

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ
И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

*Материалы 4-й научно-методической конференции
преподавателей математического факультета
и факультета информатики и вычислительной техники
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова*

Ярославль 2012

УДК 51
ББК Ч 486.24/29я43
П 71

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2012 года*

П 71

Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете: материалы 4-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова / отв. ред. М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль: ЯрГУ, 2012. — 108 с.

ISBN 978-5-8397-0873-0

Представлены материалы 4-й научно-методической конференции «Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете», состоявшейся в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова в апреле 2012 г.

Материалы конференции публикуются в авторской редакции.

УДК 51
ББК Ч 486.24/29я43

ISBN 978-5-8397-0873-0

© Ярославский
государственный
университет
им. П. Г. Демидова, 2012

Содержание

Предисловие	5
Большаков Ю. И. <i>Теоретико-групповой подход в рамках курса НОШКМ</i> . . .	9
Глазков Д. В. <i>Системы компьютерной математики в высшем образовании физико-математического профиля</i>	13
Дурнев В. Г. <i>Введение в дисциплину «Теория алгоритмов»</i>	16
Иродова И. П. <i>Об интерполяции функций в курсе «Прикладная теория приближений»</i>	32
Калинин В. Б., Николаев А. В. <i>Типичные ошибки при нахождении собственных векторов линейного оператора</i>	36
Климов В. С. <i>Индивидуальные задания по спецкурсу «Кусочно-линейная оптимизация»</i>	39
Короткин А. А., Кубышкин Е. П. <i>Использование программы тестирования iTest для контроля знаний</i>	43
Краснов В. А., Ухалов А. Ю. <i>Критерий пересечения двух плоских фигур, ограниченных эллипсами</i>	46
Кубышкин Е. П. <i>Полугруппа линейного автономного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом</i>	51

Кузьмин Е. В., Соколов В. А.

О моделировании двухсчетчиковых машин двухголовочными автоматами 55

Лагутина Н. С., Васильев А. М., Парамонов И. В.

Изучение объектно-ориентированного программирования в рамках курса «Языки и методы программирования» 60

Литвинов В. В.

Различные методы вычисления интегралов, зависящих от параметра 63

Невский М. В.

О некоторых задачах, связанных с осевыми диаметрами . . 66

Нестеров П. Н.

Некоторые асимптотические теоремы теории линейных разностных уравнений 69

Папоркова Ф. И.

К вопросу об обзорных практических занятиях. 73

Рублев В. С.

Проблемы обучения в настоящий период 76

Тимофеева Н. В.

Диаграммная техника в курсах алгебры для студентов-математиков 81

Чаплыгина Н. Б.

Некоторые аспекты понятия зависимости в учебном курсе теории вероятностей. 87

Шалашов В. К., Балабохина А. В.

Каноническая форма Жордана 92

Яблокова С. И.

О некоторых аспектах изучения китайской теоремы об остатках для чисел в курсе алгебраической алгоритмики . 97

Якимова О. П.

О задачах на массивы 102

ПРЕДИСЛОВИЕ

Компетентностный подход — это подход, акцентирующий внимание на результате образования, причем в качестве результата рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность человека действовать в различных проблемных ситуациях.

*Д. А. Иванов, К. Г. Митрофанов, О. В. Соколова,
"Компетентностный подход в образовании" (2003)*

*He's a real Nowhere Man, sitting in his Nowhere Land,
Making all his Nowhere plans for nobody.*

The Beatles, "Nowhere Man" (1965)

Зебра главнее всех лошадей.

Надпись на рекламном щите (2012)

В последние годы над отечественным образованием даже не ветер веет — проносится ураган перемен. Несмотря на противодействие педагогической общественности в стране введён единый государственный экзамен, превративший обучение школьников, по словам самих учителей, в натаскивание и тренировку по сдаче тестов. Высшую школу охватило стремление к унификации в рамках Болонского процесса. В вузах на место привычных специальностей пришли бакалавриат и магистратура с внушающей трепет триадой "модули (дисциплины) – кредиты (зачётные единицы) – компетенции". Введены в действие ФГОС — новые стандарты высшего образования. Присутствующие в них комплексы компетенций, как правило, далеки от совершенства.

Сказанное в полной мере касается и математических направлений. Например, общее количество профессиональных компетенций (ПК) направления подготовки бакалавров *010400.62 Прикладная математика и информатика* равно 15, а непосредственно с математикой или компьютером связаны лишь 5 из них. Слова *математика*, *математический* присутствуют в двух ПК, *информатика*, *программирование* — в четырех. Формулировки компетенций выглядят пространными и излишне детализированными, причём не в профессиональном смысле. Приведем примеры: способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности (ПК–5); способность формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций (ПК–8); способность составлять и контролировать план выполняемой работы, планировать необходимые для работы ресурсы, оценивать результаты собственной работы (ПК–12); способность использования основ защиты производственного персонала и населения от возможных последствий аварий, катастроф, стихийных бедствий и применения современных средств поражения, основных мер по ликвидации их последствий, способность к общей оценке условий безопасности жизнедеятельности (ПК–13). Не будем забывать, что речь идет о перечне важнейших профессиональных качеств, связанных с прикладной математикой и информатикой. Где же конкретные особенности профессии, связанные с базисной системой *математика + математическое моделирование + информационные технологии*? Думается, что список профессиональных компетенций составлен неудачно именно с профессиональной точки зрения.

Комплекс компетенций по направлению *010200.62 Математика и компьютерные науки* выглядит существенно лучше, но и здесь присутствуют неудачные формулировки. Например, обеспечить наличие у выпускника компетенции ПК–13 (глубокое понимание сути точности фундаментального знания) представляется невозможным в силу целого ряда причин.

Как и всякий другой динамический процесс, образовательный процесс в вузе связан с наличием, развитием и угасанием ряда противоречий. На взгляд автора, в течение 1990–2000-х гг. основным противоречием (математического) образования являлось постепенно нарастающее противоречие между глубоким содержанием образования и неадекватными возможностями значительной части студентов, а также их недостаточными учебными действиями. Это несоответствие всегда актуально. Но в последние годы на первый план стремительно выходит другое противоречие, маскирующее отмеченные злободневные проблемы, а именно противоречие между бюрократической (мнимой) и физиче-

ской (действительной) сторонами образовательного процесса. Безусловно, "бумажная педагогика" для реального преподавания необходима. Однако чрезмерное развитие бюрократической стороны подавляет конкретный процесс обучения. Более того, наступит (или уже наступил) момент, когда методические комплексы начнут жить своей отдельной жизнью, обеспечивая занятость значительных групп людей, поглощая их силы и время.

Что же касается математического образования, то его традиционные и хорошо известные формы (равно как и многие наши старые учебники) заслуживают не отрицания, а уважения. Они лишь требуют определённого развития в соответствии с новыми информационными возможностями. По мнению автора, обычная программа по фундаментальной дисциплине (например, по математическому анализу) способна формировать не только перечисленные в новых образовательных стандартах, но и многие другие компетенции. Было бы у студента желание учиться, а у преподавателя — учить.

В Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова подготовка специалистов в области математики и прикладной математики осуществляется на математическом факультете и факультете информатики и вычислительной техники (ИВТ). В 2011 году математическому факультету исполнилось 35 лет, а факультету информатики и вычислительной техники — 25 лет. За это время факультетами подготовлено большое количество высококвалифицированных работников по ряду наукоёмких специальностей и направлений. Их выпускники входят в ведущий кадровый состав многих предприятий и организаций Ярославля и всего региона. Преподавателями факультетов накоплен значительный опыт в научно-методической области. В частности, этот опыт фиксируется в проводимой нашими факультетами традиционной конференции "Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете" и сборниках её материалов. Первые три конференции с таким названием были проведены в 2005, 2007 и 2010 годах. Нынешняя конференция — четвёртая по счёту — состоялась в апреле 2012 г.

Организаторы конференции предложили преподавателям двух факультетов подготовить доклады следующей тематики: 1) специальные вопросы, возникающие при преподавании математических и компьютерных дисциплин; 2) вопросы методического характера, связанные с преподаванием этих дисциплин; 3) актуальные проблемы образования в области математики и компьютерных наук. В оргкомитет поступил 21 доклад преподавателей, представляющих все семь кафедр математического факультета (алгебры и математической логики; дифференциальных уравнений; компьютерной безопасности и математических методов обработки информации; математического анализа; математи-

ческого моделирования; общей математики; теории функций и функционального анализа) и четыре кафедры факультета ИВТ (вычислительных и программных систем; дискретного анализа; компьютерных сетей; теоретической информатики). Как видно из содержания, в докладах рассматриваются весьма разнообразные вопросы, связанные с преподаванием математических и компьютерных дисциплин.

Материалы конференции печатаются в авторской редакции.

*М. Невский,
ответственный редактор, декан математического факультета
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова*

ТЕОРЕТИКО–ГРУППОВОЙ ПОДХОД В РАМКАХ КУРСА НОШКМ

Ю. И. Большаков

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова
ул. Советская 14, 150000 Ярославль, Россия
e-mail: bolsh@uniyar.ac.ru

Предлагаемый автором теоретико–групповой подход может быть использован при чтении различных математических курсов. Рассмотрен небольшой фрагмент из курса НОШКМ, касающийся клейновского подхода к геометрии
Библиография: 7 названий.

Материалы настоящей статьи являются, фактически, развитием идей, изложенных автором в работе [1]. Там же указан список литературы позволяющий студентам, изучающим курс НОШКМ, глубже окунуться в суть проблем, обсуждаемых в этом курсе.

В современных курсах вузовской математики понятие вектора, как правило, трактуется как элемент абстрактного множества V . При этом, на V определены 2 операции: сложение элементов - внутренняя операция — и внешняя — умножение вектора на число. Эти операции удовлетворяют 8–ми аксиомам: 4–ём аксиомам абелевой группы и 4–ём аксиомам внешнего умножения на элементы λ поля действительных чисел \mathbb{R} : 1) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$; 2) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$; 3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; 4) $1 \cdot x = x$. Здесь λ, μ — произвольные действительные числа, x, y — произвольные векторы, т.е. элементы множества V . На протяжении всего курса предполагается что размерность пространства V равна 2, что позволяет адаптировать изучаемые здесь понятия к школьному курсу геометрии.

Важно отметить, что в излагаемых в курсе НОШКМ определений понятия вектора является эквивалентными, а соответствующие векторные пространства служат различными (изоморфными друг другу) моделями двумерного векторного пространства, на базе которого строятся аффинная и евклидова плоскости — предмет изучения школьной планиметрии. Стоит, однако, отметить, что только первые 3 модели реализованы в школьных учебниках по геометрии, оставшиеся 3 встречаются либо в вузовских учебниках, либо в научной литературе. Так, например, в [2, с. 299 — 300] вектор трактуется как направленный отрезок с условием равенства с точностью до переноса на некоторый направленный

отрезок. Существование естественной биекции между векторами в выше понимаемом смысле и параллельными переносами точек плоскости мы находим в [3, с. 323–325]. В работе [4, с. 168] вектор \vec{x} отождествляется с элементом $x \in \mathbb{R}^2$ с помощью фиксации базиса на плоскости. Как тензор вектор рассматривается, например, в книге [5, с. 25–27], как дифференцирование — в книге [6, с. 74–75], как класс касающихся кривых — в книге [7, с. 14–17].

Каждое из 6-ти определений вектора рассмотрено отдельно и установлена их эквивалентность.

В качестве продолжения идей, изложенных в работе [1], рассмотрим ещё один небольшой фрагмент из курса НОШКМ.

1. Основные матричные группы и их действие в \mathbb{R}^n .

К числу основных матричных групп следует отнести такие подгруппы из $GL(n, \mathbb{R})$ как $L(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} / \det g = \pm 1\}$; $SL(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} / \det g = 1\}$; $O(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} / g^t g = I\}$; $H(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{n \times n} / g = \alpha I, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$; $H(n, \mathbb{R}) \times O(n, \mathbb{R})$.

Пусть, далее, X — произвольное множество, $Is(X)$ — группа (относительно операции композиции изображений), состоящая из всех биекций X на себя. Мы будем говорить, что группа G действует на X с помощью F , если F — гомоморфизм групп $F : G \rightarrow Is(X)$. Так, например, если $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^n$, то $F(g)(x) = g \cdot x$ — матричное умножение, $g \in G$, $x \in X$. Действие $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ на $X = \mathbb{R}^n$, заданное формулой $F(g)(x) = g \cdot x$, эффективно, действие же $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ на $X = \mathbb{R}^{n \times n}$, заданное формулой $F(g(x)) = g x g^{-1}$ эффективным не является, поскольку $F(g) = F(\alpha g)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Действие группы G на X называется *транзитивным*, если для $\forall x, y \in X$ существует элемент $g \in G$ такой, что $F(g)(x) = y$. При этом X называется *однородным пространством* относительно действия G на X . Так, например, если $G = GL(n, \mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^n$ и $F(g)(x) = g \cdot x$, то X не является однородным пространством: $F(g)(0) = 0$. Если же $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то X — однородное пространство. Подмножество $O(x_0) \subset X$ — *орбита* элемента $x_0 \in X$, если оно состоит из тех $y \in X$, для которых существует элемент $g \in G$ такой, что $F(g)(x_0) = y$. Очевидно, что G действует на $O(x_0)$ транзитивно. В выше рассмотренном примере $X = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cup \{0\}$ — две орбиты. Если на X действует группа G , то X расслаивается на орбиты в дизъюнктивное объединение непересекающихся множеств: $X = \bigcup_{b \in B} O(b)$. Множество

$B \subset X$ можно выбрать так, что $O(b_1) = O(b_2) \leftrightarrow b_1 = b_2$. Возникает отношение эквивалентности на множестве $X : x \sim y \leftrightarrow x, y \in O(z)$ для некоторого $z \in X$. Справедливо и обратно. Если на X задано отношение эквивалентности \sim , то существует группа $G \subset Is(X)$, для которой классы эквивалентности по отношению \sim служат орбитами в X относительно действия G на X .

Пример (Ю.И. Большаков). Пусть $X = [0; 1]$, $G = \mathbb{Z}$. $F(m)(a) = a^{2^m}$, $a \in X$, $m \in \mathbb{Z}$ — действие \mathbb{Z} на X . Множество $B = \{0; 1; [p^2, p)\}$; здесь $p \in (0; 1)$ — любой фиксированный элемент, $O(0) = 0$; $O(1) = 1$; $O(p) \subset (0; 1)$ — множество изоморфное \mathbb{Z} при любом фиксированном $p \in (0; 1)$.

2. Клейновский подход к геометрии. Два определения G — инварианта множества X

По Клейну изучить G –геометрию множества X означает найти все G –инварианты множества X .

Определение 1. Пусть группа G действует на множестве X с помощью F . Отображение $\psi : X^n \rightarrow Y$ называется G –инвариантом, если $\psi(F(g)(x_1), F(g)(x_2), \dots, F(g)(x_n)) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример 1. $X = \mathbb{R}^n$, $G = O(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. $F(A, \varepsilon)(x) := A \cdot x + \varepsilon$; $x, \varepsilon \in X$, $A \in O(n, \mathbb{R})$. Функция $\psi : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x, y) := (y - x, y - x)$ является G –инвариантом. Здесь (x, y) — скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Пример 2. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — многочлен от 2-х вещественных переменных x_1 и x_2 или, что равносильно, от одного переменного $x = (x_1, x_2)^t$, который $O(2, \mathbb{R})$ –инвариантен, т.е. $f(Ax) = f(x)$ для $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall A \in O(2, \mathbb{R})$. Тогда существует многочлен p от одного вещественного переменного и такой, что $f(x) = p((x, x))$, где $(x, x) = x_1^2 + x_2^2$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^2 .

Определение 2. Пусть $P(X)$ — некоторая система подмножеств во множестве X , инвариантных относительно G , а функция ψ определена на $P(X)$ со значениями в Y . Функция ψ — G –инвариант, если $\forall g \in G$ и $\forall \omega \in P(X)$ имеет место $\psi(F(g)(\omega)) = \psi(\omega)$. Действие $F(g)$ на ω поточечное.

Пример 3. $X = \mathbb{R}^2$, $P(X)$ — множество всех параллелограммов на X . По определению, $\psi(\omega) = s_\omega$ — площадь параллелограмма ω , $G = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. Легко убедиться, что ψ — G –инвариант. Здесь $g = (A, \varepsilon)$, $F(g)(x) = F(A, \varepsilon)(x) = Ax + \varepsilon$, $A \in SL(2, \mathbb{R})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^2$. $\psi F(g)(\omega) = \psi(\omega)$.

Литература

- [1] Большаков Ю.И. Различные подходы к понятию вектора в школьном курсе математики при изучении дисциплины НОШКМ / Ю.И. Большаков. Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете: Материалы 3-ий научно-методической конф. преподавателей мат. ф-та и ф-та ИВТ ЯрГУ им. П.Г. Демидова. Ярославль, 2010, с. 36–42.

-
- [2] Шарыгин И.Ф. Геометрия 7 – 9 классы. Учебник для общеобразовательных учебных заведений / И.Ф. Шарыгин. — М.: Издат. дом Дрофа, 1997. — 352 С.
- [3] Александров А.Д. Геометрия для 9 – 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. — М.: Просвещение, 1984. — 480 с.
- [4] Ашкингузе В.Г. Векторы на плоскости и в пространстве / В.Г. Ашкингузе // О.А. Божовнев Линейная алгебра и геометрия. Сб. статей. — М.: Просвещение, 1967. — 368 с.
- [5] Розенфельд Б.А. Многомерные пространства / Б.А. Розенфельд. — М.: Наука, 1966. — 648 с.
- [6] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы / Дж. Хамфри, пер. с англ. А.Е. Залесского под ред. В.А. Платонова — М.: Наука, 1980 — 400 с.
- [7] Громол Д. Риманова геометрия в целом / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, пер. с немецкого Ю.Д. Бураго под ред. В.А. Топоногова — М.: Мир. 1971. — 344.

СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Д. В. Глазков

Излагаются некоторые аспекты использования пакетов математических программ в образовательном процессе на математическом факультете.

Библиография: 1 название.

