
42	42.5439	37.0328	5.51107	52	52.9608	51.8073	1.15348
43	43	37.8441	5.15592	53	53.2758	53.2783	–0.00258699
44	44.9535	39.6528	5.30067	54	54.5135	55.2709	–0.757386
45	45.3273	41.0896	4.23764	55	55	56.0734	–1.07339
46	46.9556	42.8086	4.14692	56	56.2857	58.0955	–1.80977
47	47	43.6153	3.38472	57	57.6179	59.9143	–2.29645
48	48.9574	45.5916	3.3659	58	58.3581	61.7212	–3.3631
49	49.2143	47.0327	2.18158	59	59	62.7385	–3.7385
50	50.5217	48.9515	1.57023	60	60.1515	64.6762	–4.52468

Таким образом, $n_0 \leq 53$. Иначе говоря, строгое неравенство (3.4) выполняется, по крайней мере, начиная с $n = 53$.

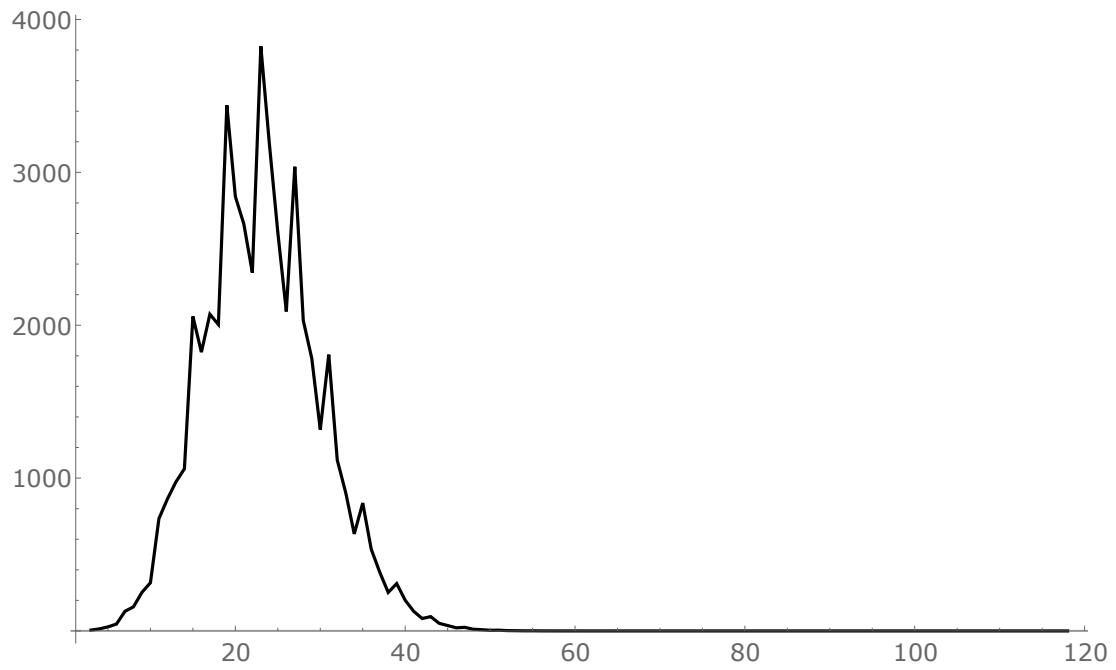


Рис. 3.2. График функции $\chi_n \left(\frac{3n-5}{n-1} \right) \cdot \nu_n$ для $n \geq 3$

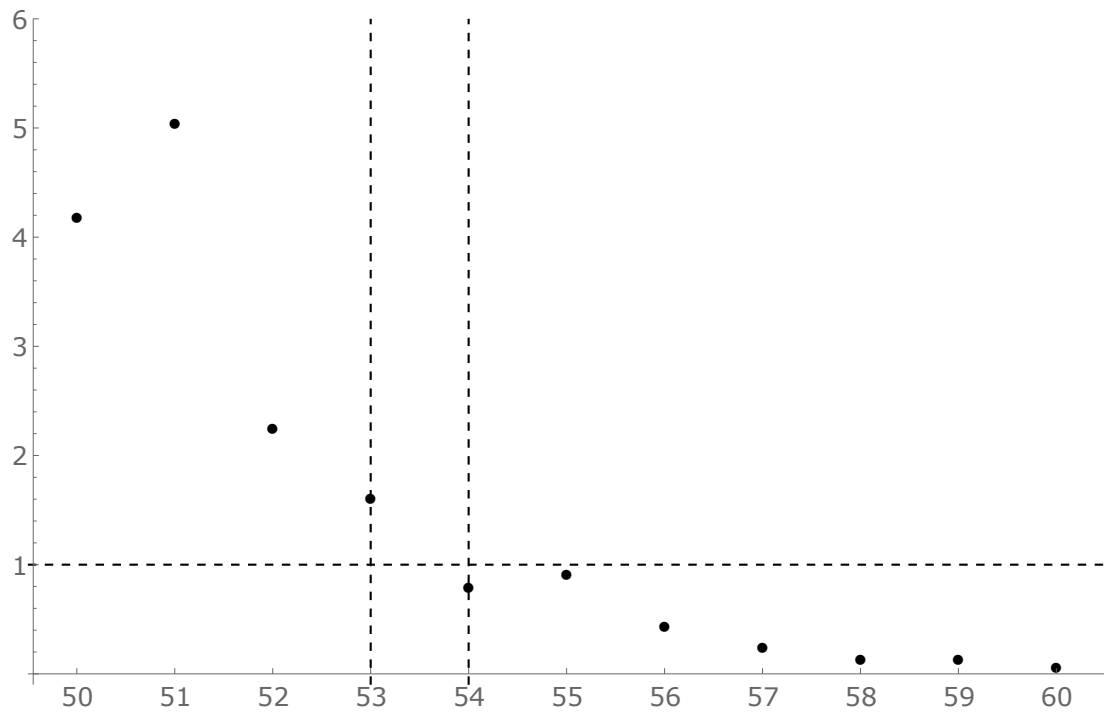


Рис. 3.3. Величина $\chi_n \left(\frac{3n-5}{n-1} \right) \cdot \nu_n$ для $50 \leq n \leq 60$

Глава 4

Линейная интерполяция на n -мерном шаре

4.1 Соотношение между $\|P\|_B$ и $\xi(B; S)$

Как мы отметили выше (см. соотношение (1.14) теоремы 1.1), для нормы интерполяционного проектора $P : C(Q_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и коэффициента поглощения $\xi(S) = \xi(S; Q_n)$ соответствующим симплексом единичного куба справедливо двойное неравенство

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1 \leq \xi(S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1.$$

Этот результат обобщается на интерполяционные проекторы $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, где Ω — произвольное выпуклое тело. Соответствующее утверждение в эквивалентном виде было доказано в [8]. Приведём его формулировку.

Будем говорить, что $x \in \Omega$ является *1-точкой Ω относительно симплекса $S \subset \Omega$* , если для проектора $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами в вершинах S выполняется равенство $\|P\|_\Omega = \sum |\lambda_j(x)|$, причём среди чисел $\lambda_j(x)$ имеется ровно одно отрицательное.

Теорема 4.1. *Для проектора $P : C(\Omega) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и соответствующего симплекса $S \subset \Omega$*

$$\frac{n+1}{2n} (\|P\|_\Omega - 1) + 1 \leq \xi(\Omega; S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_\Omega - 1) + 1. \quad (4.1)$$

Если в Ω существует 1-точка относительно S , то правое соотношение является равенством.

Напомним, что $\theta_n(\Omega)$ определяется как минимальная норма $\|P\|_\Omega$ при условии $x^{(j)} \in \Omega$, т. е. $S \subset \Omega$. Под $\xi_n(\Omega)$ мы понимаем $\min \xi(\Omega; S)$ для $S \subset \Omega$.

Следствие 4.1. *Пусть Ω — произвольное выпуклое тело, тогда*

$$\frac{n+1}{2n} (\theta_n(\Omega) - 1) + 1 \leq \xi_n(\Omega) \leq \frac{n+1}{2} (\theta_n(\Omega) - 1) + 1. \quad (4.2)$$

Двойная оценка (4.2) непосредственно следует из (4.1).

В настоящей главе рассматривается случай $\Omega = B$, где B — евклидов шар в \mathbb{R}^n . Из соображений подобия чаще всего можно ограничиться случаем $B = B_n$. Например, для любого B имеем $\xi_n(B) = \xi_n(B_n)$, $\theta_n(B) = \theta_n(B_n)$.

Теорема 4.2. Для интерполяционного проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$

$$\|P\|_{B_n} \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \quad (4.3)$$

Если в (4.3) выполняется равенство, то узлы P совпадают с вершинами правильного симплекса, вписанного в шар B_n .

Доказательство. В [20, теорема 5.4] доказывается, что для любого симплекса $S \subset Q_n$ верно $\xi(B_n; S) \geq n$, а если $\xi(B_n; S) = n$, то S — правильный симплекс, вписанный в B_n . Запишем правое неравенство из (4.1) для $\Omega = B_n$, проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ и соответствующего симплекса S . Объединяя это неравенство с оценкой $\xi(B_n; S) \geq n$, получаем

$$n \leq \xi(B_n; S) \leq \frac{n+1}{2} (\|P\|_{B_n} - 1) + 1. \quad (4.4)$$

Итак,

$$\frac{n+1}{2} (\|P\|_{B_n} - 1) + 1 \geq n,$$

что эквивалентно (4.3). Если же проектор P удовлетворяет равенству

$$\|P\|_{B_n} = 3 - \frac{4}{n+1},$$

то равенством является и каждое соотношение в (4.4). Тогда $\xi(B_n; S) = n$, значит, S — правильный симплекс, вписанный в B_n . Теорема доказана. \square

Следствие 4.2. При любом n

$$\theta_n(B_n) \geq 3 - \frac{4}{n+1}. \quad (4.5)$$

Если в (4.5) выполняется равенство, то любой проектор, удовлетворяющий $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$, соответствует правильному вписанному симплексу.