В последние годы физико-математическое образование включает в себя все больше «компьютерных» курсов. В их числе можно выделить особое направление, посвященное системам компьютерной математики. Среди таких систем наиболее популярными являются Maple, MATLAB, MathCad и Mathematica. Главное их достоинство заключается в простоте работы и удобстве решения довольно сложных задач. Однако кажущееся могущество этих продуктов имеет серьезные ограничения. Эффективная работа с системами компьютерной математики зачастую требует глубокого знания численных методов и понимания особенностей как используемого программного инструментария, так и решаемой задачи. Представляется, что именно осознание подобных ограничений студентами и должно являться одной из главных целей курсов, посвященных математическим пакетам. Поэтому задачи для контроля знаний обучающихся должны способствовать достижению такого понимания, но быть под силу среднему студенту. В этом смысле практикум, предложенный в [1], видится достаточно сбалансированным.

С одной стороны знакомство с подобным инструментарием на младших курсах скорее нежелательно по тем же причинам, что и знакомство с калькулятором в младших классах. С другой стороны системы компьютерной математики зачастую оказываются удобным и полезным инструментом при решении серьезных научно-исследовательских задач в рамках курсовых и дипломных работ, поэтому знание основ работы с ними должно формироваться одновременно с началом самостоятельной исследовательской работы. Представляется оптимальным проводить соответствующие курсы в 5-6 семестре. Одним из критериев эффективности решения задачи является минимизация разного рода затрат (труда программиста, процессорного времени и т.п.). Для оценки времени вычислений в Mathematica можно использовать функцию `Timing`, в Maple — `time`, в среде MATLAB для этих целей служит конструкция

```
t=cputime  
<вычисления>  
cputime-t
```

где t есть некоторая переменная, а `cputime` дает текущее процессорное время.

Автором была предпринята попытка разобраться в относительной эффективности указанных пакетов на некотором наборе задач. В качестве курсовой работы двум студентам было предложено на двух машинах средней производительности (на одной стоял процессор фирмы Intel, на другой — AMD) измерить время расчета разных типовых задач. Полученная картина оказалась достаточно пестрой. На системах линейных алгебраических уравнений (как и ожидалось) выиграл MATLAB. Это неудивительно, поскольку среда Matrix Laboratory изначально нацелена на максимальную эффективность операций с векторами и матрицами. Задачи, связанные с решением дифференциальных уравнений (собственно решение ОДУ, расчет ляпуновских показателей), лучше всего удались пакету Mathematica — лидеру в этой области. Расчет интегралов, интерполяционные задачи, построение графиков и анимации однозначного победителя не выявили. Любопытно отметить существование задач, где одни пакеты оказываются в разы (а то и в десятки раз) медленнее других. Простейшим примером здесь может служить задача вычисления факториала. Скажем, измерение времени расчета $50000!$ в Mathematica и Maple дает пищу для размышлений. Можно только гадать, с чем это связано.

В заключение сформулируем некоторые выводы по использованию систем компьютерной математики в образовании. Среда MathCad по мнению автора, несмотря на удобный интерфейс, лучше не использовать на профильных факультетах из-за ограниченности возможностей программирования. Пакеты Mathematica и Maple нацелены в первую очередь на символьные преобразования и являются фактически прямыми конкурентами. Среда MATLAB стоит особняком, но сотрудничество между фирмами Waterloo и MathWorks сближает ее с Maple в плане семантики команд. Вместе с тем в стандартный семестровый курс сложно включить более двух разных пакетов. В этой связи возможны разные подходы к структуре специального курса и подбору материала. Один вариант предполагает изложение основ работы с Maple, MATLAB и, возможно, Simulink как расширением MATLAB. Такой подход более прост, поскольку переход с Maple на MATLAB требует, по сути, только освоения особенностей новой среды, связанных с организацией рабочего пространства и спецификой *m*-файлов. Однако в этом случае Mathematica оказывается «за бортом» изложения. Ее самостоятельное освоение студентами может представлять определенные

трудности, обусловленные своеобразием этого пакета. Второй вариант предполагает знакомство с основами работы в Mathematica, а затем MATLAB. Переход от одной среды к другой видится здесь более радикальным, но на проверку оказывается вполне осуществимым. Возможные трудности здесь окупаются легкостью самостоятельного освоения пакета Maple, поскольку его можно назвать «чем-то средним между Mathematica и MATLAB». Кроме того, несомненным достоинством Wolfram Mathematica являются встроенные возможности, связанные с функциональным программированием. Современные тенденции развития информационных технологий указывают на то, что этот стиль может стать весьма популярным, а владеющие им программисты получают очевидные конкурентные преимущества на рынке труда.

Литература

- [1] *Глазков Д.В.* Пакеты прикладных математических программ: метод. указания к проведению лабораторных работ. Ярославль: ЯрГУ, 2009. 40 с.

ВВЕДЕНИЕ В ДИСЦИПЛИНУ «ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ»

В. Г. Дурнев

В статье рассматриваются некоторые алгоритмические проблемы, которые в начале XX века привели к необходимости математического уточнения интуитивного понятия алгоритма.

Библиография: 32 названия

Теория алгоритмов одновременно относится к числу древнейших и весьма молодых направлений математических исследований. Хотя первые примеры алгоритмов (вычислительных процессов механического характера) восходят к Древнему Египту, Вавилону и Греции, **теория алгоритмов** как математическая дисциплина ведет свое начало с 30-х годов XX века. Возникновение и развитие **теории алгоритмов** теснейшим образом было связано с развитием математической логики. XX век был периодом бурного развития математической логики, в рамках которой аксиоматический метод изложения математических теорий, ведущий свое начало от древнегреческих математиков, был доведен до своего логического завершения – были формализованы, выражены на подходящем формальном языке, не только основные положения ряда математических теорий, но и логические средства доказательства теорем в этих теориях. Именно в математической логике в 30-е годы XX века было выработано математическое уточнение интуитивного понятия **алгоритма**. Это позволило установить существование неразрешимых алгоритмических проблем во многих разделах математики. В настоящее время математическая логика и теория алгоритмов имеют свой предмет и методы исследования, играют важную роль как в различных разделах математики, так и в ее приложениях, в частности в информатике. По мнению выдающегося специалиста в этой области, А.И. Мальцева, математическая логика и теория алгоритмов "образуют теоретический фундамент для создания и применения быстродействующих вычислительных и управляющих систем. Резко возрос удельный вес математической логики и теории алгоритмов и в самой математике" [9]. Это же подчеркивает и другой крупнейший специалист в области математической логики и теории алгоритмов Ю.Л. Ершов: "Специалисты в области ЭВМ начинают осознавать, что эти разделы математики являются фундаментом для построения действительно необходимой сейчас хорошей теории вычислений" [7].

Рассмотрим некоторые математические задачи, которые привели к необходимости математического уточнения интуитивного понятия **алгоритма**.

По мнению ряда специалистов по истории математики, возникновение различных вычислительных процедур, как говорят чисто механического характера, относится к самому раннему периоду развития математики – ко временам Древнего Египта, Вавилона и Греции. Эти процедуры позволяли находить величины, являвшиеся решениями некоторых задач, из величин, входящих в исходные данные этих задач, по достаточно точно сформулированным правилам (инструкциям). В качестве хорошо известных из школьного курса математики примеров можно привести формулы для нахождения площадей прямоугольников, параллелограммов, трапеций, треугольников, многоугольников и кругов, формулы для нахождения объемов параллелепипедов, призм, пирамид, конусов и шаров. Эти формулы позволяют по некоторым исходным данным находить соответствующие величины с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления. Формулы, выражающие корни алгебраических уравнений через их коэффициенты с помощью тех же операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней, дают вычислительную процедуру для нахождения корней, по крайней мере, в принципе. Решением задачи на построение циркулем и линейкой до начала XIX века выступала соответствующая **вычислительная процедура**, и лишь в XIX веке *решением некоторых таких задач стало доказательство невозможности* выполнения тех или иных построений, т.е. **невозможности создания соответствующей процедуры**. Одним из наиболее известных таких вычислительных процессов является известный еще со времен Евклида процесс нахождения наибольшей общей меры двух отрезков, теперь более известный как алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел и наибольшего общего делителя двух многочленов. Позже подобные вычислительные процедуры стали называться **алгоритмами (алгорифмами)**. Другие примеры алгоритмов дают хорошо известные алгоритмы сложения и умножения натуральных чисел, заданных в некоторой системе счисления, в частности, в десятичной или двоичной. Считается, что само слово **”алгоритм” (алгорифм)** происходит от имени выдающегося узбекского математика IX столетия Мохаммеда ибн аль-Хорезми.

Аль-Хорезми Мохаммед бен Мусса (787 – около 850) – среднеазиатский математик, астроном и географ. Родом из Хорезмского оазиса, исторического центра цивилизации, которая дала миру целое созвездие выдающихся ученых и поэтов. С конца VIII века жил в Багдаде, где с 815 года был главой ”Дома мудрости” – Багдадского хранилища рукописей.

Из математических работ аль-Хорезми до наших дней дошли два трактата – арифметический и алгебраический. Основные разделы первого трактата посвящены действиям с натуральными числами и дробями.

Во втором трактате изучаются уравнения первой и второй степени, рассматриваются некоторые приемы решения геометрических задач методами алгебры и ряд других вопросов.

Сочинения аль-Хорезми оказали большое влияние на развитие математики не только на Востоке, но и в Западной Европе.

Считается, что от латинизированного имени аль-Хорезми (Algorithmi) происходит само слово **”алгоритм (алгориџм)”**, которое еще в конце XIX – начале XX в. произносилось как **”алгориџм”**, впрочем и в настоящее время некоторые математики придерживаются произношения **”алгориџм”**, а не **”алгоритм”**, например, **”нормальный алгориџм”** А.А. Маркова.

Напомним, что слово **”алгебра”** происходит от первого слова **”аль-джебр”** (восстановление) названия алгебраического трактата аль-Хорезми **”Китаб аль-джебр валь-мукабала”** (**”Книга о восстановлении и противопоставлении”**). В этом трактате *алгебра* впервые представлена как самостоятельный раздел математики, введены правила действий с алгебраическими величинами, решаются уравнения первой и второй степени. Латинский перевод XII века этого трактата многие годы в Европе был основным руководством по алгебре. Само слово **”аль-джебр”** обозначает операцию перенесения членов уравнения из одной его части в другую с изменением знака.

В книге **”Об индийском счете”** аль-Хорезми ввел десятичную систему счисления. Этот трактат в XII веке был переведен с арабского на латинский язык. Благодаря этому в Европе стала известна индийская позиционная система счисления и правила (алгоритмы) выполнения арифметических операций. Первоначально слово **алгориџм** (Algorithmi) служило обозначением правил выполнения действий в арифметике натуральных чисел, заданных в индийской позиционной системе счисления, а позже стало общим названием для всякой системы вычислений по строго определенным правилам. В средневековых манускриптах формула DIXIT ALGORIZMI – латинский перевод арабского QALA AL-KHOREZMI, по-русски **ТАК СКАЗАЛ АЛЬ-ХОРЕЗМИ** – служила сертификатом безупречной ясности и достоверности. Долгие годы аль-Хорезми считался высшим авторитетом.

Вся более чем четырехтысячелетняя история математики свидетельствует об особом интересе к алгоритмам, так как создание алгоритма для решения определенного бесконечного класса задач позволяет единообразно решить, по крайней мере, в принципе, любую из этих задач, и тем самым в определенной степени тривиализировать некоторую об-

ласть математики. Можно с достаточным основанием утверждать, что значительный прогресс в развитии алгоритмических методов создал дошедшее до наших дней представление, что решение многих проблем должно носить алгоритмический характер. Яркими представителями таких взглядов были, например, Р. Декарт, Г.В. Лейбниц и Д. Гильберт. И они весьма преуспели в реализации своих научных взглядов. Создав аналитическую геометрию, Р. Декарт свел значительную часть геометрии к алгебраическим вычислениям и тем самым существенно продвинулся на пути алгоритмизации геометрии. Д. Гильберт в конце XIX века в определенной степени завершил работу по аксиоматизации евклидовой геометрии, что вместе с методами аналитической геометрии дало возможность сводить решение многих геометрических задач к вопросу об истинности определенных формул на множестве действительных чисел. А. Тарский разработал алгоритм, решающий последний вопрос, что явилось одним из первых примеров создания алгоритма для решения непростой математической задачи, для которой сам факт существования разрешающего алгоритма неочевиден.

Однако в середине 30-х годов XX века вера в определенную универсальность алгоритмических методов была подорвана.

Вплоть до 30-х годов XX века математики обходились неточным интуитивным понятием алгоритма. Возникавшие алгоритмические проблемы решались указанием соответствующих разрешающих процедур. При этом каждый раз, когда конкретный алгоритм для решения той или иной серии однотипных задач был построен, ни у кого не возникало сомнений в том, что указанная процедура является алгоритмом.

Под *алгоритмом в интуитивном смысле* мы понимаем точное предписание, определяющее вычислительный процесс, который ведет от исходных данных, варьируемых в некотором заданном множестве, к искомому результату. Этот вычислительный процесс должен быть конечным, он должен однозначно определяться заданием предписания и конкретного исходного данного. Иногда называют алгоритмом и сам вычислительный процесс, определяемый точным предписанием.

Под *алгоритмической проблемой* понимается задача построения алгоритма для решения заданной *массовой проблемы*, т.е. бесконечной серии однотипных вопросов, зависящих от некоторых параметров. В случае, когда искомый алгоритм невозможен, говорят, что данная *алгоритмическая проблема неразрешима*. *Неразрешимость алгоритмической проблемы*, конечно, вовсе не означает, что какая-то из задач рассматриваемой серии неразрешима. Это означает лишь, что *нельзя указать единый метод решения всех задач данной серии*. Возможность решения каждой из них своим способом при этом не исключается.

Предписание, задающее алгоритм, должно быть *конечным*, и искомый результат должен получаться через *конечное число шагов* работы алгоритма. Оно должно быть настолько четким, чтобы однозначно определять весь вычислительный процесс от начальных данных до результата. Это означает, что процесс осуществляется *вычислителем* (будь то человек или машина) чисто механически, т.е. без привлечения каких-либо творческих элементов, и может быть воспроизведен с тем же результатом другим вычислителем и в другое время. Иначе говоря, для выполнения вычислительного процесса не требуется никакого творческого усилия.

По словам академика С.И. Адяна, к началу XX века математика стала богаче, в ней все большую роль стало играть изучение нечисловых объектов. Слова в различных конечных или счетных алфавитах все больше выступали в качестве данных для алгоритмов. Были явно сформулированы алгоритмические проблемы, которые не удавалось решить (построить соответствующие алгоритмы), несмотря на усилия многих математиков. Поэтому начали возникать сомнения в возможности их положительного решения.

Приведем примеры таких проблем. Это прежде всего ***проблема тождественной истинности для Логики Предикатов***, состоящая в следующем:

для фиксированной конечной сигнатуры τ требуется разработать алгоритм, позволяющий по произвольной формуле Φ языка L_τ определить, является ли она тождественно истинной, т.е. истинной в любой интерпретации Логики Предикатов этой сигнатуры τ .

Эту проблему, получившую название ***Entscheidungsproblem***, Д. Гильберт считал одной из основных проблем математики начала XX века. Заметим, что аналогичная ***проблема тождественной истинности для Логики Высказываний*** решается путем построения истинностной таблицы для формулы Φ . Без особого успеха исследования по ***проблеме тождественной истинности для Логики Предикатов*** велись с начала XX века до середины 30-х годов. И лишь в 1936 году А. Черчу [22] удалось *доказать невозможность построения алгоритма, решающего проблему тождественной истинности для Логики Предикатов*.

Другая проблема такого рода – это ***10-ая проблема Д. Гильберта***, включенная под номером 10 в знаменитый список из 23 проблем, сформулированных им на II Международном математическом конгрессе, состоявшемся в августе 1900 года в Париже:

10. Выяснение разрешимости произвольного диофантова уравнения. Пусть задано диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и целыми рациональными коэффициентами; требуется указать способ, по которому с помощью конечного числа опера-

ций можно было бы узнать, разрешимо ли уравнение в целых рациональных числах или нет.

Под диофантовым уравнением понимается уравнение вида

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где $F(x_1, \dots, x_n)$ – полином с целыми коэффициентами от переменных x_1, \dots, x_n . ”Способ”, о котором идет речь в формулировке 10-ой проблемы, теперь понимается как **алгоритм**. Хорошо известно, какие трудности возникают при исследовании диофантовых уравнений, даже такого, казалось бы простого, как уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Поэтому появились предположения, что искомого алгоритма просто не существует. Справедливость этих предположений была установлена во второй половине XX века в серии работ М. Дэвиса, Х. Путнам, Дж. Робинсон и Ю.В. Матиясевича [16], что явилось одним из выдающихся фундаментальных достижений теории алгоритмов второй половины XX века. Заметим, что в настоящее время неизвестно, *возможно ли построить алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению вида*

$$F(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где $F(x_1, \dots, x_n)$ – полином с целыми коэффициентами от переменных x_1, \dots, x_n , *определить, имеет ли оно решение в рациональных числах*. Интересно это сопоставить со следующим фактом: вопрос о разрешимости уравнений указанного вида в действительных числах алгоритмически разрешим, что было установлено А. Тарским на основе глубокого обобщения известного читателю из курса ”Алгебра” метода Штурма, относящегося к уравнениям с одной неизвестной, т.е. когда $n = 1$, а вопрос о разрешимости уравнений этого вида в комплексных числах легко решается на основе так называемой основной теоремы о многочленах над полем комплексных чисел.

Приведем еще один пример алгоритмической проблемы, долгие годы не поддававшейся решению. Речь пойдет о **проблеме выводимости** для полусистем Туэ, сформулированной норвежским математиком Акселем Туэ в 1914 году [28].

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ – произвольный конечный алфавит. Зафиксируем некоторый конечный набор упорядоченных пар слов $\langle A_1, B_1 \rangle, \dots, \langle A_m, B_m \rangle$ в этом алфавите. С каждой парой $\langle A_i, B_i \rangle$ свяжем *элементарное преобразование* слов в алфавите \mathcal{A} – переход вида

$$UA_iV \longrightarrow UB_iV,$$

где U и V – произвольные слова в алфавите \mathcal{A} . Саму упорядоченную пару слов $\langle A_i, B_i \rangle$ традиционно обозначают в виде $A_i \rightarrow B_i$. Полученный объект обозначается в виде

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_m \rightarrow B_m \rangle$$

и называется **полусистемой Туэ** или *системой полу-Туэ* и будет обозначаться через SST . При этом $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ называется *алфавитом полусистемы SST* , а $A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_m \rightarrow B_m$ – ее *системой подстановок*.

Основным понятием для полусистем Туэ является **понятие выводимости**.

Пусть W и U – слова в алфавите полусистемы Туэ

$$SST = \langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_m \rightarrow B_m \rangle.$$

Слово U называется **выводимым** из слова W , если существует последовательность элементарных преобразований

$$W = W_0 \rightarrow W_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_k \rightarrow W_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow W_s = U,$$

переводящая слово U в слово W .

В **проблеме выводимости для полусистем Туэ**, сформулированной А. Туэ в 1914 году [28], *требуется разработать общий метод, позволяющий по любым двум словам W и U в алфавите полусистемы Туэ SST определить, выводимо ли слово U из слова W* .

Аксель Туэ (19.02.1863 – 7.03.1922) – норвежский математик. Ему принадлежат важные результаты в теории чисел, в диофантовом анализе и в разработке метода тригонометрических сумм. Широкую известность получили метод Туэ в теории диофантовых приближений, теорема Туэ – Зигеля – Рота, теорема Туэ о конечности числа целочисленных решений однородного диофантова уравнения с двумя неизвестными и системы Туэ.

Следующий пример относится к теории групп. Он связан с введенным Вальтером фон Диком в 1882 – 1883 годах способом *задания групп образующими элементами и определяющими соотношениями*. Такой способ задания групп возникает естественным образом в топологии как способ задания фундаментальных групп некоторых топологических пространств.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ – произвольный конечный алфавит. Введем алфавит букв-двойников $\mathcal{A}^{-1} = \{a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\}$. Объединение $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ этих алфавитов будем называть **групповым алфавитом**.

Зафиксируем некоторый конечный набор упорядоченных пар слов $\langle A_1, B_1 \rangle, \dots, \langle A_m, B_m \rangle$ в этом групповом алфавите. С каждой парой $\langle A_i, B_i \rangle$ свяжем два *элементарных преобразования* слов в групповом алфавите $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ – переходы вида

$$UA_iV \longrightarrow UB_iV, \quad UB_iV \longrightarrow UA_iV,$$

где U и V – произвольные слова в групповом алфавите.

К этим элементарным преобразованиям добавим так называемые *тривиальные элементарные преобразования* слов в групповом алфавите $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1}$ – переходы вида

$$Ua_i^\varepsilon a_i^{-\varepsilon}V \longrightarrow UV, \quad UV \longrightarrow Ua_i^\varepsilon a_i^{-\varepsilon}V,$$

где U и V – произвольные слова в групповом алфавите, а $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Преобразования первого вида называются *сокращениями*, а второго – *вставками*.

Саму упорядоченную пару слов $\langle A_i, B_i \rangle$ традиционно обозначают в виде $A_i = B_i$. Полученный объект обозначается в виде

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle\rangle,$$

и он будет служить заданием некоторой группы, которая будет обозначаться тем же способом. При этом a_1, \dots, a_n называются *образующими элементами* этой группы, а $A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m$ – ее *определяющими соотношениями*.

Для построения этой группы используем отношение выводимости слов.

Как и в случае полусистем Туэ, слово U называется *выводимым* из слова W (обозначается $W \vdash^* U$), если существует последовательность элементарных преобразований

$$W = W_0 \rightarrow W_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_k \rightarrow W_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow W_s = U,$$

переводящая слово U в слово W .

Нетрудно показать, что отношение выводимости \vdash^* в рассматриваемом случае является отношением эквивалентности, т.е. оно рефлексивно, транзитивно и симметрично. Соответствующие классы эквивалентности будем обозначать через $[W]$.

На множестве классов эквивалентности естественным образом определяется умножение равенством

$$[W] \cdot [U] = [WU],$$

где WU – обычное произведение (сочленение, конкатенация) слов W и U .

Нетрудно проверить, что множество классов эквивалентности относительно введенной операции умножения является группой. При этом роль нейтрального элемента выполняет класс $[1]$, где через 1 обозначено пустое слово, а элементом, обратным к $[W]$, является $[\bar{W}]$, где

$$\overline{a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_t}^{\varepsilon_t}} = a_{i_t}^{-\varepsilon_t} \dots a_{i_1}^{-\varepsilon_1}.$$

Построенная группа обозначается через

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle\rangle$$

и называется *группой, заданной образующими элементами a_1, \dots, a_n и определяющими соотношениями $A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m$* .

Если некоторая группа G изоморфна построенной группе, то говорят, что *группа G имеет задание (генетический код, копредставление)*

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle\rangle.$$

Например, симметрическая группа S_3 имеет задание

$$\langle\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b \rangle\rangle.$$

Группа $SL(2, Z)$ целочисленных матриц второго порядка с определителем, равным единице, имеет задание

$$\langle\langle a, b \mid a^6 = 1, b^4 = 1, a^3 = b^2 \rangle\rangle,$$

а ее факторгруппа по центру $PSL(2, Z)$ (проективная специальная целочисленная группа матриц второго порядка) имеет задание

$$\langle\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1 \rangle\rangle.$$

Заметим, что группа кос на трех нитях и группа узла клеверный лист (трилистник) имеют одно и то же задание

$$\langle\langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle\rangle.$$

В связи с рассмотренным способом задания групп М. Дэн в работе 1911 года [23] сформулировал три алгоритмические проблемы, получившие название *фундаментальные проблемы М. Дэна* – **проблему тождества**, **проблему сопряженности** и **проблему изоморфизма**.

Проблема тождества. Требуется разработать общий метод (алгоритм), позволяющий по любому заданию группы

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle\rangle$$

и по любым двум (групповым) словам W и U в этих образующих определить, равны ли элементы $[W]$ и $[U]$, т.е. можно ли из слова W вывести слово U , пользуясь указанными определяющими соотношениями и тривиальными соотношениями.

Проблема сопряженности. Требуется разработать общий метод (алгоритм), позволяющий по любому заданию группы

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle\rangle$$

и по любым двум (групповым) словам W и U в этих образующих определить, сопряжены ли элементы $[W]$ и $[U]$, т.е. найдется ли такое слово Z , что $[Z]^{-1}[W][Z] = [U]$ (можно ли из слова $\bar{Z}WZ$ вывести слово U , пользуясь указанными определяющими соотношениями и тривиальными соотношениями).

Проблема изоморфизма. Требуется разработать общий метод (алгоритм), позволяющий по любым двум заданиям

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle\rangle$$

и

$$\langle\langle b_1, \dots, b_p \mid C_1 = D_1, \dots, C_q = D_q \rangle\rangle$$

определить, будут ли изоморфны соответствующие группы.

Первые две проблемы были сформулированы М. Дэном в предыдущей работе 1910 года, а третью проблему можно обнаружить в работе Х. Титце 1908 года [29], но не выделенную там специально. Однако особое внимание этим проблемам было уделено именно в работе М. Дэна 1911 года [23], которая начинается с формулировки этих трех проблем.

В большой работе 1895 года "Analysis Situs" А. Пуанкаре ввел понятие фундаментальной группы, а в столь же большой работе 1908 года Х. Титце установил [29], что фундаментальные группы некоторых многообразий, заданных клеточными комплексами, имеют конечные задания. Начиная с работ Ж. Листинга 1848 года интенсивно изучаемый класс наглядных топологических объектов составляли узлы. В докладе 1905 года В. Виртингер изложил метод нахождения группы узла по его проекции на евклидову плоскость. Ранее М. Дэн предложил несколько иной способ нахождения задания группы узла, однако впоследствии метод В. Виртингера стал более распространенным. М. Дэн доказал, что узел изотопически эквивалентен окружности тогда и только тогда, когда его группа абелева, а значит циклическая. Из сказанного можно понять, почему фундаментальные проблемы М. Дэна сразу привлекли внимание исследователей. Заметим лишь, что в проблемах М. Дэна речь шла о построении соответствующих *разрешающих алгоритмов*.

Почти полвека проблемы М. Дэна не поддавались решению – только в начале 50-х годов XX века Петр Сергеевич Новиков доказал [18], что *искомые алгоритмы невозможно построить*.

Так как проблемы М. Дэна решить не удавалось, то естественно возникло желание рассмотреть более общую ситуацию – аналогичные алгоритмические проблемы для полугрупп, заданных образующими элементами и определяющими соотношениями, и установить их неразрешимость.

В 40-е годы XX века А.А. Марков [10] и Э. Пост [27] независимо и практически одновременно установили *алгоритмическую неразрешимость*.

мость проблемы равенства (эквивалентности) слов для полугрупп, заданных конечным числом образующих элементов и конечным числом определяющих соотношений. Это понятие вводится аналогично введенному выше понятию группы, заданной образующими элементами и определяющими соотношениями.

Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ – произвольный конечный алфавит.

Зафиксируем некоторый конечный набор упорядоченных пар слов $\langle A_1, B_1 \rangle, \dots, \langle A_m, B_m \rangle$ в этом алфавите. С каждой парой $\langle A_i, B_i \rangle$ свяжем два элементарных преобразования слов в алфавите \mathcal{A} – переходы вида

$$UA_iV \longrightarrow UB_iV, \quad UB_iV \longrightarrow UA_iV,$$

где U и V – произвольные слова в этом алфавите.

Саму упорядоченную пару слов $\langle A_i, B_i \rangle$ традиционно обозначают в виде $A_i = B_i$. Полученный объект обозначается в виде

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle,$$

и он будет служить заданием некоторой полугруппы, которая будет обозначаться тем же способом. При этом a_1, \dots, a_n называются *образующими элементами* этой полугруппы, а $A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m$ – ее *определяющими соотношениями*.

Для построения этой полугруппы, как и в случае группы, используем отношение выводимости слов.

Слово U называется *выводимым* из слова W (обозначается $W \vdash^* U$), если либо оно ему графически равно (выводимо за 0 шагов), либо существует последовательность элементарных преобразований

$$W = W_0 \rightarrow W_1 \rightarrow \dots \rightarrow W_k \rightarrow W_{k+1} \rightarrow \dots \rightarrow W_s = U,$$

переводящая слово U в слово W .

Нетрудно показать, что отношение выводимости \vdash^* в рассматриваемом случае является отношением эквивалентности, т.е. оно рефлексивно, транзитивно и симметрично. Соответствующие классы эквивалентности будем обозначать через $[W]$.

На множестве классов эквивалентности естественным образом определяется умножение равенством

$$[W] \cdot [U] = [WU],$$

где WU – обычное произведение (сочленение, конкатенация) слов W и U .

Нетрудно проверить, что множество классов эквивалентности относительно введенной операции умножения является полугруппой с единицей (моноидом). При этом роль нейтрального элемента выполняет

класс $[1]$, где через 1 обозначено пустое слово. Построенная полугруппа обозначается через

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle$$

и называется *полугруппой, заданной образующими элементами a_1, \dots, a_n и определяющими соотношениями $A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m$* .

Если некоторая полугруппа S изоморфна построенной полугруппе, то говорят, что *полугруппа S имеет задание (генетический код, копредставление)*

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle.$$

В связи с рассмотренным способом задания полугрупп естественно возникают алгоритмические проблемы, аналогичные проблемам М. Дэна, – **проблема равенства (эквивалентности) слов для полугрупп** и **проблема изоморфизма для полугрупп**.

Проблема равенства (эквивалентности) слов для полугрупп. Требуется разработать общий метод (алгоритм), позволяющий по любому заданию полугруппы

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle$$

и по любым двум словам W и U в этих образующих определить, равны ли элементы $[W]$ и $[U]$, т.е. можно ли из слова W вывести слово U , пользуясь указанными определяющими соотношениями.

Проблема изоморфизма для полугрупп. Требуется разработать общий метод (алгоритм), позволяющий по любым двум заданиям

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid A_1 = B_1, \dots, A_m = B_m \rangle$$

и

$$\langle b_1, \dots, b_p \mid C_1 = D_1, \dots, C_q = D_q \rangle$$

определить, будут ли изоморфны соответствующие полугруппы.

Как было сказано выше, в 40-е годы XX века А.А. Марков [10] и Э. Пост [27] независимо и практически одновременно установили алгоритмическую неразрешимость проблемы равенства (эквивалентности) слов для полугрупп, заданных конечным числом образующих элементов и конечным числом определяющих соотношений. Неразрешимость проблемы изоморфизма для полугрупп легко следует из неразрешимости для них проблемы равенства слов.

Для доказательства невозможности алгоритма, дающего решение той или иной серии задач, следовало сначала точно математически определить, какой смысл вкладывается в понятие "**алгоритм**". Такое уточнение определения понятия алгоритма стало возможным благодаря

развитию математической логики в начале XX века. Оно было получено в середине 1930-х годов в работах К. Геделя, Д. Эрбрана, А. Черча, Э. Поста и А. Тьюринга почти одновременно в двух внешне совершенно различных формах: в виде точного *математического описания класса вычислимых функций натурального аргумента* (**частично рекурсивные и рекурсивные функции**) и в виде точного *математического определения класса вычислительных процессов, реализуемых механически абстрактным вычислителем* (**машины Тьюринга**). Вскоре было установлено, что эти два уточнения понятия алгоритма по существу эквивалентны друг другу, т.е. они взаимозаменяемы. Это дало основание американскому математику А. Черчу в 1936 году [21] сформулировать следующий тезис:

Тезис Черча. *Всякий алгоритм в интуитивном смысле с точки зрения его вычислительных возможностей эквивалентен некоторому алгоритму в уточненном смысле.*

Появление точного понятия алгоритма позволило установить неразрешимость многих алгоритмических проблем. Сначала неразрешимые алгоритмические проблемы были найдены в самой теории алгоритмов, затем в математической логике. Позже было установлено их существование и в других разделах математики – алгебре, топологии, теории чисел, анализе, теории обыкновенных дифференциальных уравнений [17]. Было доказано, что они есть и среди известных задач, поставленных в математике ранее, до создания теории алгоритмов, и долгие годы не поддававшихся решению. Таковыми оказались в математической логике – *проблема выводимости для полусистем Туэ*, *проблема тождественной истинности для Логики Предикатов* [22], в алгебре – *фундаментальные проблемы М. Дэна для конечно определенных групп* [18] и аналогичные проблемы для конечно определенных полугрупп [10], [27], в топологии – *проблема гомеоморфизма для полиэдров* (многообразий, являющихся ”правильными” объединениями со склейкой стандартных симплексов) [12], в теории чисел – *проблема разрешимости в целых или натуральных числах полиномиальных уравнений* $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ (10-ая проблема Д. Гильберта) [16]. Был найден ряд алгоритмически неразрешимых проблем, связанных с вопросом о существовании решения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, с вопросом о сходимости несобственных интегралов и наличием первообразных из некоторого фиксированного класса для функций определенного класса [17].

В первой половине XX века исследователей прежде всего интересовало, существует ли алгоритм для решения рассматриваемой задачи. Во второй половине XX века особый интерес стал представлять вопрос о сложности соответствующего алгоритма, т.е. об используемых им ресурсах – времени и памяти. В определенной мере это было связано с

компьютерной реализацией алгоритмов. Наиболее интересными представляются вопросы, связанные с получением нетривиальных нижних оценок сложности алгоритмов, решающих заданную задачу [2], [5].

Литература

- [1] Адян С.И., Дурнев В.Г. *Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп* // Успехи матем. наук. - 2000. - Том 55, № 2. - С. 3 – 94.
- [2] Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. *Построение и анализ вычислительных алгоритмов*. М.: Мир, 1983.
- [3] Булос Дж., Джеффри Р. *Вычислимость и логика*. М.: Мир, 1994.
- [4] Володин И.А., Кузнецов В.Е., Фоменко А.Т. *О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сферы* // Успехи матем. наук. - 1974. - Том 29, № 5. - С. 71 – 168.
- [5] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. М.: Мир, 1979.
- [6] Дурнев В. Г. *Элементы теории алгоритмов*. Ярославль: ЯрГУ, 2008.
- [7] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. *Математическая логика*. М.: Наука, 1979.
- [8] Катленд Н. *Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций*. М.: Мир, 1983.
- [9] Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. М.: Наука, 1986.
- [10] Марков А.А. *Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем* // ДАН СССР. - 1947. - Том 55, № 7. - С. 587 – 590.
- [11] Марков А.А. *Теория алгоритмов*. М.: Наука. - 1954. Труды МИАН. - Том 42.
- [12] Марков А.А. *Неразрешимость проблемы гомеоморфии* // ДАН СССР. - 1958. - Том 121, № 2. - С. 218 – 220.
- [13] Марков А.А. *К проблеме представимости матриц* // Z. Math. Log. und Grundle. Math. - 1958. - Том 4, № 2. - С. 157 – 168.

- [14] Марков А.А., Нагорный Н.М. *Теория алгоритмов*. М.: Наука, 1984.
- [15] Матвеев С.В. *Алгоритм распознавания трехмерной сферы (по А. Томпсон)* // Матем. сборник. - 1995. - Том 186, № 5. - С. 69 – 84.
- [16] Матиясевич Ю.В. *Диофантовость перечислимых множеств* // ДАН СССР. - 1970. - Том 130, № 3. - С. 495 – 498.
- [17] Матиясевич Ю.В. *Десятая проблема Гильберта*. М.: Наука, 1993.
- [18] Новиков П.С. *Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества теории групп* // ДАН СССР. - 1952. - Том 85, № 4. - С. 709 – 712.
- [19] Новиков П.С. *Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп* // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1954. - Том 18, № 6. - С. 485 – 524.
- [20] Новиков П.С. *Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп* // М.: Наука, 1955. Труды МИАН. - Том 44.
- [21] Church A. *An unsolvable problem of elementary number theory* // Amer. J. Math. - 1936. - Vol. 58, № 2. - P. 345 – 363.
- [22] Church A. *A note on the Entscheidungsproblem* // J. Symbolic Logic. - 1936. - Vol. 1, № 1. - P. 40 – 41.
- [23] Dehn M. *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen* // Math. Ann. - 1911. - Bd. 71. - S. 116 – 144.
- [24] Post E. *Intoduction to a general theory of elementary propositions* // Amer. J. Math. - 1921. - Vol. 43.
- [25] Post E.L. *Finite combinatory processes – formulation 1* // Journal of Symbolic Logic. - 1936. - Vol. 1, № 3. - P. 103 – 105.
- [26] Post E.L. *A variant of a recursively unsolvable problem* // Bull. Amer. Math. Soc. - 1946. - Vol. 52. - P. 264 – 268.
- [27] Post E.L. *Recursive unsolvability of a problem of Thue* // J. Symbol Log. - 1947. - Vol. 12, № 1. - P. 1 – 11.
- [28] Thue A. *Problem über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln* // Vid. Skr. Math.-natur. - KI, 1914. - № 10.