В качестве простого упражнения убедитесь, что следствие 4.2 эквивалентно предыдущей теореме.

Ниже мы существенно уточним оценку (4.5), установив эквивалентность $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Кроме того, мы покажем, что аналогичное соотношение выполняется для нормы проектора, соответствующего вписанному правильному симплексу. Значит, такой проектор P является почти-минимальным: для него $\|P\|_{B_n} \asymp \theta_n(B_n)$. Мы также докажем, что, по крайней мере для $1 \leq n \leq 4$, выполняется $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$.

4.2 Норма проектора при интерполяции на шаре

Пусть $B = B(x^{(0)}; R)$ — n -мерный евклидов шар с центром $x^{(0)}$ и радиусом R , $P : C(B) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор по набору узлов $x^{(j)} \in B$, $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$ — базисные многочлены Лагранжа симплекса S , вершины которого совпадают с узлами интерполяции. Как отмечалось,

$$\|P\|_B = \max_{x \in B} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|, \quad (4.6)$$

см. (1.7) для $\Omega = B$. Дополним (4.6) другим выражением для нормы проектора.

Теорема 4.3. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \|P\|_B &= \max_{f_j = \pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \left(\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} + l_{n+1,j} \right) \right| \right] = \\ &= \max_{f_j = \pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x^{(0)}) \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Доказательство. Обратимся к равенствам (1.7) для $\Omega = B$. При вычислении $\|P\|_B$ запишем повторный максимум в другом порядке, нежели в (1.7):

$$\|P\|_B = \max_{f_j = \pm 1} \max_{x \in B} \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \max_{f_j = \pm 1} \max_{x \in B} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) \right|. \quad (4.8)$$

При фиксированных f_j функция

$$\Lambda(x) := \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right) x_i + \sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{n+1,j}$$

является линейной по x . Максимум модуля $\Lambda(x)$ на шаре $B = B(x^{(0)}; R)$ достигается в одной из двух точек пересечения сферы $\|x - x^{(0)}\| = R$ и прямой, проходящей через центр шара $x^{(0)}$ и имеющей направляющий вектор $v = (v_1, \dots, v_n)$, где $v_i = \sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij}$. Эти точки имеют вид

$$x_+ = x^{(0)} + \frac{R}{\|v\|} v, \quad x_- = x^{(0)} - \frac{R}{\|v\|} v.$$

Функция $L(x) := \Lambda(x) - \Lambda(0)$ является аддитивной и однородной, поэтому

$$L(x_+) = L \left(x^{(0)} + \frac{R}{\|v\|} v \right) = L(x^{(0)}) + \frac{R}{\|v\|} L(v),$$

$$\Lambda(x_+) = L(x_+) + \Lambda(0) = \Lambda(x^{(0)}) + \frac{R}{\|v\|} [\Lambda(v) - \Lambda(0)].$$

Заметим, что

$$\Lambda(v) - \Lambda(0) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 = \|v\|^2,$$

поэтому $\Lambda(x_+) = \Lambda(x^{(0)}) + R\|v\|$. Аналогично $\Lambda(x_-) = \Lambda(x^{(0)}) - R\|v\|$. Тем самым

$$\max_{x \in B} |\Lambda(x)| = \max(|\Lambda(x_+)|, |\Lambda(x_-)|) = R\|v\| + |\Lambda(x^{(0)})|.$$

Равенство (4.8) теперь даёт

$$\|P\|_B = \max_{f_j = \pm 1} \max_{x \in B} |\Lambda(x)| = \max_{f_j = \pm 1} [R\|v\| + |\Lambda(x^{(0)})|].$$

Остаётся учесть, что

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2},$$

$$\Lambda(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^{n+1} f_j \left(\sum_{i=1}^n l_{ij} x_i^{(0)} + l_{n+1,j} \right).$$

Теорема доказана. \square

В случае когда центр тяжести $c(S)$ симплекса совпадает с центром шара, формула (4.7) заметно упрощается.

Следствие 4.3. Пусть $c(S) = x^{(0)}$, тогда

$$\|P\|_B = \max_{f_j = \pm 1} \left[R \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \right| \right]. \quad (4.9)$$

Доказательство. Числа $\lambda_j(x^{(0)})$ суть барицентрические координаты точки $x^{(0)}$ относительно симплекса S . В силу равенств

$$x^{(0)} = c(S) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)}$$

имеем $\lambda_j(x^{(0)}) = \frac{1}{n+1}$ при любом j . Поэтому (4.9) получается из (4.7). \square

4.3 Норма проектора для правильного симплекса, вписанного в шар

В этом пункте S — правильный симплекс, вписанный в n -мерный шар $B = B(x^{(0)}; R)$, $P : C(B) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — соответствующий интерполяционный проектор. Очевидно, что $\|P\|_B$ не зависит ни от центра $x^{(0)}$ и радиуса R шара, ни от выбора правильного симплекса, вписанного в этот шар. Иначе говоря, $\|P\|_B$ есть функция размерности n . Получим явный вид этой функции и установим её оценки.

Для $0 \leq t \leq n+1$ введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \left(t(n+1-t) \right)^{1/2} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|. \quad (4.10)$$

Обозначим $a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor s \rfloor$ — целая часть s .

Теорема 4.4. *Справедливы соотношения*

$$\|P\|_B = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}, \quad (4.11)$$

$$\sqrt{n} \leq \|P\|_B \leq \sqrt{n+1}. \quad (4.12)$$

При этом $\|P\|_B = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\|P\|_B = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Доказательство. Сначала докажем (4.11). Если $n = 1$, то

$$\psi(t) = \sqrt{t(2-t)} + |1-t|, \quad a = 0, \quad \psi(a) = \psi(a+1) = 1.$$

Так как $\|P\|_B = 1$, то равенство (4.11) верно.

Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим симплекс S с вершинами

$$x^{(1)} = e_1, \quad \dots, \quad x^{(n)} = e_n, \quad x^{(n+1)} = \left(\frac{1 - \sqrt{n+1}}{n}, \dots, \frac{1 - \sqrt{n+1}}{n} \right).$$

Этот симплекс является правильным, так как длина любого его ребра равна $\sqrt{2}$. Симплекс S вписан в шар $B = B(x^{(0)}; R)$, где

$$x^{(0)} = c(S) = \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n+1}}}{n}, \dots, \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n+1}}}{n} \right), \quad R = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Заметим, что $(n+1)$ -я вершина S получается перемещением нулевой вершины координатного углового симплекса $x_i \geq 0, \sum x_i \leq 1$ в сторону от гиперплоскости $\sum x_i = 1$. Для нас важно, что S переходит в себя при любом переобозначении координат. В силу замечания, сделанного в начале пункта, достаточно найти $\|P\|_B$ именно для этого симплекса S .

4.3. НОРМА ПРОЕКТОРА ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО СИМПЛЕКСА,
ВПИСАННОГО В ШАР

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{A}^{-1} , соответствующие S , имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ -\tau & -\tau & \dots & -\tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \begin{pmatrix} \sigma & -\tau & \dots & -\tau & -1 \\ -\tau & \sigma & \dots & -\tau & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\tau & -\tau & \dots & \sigma & -1 \\ \tau & \tau & \dots & \tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы положили

$$\sigma := \frac{(n-1)\sqrt{n+1}+1}{n}, \quad \tau := \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}. \quad (4.14)$$

Поскольку $c(S) = x^{(0)}$, для вычисления $\|P\|_B$ воспользуемся формулой (4.9), в которой возьмём $R = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$:

$$\|P\|_B = \max_{f_j = \pm 1} \left[\sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=1}^{n+1} f_j \right| \right].$$

Здесь l_{ij} — элементы матрицы \mathbf{A}^{-1} , см. (4.13).

Обозначим через k число f_j , равных -1 . Тогда число f_j , равных 1 , есть $n+1-k$. Так как S не меняется при переобозначении координат, будем считать, что $f_1 = \dots = f_k = -1$, $f_{k+1} = \dots = f_{n+1} = 1$. В силу того, что максимизируемая величина не меняется при перемене знака сразу у всех f_j , можно ограничиться интервалом $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$. Итак,

$$\|P\|_B = \max_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \left[\sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 \right)^{1/2} + \frac{n+1-2k}{n+1} \right], \quad (4.15)$$

причём здесь $f_j = -1$ для $1 \leq j \leq k$ и $f_j = 1$ для остальных j . Число $n+1-2k$ равно сумме, стоящей под знаком модуля. Учитывая множитель $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, стоящий в равенстве для \mathbf{A}^{-1} , преобразуем величину

$$W := (n+1) \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2.$$

Чтобы использовать явный вид l_{ij} , представим эту сумму в виде

$$W = (n+1) \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 + (n+1) \sum_{i=k+1}^n \left(\sum_{j=1}^{n+1} f_j l_{ij} \right)^2 = W_1 + W_2.$$

Применение (4.13) и указанного распределения значений f_j даёт

$$W_1 = \sum_{i=1}^k (-\sigma + (k-1)\tau - (n-k)\tau - 1)^2 = k(2k\tau - \alpha)^2,$$

$$W_2 = \sum_{i=k+1}^n (k\tau + \sigma - (n-1-k)\tau - 1)^2 = (n-k)(2k\tau + \beta)^2,$$

где $\alpha = \sigma + (n+1)\tau + 1$, $\beta = \sigma - (n-1)\tau - 1$. Из (4.14) следует, что $\alpha = 2\sqrt{n+1}$, $\beta = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} W &= 4k(k\tau - \sqrt{n+1})^2 + (n-k) \cdot 4k^2\tau^2 = k^2(-8\sqrt{n+1}\tau + 4n\tau^2) + 4k(n+1) = \\ &= -4k^2 + 4k(n+1) = 4k(n+1-k). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|P\|_B &= \max_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \left[\sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{1}{n+1} W \right)^{1/2} + \frac{n+1-2k}{n+1} \right] = \\ &= \max_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \left[\frac{2\sqrt{n}}{n+1} (k(n+1-k))^{1/2} + 1 - \frac{2k}{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (4.10), приходим к равенству

$$\|P\|_B = \max_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \psi(k). \quad (4.16)$$

Осталось показать, что последний максимум совпадает с наибольшим из чисел $\psi(a)$ и $\psi(a+1)$, где $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$. Для этого проанализируем поведение $\psi(t)$ на всём промежутке $[0, n+1]$.