- [29] Tietze H. *Über topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten* // Monatsh. Math. Phys. - 1908. - Vol. 19. - P. 1 – 118.
- [30] Thompson A. *Thin position and the recognition problem for S^3* // Preprint. - 1994.
- [31] Turing A.M. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem* // Proceedings of London Mathematical Society. Ser. 2. - 1936. - Vol. 42, № 3, 4. - P. 230 – 265.
- [32] Turing A.M. *The word problem in semigroups with cancellation* // Ann. Math. - 1950. - Vol. 52. - P. 491 – 505.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ «ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ»

И. П. Иродова

Предлагается примерный план изучения темы интерполяции функций многочленами. Обсуждаются способы выбора узлов интерполяции. Рассматриваются различные постановки задачи.

Библиография: 2 названия.

Рассмотрим классическую постановку задачи теории интерполяции: пусть заданы точки x_1, \dots, x_n , которые будем называть узлами интерполяции, и значения функции f в точках x_i , $i = 1, \dots, n$. Требуется найти многочлен p степени не более $n - 1$, для которого выполняются равенства $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Нетрудно доказать, что эта задача имеет единственное решение. Его можно найти, решив линейную систему n уравнений с n неизвестными. Однако матрица этой системы плохо обусловлена. Для того, чтобы студентам проблема была более понятна, нужно предложить написать программу для решения поставленной задачи, чтобы на экспериментальных данных установить связь между погрешностью приближения и количеством узлов интерполяции.

Далее следует напомнить, что построить интерполяционный многочлен можно не решая системы линейных уравнений. Для этого нужно правильно выбрать базис в пространстве многочленов. В зависимости от выбора базиса существуют две формы записи интерполяционного многочлена: интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k \Phi_k(x),$$

где $\Phi_k(x) = \prod_{j=1, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$

и интерполяционный многочлен в форме Ньютона

$$N_n(x) = \sum_{i=1}^n (x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) f(x_1, \dots, x_i),$$

где $f(x_1, \dots, x_i)$ - разделенная разность функции f .

Задача 1. Написать программу вычисления интерполяционных многочленов в форме Лагранжа и Ньютона. Сравнить трудоемкость вычислений.

Задача 2. На конкретных примерах установить, зависит ли погрешность интерполяции от расположения узлов?

Задача 3. Выбрать на отрезке $[a, b]$ оптимально узел интерполяции x^* для построения интерполяционного многочлена нулевой степени, то есть решить следующую задачу:

$$\inf_{x^* \in [a, b]} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - f(x^*)|,$$

если

- а) $f(x) = k \cdot x + c$;
- б) $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$.

После того, как в ходе эксперимента и решения задач сами студенты сделают вывод о зависимости погрешности от расположения узлов интерполяции, нужно рассказать, как следует выбрать узлы интерполяции. Для этого напомнить, что погрешность интерполяции вычисляется по формуле

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_1) \dots (x - x_{n+1}).$$

Чтобы уменьшить погрешность, нужно так выбрать узлы интерполяции, чтобы величина $\max_{x \in [a, b]} |(x - x_1) \dots (x - x_{n+1})|$ была минимальной. Для отрезка $[a, b] = [-1, 1]$ это можно сделать, заменив x_i нулями многочлена Чебышева T_n . Напомним, что $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$. Удобнее для вычисления многочлена T_n воспользоваться рекуррентной формулой

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x), T_0(x) = 1, T_1(x) = x.$$

Задача 4. Написать программу для сравнения приближений на отрезке $[-1, 1]$ с помощью интерполяционных многочленов, когда узлы интерполяции выбраны равномерно распределенными и когда они совпадают с нулями многочлена Чебышева.

Задача 5. Как выбрать узлы интерполяции для произвольного отрезка $[a, b]$?

Задача 6. Построить на отрезке $[-1, 1]$ интерполяционный многочлен с равномерно распределенными узлами для функции $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Проверить, что при $x > 0.72$ погрешность интерполяции неограниченно увеличивается с увеличением степени интерполяционного многочлена.

Замечание. Функция $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ была введена и изучена Рунге в 1901 году.

Задача 7. Приблизить функцию Рунге интерполяционными многочленами с чебышевскими узлами интерполяции. Сравнить с результатами предыдущей задачи.

Пример с функцией Рунге показывает, что правильный выбор узлов интерполяции уменьшает погрешность приближения. Однако нельзя считать, что если выбрать последовательность узлов интерполяции совпадающими с нулями многочленов Чебышева, то все проблемы будут решены. Здесь уместно привести две теоремы.

Теорема(Фабера). Для любой последовательности интерполяционных сеток найдется некоторая непрерывная функция f , для которой последовательность соответствующих интерполяционных многочленов не сходится равномерно к f .

Теорема(Марцинкевич). Для любой непрерывной функции f существует последовательность интерполяционных сеток такая, что построенные по этой последовательности интерполяционные многочлены равномерно сходятся к f .

Однако, если у функции f существует ограниченная на $[a, b]$ производная, то последовательность интерполяционных многочленов, построенная по чебышевским узлам, будет равномерно сходиться к f на $[a, b]$.

До сих пор мы считали, что значения функции f в узлах интерполяции заданы точно. Если же эти значения заданы с некоторой погрешностью, то нужно строить многочлен p^* так, чтобы $f(x_i) \approx p^*(x_i)$. Следовательно, нужно решить такую оптимизационную задачу: найти

$$\min(\sum_{k=1}^n (p(x_i) - f(x_i))^2)^{1/2}, \quad (1)$$

здесь минимум взят по всем многочленам степени не более $m-1$, $m < n$.

Метод нахождения многочлена наилучшего приближения называется методом наименьших квадратов. Для описания этого метода обозначим $\bar{f} = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ и $e_i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$, $i = 0, \dots, m-1$. Тогда (1) сводится к нахождению проекции вектора \bar{f} на подпространство евклидова пространства R^n , порожденного векторами e_i , $i = 0, \dots, m-1$ и может быть записана в виде:

$$\|\bar{f} - \bar{p}^*\| = \min \|\bar{f} - \bar{p}\| \quad (2)$$

здесь минимум взят по всем векторам \bar{p} вида $\bar{p} = a_0 e_0, \dots, a_{m-1} e_{m-1}$.

Задача 8. Написать программу для решения задачи (2). Проверить работу программы на функции f , совпадающей с многочленом степени $m-1$. Выбрать узлы интерполяции x_i и задать $f(x_i) + \varepsilon_i$, где ε_i - случайным образом выбранные числа.

В заключение рассмотрим такую постановку задачи. Пусть выбраны узлы интерполяции. Функция f задана в некоторых узлах точно, а в остальных - с некоторой погрешностью. Построить многочлен, значения которого совпадают со значениями функции f в тех точках, где они заданы точно, и хорошо приближает функцию в остальных точках.

Задача 9. Для заданной функции f и узлов интерполяции x_i , $i = 1, \dots, n$ построить многочлен первой степени, чтобы выполнялись условия $p(x_1) = f(x_1)$ и $p(x_i) \approx f(x_i)$, $i = 2, \dots, n$. Написать программу построения многочлена. Найти погрешность приближения.

Литература

- [1] *Бахвалов Н.С.* Численные методы // М.Наука, 1973.
- [2] *К.де Бор* Практическое руководство по сплайнам // М. Радио и связь 1985.

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПРИ НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

В. Б. Калинин, А. В. Николаев

В статье приводятся наиболее характерные ошибки, допускаемые студентами при решении задач на нахождение собственных векторов линейных операторов.

Библиография: 3 названия.

Несмотря на тот факт, что тема «Собственные вектора» обычно достаточно подробно разбирается и на лекциях, и на практических занятиях, ряд студентов не совсем понимают смысл выполняемых операций: не могут объяснить для чего мы собственно приравняем к нулю определитель $|A - \lambda E|$, не понимают, что найдя корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ многочлена $|A - \lambda E| = 0$, мы просто решаем системы линейных уравнений

$$(A - \lambda_1 E)x = 0, (A - \lambda_2 E)x = 0, \text{ и т.д.}$$

Кроме того, хотя на практике прорешивается множество примеров с матрицами 3×3 , на экзамене некоторые неверно решают даже задачи 2×2 . Поэтому в данной статье описываются некоторые наиболее типичные ошибки, на которые стоит обратить особое внимание.

Пример с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

как правило, решается верно, так как в результате получаются уж очень простые уравнения:

$\lambda = 1$: $x_1 + x_2 = 0$ и собственный вектор $C(1, -1)$ где $C \neq 0$,

$\lambda = 3$: $-x_1 + x_2 = 0$ и собственный вектор $C(1, 1)$ где $C \neq 0$.

В то же время, уже пример с матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

вызывает значительные затруднения. Так, для $\lambda = -2$ имеем уравнение $5x_1 + 4x_2 = 0$, но вместо очевидного ответа $C(4, -5)$, ($C \neq 0$), студенты, действуя по аналогии с предыдущей задачей, получают «собственный

вектор» $C(5, -4)$. При этом, даже в случае подсказки о неверном решении системы линейных уравнений, студент, как правило, не осознает ошибки и предлагает ответ $(0, 0)$, хотя, рассказывая до этого теоретическую часть билета, уверенно говорит о том, что вектор x не равен нулю.

А ведь совсем нетрудно проверить, что

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \end{pmatrix} \neq -2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Следующую более существенную ошибку рассмотрим на примере из задачника Кострикина [3]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен принимает вид

$$(\lambda - 2)^3 = 0,$$

и для единственного собственного значения $\lambda = 2$ получаем уравнение

$$-2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1.$$

При этом, хотя ранг матрицы $(A - \lambda E)$ равен единице, многие убеждены, что у линейного оператора всего один собственный вектор

$$C(1, 2, 0), \quad (C \neq 0),$$

поскольку координата x_3 не входит в уравнение и, «следовательно», равна 0. На самом же деле, как нетрудно заметить, x_3 может принимать любые значения и собственный вектор оператора имеет вид:

$$C_1(1, 2, 0) + C_2(0, 0, 1),$$

где C_1 и C_2 не равны нулю одновременно.

И, наконец, наиболее интересный случай: если среди собственных значений встречаются комплексные числа. Рассмотрим линейный оператор с матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен принимает вид:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = (\lambda - 1)(\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i) = 0.$$

Найдем собственный вектор для собственного значения $2 + 3i$. Для этого вычтем из главной диагонали $2 + 3i$.

$$\begin{pmatrix} 2 - 3i & -5 & 7 \\ 1 & -6 - 3i & 9 \\ -4 & 0 & 3 - 3i \end{pmatrix}$$

Затем найдем алгебраическое дополнение к элементам первой строки полученной матрицы

$$(-27 + 9i, -39 + 3i, -24 - 12i).$$

Тогда собственные вектора оператора для данного собственного значения имеют вид

$$C(9 - 3i, 13 - i, 8 + 4i), \quad (C \neq 0).$$

Однако, в задачнике приведен ответ

$$C(3 - 3i, 5 - i, 4), \quad (C \neq 0).$$

Большинство студентов считает при этом, что задача решена неверно. Они забывают, что C в данном случае является комплексным числом и, если поделить каждую координату найденного собственного вектора на $2 + i$, то получится в точности ответ из задачника.

Также следует отметить, что в целом операция нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора предполагает от студента некоторых знаний из смежных тем линейной алгебры, а значит кроме описанных выше наследует и все стандартные ошибки из других тем, как то: вычисление определителей любого порядка по «универсальному» правилу треугольников, взаимное уничтожение одинаковых строк в методе Гаусса, неспособность найти базис и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений и многие другие.

Литература

- [1] Калинин В. Б. Линейная алгебра. Методические указания. Ярославль, 2011. 48 с.
- [2] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // ФИЗМАТЛИТ, 2007. 312 с.
- [3] Кострикин А. И. Сборник задач по алгебре. В 2 томах. Том 1 // ФИЗМАТЛИТ, 2007. 264 с.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО СПЕЦКУРСУ «КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ»

В. С. Климов

*В статье обсуждаются задания по спецкурсу
«Кусочно-линейная оптимизация»*

Библиография: 3 названия.

Кусочно-линейная оптимизация (КЛиО) - один из подразделов спецкурса „Современные проблемы математики“, читаемого магистрам первого года обучения. Основное его содержание составляет минимизация выпуклой кусочно-линейной функции, определенной на многогранном множестве. КЛиО представляет промежуточное звено между линейной и выпуклой оптимизацией. В его терминах могут быть сформулированы разнообразные задачи, возникающие в математике и её приложениях.

На первых занятиях студентам предлагались задачи минимизации кусочно-линейных функций одного переменного. Больших трудностей здесь не возникало, однако задачи, по своей сути связанные с выпуклым анализом, решались уже не столь успешно. Следующий цикл упражнений имел отношение к теории матричных игр. Для матриц с двумя рядами возможно графическое решение соответствующих игр. На основе теорем о доминировании матричные игры больших размеров могут быть также решены графически. Такого рода редукция не всегда возможна, но в ряде случаев бывает полезна. Основу решения матричных игр произвольного размера и вида составляет их сведение к задачам линейной оптимизации. Аналогичная редукция применяется для задачи о максимальном шаре, содержащемся в полиэдре, а также в задаче о чебышевском приближении. Замыкает перечень упражнений задача о вычислении опорной функции выпуклого компакта.

Приведу один из вариантов, дающий представление о степени сложности решаемых задач.

1. Найти минимум на всей действительной прямой \mathbb{R} функции

$$f(x) = |2x + 6| + |x + 2| + |x - 2| + |4x - 12|. \quad (1)$$

2. Представить функцию $f(x)$, определённую равенством (1), как максимум конечного числа линейных функций:

$$f(x) = \max_{i \in I} (c_i x + d_i). \quad (2)$$

В равенстве (2) I — конечное множество.

3. В плоскости OXY заданы точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$, координаты x_t, y_t приведены в таблице

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3	-5	2	4	-6	3	-9	2	1	-2	7

Найти наибольшую из выпуклых функций $f: [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, таких, что

$$y_t \geq f(x_t) \quad (t = 0, 1, \dots, 10).$$

4. Задана платёжная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти верхнюю и нижнюю цену игры $\Gamma(A)$, а в случае их совпадений - оптимальные чистые стратегии в игре $\Gamma(A)$.

5. Графическим методом найти решение игры $\Gamma(A)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

6. На основе теоремы о доминировании свести игру $\Gamma(A)$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

к игре размеров 5×2 , а получившуюся 5×2 игру решить графическим методом.

7. Матричную игру $\Gamma(A)$ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

решить путём сведения к задачам линейной оптимизации.

8. Найти максимальный круг среди кругов, содержащихся в пятиугольнике с вершинами (x_t, y_t) ($t = 1, 2, 3, 4, 5$). Координаты вершин приведены в таблице

t	1	2	3	4	5
x	2	-1	-2	0	3
y	2	3	-1	-3	-1

.

9. Решить задачу Чебышёва

$$\max_{t \in \mathcal{K}} \left| \sum_{j=1}^n x_j u_j(t) - f(t) \right| \rightarrow \min,$$

в случае, когда $\mathcal{K} = \{t_1, \dots, t_m\}$ и

$$m = 11, \quad t_i = \frac{i-1}{10} \quad (i = 1, \dots, 11),$$

$$u_j(t) = t^{j-1} \quad (j = 1, \dots, n = 5), \quad f(t) = \frac{1-t}{1+t^2}, \quad t \in [0, 1].$$

10. Найти опорную функцию выпуклого многоугольного множества, определяемого соотношениями

$$a_t x + b_t y \leq c_t \quad (t = 1, \dots, 5). \quad (3)$$

Коэффициенты a_t, b_t, c_t в неравенствах (3) приведены в таблице

t	1	2	3	4	5
a	2	-1	-2	0	3
b	2	3	-1	-3	-1
c	6	7	8	9	10

.

Основным учебником по данному курсу было пособие [1]. Достаточно близки по духу руководства [2], [3], однако эти книги давно уже стали библиографической редкостью. В ряде случаев студенты для решения упражнений использовали новые средства. Отдельное занятие было посвящено решению задачи линейной оптимизации на основе программы Excel. Занятие оказалось совсем нелишним – и среди магистров попадаются те, которые не подозревают о богатых возможностях этой популярной программы.

Литература

- [1] Воробьёв Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов - кибернетиков. Изд-во Ленинградского университета. 1974.

- [2] *Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б.* Новые направления в линейном программировании. М.: Советское Радио. 1966.
- [3] *Зуховицкий С.И., Авдеева С.И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука. 1967.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММЫ ТЕСТИРОВАНИЯ iTest ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

А. А. Короткин, Е. П. Кубышкин

Приводится краткая характеристика тестирующей программы iTest и примеры заданий для базы тестов.

Библиография: 2 названия.

Одной из важнейших составляющих образования является текущий контроль знаний учащихся. Одним из видов такого контроля является тестирование, которое может проводиться как минимум двумя способами: с раздачей отпечатанных листов с вопросами и вариантами ответов или автоматизировано на компьютере. Второй вариант предпочтительнее, т.к. программа сама обрабатывает результаты и выставит оценки в соответствии с заранее заданными критериями, что позволяет легко контролировать весь процесс тестирования. Преподавателю же остается только составить базу данных в виде набора тестов и пронаблюдать, чтобы студенты работали с тестирующей программой самостоятельно.

Существует довольно много тестирующих программ. Наиболее удачной из них, на наш взгляд, является iTest – свободное ПО для подготовки и проведения тестирования [1]. Программа состоит из двух частей: клиентской и серверной. Сервер программы iTest позволяет создавать наборы тестов, а так же управлять тестированием учащихся. Программа iTest обладает удобным конструктором тестов. Ответ в тесте может быть как единственным, так и множественным. Вопросы в тесте можно разбить по группам и по уровню сложности. Вопрос может содержать текст, формулу и поясняющее изображение в векторном формате SVG.

С клиентской частью работают непосредственно студенты, проходящие тестирование. Клиент может подключаться по локальной сети к серверу с загруженным тестом, или (в случае отсутствия локальной сети) загружать тесты непосредственно на компьютере, на котором происходит тестирование.