Функция

$$\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \left(t(n+1-t) \right)^{1/2} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|, \quad 0 \leq t \leq n+1$$

обладает свойствами $\psi(t) > 0$, $\psi(0) = \psi(n+1) = 1$, $\psi\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{n}$, $\psi(n+1-t) = \psi(t)$. График $\psi(t)$ симметричен относительно прямой $t = \frac{n+1}{2}$.

4.3. НОРМА ПРОЕКТОРА ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО СИМПЛЕКСА,
ВПИСАННОГО В ШАР

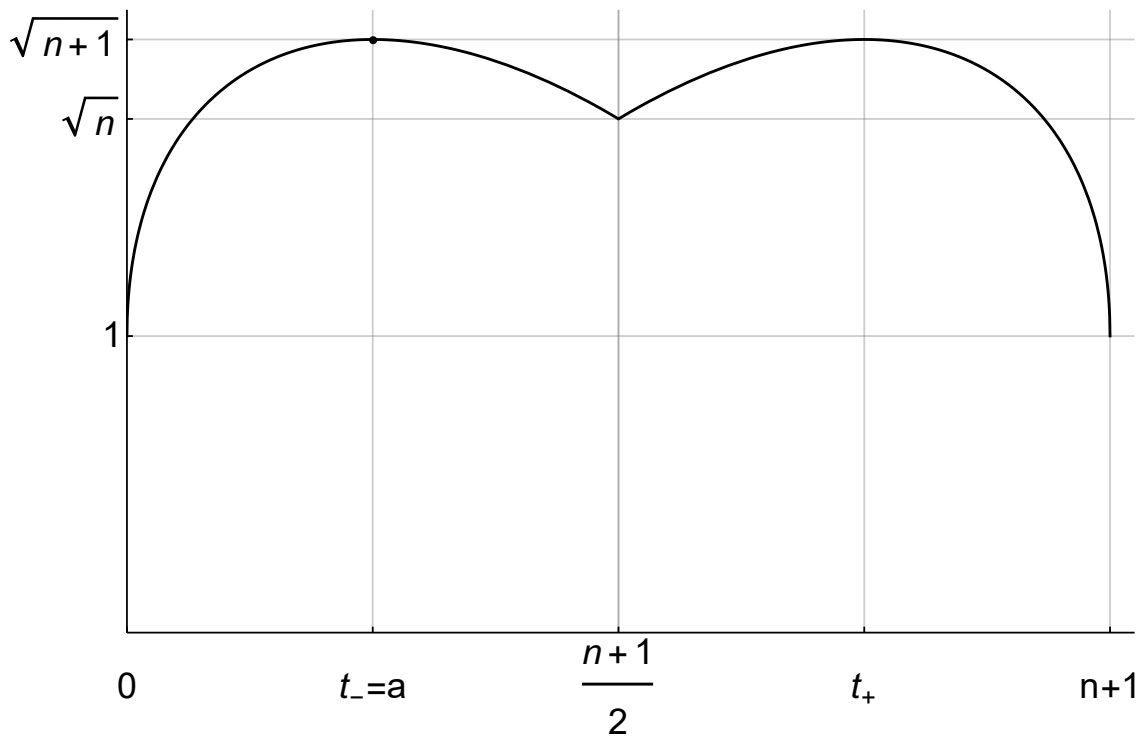


Рис. 4.1. График $\psi(t)$ для $n = 3$. Здесь $n + 1 = 4$, $t_- = a = 1$

На каждой из половин отрезка $[0, n+1]$ функция $\psi(t)$ является вогнутой как сумма двух вогнутых функций. Действительно, для $0 \leq t \leq \frac{n+1}{2}$

$$\psi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \quad \varphi_1(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \left(t(n+1-t) \right)^{1/2}, \quad \varphi_2(t) := 1 - \frac{2t}{n+1},$$

причём $\varphi_1(t)$ вогнута как суперпозиция вогнутой функции $t(n+1-t)$ и возрастающей вогнутой функции \sqrt{t} , а $\varphi_2(t)$ является линейной. Производная $\psi'(t)$ обращается в нуль только в двух точках

$$t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}, \quad t_+ := \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2},$$

внутренних соответственно для отрезков $\left[0, \frac{n+1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n+1}{2}, n+1\right]$. Из вогнутости $\psi(t)$ на каждом из них следует, что

$$\max_{0 \leq \psi(t) \leq n+1} \psi(t) = \psi(t_-) = \psi(t_+) = \sqrt{n+1}.$$

При этом t_- — единственная точка максимума $\psi(t)$ на левой, а t_+ — на правой половине отрезка $[0, n+1]$. Значит, $\psi(t)$ возрастает при $0 \leq t \leq t_-$ и убывает

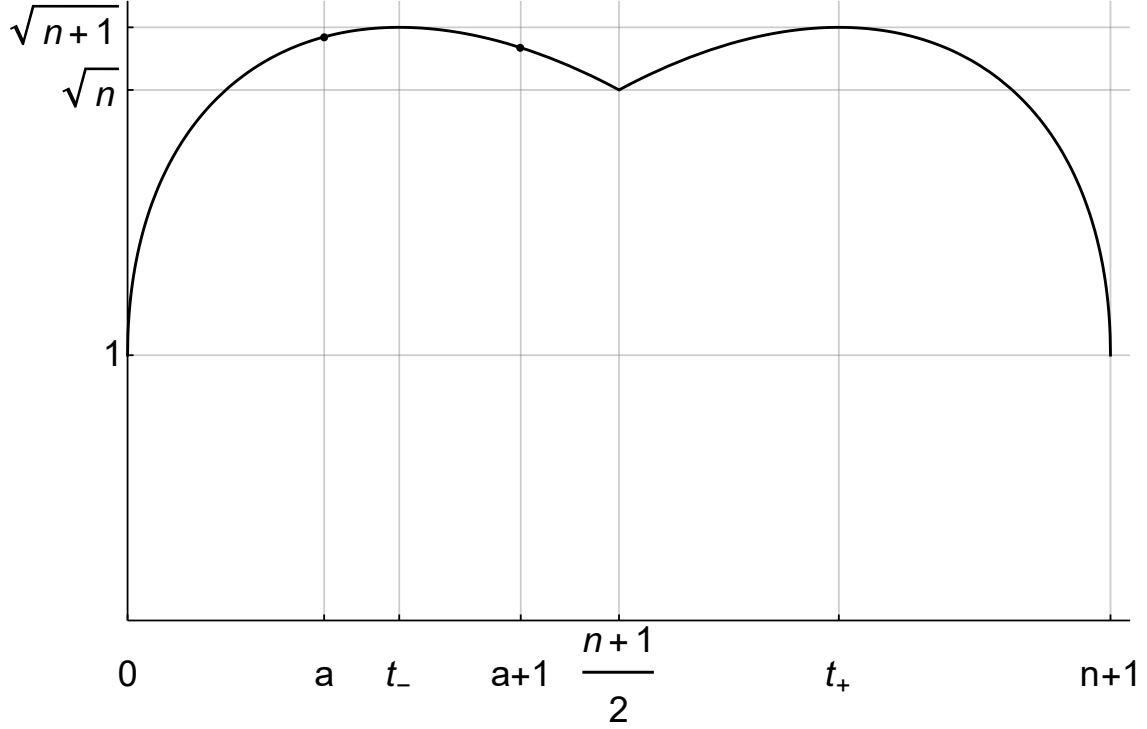


Рис. 4.2. График $\psi(t)$ для $n = 4$. Здесь $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

при $t_- \leq t \leq \frac{n+1}{2}$. На левой половине $\psi(t)$ ведёт себя симметрично: возрастает при $\frac{n+1}{2} \leq t \leq t_+$ и убывает при $t_+ \leq t \leq n+1$.

Теперь ограничимся отрезком $\left[0, \frac{n+1}{2}\right]$. Так как $a = \lfloor t_- \rfloor$, то всегда $a \leq t_- < a+1$. Пусть k — целое, $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$. Из свойств $\psi(t)$ следует, что если $k < a$, то $\psi(k) < \psi(a)$, а если $k > a+1$, то $\psi(k) < \psi(a+1)$. Следовательно, (4.16) приводится к виду

$$\|P\|_B = \max_{1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \psi(k) = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}.$$

Равенство (4.11) установлено.

Перейдём к неравенствам (4.12). Правое из них мы уже получили:

$$\|P\|_B = \max_{k \in \mathbb{Z}: 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \psi(k) \leq \max_{1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}} \psi(t) = \psi(t_-) = \sqrt{n+1}.$$

Опишем размерности n , для которых $\|P\|_B = \sqrt{n+1}$. Они характеризуются тем, что нестрогое неравенство в последнем соотношении является равенством, т. е. число t_- является целым.

4.3. НОРМА ПРОЕКТОРА ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО СИМПЛЕКСА,
ВПИСАННОГО В ШАР

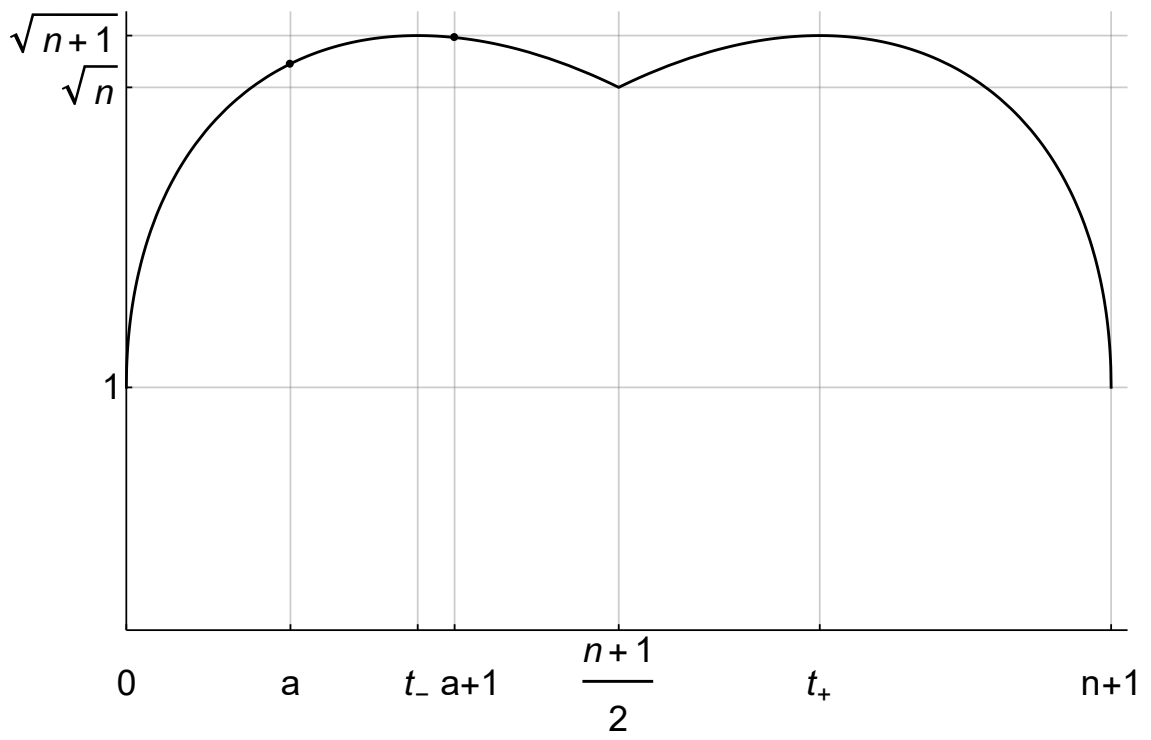


Рис. 4.3. График $\psi(t)$ для $n = 5$. Здесь $n + 1 = 5$, $a = 1$, $t_- = \frac{6 - \sqrt{6}}{2}$

Заметим, что каждая из точек t_- и t_+ является целочисленной тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ есть целое число. Пусть, например,

$$t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} = d \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $\sqrt{n+1} = n+1 - 2d$ — целое. Наоборот, если $\sqrt{n+1} = m \in \mathbb{Z}$, то $m(m-1)$ есть чётное число и $t_- = \frac{m(m-1)}{2}$ — целое. Утверждение для t_+ доказывается аналогично, а также выводится из предыдущего, поскольку $t_+ - t_- = \sqrt{n+1}$.

Мы получили, что для любой размерности вида $n = m^2 - 1$, m — целое, и только в этих ситуациях, число t_- является целым и, значит,

$$\|P\|_B = \max_{k \in \mathbb{Z}: 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}} \psi(k) = \max_{1 \leq t \leq \frac{n+1}{2}} \psi(t) = \psi(t_-) = \sqrt{n+1} = m.$$

Эти равенства эквивалентны (4.11), поскольку в рассматриваемых случаях $a = \lfloor t_- \rfloor = t_-$ и $\|P\|_B = \psi(a)$. Для каждого из остальных n (т.е. отличных от чисел $m^2 - 1$) выполняется $\|P\| < \sqrt{n+1}$. Действительно, тогда $a < t_- < a+1$ и максимум в (4.16) достигается либо при $k = a$, либо при $k = a+1$. Для любого $n \neq m^2 - 1$ норма P , т.е. максимум $\psi(k)$ по целым k из промежутка $\left[1, \frac{n+1}{2}\right]$, строго меньше, чем максимум $\psi(t)$ по всему этому промежутку.

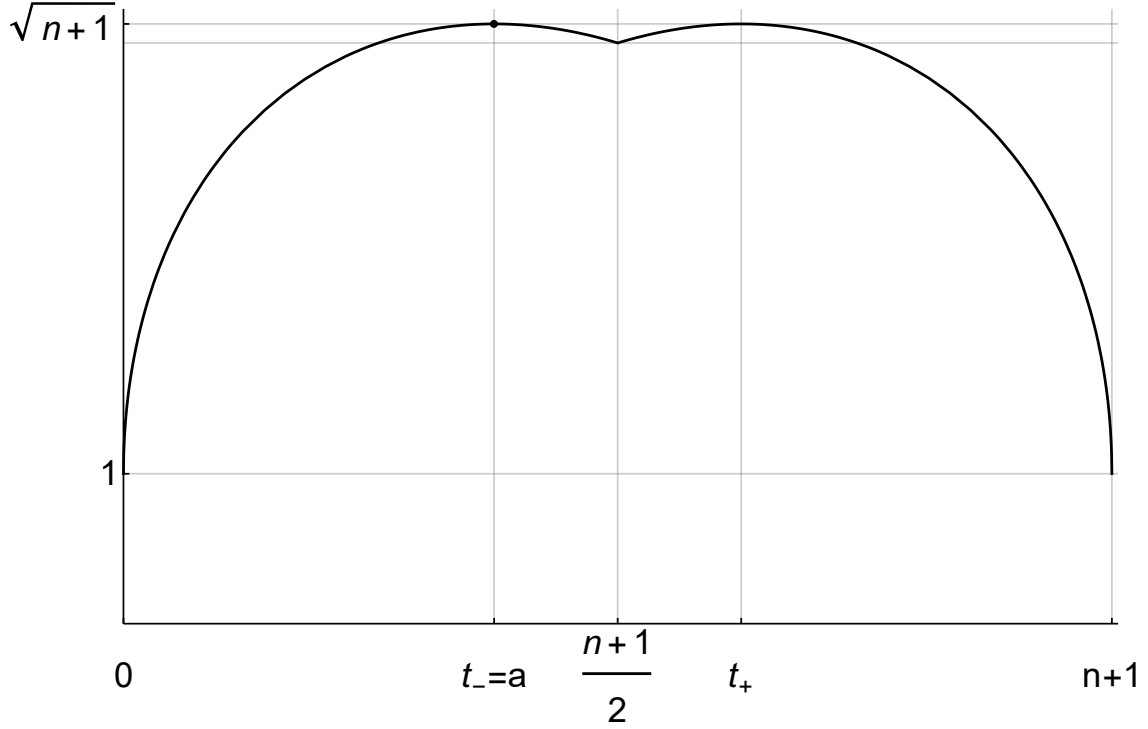


Рис. 4.4. График $\psi(t)$ для $n = 15$. Здесь $n + 1 = 16$, $t_- = a = 6$

Осталось показать, что всегда $\|P\|_B \geq \sqrt{n}$, причём для $n > 1$ это неравенство является строгим. Если $n > 3$, то $\sqrt{n+1} > 2$, поэтому

$$a + 1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor + 1 \leq \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} + 1 < \frac{n+1}{2}.$$

Из (4.11) и свойств $\psi(t)$ имеем

$$\|P\|_B = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\} \geq \psi(a+1) > \psi\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{n} \quad (n > 3).$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ также верно $\|P\|_B > \sqrt{n}$. Поэтому норма P равна \sqrt{n} лишь в случае $n = 1$. Теорема полностью доказана. \square

В случае когда $n+1$ — число Адамара, оценку $\|P\|_B \geq c\sqrt{n}$ можно получить иначе. Для любого n -мерного куба Q выполняется $\theta_n(Q) = \theta_n(Q_n) = \theta_n$, поэтому из (2.23) имеем

$$\theta_n(Q) \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{1}{\nu_n}\right) > \frac{1}{e}\sqrt{n-1}. \quad (4.17)$$

Здесь χ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n , ν_n — максимальный объём симплекса, содержащегося в единичном кубе $Q_n = [0, 1]^n$. Предположим дополнительно, что $n+1$ — число Адамара. Тогда существует правильный симплекс, вершины которого находятся в вершинах куба. Выберем

в качестве Q куб, вписанный в евклидов шар B . Тогда указанный правильный симплекс, вписанный в куб, будет вписан также и в шар. Так как $Q \subset B$, то в силу (4.17) для соответствующего проектора P

$$\|P\|_B \geq \|P\|_Q \geq \theta_n(Q) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) > \frac{1}{e} \sqrt{n+1}.$$

Отметим также, что неравенство $\|P\|_B \leq \sqrt{n+1}$ теоремы 4.4 позволяет дать новое (и более простое) доказательство теорем из пункта 2.6. Пусть $n+1$ — число Адамара, P — интерполяционный проектор, узлы которого являются вершинами Q_n и образуют правильный симплекс. Обозначим через B шар, описанный вокруг куба Q_n . Тогда

$$\|P\|_{Q_n} \leq \|P\|_B \leq \sqrt{n+1},$$

откуда и следуют утверждения теорем 2.6 и 2.7.