Первый вариант, когда клиенты подключаются к серверу, намного предпочтительнее. Управление тестированием осуществляется с одного компьютера, на котором запущена серверная часть программы. При этом преподаватель может в режиме реального времени отслеживать ход выполнения тестирования учащимися, сразу же после прохождения тестирования проанализировать результаты теста и сохранить их в виде pdf-файла или распечатать на принтере. Результат тестирования,

например, заданные вопросы, полученные ответы и т.д., вместе с оценкой можно тут же вручить студенту. Несомненный плюс программы iTest – интерфейс на русском языке. Установка программы и работа с ней очень просты и доступны преподавателям, не имеющим опыта работы с ПО такого типа. Подробную информацию о настройке и работе с iTest можно получить по адресу [2].

Для преподавателя, желающего провести тестирование с помощью программы iTest, основные трудозатраты будут связаны (как, впрочем, и для любой схемы тестирования) с составлением базы тестов. База тестов помимо хорошо продуманной содержательной составляющей должна быть достаточно большого объема, чтобы каждый студент получал вопросы, не совпадающие с вопросами на соседних компьютерах. Заметим, что программа iTest позволяет производить случайный выбор тестов для клиентского компьютера из базы тестов.

Ниже приводятся примеры тестовых заданий по дисциплине «Уравнения математической физики». В докладе также приводятся результаты опытного тестирования, проведенного в одной из групп на третьем курсе факультета ИВТ.

Доклад сопровождается демонстрацией работы с программой iTest.

Пример теоретического вопроса по дисциплине УрМатФиз.

Сформулировать для уравнения Пуассона в ограниченной связной области Ω с границей Γ класса C^1 условие разрешимости задачи Неймана:

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0,$$

$$f(x, y) \in C(\overline{\Omega}), \quad u = u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

Варианты ответов:

$$\begin{array}{ll} 1. \int_{\Omega} u(x, y) dx dy = 0; & 2. \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = 0; \\ 3. \int_{\Gamma} u(x, y) ds = 0; & 4. \int_{\Gamma} f(x, y) ds = 0. \end{array}$$

Пример практического задания по дисциплине УрМатФиз.

Найти решение следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 5u_{xx}, \quad u(0, t) = u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sin^3(\pi/2x), \quad u_t(x, 0) = \sin(25\pi/2x). \end{aligned}$$

Варианты ответов:

1. $u(x, t) = 3/4 \sin(\pi/2x) \cos(5\pi/2t) - 1/4 \sin(3\pi/2x) \cos(15\pi/2t) +$
 $+ 2/(125\pi) \sin(25\pi/2x) \sin(125\pi/2t);$
2. $u(x, t) = 3/4 \sin(\pi/2x) \cos(\sqrt{5}\pi/2t) - 1/4 \sin(3\pi/2x) \cos(\sqrt{5}3\pi/2t) +$
 $+ 2/(25\sqrt{5}\pi) \sin(25\pi/2x) \sin(\sqrt{5}25\pi/2t);$
3. $u(x, t) = 3/4 \cos(\pi/2x) \cos(\sqrt{5}\pi/2t) - 1/4 \cos(3\pi/2x) \cos(\sqrt{5}3\pi/2t) +$
 $+ 2/(25\sqrt{5}\pi) \cos(25\pi/2x) \sin(\sqrt{5}25\pi/2t);$
4. $u(x, t) = 3/4 \sin(\pi/2x) \sin(\sqrt{5}\pi/2t) - 1/4 \sin(3\pi/2x) \sin(\sqrt{5}3\pi/2t) +$
 $+ 2/(25\sqrt{5}\pi) \sin(25\pi/2x) \cos(\sqrt{5}25\pi/2t).$

Пример практического задания по дисциплине БАЗЫ ДАННЫХ.

База данных содержит одну таблицу со схемой

СТУД_ЭКЗАМ(ном, фио, группа, адрес, код_дисц, название, оценка).

Привести схему таблицы ко второй нормальной форме (2НФ)

Варианты ответов:

1. СТУДЕНТ(ном, фио, группа, адрес),
ЭКЗАМЕН(ном, фио, код_дисц, название, оценка).
2. СТУДЕНТ(ном, фио, группа, адрес),
ЭКЗАМЕН(ном, код_дисц, название, оценка).
3. СТУДЕНТ(ном, фио, группа, адрес),
ЭКЗАМЕН(ном, код_дисц, оценка),
ДИСЦИПЛИНА(код_дисц, название).

Литература

- [1] <http://itest.sourceforge.net/>
- [2] <http://usavm.ac.ru/software/itest/1.4/itestserver.htm>,
<http://usavm.ac.ru/software/itest/1.4/itestclient.htm>.

КРИТЕРИЙ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ДВУХ ПЛОСКИХ ФИГУР, ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЛИПСАМИ

В. А. Краснов, А. Ю. Ухалов

Приводится алгоритм выявления пересечения двух плоских замкнутых фигур, ограниченных эллипсами. Задача сводится к решению квадратного уравнения благодаря применению некоторых свойств пучков коник.

Библиография: 2 названия.

Задачи о выявлении пересечения объектов на плоскости и в пространстве часто возникают в различных приложениях. В данной работе рассматривается задача о выявлении пересечения двух плоских замкнутых фигур, ограниченных эллипсами. В работе [1] решение этой задачи требовалось для статистического моделирования поведения жидких кристаллов. В ходе таких экспериментов задачу о пересечении двух плоских замкнутых фигур, ограниченных эллипсами, приходится решать многократно, что предъявляет высокие требования к скорости работы алгоритма.

Рассматриваемую задачу можно легко свести к задаче о существовании вещественных корней уравнения четвертой степени, однако с вычислительной точки зрения этот подход неудобен.

В данной работе показано, как знание некоторых свойств кривых второго порядка позволяет по существу свести задачу к решению квадратного уравнения.

Очевидно, что с помощью невырожденного линейного преобразования один из эллипсов может быть преобразован в окружность, а второй эллипс приведен к главным осям (см. Рис. 1). Будем предполагать, что эти преобразования выполнены и эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

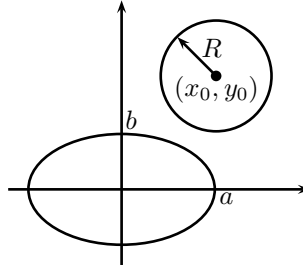


Рис. 1

На практике перед применением точных критериев целесообразно выполнить быстрые, но «грубые» тесты: проверить, пересекаются ли описывающие фигуры прямоугольники и не лежит ли центр одной кривой внутри другой. Мы будем предполагать, что данные тесты уже выполнены, но вопрос о пересечении описываемых кривыми областей остался открыт, т.е. прямоугольники пересекаются и центр одной кривой не лежит внутри другой.

Обозначим через E замыкание внутренности эллипса, а через D замыкание внутренности окружности. При наших предположениях верно утверждение: фигуры E, D не пересекаются тогда и только тогда, когда эллипс с окружностью не пересекается. Рассмотрим пучок коник

$$\lambda q_1(x, y) + q_2(x, y) = 0, \quad (Q_\lambda)$$

где $q_1(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, $q_2(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$. Очевидно, что если эллипс и окружность имеют общую точку, то при любом λ (в частности, при $\lambda > 0$) коника Q_λ непустая. Покажем, что верно обратное утверждение.

Лемма. Пусть окружность и эллипс не пересекаются. Тогда найдется такое $\lambda > 0$, что коника (Q_λ) пуста.

Доказательство. При каждом фиксированном $\lambda \geq 0$ рассмотрим в \mathbb{R}^3 поверхность, определяемую уравнением

$$z = \lambda q_1(x, y) + q_2(x, y). \quad (Z_\lambda)$$

Эта поверхность является эллиптическим параболоидом с вертикальной осью, вершина которого расположена внизу. Коника (Q_λ) получается в результате пересечения параболоида (Z_λ) и плоскости $z = 0$. Нужно показать, что существует $\hat{\lambda} > 0$ такое, что вершина параболоида $(Z_{\hat{\lambda}})$ находится выше плоскости $z = 0$. Вершина параболоида (Z_λ) имеет следующие координаты на плоскости Oxy

$$x(\lambda) = \frac{a^2 x_0}{a^2 + \lambda}, \quad y(\lambda) = \frac{b^2 y_0}{b^2 + \lambda}.$$

Рассмотрим поведение точки $p_\lambda = (x(\lambda), y(\lambda))$ при различных значениях $\lambda \geq 0$. Эта точка находится на ветви гиперболы

$$a^2(x - x_0)y = b^2(y - y_0)x,$$

проходящей через центр эллипса и центр окружности. Точка p_0 совпадает с центром окружности, а при $\lambda \rightarrow +\infty$ точка p_λ стремится к центру эллипса (см. Рис. 2). Следовательно, существует $\hat{\lambda} > 0$ такое, что точка $p_{\hat{\lambda}}$ попадет на окружность. Это число $\hat{\lambda}$ искомое, так как функция $z = \hat{\lambda} q_1(x, y) + q_2(x, y)$ принимает на окружности положительные значения. Лемма доказана.

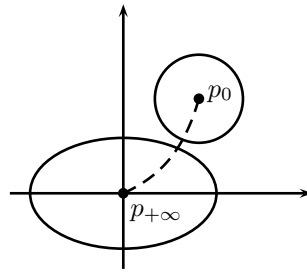


Рис. 2

Таким образом, мы приходим к следующему критерию: *при наших предположениях плоские фигуры E , D не пересекаются тогда и только тогда, когда найдется такое $\lambda > 0$, для которого коника (Q_λ) пустая.*

Существует ли такое λ , можно выяснить с помощью ортогональных инвариантов уравнения коники (Q_λ) . Как известно (см., например, [2]), для уравнения кривой второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

величины

$$S = a_{11} + a_{22}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

являются ортогональными инвариантами, т.е. они не меняются при переходе от одной ортогональной системы координат к другой. Набор величин S , δ , Δ позволяет определить тип кривой и, в частности, выяснить, является ли коника пустым множеством.

Инварианты коники (Q_λ) , очевидно, будут функциями λ . Учитывая значения коэффициентов в (Q_λ) , имеем

$$S(\lambda) = \lambda \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 2, \quad \delta(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{a^2} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{b^2} + 1 \right),$$

$$\Delta(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + p_3\lambda^3,$$

где

$$p_0 = -R^2, \quad p_1 = \frac{1}{a^2}(x_0^2 - R^2) + \frac{1}{b^2}(y_0^2 - R^2) - 1,$$

$$p_2 = -\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2b^2}(R^2 - x_0^2 - y_0^2), \quad p_3 = -\frac{1}{a^2b^2}.$$

График функции $S(\lambda)$ – прямая с положительным угловым коэффициентом, пересекающая ось абсцисс в точке $\lambda_0 = -2 / \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$. График функции $\delta(\lambda)$ – парабола с ветвями, направленными вверх, пересекающая ось абсцисс в точках $-a^2$ и $-b^2$. Таким образом, при $\lambda \geq 0$, $S(\lambda) > 0$ и $\delta(\lambda) > 0$.

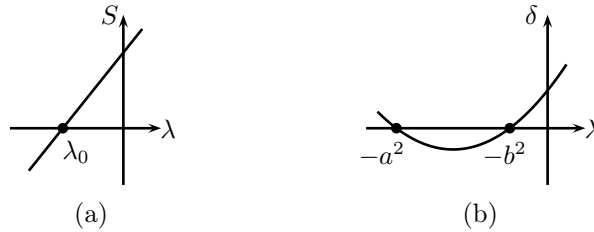


Рис. 3: Графики функций (a) $S(\lambda)$ и (b) $\delta(\lambda)$.

$\delta(\lambda) > 0$ – эллиптический случай кривой второго порядка. Эллипс будет не пуст, если $S(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ имеют разные знаки и пуст, если $S(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ имеют один и тот же знак.

В силу того, что при неотрицательных λ величина $S(\lambda)$ положительна, для ответа на вопрос, существуют ли $\lambda > 0$, при которых коника (Q_λ) пуста, требуется лишь исследовать поведение функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda > 0$.

Функция $\Delta(\lambda)$ – полином третьей степени, причем $\Delta(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow -\infty$, $\Delta(\lambda) \rightarrow -\infty$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $\Delta(0) = -R^2 < 0$.

Очевидно, функция $\Delta(\lambda)$ может иметь тот же знак, что и $S(\lambda)$ (т.е. быть положительной) при $\lambda > 0$ только, если она имеет при некотором $\lambda^* > 0$ локальный максимум и $\Delta(\lambda^*) > 0$.

Таким образом, чтобы проверить, пересекаются ли фигуры E и D , достаточно выяснить, существует ли такой положительный корень квадратного уравнения

$$\Delta'(\lambda) = 0 \tag{2}$$

λ^* , для которого $\Delta(\lambda^*) > 0$.

Фигуры E и D не пересекаются тогда и только тогда, когда такой корень существует.

На рисунках 4 и 5 приведен вид графика функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda > 0$ для случаев пересекающихся и непересекающихся фигур E , D . Для случая непересечения на графике отмечена точка локального максимума

функции λ^* . Данные графики соответствуют некоторым реальным случаям расположения кривых, показанным на соответствующем рисунке.

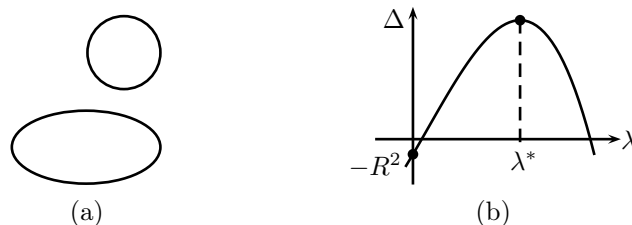


Рис. 4: Фигуры E и D не пересекаются.

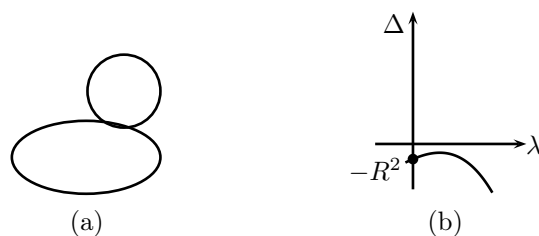


Рис. 5: Фигуры E и D пересекаются.

Достоинством изложенного алгоритма является простота и надежность. Для применения алгоритма требуется решить квадратное уравнение $\Delta'(\lambda) = 0$ и подставить его положительные корни в полином третьей степени $\Delta(\lambda)$. При этом высокая точность вычислений не требуется, т.к. достаточно лишь верно определить знак полинома $\Delta(\lambda)$ в данной точке.

Литература

1. *Viellard-Baron J.* Phase transitions of the classical hard-ellipse system // The Journal of Chemical Physics. 1972. Vol. 56, № 10. P. 4729–4744.
2. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979.

ПОЛУГРУППА ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Е. П. Кубышкин

Приведен конспект лекции, посвященной построению полугруппы линейных ограниченных операторов автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Библиография: 2 названия.

Понятие полугруппы линейных ограниченных операторов играет важную роль в изложении теории дифференциальных уравнений, основанной на теоретико-функциональном подходе, предложенном в работах Н.Н.Красовского [1], Дж.Хейла [2] и др. Ниже на примере скалярного автономного линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом построена полугруппа линейных ограниченных операторов, определяющих его решения. Введено понятие инфинитезимального (производящего) оператора, построена формула общего решения неоднородного уравнения.

Рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + l(x(t+s)) = f(t) \quad (1)$$

$t \geq 0$; $x(t) : R_+ \rightarrow R$; $l(x(s)) : C(-h, 0) \rightarrow R (h > 0)$ - линейный непрерывный функционал; $f(t)$ непрерывная при $t \geq 0$ функция.

Под решением уравнения (1), определенном при $t \geq 0$ с начальной функцией $x_0(s) \in C(-h, 0)$ будем понимать функцию $x(t+s)$, определенную при $t \geq 0, -h \leq s \leq 0$, непрерывно дифференцируемую при $t > 0$, обращающую уравнение (1) при $t > 0$ в тождество и удовлетворяющую начальному условию

$$x(t+s)|_{t=0} = x_0(s). \quad (2)$$

Задача нахождения указанного решения называется задачей Коши. Отметим, что решение задачи Коши при $0 \leq t \leq T$ существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий и параметров уравнения (1).

Рассмотрим однородное уравнение

$$\dot{x}(t) + l(x(t+s)) = 0 \quad (3)$$

Пусть $x(t+s)$ решение уравнения (3) с начальным условием (2). Рассматривая это решение при фиксированном $t > 0$ как элемент пространства $C(-h, 0)$, определяем тем самым линейный ограниченный оператор $T(t) : C(-h, 0) \rightarrow C(-h, 0)$, $x(t+s) = T(t)x_0(s)$. Линейность этого оператора следует из линейности уравнения (3), ограниченность из непрерывной зависимости решений уравнения (3) от начальных условий. Для указанного оператора выполнено очевидно следующее полугрупповое свойство $T(t_1 + t_2)x_0(s) = T(t_1)T(t_2)x_0(s) = T(t_2)T(t_1)x_0(s)$ ($t_1, t_2 > 0$). Указанное семейство операторов $T(t)$ будем называть полугруппой уравнения (3).

Построим явный вид оператора $T(t)$. Воспользуемся для этого преобразованием Лапласа. Применим к уравнению (3) преобразование Лапласа, считая $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$ ($f(t) = O(\exp(\alpha t)$, $\alpha > 0$, $t \rightarrow \infty$). В результате имеем равенство

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) \exp(-pt) dt + l \left(\int_0^\infty x(t+s) \exp(-pt) dt \right) = \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt,$$

что эквивалентно равенству

$$(p + l(\exp(ps)))X(p) - x_0(0) + l \left(\int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt \right) = F(p).$$

Обозначив $h(p) = p + l(\exp(ps))$, имеем

$$X(p) = h^{-1}(p)(x_0(0) - l \left(\int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt \right) + F(p)). \quad (4)$$

Отсюда, используя формулу обращения преобразования Лапласа, при $t > 0$ находим

$$x(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt) h^{-1}(p) \left(x_0(0) - l \left(\int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt \right) + F(p) \right) dp, \quad (5)$$

где $\gamma > \mu_0$. Величина μ_0 выбирается таким образом, чтобы вещественные части характеристического уравнения $h(p) = 0$ были меньше μ_0 .