4.4 Точные значения $\theta_n(B_n)$ для $1 \leq n \leq 4$

С помощью теоремы 4.4 и свойств, отмеченных в п. 4.1, для $1 \leq n \leq 4$ удаётся получить точные значения $\theta_n(B_n)$, а также описать минимальные проекторы. Разумеется, $\theta_1(B_1) = 1$, но и этот случай укладывается в общую схему. Указанный подход применён в статье [19]. Другим способом эти результаты получены в работе [13].

Теорема 4.5. *Имеют место равенства*

$$\theta_1(B_1) = 1, \quad \theta_2(B_2) = \frac{5}{3}, \quad \theta_3(B_3) = 2, \quad \theta_4(B_4) = \frac{11}{5}. \quad (4.18)$$

При $1 \leq n \leq 4$ равенство $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$ выполняется лишь для проекторов, каждый из которых соответствует правильному симплексу, вписанному в шар B_n .

Доказательство. Вычислим норму проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующего правильному симплексу, вписанному в B_n . По теореме 4.4

$$\|P\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\},$$

где $\psi(t)$ определяется равенством (4.10) и $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$.

Для $n = 1$ имеем $\psi(t) = \sqrt{t(2-t)} + |1-t|$, $a = 0$, $\psi(a) = \psi(a+1) = 1$, поэтому $\|P\|_{B_1} = 1$.

В случае $n = 2$ верно $\psi(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{t(3-t)} + \left| 1 - \frac{2t}{3} \right|$, $a = 0$, $\psi(a) = 1$, $\psi(a+1) = \frac{5}{3}$, значит, $\|P\|_{B_2} = \psi(a+1) = \frac{5}{3}$.

Если $n = 3$, то $\psi(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t(4-t)} + \left|1 - \frac{t}{2}\right|$, $a = 1$, $\psi(a) = \psi(a+1) = 2$, поэтому $\|P\|_{B_3} = 2$.

Наконец, для $n = 4$ надо взять $\psi(t) = \frac{4}{5}\sqrt{t(5-t)} + \left|1 - \frac{2t}{5}\right|$, $a = 1$, $\psi(a) = \frac{11}{5}$, $\psi(a+1) = \frac{1}{5}(1 + 4\sqrt{6})$, что даёт $\|P\|_{B_4} = \psi(a) = \frac{11}{5}$.

Теперь заметим, что для каждого $n = 1, 2, 3, 4$ выполняется равенство

$$\|P\|_{B_n} = 3 - \frac{4}{n+1}.$$

В силу оценки $\theta_n(B_n) \geq 3 - \frac{4}{n+1}$ следствия 4.2, справедливой вообще для любой размерности, при $1 \leq n \leq 4$ верно

$$\theta_n(B_n) = 3 - \frac{4}{n+1}. \quad (4.19)$$

Это совпадает с (4.18). Как отмечалось в следствии 4.2, в случае выполнения (4.19) любой проектор, норма которого минимальна, соответствует правильно-му симплексу, вписанному в B_n . Это завершает доказательство теоремы. \square

4.5 Комментарии

Из неравенства (4.12) теоремы 4.4 следует, что величина $\theta_n(B_n)$ минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на единичном шаре $\|x\| \leq 1$ удовлетворяет неравенству

$$\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}. \quad (4.20)$$

По крайней мере для тех n , когда число $\sqrt{n+1}$ не является целым, т.е. для $n \neq m^2 - 1$, это неравенство является строгим. Если же минимальную норму имеет проектор, узлы которого находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в сферу $\|x\| = 1$, то для этого n в предыдущих обозначениях

$$\theta_n(B_n) = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}. \quad (4.21)$$

Равенство (4.21) выполняется, например, при $1 \leq n \leq 4$, когда оно эквивалентно соотношению (4.19).

Приведём некоторые иллюстрации, результаты численного анализа и комментарии к ним. Графики функции

$$\psi(t) = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \left(t(n+1-t) \right)^{1/2} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|, \quad 0 \leq t \leq n+1,$$

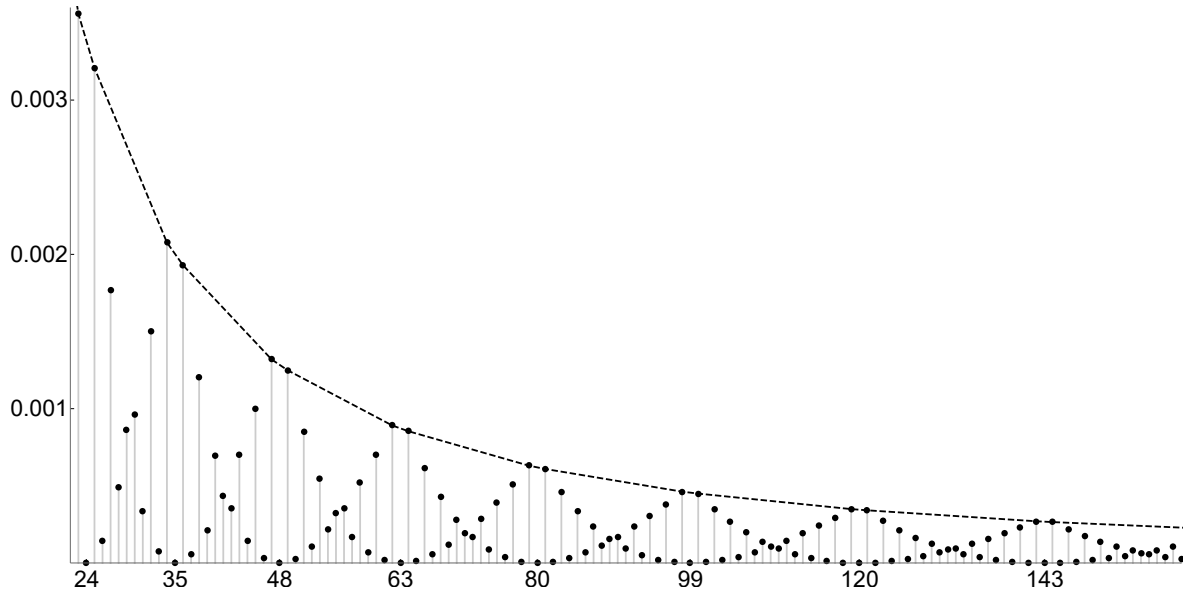


Рис. 4.5. Числа $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$ для $23 \leq n \leq 160$

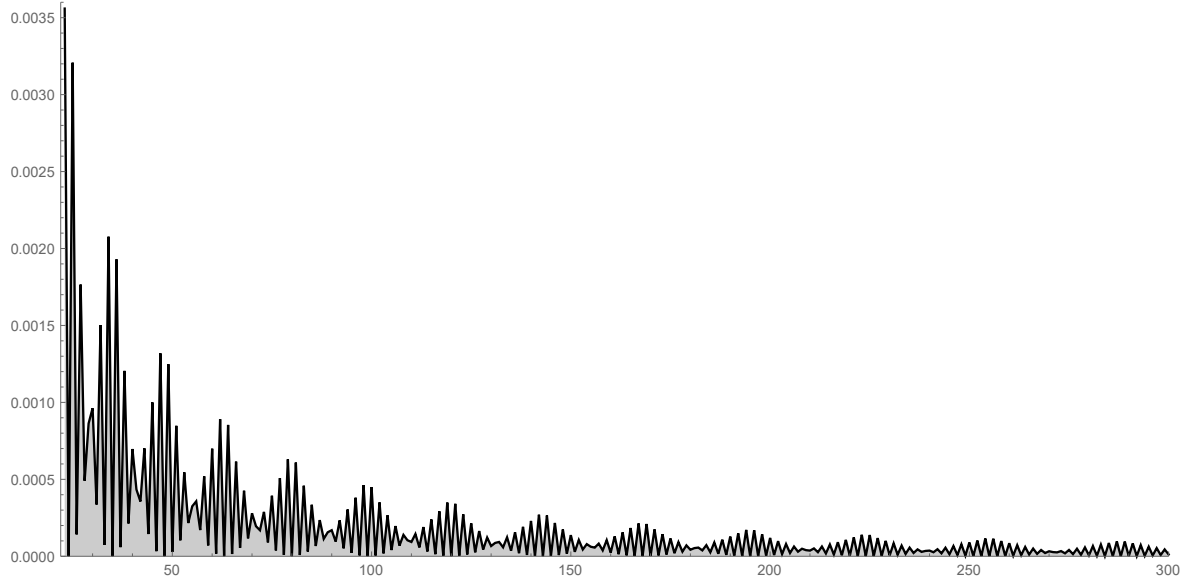


Рис. 4.6. Числа $d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n}$ для $23 \leq n \leq 300$

для $n = 3, 4, 5, 15$ изображены на рис. 4.1–4.4. Отмечены точки максимума этой функции $t_- := \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}$, $t_+ := \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2}$, а также точки $a = \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor$ и $a+1$, одна из которых максимизирует $\psi(k)$ при целом $1 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$.

На рис. 4.5–4.6 для $n \geq 23$ представлены значения разности

$$d_n = \sqrt{n+1} - \|P\|_{B_n},$$

где P — интерполяционный проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в B_n . Как мы установили, $\|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$, причём равенство имеет место лишь для $n = 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \dots$, т.е. размерностей вида $m^2 - 1$. Именно в этих точках $d_n = 0$, что и видно на рис. 4.5. Пунктирной линией обозначен график ломаной (линейного интерполяционного сплайна) l , построенной по узлам $n = m^2 - 2$, $n = m^2$ и значениям d_n в этих узлах. Всегда $d_n \leq l(n)$, причём равенство достигается лишь для $n = m^2 - 2$ и $n = m^2$. При $n \rightarrow \infty$ монотонно $l(n) \rightarrow 0$. Таким образом, справедлива двусторонняя оценка $\sqrt{n+1} - l(n) \leq \|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$. Как правое, так и левое соотношения обращаются в равенства для бесконечного множества n . Эта оценка точнее, чем (4.12).