Введем в рассмотрение функцию Коши $k(t)$, обладающую следующими свойствами: $k(t) \equiv 0$ при $t < 0$, $k(0) = 1$, $k(t) \in C[0, \infty) \cap C^1(h, \infty)$,

$k(t)$ при $t \geq 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) + \int_0^t l(x(t_1 + s)) dt_1 = 1$$

Существование и единственность функции Коши доказывается обычным методом последовательных приближений аналогично теореме существования и единственности решения уравнения (1). Легко заметить, что при $t \geq 0$

$$k(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(pt) h^{-1}(p) dp.$$

Преобразуем выражение (5). Введем в рассмотрение функцию $e(t)$: $e(t) \equiv 0$ при $t < 0$, $e(t) \equiv 1$ при $t \geq 0$. Заметим, что

$$\begin{aligned} h^{-1}(p) \int_s^0 x_0(t) \exp(p(s-t)) dt &= h^{-1}(p) \exp(ps) \int_s^\infty e(-t) x_0(t) \exp(-pt) dt = \\ &= \int_{-s}^\infty k(t+s) \exp(-pt) dt \int_s^\infty e(-t) x_0(t) \exp(-pt) dt = \\ &= \int_s^\infty k(t+s) \exp(-pt) dt \int_s^\infty e(-t) x_0(t) \exp(-pt) dt \doteq \\ &\doteq \int_s^t k(t+s-t_1) e(-t_1) x_0(t_1) dt_1 = \int_s^0 k(t+s-t_1) x_0(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

Кроме того

$$h^{-1}(p) x_0(0) \doteq k(t) x_0(0), h^{-1}(p) F(p) \doteq \int_0^t k(t-t_1) f(t_1) dt_1.$$

Таким образом выражение (5) при $t \geq 0$ может быть записано в следующей форме

$$x(t) = k(t) x_0(0) - l \left(\int_s^0 k(t+s-t_1) x_0(t_1) dt_1 \right) + \int_0^t k(t-t_1) f(t_1) dt_1.$$

Отсюда имеем общее решение уравнения (3) $x(t+s) = T(t)x_0(s)$, где семейство операторов

$$T(t)x_0(s) = \begin{cases} k(t+s) - l\left(\int_s^0 k(t+s+s_1-t_1)x_0(t_1)dt_1\right), & \text{если } t+s \geq 0; \\ x_0(s), & \text{если } t+s < 0 \end{cases} \quad (6)$$

определяет полугруппу уравнения (3).

Положим $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. В результате решение уравнения (1) с начальными условиями (2) может быть записано в виде

$$x(t+s) = T(t)x_0(s) + \int_0^{t+s} k(t+s-t_1)f(t_1)dt_1$$

Инфинитезимальным (производящим) оператором полугруппы $T(t)$ называется оператор A , определяемый равенством

$$A = \lim_{t \rightarrow +0} t^{-1}(T(t)x_0(s) - x_0(s))$$

Непосредственно из (3),(5) находим

$$Ax_0(s) = \begin{cases} dx_0(s)/ds, & -h \leq s < 0; \\ -l(x_0(s)), & s = 0 \end{cases}$$

с областью определения $D(A) = \{x_0(s) : x_0(s) \in C^1(-h, 0), \dot{x}_0(0) + l(x_0(0)) = 0\}$ плотной в $C(-h, 0)$. Это позволяет, введя в рассмотрение функцию $u(s, t) = x(t+s)$, записать уравнение (1) в виде эквивалентной краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \frac{\partial u}{\partial s}|_{s=0} &= -l(u(s, t)) + f(t), \end{aligned}$$

определенной в полосе $-h \leq s \leq 0, t \geq 0$.

Литература

- [1] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
- [2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДВУХСЧЕТЧИКОВЫХ МАШИН ДВУХГОЛОВОЧНЫМИ АВТОМАТАМИ

Е. В. Кузьмин, В. А. Соколов

*Проводится моделирование работы двухсчетчиковых
машин Минского с помощью двухголовочных автоматов.*

Библиография: 5 названий.

1 Введение

В статье простым и наглядным образом показывается, как работа двухсчетчиковой машины Минского может быть смоделирована с помощью двухголовочного автомата в том смысле, что этот автомат будет допускать те и только те слова, которые являются конечными исполнениями счетчиковой машины из всех возможных начальных конфигураций.

Известно (см., например, [2, 4]), что проблема пустоты (зацикливания при любом входе) для машин Минского с двумя счетчиками не является частично разрешимой. Следовательно, имеем, что проблема пустоты (недопущения ни одного слова) для двухголовочных автоматов также не является частично разрешимой. В свою очередь этот факт о двухголовочных автоматах используется при доказательстве неразрешимости некоторых проблем для схем программ [1].

Поэтому результаты статьи могут быть использованы при преподавании теории схем программ в той её части, которая касается, например, доказательства отсутствия частичной разрешимости проблем пустоты и эквивалентности стандартных схем программ.

Ранее [1] факт отсутствия частичной разрешимости проблемы пустоты двухголовочных автоматов доказывался с помощью (сведением) проблемы зацикливания машин Тьюринга. Доказательство имеет громоздкий вид и при этом оформлено в виде наброска, в котором выражаются основные идеи моделирования двухголовочным автоматом работы машины Тьюринга над некоторым начальным словом.

В настоящей статье каждой команде двухсчетчиковой машины Минского сопоставлена в наглядном графическом виде соответствующая подпрограмма двухголовочного автомата, моделирующая работу этой команды.

2 Основные понятия и определения

Счетчиковая машина Минского M — это набор (q_0, q_n, Q, X, Δ) , где $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$ — конечное непустое множество состояний машины; $q_0 \in Q$ — начальное состояние; $q_n \in Q$ — финальное состояние; $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ — конечное непустое множество счетчиков, которые могут принимать значения из $\mathbb{N} \cup \{0\}$; $\Delta = \{\delta_0, \dots, \delta_{n-1}\}$ — набор правил переходов по состояниям машины; δ_i — правило переходов для состояния q_i . Состояния q_i , $0 \leq i \leq n-1$, подразделяются на два типа. Состояния первого типа имеют правила переходов вида:

$$(\delta_i) q_i: x_j := x_j + 1; \text{ goto } q_k,$$

где $1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq n$. Для состояний второго типа имеем:

$$(\delta_i) q_i: \text{ if } x_j > 0 \text{ then } (x_j := x_j - 1; \text{ goto } q_k) \text{ else goto } q_l,$$

где $1 \leq j \leq m, 0 \leq k, l \leq n$.

Для финального состояния q_n правило перехода не предусмотрено. Это означает, что при попадании в состояние q_n машина Минского M завершает свою работу.

Конфигурация машины Минского — это набор (q_i, c_1, \dots, c_m) , где q_i — состояние машины, c_1, \dots, c_m — натуральные числа (включая ноль), являющиеся значениями соответствующих счетчиков.

Исполнением счетчиковой машины Минского называется последовательность конфигураций $s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$, индуктивно определяемая в соответствии с правилами переходов. Счетчиковая машина имеет одно исполнение из начальной конфигурации s_0 , так как для каждого состояния предусмотрено не более одного правила переходов. Машина, получив на вход некоторый набор значений счетчиков, стартует из состояния q_0 и либо останавливается в состоянии q_n с выходным набором значений счетчиков, либо закликивается, реализуя тем самым частичную числовую функцию.

Двухголовочный автомат $A = (V, Q, q_0, q_f, \#, I)$ имеет одну ленту и две считывающие головки, которые могут независимо перемещаться вдоль ленты в одном направлении. Множество состояний $Q = Q_1 \cup Q_2$ разбито на два непересекающихся подмножества; в состояниях из Q_1 активна первая головка, в состояниях из Q_2 — вторая. V здесь означает алфавит символов на ленте, $q_0 \in Q$ — начальное состояние, $q_f \in Q$ — финальное состояние, $\#$ — символ конца ленты, а I — программу автомата A , т. е. последовательность команд вида $qa \rightarrow q'$, где $q, q' \in Q$, $a \in V$, причём для любой пары (q, a) существует единственная команда, начинающаяся этими символами. В начальном состоянии обе головки обозревают первый символ ленты.

Согласно программе на каждом шаге автомат считывает активной головкой символ с ленты, передвигает её по ленте вправо на одну клетку и переходит в новое состояние. Если автомат находится в состоянии $q \in Q_i$ ($1 \leq i \leq 2$), то i -я головка является активной и читает символ с ленты. При переходе автомата в состояние $q' \in Q_j$ ($j \neq i$) i -я головка останавливается, а j -я начинает читать символы со своего места ленты (т. е. с того места, на котором она остановилась до передачи управления i -й головке). Если одна из головок считывает символ $\#$ конца ленты, автомат останавливается. Автомат также останавливается, если не может сработать ни одна из команд программы I . Автомат *допускает слово* α в алфавите V , если, начав работу с лентой, содержащей это слово, он, считав активной головкой $\#$, символ конца ленты, останавливается в заключительном состоянии.

Двухголовочный автомат *моделирует* работу счетчиковой машины Минского, если автомат допускает те и только те слова, которые являются конечными исполнениями этой машины (при всех возможных начальных конфигурациях).

3 Моделирование

Теорема 1. Для любой двухсчетчиковой машины Минского можно построить двухголовочный автомат, моделирующий её работу.

Доказательство. Начнем с алфавита и представления конфигурации счетчиковой машины на ленте двухголовочного автомата. Положим $V = \{q_0, \dots, q_n, 1, *\}$, где q_i — символы, обозначающие состояния машины Минского, соответствующим количеством символов «1» будем представлять значения счетчиков, $*$ — специальный разделительный символ. Конфигурацию (q, c_1, c_2) счетчиковой машины будем представлять на ленте в виде $q \underbrace{11\dots 1}_{c_1} * \underbrace{11\dots 1}_{c_2} *$. Тогда, например, переход счетчи-

вой машины из (q, c_1, c_2) в конфигурацию (q', c_1+1, c_2) при срабатывании команды первого типа $q: x_1 := x_1 + 1; \text{ goto } q'$ будет изображен на ленте двухголовочного автомата как $q \underbrace{11\dots 1}_{c_1} * \underbrace{11\dots 1}_{c_2} * q' \underbrace{11\dots 1}_{c_1+1} * \underbrace{11\dots 1}_{c_2} *$.

Здесь $q, q' \in \{q_0, \dots, q_n\}, q \neq q_n$.

Каждому состоянию счетчиковой машины сопоставим такое же состояние (с той же пометкой) двухголовочного автомата, в котором будет активна вторая считывающая головка. Каждую команду счетчиковой машины промоделируем соответствующей подпрограммой двухголовочного автомата, изображенной в виде графа переходов на рис. 1. На рисунке состояния автомата изображены в виде кружков, цифра внутри кружка означает номер активной в этом состоянии считывающей

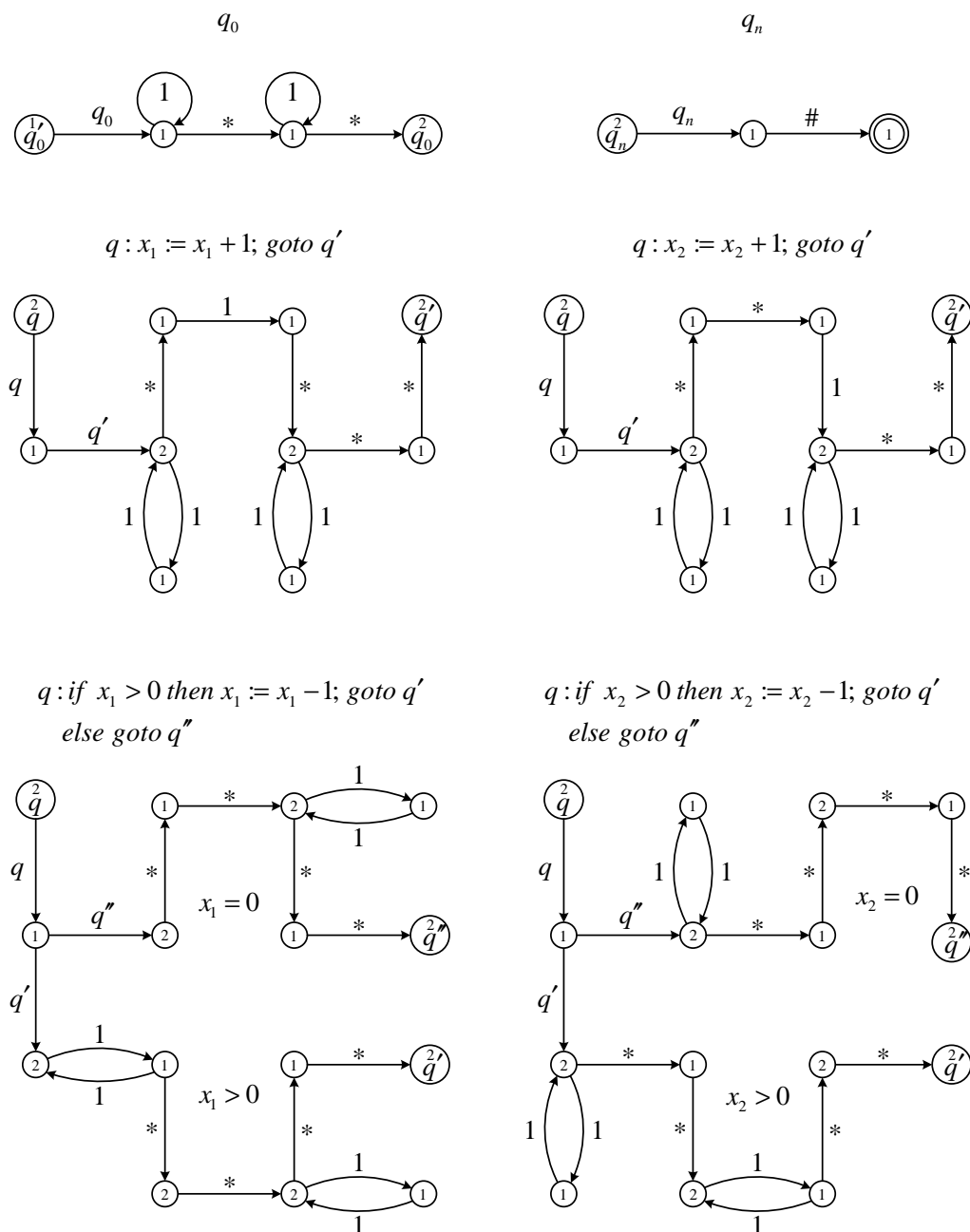


Рис. 1: Подпрограммы двухголовочного автомата, моделирующие работу соответствующих команд двухсчетчиковой машины Минского.

головки. Символы ленты, по которым возможен переход из текущего состояния двухголовочного автомата, указаны над дугами.

Для финального состояния q_n счетчиковой машины также сопоставим подпрограмму, см. рис. 1, завершающуюся в финальном состоянии, обозначенном двойным кружком, двухголовочного автомата при активной первой считывающей головке. Начальным состоянием двухголовочного автомата устанавливается новое состояние q'_0 при активной первой считывающей головке, для которого также приводится подпрограмма (см. рис. 1). Смысл этой подпрограммы состоит в том, чтобы прочитав первой головкой начальную конфигурацию счетчиковой машины, передать управление второй считывающей головке в состоянии q_0 , которое соответствует начальному состоянию счетчиковой машины.

За исключением подпрограмм для начального и финального состояний работа подпрограмм сводится к проверке того, удовлетворяют ли две записанные на ленте соседние конфигурации счетчиковой машины соответствующей команде (этой машины), которая переводит одну конфигурацию в другую.

По построению двухголовочный автомат, моделирующий счетчиковую машину таким образом, будет допускать те и только те слова, которые являются возможными конечными исполнениями этой счетчиковой машины. \square

Литература

- [1] Котов В. Е., Сабельфельд В. К. Теория схем программ. М.: Наука, Физматлит, 1991. 248 с.
- [2] Кузьмин Е. В. Счетчиковые машины. Уч. пособ. Ярославль, ЯрГУ, 2010. 128 с.
- [3] Минский М. Вычисления и автоматы. М.: Мир, 1971. 268 с.
- [4] Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2-е изд. М.: Вильямс, 2002. 528 с.
- [5] Rosenberg A. On Multi-Head Finite Automata // Proc. of the 5th Ann. Symp. on Switch. Theory and Log. Design, 1963. P. 221–228.

ИЗУЧЕНИЕ ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В РАМКАХ КУРСА «ЯЗЫКИ И МЕТОДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Н. С. Лагутина, А. М. Васильев, И. В. Парамонов

В статье обсуждается структура курса по изучению объектно-ориентированного программирования на C++. Одной из основ обучения является архитектура приложения Модель—Вид—Контроллер. Графическая библиотека Qt используется как удобный инструмент реализации этой архитектуры.

Библиография: 2 названия.

В статье обсуждается структура курса по изучению объектно-ориентированного программирования на C++. Одной из основ обучения является архитектура приложения Модель—Вид—Контроллер. Графическая библиотека Qt используется как удобный инструмент реализации этой архитектуры.

Целью обучения программированию является умение самостоятельно создавать качественные программные изделия. С появлением объектно-ориентированных технологий весьма поверхностное освоение некоторых технических приемов позволяет получать несложные программы в визуальных средах. Чаще всего качество таких программ не удовлетворяет требованиям надежности и сопровождаемости. Для создания сложного приложения необходимо глубокое понимание принципов объектно-ориентированного программирования, устройства объектно-ориентированной программы, технологии создания программных систем.

При обучении технологиям программирования преподаватель сталкивается с рядом проблем. Структура изучаемых курсов в вузе зачастую такова, что дисциплины связанные с проектированием приложений и программной инженерией изучаются на старших курсах, поэтому при разработке программы студент начинает непосредственно с написания кода, все остальные части жизненного цикла ПО рассматриваются им после, а часто никогда. Не редко курс по изучению языка программирования или конкретной библиотеки для разработки определенного вида программных продуктов сводится к описанию технических особенностей изучаемого предмета, оставляя на заднем плане общие принципы

построения программ: архитектуру, модифицируемость, юзабилити. С другой стороны, многие теоретические курсы по информатике построены так, что почти не позволяют студентам увидеть реальное применение изучаемых технологий.

В данной статье рассматривается подход к изложению материала в рамках предмета «Языки и методы программирования», изучаемого на втором курсе направления «Прикладная математика и информатика» на факультете информатики и вычислительной техники ЯрГУ.

В первой половине курса излагаются общие принципы объектно-ориентированного программирования и сразу же демонстрируется их применение в конкретном языке и библиотеке. В нашем случае используется язык C++, что обусловлено в основном историческими причинами и связностью с предметами, преподаваемыми на старших курсах. Перед изучением данной дисциплины студенты уже ознакомились с парадигмой структурного программирования и языком Си. Эта часть курса содержит описание инвариантных к языкам программирования понятий, приемов, методов объектно-ориентированного программирования. Методическая направленность первой части заключается в овладении технологией объектно-ориентированного программирования. Основное внимание уделяется понятию класса: созданию пользовательских классов и использованию их и уже разработанных классов на примере стандартной библиотеки STL.

Вторая часть курса посвящена созданию приложений с графическим пользовательским интерфейсом. Основная идея второй половины курса: рассмотреть создание приложений на основе архитектуры Модель—Вид—Контроллер. Различные средства библиотеки представляются как способ реализации этого шаблона программирования.

Для второй части курса выбрана библиотека Qt, так как на её основе весьма удобно демонстрировать реализацию в системе программирования наследования, инкапсуляции, полиморфизма.

Цикл лекций, посвящённый проектированию и созданию приложений с графическим пользовательским интерфейсом, объединен идеей создания приложения, хранящего и обрабатывающего данные с постепенным его усложнением и добавлением новых возможностей, относящихся как к общей архитектуре подобных программ, так и к особенностям самой библиотеки Qt.

Один из самых важных моментов обучения связан с тем, что приложение можно написать «вручную», без использования дополнительного инструмента визуального программирования. При этом намного понятнее становятся взаимосвязи между классами и другими элементами программы. Достоинством Qt является и то, что практически вся функциональность приложения достигается за счет создания объектов

соответствующих классов и вызова методов для настройки необходимых параметров, а логика этих действий достаточно простая.

Документация библиотеки Qt устроена достаточно понятно и удобно даже для начинающих. Она включает в себя детальное описание основных подсистем библиотеки, классов, примеров их использования, а также инструментов для разработки, поставляемых вместе с библиотекой. В описание классов входит информация о их интерфейсе (поля, методы, сигналы и слоты) и дереве наследования (имена родительских и дочерних классов). Существует русскоязычный вариант документации Qt [1], благодаря которому большинство студентов может без проблем знакомится с библиотекой. Это позволяет преподавателю во время лекции продемонстрировать различные аспекты построения приложений согласно объектно-ориентированной парадигме: иерархию различных классов, их интерфейсы и композицию, оставляя студентам технические детали для самостоятельного изучения.

Механизм сигналов и слотов, имеющийся в библиотеке Qt, позволяет быстро и просто связывать между собой отдельные объекты. Это дает возможность на начальном этапе создания приложения сосредоточиться именно на его архитектуре, не углубляясь в механизм обработки событий, связанный с переопределением методов базовых классов.

Первоначальный вариант приложения явным образом реализует архитектуру Модель—Вид—Контроллер. Постепенное усложнение программы в рамках единой архитектуры позволяет быстро перейти к рассмотрению сложных классов самой библиотеки Qt, использующих эту архитектуру.

Часть лекций, описывающих детали разработки приложений, опубликована на сайте qt.e-werest.org в цикле статей «Архитектура Модель—Вид—Контроллер в Qt» [2].

Направленность описанного курса на овладение студентами навыков использования основ объектно-ориентированного программирования и построения графических пользовательских приложений в рамках архитектурных шаблонов позволяет в дисциплинах, изучаемых на старших курсах сосредоточиться на изучении более глубоких аспектов разработки ПО.

Литература

- [1] Проект по переводу официальной документации библиотеки Qt на русский язык <http://doc.crossplatform.ru/qt/>
- [2] Раздел учебные материалы на E-WeREST // <http://qt.e-werest.org/blog/tutorial/>

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

В. В. Литвинов

Приводятся различные методы вычисления интегралов, зависящих от параметра. Приводимые методы предлагается рассматривать при изучении дополнительных глав математического анализа.

Библиография: 1 название.

Тема несобственные интегралы, зависящие от параметра является важной составляющей курсов непрерывной математики. Вместе с тем, в связи с сокращением часов, отводимых для изучения математического анализа данную тему не удастся рассмотреть в достаточном объеме. В этой ситуации представляется целесообразным на лекциях и практических занятиях рассмотреть только интегралы, используемые в других курсах, а часть материалов предложить для самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных расчетно-графических работ.

В качестве примера вычислим интеграл Эйлера - Пуассона, наиболее часто встречающегося в курсе теории вероятностей, в курсе уравнений математической физики и других курсах

$$J = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Сделаем замену переменной $t = xy$, $y > 0$. Тогда

$$J = y \int_0^{\infty} e^{-x^2 y^2} dx.$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до по $+\infty$, получаем

$$J^2 = \int_0^{\infty} J e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dx. \quad (1)$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} y e^{-y^2(1+x^2)} dy = - \int_0^{\infty} \left. \frac{e^{-y^2(1+x^2)}}{2(1+x^2)} \right|_0^{\infty} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$J = \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования применим теорему о перестановке порядка интегрирования, когда оба интеграла несобственные. Напомним формулировку теоремы и обратим внимание студентов, что эта теорема является естественным обобщением теоремы о перестановке пределов интегрирования в случае собственных интегралов. Проверим выполняются ли условия данной теоремы в этом конкретном случае. Действительно интеграл

$$\int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)} dx$$

сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c, d] \subset (0, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как справедлива оценка

$$\left| ye^{-y^2(1+x^2)} \right| \leq de^{-c^2(1+x^2)}$$

а несобственный интеграл

$$\int_0^\infty de^{-c^2(1+x^2)} dx$$

сходится (предложить студентам объяснить почему).

Аналогично показывается, что интеграл

$$\int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)} dy$$

сходится равномерно по параметру x на любом отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Повторный интеграл

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty ye^{-y^2(1+x^2)} dy$$

сходится в силу равенства (1).

Полезно напомнить студентам еще один способ вычисления интеграла Эйлера - Пуассона с использованием несобственных кратных интегралов. Напомним основные определения и вычислим несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (2)$$

Переходим в полярную систему координат и строим исчерпывающую весь образ \mathbf{R}_+^2 последовательность $\{G_n\}$, $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = \mathbf{R}_2'$ измеримых по Жордану множеств. Где

$$G_n = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r < n, 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Заметим , что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = J^2.$$

Интеграл (2) легко вычисляется:

$$J^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

мы опять получаем искомый интеграл.

Таким образом дважды вычислив различными способами интеграл Эйлера - Пуассона мы можем надеется что он останется в памяти студентов на долгое время.

Литература

1. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М.И Курс математического анализа: Учебное пособие для вузов. Наука.Гл.ред. физ.-мат. лит.,1988 - 816с.

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ОСЕВЫМИ ДИАМЕТРАМИ

М. В. Невский

Приводятся некоторые задачи, решения которых основываются на вычислении осевых диаметров n -мерного симплекса.

Библиография: 4 названия.

1. Описание используемых результатов

Пусть C — выпуклое тело в \mathbb{R}^n , т. е. компактное выпуклое подмножество \mathbb{R}^n с непустой внутренностью. Через σC обозначим результат гомотетии C относительно центра тяжести с коэффициентом σ . Символом $d_i(C)$ обозначим i -й *осевой диаметр* C , представляющий собой максимальную длину отрезка, содержащегося в C и параллельного i -й координатной оси. Через Q_n обозначим n -мерный единичный куб $[0, 1]^n$. Под *транслятом* будем понимать результат параллельного переноса.

Для выпуклых тел $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\alpha(C_1; C_2)$ минимальное $\sigma > 0$, для которого C_1 принадлежит трансляту σC_2 . В [3] автор доказал, что для любого выпуклого тела C справедливо неравенство

$$\alpha(Q_n; C) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}. \quad (1)$$

Если же C представляет собой невырожденный симплекс S , то это соотношение обращается в равенство, т. е. имеет место

$$\alpha(Q_n; S) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(S)} \quad (2)$$

(см. [4; теорема 4]).

Величина, стоящая в правой части (2), может быть вычислена через коэффициенты *базисных многочленов Лагранжа* λ_j , *соответствующих симплексу* S . Они определяются следующим образом. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, n+1$. Из координат вершин $x^{(j)}$ составим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Delta := \det(\mathbf{A})$, а определитель $\Delta_j(x)$ получается из Δ заменой j -й строки на строку $(x_1, \dots, x_n, 1)$. Многочлены первой степени $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ обладают свойством $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_{jk}$. Их коэффициенты составляют столбцы матрицы \mathbf{A}^{-1} . Уравнения $\lambda_j(x) = 0$ задают $(n-1)$ -мерные грани S . Имеет место представление

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, n+1\}.$$

В дальнейшем используется запись $\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$.

В [2] автор доказал, что для любого $i = 1, \dots, n$ справедливо равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получается, что

$$\alpha(Q_n; S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \quad (4)$$

2. Примеры упражнений

В упражнениях 2.1–2.2 даны вершины $x^{(j)}$ невырожденного симплекса S в \mathbb{R}^n . Требуется вычислить осевые диаметры $d_i(S)$ и величину $\alpha(Q_n; S)$, т. е. минимальное $\sigma > 0$, при котором Q_n принадлежит трансляту σS . Заметим, что некоторые другие упражнения по этой тематике рассматривались в [1]. Из методических соображений мы рассмотрим лишь случаи $n = 2$ (S — треугольник) и $n = 3$ (S — тетраэдр), но предлагаемые методы работают для любого n . Разбираемые ситуации достаточно просты, чтобы убедиться в правильности ответов по чертежам. Для вычислений при $n > 3$ студентами может применяться компьютер.

2.1. Пусть $n = 2$, S — треугольник с вершинами $x^{(1)} = (1, 1/4)$, $x^{(2)} = (1/2, 1)$, $x^{(3)} = (0, 0)$. Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты базисных многочленов Лагранжа составляют столбцы матрицы \mathbf{A}^{-1} , поэтому

$$\lambda_1(x) = \frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2, \quad \lambda_2(x) = -\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2, \quad \lambda_3(x) = -\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1.$$

Вычисления с помощью (3) дают

$$\frac{1}{d_1(S)} = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{7} + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} \right) = \frac{8}{7}, \quad \frac{1}{d_2(S)} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{7} + \frac{8}{7} + \frac{4}{7} \right) = \frac{8}{7},$$

т. е. $d_1(S) = d_2(S) = 7/8$. Применяя (2) или (4), находим $\alpha(Q_2; S) = 16/7$.

2.2. Пусть $n = 3$, S — тетраэдр с вершинами $x^{(1)} = (1, 0, 1)$, $x^{(2)} = (0, 1, 1)$, $x^{(3)} = (1, 1, 0)$, $x^{(4)} = (0, 0, 0)$. Это правильный тетраэдр, вписанный в куб $Q_3 = [0, 1]^3$. В рассматриваемой ситуации

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисные многочлены Лагранжа —

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \quad \lambda_2(x) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3, \\ \lambda_3(x) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3, \quad \lambda_4(x) = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1.$$

Формула (3) даёт $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Поэтому из (2) или (4) имеем $\alpha(Q_3; S) = 3$.

2.3. Из других упражнений приведём следующее. Показать, что если для выпуклого тела C в (1) выполняется равенство, то C не обязательно является симплексом.

Литература

1. Невский М. В. О некоторых свойствах базисных многочленов Лагранжа // Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете. Материалы 3-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Ярославль, 2010. С. 111–117.
2. Невский М. В. Об одном свойстве n -мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593.
3. Невский М. В. Об осевых диаметрах выпуклого тела // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 313–315.
4. Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. Н. Нестеров

Излагаются классические теоремы Пуанкаре, Перрона и Рапопорта об асимптотическом поведении решений линейных разностных уравнений.

Библиография: 8 названий.

В докладе излагается содержание небольшой части курса дисциплины специализации кафедры математического моделирования, посвященной изучению динамики дискретных систем.

Асимптотические приемы исследования применительно к разностным уравнениям стали использоваться уже в конце XIX — начале XX века в работах А. Пуанкаре и О. Перрона. Мы сформулируем ряд результатов, ставших уже классическими, о построении асимптотики решений линейного разностного уравнения k -го порядка:

$$x(t+k) + (a_1 + p_1(t))x(t+k-1) + \dots + (a_k + p_k(t))x(t) = 0, \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{N}$, a_j — комплексные числа и $p_j(t): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, \dots, k$). Уравнение (1) можно рассматривать как некоторое возмущение линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$x(t+k) + a_1x(t+k-1) + \dots + a_kx(t) = 0. \quad (2)$$

Как известно, динамика решений уравнения (2) определяется корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ характеристического полинома

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k. \quad (3)$$

Будем далее считать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

Следующий результат, принадлежащий Пуанкаре [1], заложил основу для последующих исследований в области качественной теории линейных разностных уравнений.

Теорема 1 (Пуанкаре). Пусть все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ характеристического полинома (3) различны по модулю и выполнено условие (4). Тогда если $x(t)$ — решение уравнения (1), то либо $x(t) \equiv 0$ для всех достаточно больших t , либо существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t+1)}{x(t)} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Современное доказательство теоремы Пуанкаре можно найти в работе Máté и Nevai [2].

Результат, полученный А. Пуанкаре, был затем уточнен О. Перроном. Следующую теорему называют часто теоремой Пуанкаре-Перрона [3].

Теорема 2 (Первая теорема Перрона). Пусть выполнены все условия теоремы 1. Предположим, что в уравнении (1) коэффициент $a_k \neq 0$. Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $x_1(t), \dots, x_k(t)$, обладающую свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_i(t+1)}{x_i(t)} = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Позднее О. Перрон [4] получил асимптотический результат несколько иного вида, который верен без каких-либо ограничений на расположение корней характеристического полинома (3).

Теорема 3 (Вторая теорема Перрона). Пусть выполнено условие (4) и коэффициент $a_k \neq 0$. Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $x_1(t), \dots, x_k(t)$ такую, что для каждого $i = 1, \dots, k$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{|x_i(t)|} = |\lambda_i|, \quad (5)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — корни характеристического полинома (3) (не обязательно различные по модулю).

В связи с теоремой 3 возникли следующие вопросы, ставшие объектом для дальнейших исследований. Во-первых, верно ли, что в предположениях теоремы 3 для любого ненулевого решения $x(t)$ уравнения (1) имеет место предельное равенство (5) для некоторого $i = 1, \dots, k$? Во-вторых, верно ли предположение, сформулированное в предыдущем предложении, без требования $a_k \neq 0$? Ответы на эти вопросы были получены в работе М. Pituk [5]. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнено условие (4). Тогда если $x(t)$ — решение уравнения (1), то либо $x(t) \equiv 0$ для всех достаточно больших t , либо имеет место предельное равенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt[t]{|x(t)|} = |\lambda_i|$$

для некоторого $i = 1, \dots, k$.

К слову, отметим, что за доказательство этой теоремы, а также некоторых родственных утверждений, М. Pituk был удостоен премии Международного Общества по Разностным Уравнениям за лучшую научную работу в 2002 г.

Дальнейшее развитие асимптотической теории линейных разностных уравнений было связано с распространением результатов, полученных Н. Левинсоном для дифференциальных уравнений [6], на дискретный случай. Попытки сформулировать разностный аналог теоремы Левинсона восходят к работам И.М. Рапопорта (см. [7]). Коротко остановимся на основном его результате. Рассмотрим так называемую ℓ -диагональную систему

$$x(t+1) = \Lambda(t)[I + C(t)]x(t), \quad x \in \mathbb{C}^m, \quad (6)$$

где $\Lambda(t) = \text{diag}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t))$, $C(t) \in \ell_1$ и $t \in \mathbb{N}$. Мы пишем, что $R(t) \in \ell_1$, где $R(t)$ — матрица произвольных размеров и $t \in \mathbb{N}$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|R(k)\| < \infty,$$

и $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма.

Имеет место следующая асимптотическая теорема.

Теорема 5 (Рапопорт). Если $\lambda_i(t) \neq 0$, $i = 1, \dots, m$ ($t \geq t_0$) и при этом каждая из последовательностей

$$\ln |\lambda_i(t)| - \ln |\lambda_j(t)|, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (7)$$

начиная с какого-либо достаточно большого значения t , становится последовательностью неотрицательных либо последовательностью неположительных чисел, фундаментальная матрица ℓ -диагональной системы разностных уравнений (6) допускает следующее асимптотическое представление при $t \rightarrow \infty$:

$$X(t) = [I + o(1)] \prod_{l=t_0}^{t-1} \Lambda(l).$$

К сожалению, результаты И.М. Рапопорта долгое время оставались малоизвестными за пределами Советского Союза. И, как это нередко случается в математике, похожие результаты были заново получены (правда, с использованием уже других рассуждений) лишь через три десятилетия в работе Z. Benzaid и D.A. Lutz [8].

Литература

- [1] *Poincaré H.* Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies // Amer. J. Math. 1885. V. 7. P. 203 – 258.
- [2] *Máté A., Nevai P.* A generalization of Poincaré's theorem for recurrence equations // J. Approx. Theory. 1990. V. 63. P. 92 – 97.
- [3] *Perron O.* Über einen Satz des Herrn Poincaré // J. Reine Angew. Math. 1909. V. 136. P. 17 – 34.
- [4] *Perron O.* Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen // Math. Annalen. 1921. V. 84. P. 1 – 15.
- [5] *Pituk M.* More on Poincaré's and Perron's Theorems for difference equations // J. Difference Equ. Appl. 2002. V. 8, №3. P. 201 – 216.
- [6] *Levinson N.* The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 111 – 126.
- [7] *Панопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954. 292 с.
- [8] *Benzaid Z., Lutz D.A.* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. 1987. V. 77. P. 195 – 221.

К ВОПРОСУ ОБ ОБЗОРНЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Ф. И. Папоркова

Обсуждаются вопросы, связанные с проведением обзорных практических занятий.

Библиография: 1 название.