В таблице 4.1 представлены данные по вычислению $\|P\|_{B_n}$ для правильного симплекса, вписанного в шар. Мы применяем обозначения пункта 4.3. Значение k^* равно количеству -1 в экстремальном наборе f_j , соответствующем максимуму в (4.15). Так как этот максимум оказывается равным $\max\{\psi(a), \psi(a+1)\}$, то k^* совпадает с тем из чисел a или $a+1$, на котором $\psi(t)$ принимает большее значение (см. доказательство теоремы 4.4). Если $k^* = 1$, то в шаре B_n имеется 1-точка относительно симплекса S , соответствующего проектору P . Для такого n по теореме 4.1

$$\xi(B_n; S) = \frac{n+1}{2} (\|P\|_{B_n} - 1) + 1. \quad (4.22)$$

Поскольку S — правильный симплекс, вписанный в B_n , то $\xi(B_n; S) = n$ и (4.22) равносильно $\|P\|_{B_n} = 3 - \frac{4}{n+1}$. Однако, начиная с $n = 5$, всегда $k^* > 1$. Более того, k^* возрастает с ростом n . Это соответствует тому, что (4.22) и равенство $\|P\|_{B_n} = 3 - \frac{4}{n+1}$ имеют место лишь при $1 \leq n \leq 4$. Первоначально этот эффект был обнаружен авторами в ходе компьютерных экспериментов, и лишь затем было дано аналитическое решение задачи.

Если $n+1$ есть число Адамара, вопрос о справедливости равенства, аналогичного (4.22), можно рассмотреть также для n -мерного куба и вписанного в него правильного симплекса. Интересно заметить, что 1-точка Q_n относительно такого S существует не только для $n = 1$ и $n = 3$, но и для $n = 7$. В указанных случаях

$$\xi(S) = \frac{n+1}{2} (\|P\|_{Q_n} - 1) + 1,$$

откуда следует, что $\theta_3 = 3$ и $\theta_7 = \frac{5}{2}$. Эта тематика рассмотрена в п. 1.3.

Ниже мы опишем подход статьи [12], при котором норму интерполяционного проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ удаётся оценить снизу через объём соответ-

4.5. КОММЕНТАРИИ

Таблица 4.1. Норма P для правильного симплекса, вписанного в B_n

n	t_-	a	$a+1$	$\psi(a)$	$\psi(a+1)$	k^*	$\ P\ _{B_n}$
1	$1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	1	1	1	1
2	$\frac{3-\sqrt{3}}{2}$	0	1	1	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3} = 1.6666\dots$
3	1	1	2	2	$\sqrt{3}$	1	2
4	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	1	2	$\frac{11}{5}$	$\frac{1+4\sqrt{6}}{5}$	1	$\frac{11}{5} = 2.2$
5	$3 - \sqrt{\frac{3}{2}}$	1	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3}$	2	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3} = 2.4415\dots$
6	$\frac{7-\sqrt{7}}{2}$	2	3	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7}$	$\frac{1+12\sqrt{2}}{7}$	2	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7} = 2.6417\dots$
7	$4 - \sqrt{2}$	2	3	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{105}}{4}$	3	$\frac{1+\sqrt{105}}{4} = 2.8117\dots$
8	3	3	4	3	$\frac{1+8\sqrt{10}}{9}$	3	3
9	$5 - \sqrt{\frac{5}{2}}$	3	4	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5}$	$\frac{1+6\sqrt{6}}{5}$	3	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5} = 3.1495\dots$
10	$\frac{11-\sqrt{11}}{2}$	3	4	$\frac{5+8\sqrt{15}}{11}$	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11}$	4	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11} = 3.3151\dots$
11	$6 - \sqrt{3}$	4	5	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3}$	$\frac{1+\sqrt{385}}{6}$	4	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3} = 3.4602\dots$
12	$\frac{13-\sqrt{13}}{2}$	4	5	$\frac{5+24\sqrt{3}}{13}$	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13}$	5	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13} = 3.6013\dots$
13	$7 - \sqrt{\frac{7}{2}}$	5	6	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7}$	$\frac{1+4\sqrt{39}}{7}$	5	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7} = 3.7409\dots$
14	$\frac{15-\sqrt{15}}{2}$	5	6	$\frac{1+4\sqrt{7}}{3}$	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5}$	6	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5} = 3.8660\dots$
15	6	6	7	4	$\frac{1+3\sqrt{105}}{8}$	6	4
50	$\frac{51-\sqrt{51}}{2}$	21	22	$\frac{3+20\sqrt{35}}{17}$	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51}$	22	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51} = 7.1414\dots$
100	$\frac{101-\sqrt{101}}{2}$	45	46	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101}$	$\frac{9+20\sqrt{2530}}{101}$	45	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101} = 10.0494\dots$
1000	$\frac{1001-\sqrt{1001}}{2}$	484	485	$\frac{3+40\sqrt{5170}}{91}$	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001}$	485	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001} = 31.6385\dots$

ствующего симплекса. Существенной чертой этого подхода является применение классических многочленов Лежандра. Устанавливается, что $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$. Иными словами, интерполяционный проектор, соответствующий правильному симплексу, вписанному в граничную сферу, имеет норму, эквивалентную минимальной.

4.6 Оценка $\|P\|_{B_n}$ через $\text{vol}(S)$

Как мы показали выше (см. следствие 2.1), для величины θ_n минимальной нормы проектора при интерполяции линейными многочленами на кубе Q_n справедливы соотношения

$$\theta_n \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{1}{\nu_n} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{n!}{h_n} \right). \quad (4.23)$$

Здесь χ_n — стандартизованный многочлен Лежандра степени n , ν_n — максимальный объём симплекса, содержащегося в кубе Q_n , h_n — величина максимального определителя порядка n , состоящего из 0 и 1. (Напомним, что $h_n = n!\nu_n$.) С привлечением свойств χ_n из (4.23) был получен ряд более обозримых неравенств, например $\theta_n(Q_n) > \frac{1}{e} \sqrt{n-1}$.

Распространим этот метод на линейную интерполяцию функций, заданных на единичном шаре B_n . Пусть $\varkappa_n := \text{vol}(B_n)$. Через σ_n обозначим объём правильного симплекса, вписанного в B_n . Следующая теорема доказана в [12].

Теорема 4.6. *Для интерполяционного проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующего симплекса $S \subset B_n$ и матрицы узлов \mathbf{A} справедливы соотношения*

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{n!\varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|} \right). \quad (4.24)$$

Доказательство. В идейном плане эта теорема доказывается аналогично теореме 2.3 для линейной интерполяции на кубе. Тем не менее приведём её доказательство.

Правильный симплекс, вписанный в шар, имеет максимальный объём из всех симплексов, содержащихся в этом шаре (см. [33], [41], [43]). Поэтому

$$\text{vol}(S) = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{n!} \leq \sigma_n.$$

Для каждого $i = 1, \dots, n$ вычтем из i -й строки матрицы \mathbf{A} её $(n+1)$ -ю строку. Обозначим через \mathbf{B} подматрицу порядка n , которая будет располагаться в первых n строках и столбцах полученной матрицы. Тогда

$$|\det(\mathbf{B})| = |\det(\mathbf{A})| = n!\text{vol}(S) \leq n!\sigma_n.$$

Иначе говоря,

$$\frac{n!\sigma_n}{|\det(\mathbf{B})|} \geq 1. \quad (4.25)$$

Пусть $x^{(j)}$ — вершины, λ_j — базисные многочлены Лагранжа симплекса S . Поскольку $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ барицентрические координаты точки x , имеем

$$\|P\|_{B_n} = \max_{x \in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} |\beta_j| : \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1, \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in B_n \right\}.$$

Заменим β_{n+1} на равную величину $1 - \sum_{j=1}^n \beta_j$. Условие $\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)} \in B_n$ эквивалентно $\sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B' := B_n - x^{(n+1)}$. Таким образом,

$$\|P\|_{B_n} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |\beta_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j \right| \right\}. \quad (4.26)$$

Максимум в (4.26) берётся по числам β_j , для которых $\sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B'$.

Введём в рассмотрение невырожденный линейный оператор $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопоставляющий точке $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ точку $x = (x_1, \dots, x_n)$ по правилу

$$x = F(\beta) := \sum_{j=1}^n \beta_j (x^{(j)} - x^{(n+1)}).$$

Справедливо матричное равенство $F(\beta) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \mathbf{B}$, где \mathbf{B} — полученная выше $(n \times n)$ -матрица с элементами $b_{ij} = x_j^{(i)} - x_j^{(n+1)}$. Положим

$$\gamma^* := \chi_n^{-1} \left(\frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|} \right).$$

Так как $\varkappa_n \geq \sigma_n$, то в силу (4.25) число γ^* определено корректно. Заметим, что

$$\chi_n(\gamma^*) = \frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|}. \quad (4.27)$$

Пусть теперь $1 \leq \gamma < \gamma^*$,

$$E_{n,\gamma} = \left\{ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |\beta_j| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j \right| \leq \gamma \right\}.$$

Покажем, что $B' \not\subset F(E_{n,\gamma})$. Достаточно проверить, что $\text{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \text{mes}_n(B') = \varkappa_n$. Это действительно так:

$$\text{mes}_n(F(E_{n,\gamma})) < \text{mes}_n(F(E_{n,\gamma^*})) = |\det \mathbf{B}| \cdot \text{mes}_n(E_{n,\gamma^*}) = |\det \mathbf{B}| \cdot \frac{\chi_n(\gamma^*)}{n!} = \varkappa_n.$$

Мы применили (2.13) и (4.27). Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x^{(\varepsilon)}$ со свойствами

$$x^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(\varepsilon)} (x^{(j)} - x^{(n+1)}) \in B', \quad \sum_{j=1}^n |\beta_j^{(\varepsilon)}| + \left| 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j^{(\varepsilon)} \right| \geq \gamma^* - \varepsilon.$$

В силу (4.26) это даёт $\|P\|_{B_n} \geq \gamma^* - \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\|P\| \geq \gamma^* = \chi_n^{-1} \left(\frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{B})|} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{n! \varkappa_n}{|\det(\mathbf{A})|} \right) = \chi_n^{-1} \left(\frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)} \right).$$

Теорема доказана. \square

Следствие 4.4. Для любого n

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n} \right). \quad (4.28)$$

Доказательство. Пусть P — произвольный интерполяционный проектор. Так как объём соответствующего симплекса не превышает σ_n , то в силу (4.24)

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)} \right) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{\varkappa_n}{\sigma_n} \right).$$

Отсюда следует (4.28). \square

Как известно,

$$\varkappa_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \sigma_n = \frac{1}{n!} \sqrt{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n/2}, \quad (4.29)$$

$$\varkappa_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!} = \frac{2(k!)(4\pi)^k}{(2k+1)!} \quad (4.30)$$

(см., например, [29], [11]). Поэтому оценку (4.28) можно конкретизировать.

Следствие 4.5. При любом n

$$\theta_n(B_n) \geq \chi_n^{-1} \left(\frac{\pi^{n/2} n!}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \sqrt{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n/2}} \right). \quad (4.31)$$

Если $n = 2k$, то (4.31) эквивалентно неравенству

$$\theta_{2k}(B_{2k}) \geq \chi_{2k}^{-1} \left(\frac{\pi^k (2k)!}{k! \sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k}\right)^k} \right). \quad (4.32)$$

При $n = 2k+1$ выполняется

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) \geq \chi_{2k+1}^{-1} \left(\frac{2(k!)(4\pi)^k}{\sqrt{2k+2} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{(2k+1)/2}} \right). \quad (4.33)$$

Доказательство. Достаточно применить (4.28), (4.29) и (4.30). \square

Следствие 4.6. Пусть P — минимальный интерполяционный проектор, т. е. такой, для которого $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$. Тогда

$$\text{vol}(S) \geq \frac{\varkappa_n}{\chi_n(\sqrt{n+1})} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \chi_n(\sqrt{n+1})}. \quad (4.34)$$

Доказательство. Как доказано выше (см. (4.20)), $\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}$. Поэтому для минимального проектора выполняются неравенства

$$\sqrt{n+1} \geq \|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\text{vol}(S)}\right).$$

Мы применили (4.24). Остаётся привлечь (4.29). \square

Так как $|\det(\mathbf{A})| = n! \text{vol}(S)$, то из (4.34) получается и оценка для определителя матрицы узлов минимального проектора. Именно, $|\det(\mathbf{A})| \geq \varepsilon_n$, где ε_n в $n!$ раз превосходит правую часть (4.34).

4.7 Соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$

Из формулы Стирлинга имеем

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/(12n)}. \quad (4.35)$$

Нам потребуются также оценки (2.26)–(2.27) величины $\chi_n^{-1}(s)$ для чётных и нечётных n , которые мы запишем в виде

$$\chi_{2k}^{-1}(s) > \left(\frac{(k!)^2 s}{(2k)!}\right)^{1/(2k)}, \quad \chi_{2k+1}^{-1}(s) > \left(\frac{(k+1)!k!s}{(2k+1)!}\right)^{1/(2k+1)}. \quad (4.36)$$

Теорема 4.7. Существует константа $c > 0$, не зависящая от n , такая что

$$\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}. \quad (4.37)$$

Неравенство (4.37) выполняется, например, при

$$c = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e} \cdot \sqrt[6]{3}} = 0.2135\dots$$

Доказательство. Пусть сначала $n = 2k$ — чётное. Применяя (4.32) и (4.36), получим

$$\begin{aligned} \theta_{2k}(B_{2k}) &\geq \chi_{2k}^{-1} \left(\frac{\pi^k (2k)!}{k! \sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^k} \right) > \left(\frac{\pi^k (2k)! (k!)^2}{k! \sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^k (2k)!} \right)^{1/(2k)} = \\ &= \left(\frac{\pi^k k!}{\sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^k} \right)^{1/(2k)}. \end{aligned}$$

Оценим $k!$ снизу с помощью (4.35):

$$\theta_{2k}(B_{2k}) > \left(\frac{\pi^k \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e} \right)^k}{\sqrt{2k+1} \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^k} \right)^{1/(2k)} = \sqrt{\frac{\pi}{e}} \left(\frac{2\pi k}{2k+1} \right)^{1/(4k)} \sqrt{\frac{2k}{2k+1}} \cdot \sqrt{k}.$$

Так как $n = 2k$, то при любом чётном n

$$\theta_n(B_n) > \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \left(\frac{\pi n}{n+1} \right)^{1/(2n)} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \sqrt{n} > \sqrt{\frac{\pi}{3e}} \cdot \sqrt{n}. \quad (4.38)$$

Мы учли неравенства $\frac{\pi n}{n+1} > 1$, $\frac{n}{n+1} > \frac{2}{3}$. Заметим, что $\sqrt{\frac{\pi}{3e}} = 0.6206\dots$

Пусть теперь n — нечётное, $n = 2k+1$. В этом случае (4.33) и (4.36) дают

$$\begin{aligned} \theta_{2k+1}(B_{2k+1}) &\geq \chi_{2k+1}^{-1} \left(\frac{2(k!)(4\pi)^k}{\sqrt{2k+2} \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right)^{(2k+1)/2}} \right) > \\ &> \left(\frac{2(k!)(4\pi)^k (k+1)! k!}{\sqrt{2k+2} \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right)^{(2k+1)/2} (2k+1)!} \right)^{1/(2k+1)} = A^{1/(2k+1)} \cdot B^{1/(2k+1)}; \\ A &:= \frac{(k!)^2 (k+1)!}{(2k+1)!}, \quad B := \frac{\sqrt{2}(4\pi)^k}{\sqrt{k+1} \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right)^{(2k+1)/2}}. \end{aligned}$$

Из (4.35) следует, что

$$\begin{aligned} A &> \frac{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi(k+1)} \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}}{\sqrt{2\pi(2k+1)} \left(\frac{2k+1}{e}\right)^{2k+1} e^{1/(12(2k+1))}} = \\ &= 2\pi e^{-k-1/(12(2k+1))} k^{2k+1} (k+1)^{k+1+1/2} (2k+1)^{-1/2-(2k+1)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} A^{1/(2k+1)} &> \\ (2\pi)^{1/(2k+1)} e^{-k/(2k+1)-1/(12(2k+1)^2)} k(k+1)^{(k+1+1/2)/(2k+1)} (2k+1)^{-1/(4k+2)-1}. \end{aligned}$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} (2\pi)^{1/(2k+1)} &> 1, \quad \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{12(2k+1)^2} < \frac{1}{2}, \\ k(2k+1)^{-1/(4k+2)-1} &= \frac{k}{2k+1} (2k+1)^{-1/(4k+2)} > \frac{1}{3} (2k+1)^{-1/(4k+2)} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$A^{1/(2k+1)} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} (k+1)^{(k+1+1/2)/(2k+1)} > \frac{1}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} \sqrt{k+1}.$$

Теперь оценим $B^{1/(2k+1)}$:

$$\begin{aligned} B^{1/(2k+1)} &= \left(\frac{\sqrt{2}(4\pi)^k}{\sqrt{k+1} \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^{(2k+1)/2}} \right)^{1/(2k+1)} = \\ &= (\sqrt{2})^{1/(2k+1)} (4\pi)^{k/(2k+1)} \sqrt{\frac{2k+1}{2k+2}} (k+1)^{-1/(4k+2)} > \\ &> \sqrt[3]{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-1/6} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[3]{\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\theta_{2k+1}(B_{2k+1}) > A^{1/(2k+1)} \cdot B^{1/(2k+1)} > \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\pi}}{3\sqrt[6]{3}\sqrt{e}} \cdot \sqrt{k+1} = \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{6e}\sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{k+1}.$$

Так как $n = 2k + 1$, то $\sqrt{k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2k+2} > \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n}$. Таким образом, при любом нечётном n справедливо неравенство

$$\theta_n(B_n) > \frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{12e} \cdot \sqrt[6]{3}} \cdot \sqrt{n}. \quad (4.39)$$

Константа, стоящая в правой части этого неравенства, оказывается равной 0.2135... Это число меньше, чем константа 0.6206... из полученного выше неравенства (4.38) для чётных n . Таким образом, соотношение (4.39) верно для каждого натурального n . Теорема доказана. \square

Следствие 4.7. *Справедливо соотношение $\theta_n(B_n) \asymp \sqrt{n}$.*

Доказательство. Выше установлено, что $\theta_n(B_n) \leq \sqrt{n+1}$. Таким образом, нижняя оценка $\theta_n(B_n) > c\sqrt{n}$ является точной по размерности n . \square

Пусть $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в B_n .

Следствие 4.8. *С константами, не зависящими от n , имеет место эквивалентность $\|P\|_{B_n} \asymp \theta_n(B_n)$.*

Доказательство. По теореме 4.4 имеем $\sqrt{n} \leq \|P\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}$. Остаётся принять во внимание предыдущее следствие. \square

Итак, норма интерполяционного проектора P , соответствующего вписанному правильному симплексу, эквивалентна минимальной. Как мы показали в п. 4.4, по крайней мере для $1 \leq n \leq 4$, выполняется равенство $\|P\|_{B_n} = \theta_n(B_n)$.

Примеры заданий для самостоятельной работы

Во всех заданиях интерполяция осуществляется с помощью многочленов степени ≤ 1 (линейных функций).

1. Составьте и реализуйте на компьютере алгоритм вычисления нормы интерполяционного проектора с данными узлами на n -мерном кубе. Проверьте работу программы, рассматривая различные симплексы из текста учебного пособия.

2. Составьте и реализуйте на компьютере алгоритм вычисления нормы интерполяционного проектора с данными узлами на n -мерном шаре.

3. С применением компьютера вычислите минимальную норму интерполяционного проектора по трем узлам на единичном квадрате.

4. Составьте и реализуйте на компьютере вычисление минимальной нормы проектора на n -мерном кубе, узлы которого находятся в вершинах куба. Рассмотрите случаи $1 \leq n \leq 5$.

5. Составьте и реализуйте на компьютере вычисление минимальной нормы проектора на n -мерном кубе, узлы которого находятся в вершинах или серединах рёбер куба. Рассмотрите случаи $1 \leq n \leq 4$.

6. Даны узлы интерполяционного проектора на n -мерном кубе. Составьте и реализуйте на компьютере алгоритм нахождения всех возможных значений μ и вычисления μ -вершин куба относительно соответствующего симплекса.

7. Дано число n и вершины невырожденного симплекса $S \subset Q_n$. Обозначим через P соответствующий проектор. Реализуйте на компьютере алгоритм вычисления величин $\xi(S)$, $d_i(S)$, $\alpha(S)$ и $\|P\|_{Q_n}$.

8. Дано число n и вершины невырожденного симплекса $S \subset B_n$. Обозначим через P соответствующий проектор. Реализуйте на компьютере алгоритм вычисления величин $\xi(B_n; S)$, $\alpha(B_n; S)$ и $\|P\|_{B_n}$.

9. С применением системы Wolfram Mathematica изобразите множества $E_{n,\gamma}$ для $n = 2$ и $n = 3$ и различных $\gamma \geq 1$ (см. п. 2.2).

Литература

- [1] *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009. 512 с.
- [2] *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984. 560 с.
- [3] *Климов В. С., Ухалов А. Ю.* Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 96 с.
- [4] *Кудрявцев И. С., Озерова Е. А., Ухалов А. Ю.* Новые оценки для норм минимальных проекторов // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 17. Ярославль: ЯрГУ, 2017. С. 74–81.
- [5] *Лютенков А. В.* Минимальные нормы интерполяционных проекторов // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 18. Ярославль: ЯрГУ, 2018. С. 51–63.
- [6] *Невский М. В.* Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n -мерного куба // Модел. и анализ информ. систем. 2003. Т. 10, № 1. С. 9–19.
- [7] *Невский М. В.* Геометрические методы в задаче о минимальном проекторе // Модел. и анализ информ. систем. 2006. Т. 13, № 2. С. 16–29.
- [8] *Невский М. В.* Неравенства для норм интерполяционных проекторов // Модел. и анализ информ. систем. 2008. Т. 15, № 3. С. 3–15.
- [9] *Невский М. В.* Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Модел. и анализ информ. систем. 2009. Т. 16, № 2. С. 24–43.
- [10] *Невский М. В.* О геометрических характеристиках n -мерного симплекса // Модел. и анализ информ. систем. 2011. Т. 18, № 2. С. 52–64.
- [11] *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции: монография. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 218 с.

- [12] Невский М. В. Геометрические оценки при интерполяции на n -мерном шаре // Модел. и анализ информ. систем. 2019. Т. 26, № 3. С. 441–449.
- [13] Невский М. В. О свойствах правильного симплекса, вписанного в шар // Модел. и анализ информ. систем. 2021. Т. 28, № 2. С. 186–197.
- [14] Невский М. В., Иродова И. П. Некоторые вопросы теории приближения функций: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 1999. 94 с.
- [15] Невский М. В., Ухалов А. Ю. О числовых характеристиках симплекса и их оценках // Модел. и анализ информ. систем. 2016. Т. 23, № 5. С. 603–619. (Англ. перевод: *Nevskii, M. V., and Ukhalov, A. Yu. On numerical characteristics of a simplex and their estimates // Aut. Control Comp. Sci. 2017. V. 51, № 7. P. 757–769.*)
- [16] Невский М. В., Ухалов А. Ю. Новые оценки числовых величин, связанных с симплексом // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 1. С. 94–110. (Англ. перевод: *Nevskii, M. V., and Ukhalov, A. Yu. New estimates of numerical values related to a simplex // Aut. Control Comp. Sci. 2017. V. 51, № 7. P. 770–782.*)
- [17] Невский М. В., Ухалов А. Ю. О минимальном коэффициенте поглощения для n -мерного симплекса // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 140–150. (Англ. перевод: *Nevskii, M. V., and Ukhalov, A. Yu. On minimal absorption index for an n -dimensional simplex // Aut. Control Comp. Sci. 2018. V. 52, № 7. P. 680–687.*)
- [18] Невский М. В., Ухалов А. Ю. Об оптимальной интерполяции линейными функциями на n -мерном кубе // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25, № 3. С. 291–311. (Англ. перевод: *Nevskii, M. V., and Ukhalov, A. Yu. On optimal interpolation by linear functions on n -dimensional cube // Aut. Control Comp. Sci. 2018. V. 52, № 7. P. 828–842.*)
- [19] Невский М. В., Ухалов А. Ю. Линейная интерполяция на евклидовом шаре в \mathbb{R}^n // Модел. и анализ информ. систем. 2019. Т. 26, № 2. С. 279–296. (Английский перевод: *Nevskii, M. V., and Ukhalov, A. Yu. Linear interpolation on a Euclidean ball in \mathbb{R}^n // Aut. Control Comp. Sci. 2020. V. 54, № 7. P. 601–614.*)
- [20] Невский М. В., Ухалов А. Ю. Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии. Часть 1: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2020. 98 с.
- [21] Невский М. В., Ухалов А. Ю. Оценки для норм интерполяционных проекторов и смежные вопросы вычислительной геометрии // Математика

- в Ярославском университете: Сборник обзорных статей: К 45-летию математического факультета. Ярославль: ЯрГУ, 2021. С. 182–231.
- [22] *Невский М. В., Хлесткова И. В.* К вопросу о минимальной линейной интерполяции // Современные проблемы математики и информатики. Вып. 9. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 31–37.
 - [23] *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
 - [24] *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962. 500 с.
 - [25] *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.
 - [26] *Удовенко Е. Д.* Нормы интерполяционных проекторов // Путь в науку. Математика: материалы молодежной конф. Ярославль: ЯрГУ, 2019. С. 35–36.
 - [27] *Ухалов А. Ю.* Практикум по Wolfram Mathematica: практикум. Ярославль: ЯрГУ, 2020. 40 с.
 - [28] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 864 с.
 - [29] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматлит, 2001. 662 с.
 - [30] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
 - [31] *Browne, P., Egan, R., Hegarty, F., and Ó Catháin, P.* A survey of the Hadamard maximal determinant problem // arXiv:2104.06756v1 [math.CO]. 14 Apr 2021. 26 pp.
 - [32] *Clements, G. F., and Lindström, B.* A sequence of (± 1) determinants with large values // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 548–550.
 - [33] *Fejes Tóth, L.* Regular figures. New York: Macmillan/Pergamon, 1964.
 - [34] *Hadamard, J.* Résolution d'une question relative aux déterminants // Bull. Sci. Math. 1893. V. 28. P. 240–246.
 - [35] *Hudelson, M., Klee, V., and Larman, D.* Largest j -simplices in d -cubes: some relatives of the Hadamard maximum determinant problem // Linear Algebra Appl. 1996. V. 241–243. P. 519–598.

- [36] *Lassak, M.* Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 449–462.
- [37] *Mangano, S.* Mathematica cookbook. Cambridge: O'Reilly Media Inc. 2010. 830 pp.
- [38] *Neuskii, M., and Ukhalov, A.* Perfect simplices in \mathbb{R}^5 // Beitrage zur Algebra und Geometrie. 2018. V. 59, № 3. P. 501–521.
- [39] *Scott, P. R.* Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. V. 36. P. 359–362.
- [40] *Scott, P. R.* Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329–333.
- [41] *Slepian, D.* The content of some extreme simplices // Pacific J. Math. 1969. V. 31. P. 795–808.
- [42] *Ukhalov, A., and Udovenko, E.* Hadamard matrices of order 28 in machine readable form. Mendeley Data, V2, 2020. doi: 10.17632/tw66ksdfhh.2.
url: <https://data.mendeley.com/datasets/tw66ksdfhh/2>
- [43] *Vandev, D.* A minimal volume ellipsoid around a simplex // C. R. Acad. Bulg. Sci. 1992. V. 45, № 6. P. 37–40.
- [44] *Wolfram, S.* Essentials of programming in Mathematica. Cambridge University Press, 2016. 422 pp.

Учебное издание

Невский Михаил Викторович
Ухалов Алексей Юрьевич

Избранные задачи анализа и вычислительной геометрии

Часть II

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка М. В. Невский и А. Ю. Ухалов
Подписано в печать 25.02.2022. Формат 60 x 84/8.
Усл. печ. л. 10,76. Уч.-изд. л. 6,5.
Тираж 24 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.