Основная образовательная программа подготовки специалистов предусматривает изучение математического учебного цикла. В его базовую часть включены традиционные математические дисциплины. Для первокурсников специальности «Прикладная математика и информатика» предусмотрен курс «Алгебра и геометрия». В государственных образовательных стандартах результаты обучения представлены в требованиях к уровню подготовки выпускников следующим образом: знать / понимать, уметь, использовать усвоенные знания и умения в профессиональной практической деятельности. Формирование специалиста включает два основных процесса: обучение и усвоение. Механизмами усвоения информации являются: «фильтрация», «прессование», «перекодирование», «систематизация», «сжатие» и др. [1]. Для активизации этих механизмов в процессе усвоения знаний первокурсниками с учетом ограниченности во времени, студентам предлагаются обзорные практические занятия, которые проводятся по завершению нескольких разделов курса. Так, например, в упомянутом курсе изучаются два раздела: «основы векторной алгебры» и «плоскость и прямая в пространстве». После ряда практических занятий, посвященных изучению тем этих разделов и решению типовых задач типовыми способами, проводится обзорное или итоговое занятие, на котором студентам предлагается решить известные задачи, используя все накопленные к тому моменту знания. Приведем пример того, как можно осуществить решение одной задачи несколькими способами, привлекая знания из разных разделов изучаемого курса.

Задача

На прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-13}{4}$ найти точку, ближайшую к точке $B(2; 3; -1)$.

Данная задача является типовым заданием раздела «Плоскость и прямая в пространстве». Отметим, что по условию задачи имеем прямую с направляющим вектором $\vec{v} = (1; 1; 4)$, проходящую через точку $A(1; 2; 13)$.

Решение типовое.

Перепишем канонические уравнения заданной прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 4t + 13 \end{cases}$$

Искомая точка прямой $C(t+1; t+2; 4t+13)$ является точкой пересечения данной прямой и плоскости, перпендикулярной к ней, содержащей точку $B(2; 3; -1)$

Напомним, что уравнение вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

задает плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$ и проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. В нашем случае нормальный вектор \vec{n} плоскости совпадает с направляющим вектором прямой $\vec{v} = \{1; 1; 4\}$. Следовательно, решением системы уравнений

$$\begin{cases} (x - 2) + (y - 3) + 4(z + 1) = 0 \\ x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 4t + 13 \end{cases}$$

будет значение параметра $t = -3$, которое позволит найти координаты искомой точки $C(-2; -1; 1)$

Решение, использующее векторное произведение векторов.

Выберем на прямой произвольную точку, например, $A(1; 2; 13)$. Будем считать, что направляющий вектор прямой $\vec{v} = \{1; 1; 4\}$ приложен к точке A . Модуль векторного произведения векторов \vec{v} и \overrightarrow{AB} определяет площадь параллелограмма построенного на этих векторах. Основание высоты S этого параллелограмма, проведенной из вершины B , будет являться искомой точкой. Следовательно, для вычисления модуля вектора \overrightarrow{BC} имеем формулу

$$|\overrightarrow{BC}| = \frac{|[\vec{v}, \overrightarrow{AB}]|}{|\vec{v}|}, \text{ по которой } |\overrightarrow{BC}| = 6$$

Вычислим координаты вектора \overrightarrow{BC} , зная координаты его конца и начала: $\overrightarrow{BC} = \{t - 1; t - 1; 4t + 14\}$. Тогда $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(t - 1)^2 + (t - 1)^2 + (4t + 14)^2}$. Итак, имеем уравнение:

$$\sqrt{(t - 1)^2 + (t - 1)^2 + (4t + 14)^2} = 6.$$

Отсюда $t=-3$ и, соответственно, координаты точки $C(-2; -1; 1)$.

Решение, использующее скалярное произведение векторов.

Координаты искомой точки C можно вычислить, если знать координаты вектора \overrightarrow{AC} , являющегося ортогональной проекцией вектора \overrightarrow{AB} на заданную прямую. Это можно сделать так:

Способ I.

По выбранным на прямой точкам $A(1; 2; 13)$ и $C(t+1; t+2; 4t+13)$ вычислим координаты векторов $\overrightarrow{AC} = \{t; t; 4t\}$ и $\overrightarrow{BC} = \{t-1; t-1; 4t+14\}$. Они ортогональны, следовательно, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 0$. Это равносильно уравнению $t^2 + 3t = 0$, решения которого $t=0$ и $t=-3$ приводят к исходной точке $A(1; 2; 13)$ и искомой точке $C(-2; -1; 1)$ соответственно.

Способ II.

В этом случае координаты искомой точки $C(x; y; z)$ можно найти через координаты вектора \overrightarrow{AC} , вычислив их численные значения. Вектор \overrightarrow{AC} является ортогональной проекцией вектора \overrightarrow{AB} на заданную прямую, для вычисления которого имеем формулу

$$|\overrightarrow{AC}| = \frac{(\overrightarrow{AB}, \vec{v})}{(\vec{v}, \vec{v})} \vec{v}, \text{ по которой получаем } \overrightarrow{AC} = \{-3; -3; -12\}.$$

Здесь $\vec{v} = \{1; 1; 4\}$ – направляющий вектор прямой.

Теперь вычислим координаты вектора \overrightarrow{AC} , зная координаты его конца и начала: $\overrightarrow{AC} = \{x-1; y-2; z-13\}$.

Приравнивая соответствующие координаты вектора \overrightarrow{AC} , записанные в разной форме, получим координаты точки $C(-2; -1; 1)$.

Вышеизложенное является одним из многочисленных примеров, которые могут быть использованы на итоговых или обзорных практических занятиях, способствуя повышению уровня уже имеющихся знаний и расширению объема активно используемых элементов знаний на определенном этапе их усвоения.

Литература

- [1] Ананьев Б. Г. О проблемах современного человекознания // Москва: Наука, 1977.

ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ В НАСТОЯЩИЙ ПЕРИОД

В. С. Рублев

Излагаются проблемы обучения в настоящий период и подходы их решения с помощью разработки компьютерных систем обучения.

В настоящий период обучения мы сталкиваемся с проблемами, связанными с низким уровнем студентов: если ранее проблемы возникали из-за неумения многих студентов конспектировать, то сейчас они усугублены тем, что большая масса обучаемых не умеет “читать” (понимать написанное) и не способно к логическому мышлению (не умеет делать выводы). Можно указать несколько причин этому, и среди них переход к ЕГЭ не самая главная. Более того, введение ЕГЭ, по всей видимости, было вызвано двумя другими причинами.

Во-первых, в начале 90-х годов произошел “катастрофический обвал” начального образования, вызванный массовым уходом из школы многих хороших молодых педагогов из-за необходимости “выживания”. Оставшиеся учителя в основном опирались на память учеников, а не на мышление, которое нужно было развивать при помощи обучения логике русского языка. Но уже уровень большинства учителей как раз не позволял делать этого: нельзя обучать тому, что сам не умеешь. Тесты на скорость чтения вовсе не дают скорости понимания, а скорее всего, снижают эту скорость. Мысль о том, что мышление развивает в основном преподавание математики в школе, не верна: все логические построения мы впитываем с языком, на котором мыслим, и недостаток знания этого языка, в первую очередь, сказался. В средних классах обучение грамматическому разбору языковых конструкций вызвало большие трудности из-за возникших проблем в младших классах, и далее все распространялось по цепочке в старшие классы.

Другая причина создавшегося положения связана с интернетом, который, с одной стороны, является великим завоеванием человечества в плане общения и информации, но, с другой стороны, еще плохо используется с целью обучения вообще, а главное в обучении мышлению. Подрастающее поколение, лишенное наставников в использовании интернета, быстро осваивает технику получения информации, но не ее качество. В основном информация может заставить думать мыслящего человека, а не того, кого надо учить. Подрастающее поколение, захваченное интересом к морю возможностей интернета, потерялось в нем.

Оно почти перестало читать великую художественную литературу 19 и начала 20 века, которая заставляла мыслить. Опрос показывает, что читают книги лишь 2-3 студента в потоке. Широкий показ голливудских фильмов, не требующих мышления, также привел к этому печальному положению. В результате выросло поколение, желающее бездумно потреблять то, что им подсовывают телевидение и интернет (они не выбирают лучшее, что действительно помогло бы).

Введение ЕГЭ стало естественным продолжением процесса разрушения школьного образования. Теперь мыслящий студент это большая редкость. Он либо учился не в рядовой школе, либо справедливо обеспокоенные родители сами заботились о получении их ребенку нормального образования (но, как правило, и то, и другое). В условиях, когда в Ярославле помимо 5 вузов было открыто еще 2 десятка филиалов московских вузов с низким уровнем требований, поступить куда-нибудь (мечта большей части абитуриентов) легче, чем не поступить. Нам известен случай, когда выпускница Ярославского филиала ВЗФИ читала по складам. В вузах с серьезным уровнем обучения, как наш университет, идет массовый отсев студентов на младших курсах, особенно на таких факультетах, как математический, физический, ИВТ. Мы считаем, что не должно стать возможным получение высшего образования теми, кто не овладел мышлением.

Следует отметить, что Россия не единственная из цивилизованных стран, где возникла такая ситуация. Нам известны статьи, где описывается еще более худшее положение с уровнем школьников, например, во Франции или в США. И причиной такого положения, по-видимому, является отсутствие в интернете доступных программ, ориентированных на развитие мышления.

Что же делать, чтобы не растерять высочайший уровень высшего образования в области математики и физики, достигнутый в нашей стране и отмечаемый в Европе и Америке? Конечно, нужно ожидаемое нами изменение государственной политики в области образования, которая должна быть направлена на закрытие “халтурных” вузов-филиалов, на изменение школьного образования поворотом к развитию логического мышления за счет углубления преподавания языков (в частности, русского языка) и литературы, где должно поощряться свободное мышление, а не догматические установки. И все это можно сделать за счет сокращения непомерно раздутых программ по математике и физике, которые пытаются отобразить современные достижения за счет углубленного понимания основ этих наук. При нынешнем уровне учащихся это невозможно в большинстве школ. Недаром наибольшие успехи в школьном образовании были достигнуты, когда преподавание математики в школе более 60 лет велось по учебникам А.П. Киселева. Но изменение государственной политики в области образования хотя и необ-

ходимый, но очень долговременный шаг с расчетом на будущее. Нам же необходимо менять что-то в преподавании уже сейчас.

Статистика последних лет показывает, что всех студентов можно грубо разделить на 3 почти равные по количеству группы:

- 1) те, кто хочет и способен учиться;
- 2) те, кто хочет учиться, но имеет большие трудности;
- 3) те, кто не хочет и не будет учиться.

Последней группе невозможно помочь. Не удивительно, что наши потери на младших курсах при очень больших затратах на обучение составляют практически половину поступивших. Поэтому нашей целью должно быть изменение обучения для студентов первых двух групп (особенно второй группы).

Анализ форм обучения показывает, что лекции и практические занятия наиболее непродуктивные в обучении формы. Лекции малоэффективны по той причине, что большинство современных студентов не умеют конспектировать и слушать, вникать в новый материал. Они пишут какие-то обрывки, которые мы уговариваем их не писать (а слушать и отвечать на вопросы), так как материал есть в специально написанных для них учебных и методических пособиях. Что касается вопросов, то их способны понять только лучшие студенты, да и то теперь не всегда. Понимание математического материала, требующего логического мышления затруднено. Практические занятия приносят пользу лишь тому студенту, который с трудом решает задачу у доски; его (не во всех случаях) удастся заставить немного думать, остальные же просто, не задумываясь, переписывают решение. Для выхода из такого положения мы ввели индивидуальные задания, каждое из которых содержит от 2 до 4 задач (индивидуальных для каждого студента) на прорабатываемую тему. Такое задание студентом выполняется письменно с объяснением теоретического материала. Преподаватель также письменно подробно объясняет ошибки. Устанавливается письменный диалог между студентом и преподавателем, который помогает учащемуся преодолеть барьеры непонимания и успешно подготовиться к контрольным мероприятиям по изучаемому предмету.

Несмотря на улучшение обучения при помощи индивидуальных заданий этот метод имеет ряд существенных недостатков.

1. От преподавателя требуется очень большое время на проверку индивидуальных заданий. Так для дисциплины “Дискретная математика” нами было разработано 10 индивидуальных заданий (объем методических изданий 12,5 печатных листов). Их многократные проверки требуют в среднем 8 часов в год на одного студента.

Этот огромный объем работы не учитывается в индивидуальном плане преподавателя.

2. Только наиболее успешные студенты читают внимательно методические указания по индивидуальным заданиям и редко, когда делают ошибки. Большая часть работающих студентов не читают этих методических указаний и делают типичные ошибки, которые в них перечислены. Более того некоторые студенты не читают и все замечания преподавателя. По этой причине освоение материала идет крайне медленно.

Необходима другая форма, которая заставляла бы студента активно изучать материал, помогала бы ему в изучении материала и контролировала бы это изучение, а также освободила бы преподавателя от весьма объемной работы по проверке индивидуальных заданий. Такой формой с нашей точки зрения является компьютерные обучающие системы, которые не только предоставляют студенту изучаемый материал, связанный с решением той или иной задачи, но

- контролируют его изучение при помощи тонких тестов проверки правильности ответов;
- помогают сообщениями об ошибках и материале, который следует повторить;
- активизируют внимание студента к материалу за счет смены тестов и увеличения их количества при превышении заданного уровня ошибок (при еще большем уровне ошибок делают паузу в процессе обучения для более серьезного отношения студента);
- осуществляют направленность и постепенность обучения за счет разбиения процесса обучения на достаточно небольшие порции и задачи-тесты для таких порций;
- контролируют выполнение итоговой задачи-теста, отсылая при ошибках к повторению обучения материалу, связанного с ошибками;
- информируют через интернет студента (а может и его заинтересованных родителей) о положении студента по сравнению с его сокурсниками в процессе обучения.

В настоящее время для создания таких систем по дисциплинам “Дискретная математика” и “Языки логического программирования” уже много создано в порядке курсовых и дипломных работ. Аспирант Котельников С.В. работает над темой, связанной с внедрением систем обучения.

Однако не секрет, что разработка таких проектов требует от преподавателя большого времени и сил, никак не учитываемых учебной частью. Гораздо проще писать для переизбрания методические статьи, – они не требуют больших временных затрат, а для изменения существующего положения с обучением не всегда эффективны. Мы надеялись несколько лет тому назад, что новые стандарты обучения в связи с введением зачетных единиц дадут возможность преподавателю, отвечающему за результат, самому выбирать формы обучения. Чиновники же от образования снова уложили все в старое “прокрустово ложе” лекций и практических занятий. Такая “мелочность” по-прежнему ведет нас мимо цели. Нельзя пренебрегать созданием эффективных форм обучения, а потому нельзя ставить знак равенства между всеми преподавателями по отношению к созданию прогрессивных форм обучения.

Чтобы решить этот вопрос, нам кажется необходимым введение конкурса проектов новых форм обучения. Такие формы могут в сильной степени зависеть от факультетов, а потому они должны проходить по факультетно, но не формально. На каждом факультете экспертная комиссия, состоящая из наиболее опытных преподавателей факультета и под обязательным руководством проректора по развитию образования должна решить, имеются ли для такого конкурса достойные проекты и какой из них должен быть принят. Принятые проекты должны обеспечиваться внутриуниверситетским образовательным грантом, соответствующим цели, уровню и объему намеченных работ. В этом случае у преподавателей появится действительная возможность улучшать образование, а не заниматься обменом опыта на показушных конференциях, которые редко когда приносят пользу (с нашей точки зрения вполне достаточно печатать тезисы этих докладов и анонсировать их содержание).

Еще один вопрос связан с проблемой учета работы преподавателя при внедрении таких новых форм. Обучающая система должна дать прочный минимальный уровень знаний и компетенций. Но она никак не сможет обучить студента свободно обращаться с материалом и производить исследования новых задач, не вписанных в систему. Вот этому и должны быть посвящены лекции и практические занятия, что позволит выйти на новый уровень образования. Пока же он достижим далеко не всегда из-за огромных затрат времени на понимание основ массой студентов. Объем нагрузки для таких преподавателей не должен уменьшаться, как бы ни проводились такие занятия. Исключив мелочную опеку преподавателей и повысив их материальный уровень, можно будет решить сложные проблемы образования.

ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА В КУРСАХ АЛГЕБРЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МАТЕМАТИКОВ

Н. В. Тимофеева

Показано, каким образом техника коммутативных диаграмм и точных последовательностей может быть применена в качестве унифицированного метода конструирования однотипных доказательств в различных курсах алгебры 2—3 годов обучения

Библиография: 1 название

Содержание дисциплин алгебраического цикла в большей своей части касается изучения алгебраических систем, среди которых многие (а на самом деле среди подробно изучаемых в университете все кроме абелевых групп) образуют абелевы категории. Это означает, что во многом поведение гомоморфизмов многих алгебраических систем однотипно, что привычно алгебраистам-профессионалам и эксплуатируется в научных исследованиях. Однако в процессе преподавания алгебры студентам младших курсов это удобство никак не проявляется: одну и ту же теорему (например, теорему о гомоморфизме) приходится доказывать несколько раз: отдельно для абелевых групп, отдельно для колец и т.п., применяя однотипные поэлементные рассуждения.

Автором в [1] было предложено дополнить традиционный в преподавании алгебры теоретико-множественный подход с так называемыми элементарными гомологическими методами, ввиду их следующих трех достоинств.

1. Унификация однотипных доказательств, о чем уже было сказано.
2. "Эвристическая алгоритмичность". Это то свойство, когда "уравнения думают за нас" (Пойа); оно позволяет применять некоторую совокупность приемов в содержательно новой или поисково-проблемной ситуации, что важно при решении задач любого уровня – от учебных до научно-исследовательских.
3. Наглядность. Поскольку рассматриваемая совокупность приемов имеет графическое представление, то их применение облегчает изложение и восприятие учебной информации и сокращает шансы на ошибку.

Вместе с тем, как и любые другие, рассматриваемые методы требуют от студента определенных усилий на освоение (точнее, адаптацию), после чего входят в привычку и выполняют роль своего рода исчисления.

Теперь продемонстрируем, как это может работать, на серии теорем. Все изложенное далее верно в любой абелевой категории, в частности, для абелевых групп, векторных пространств, модулей над коммутативным ассоциативным кольцом (в частности, для колец и идеалов). Кроме того, если все подгруппы нормальны, то, хотя категория групп не является абелевой, но все рассуждения остаются в силе. Нужно лишь, чтобы *участвующие в конструкции гомоморфизмы обладали ядрами и коядрами*. Это последнее обстоятельство и акцентируется в преподавании. Оно иллюстрируется уже имеющимся у студентов опытом работы с неабелевыми группами, а именно тем фактом, что факторгруппу невозможно построить, если подгруппа не нормальна.

Формирование композиции гомоморфизмов изображается диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ U & \xrightarrow{g \circ f} & W \end{array}$$

Композиция трех и более гомоморфизмов ассоциативна: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, поэтому в выражениях для композиции нескольких гомоморфизмов скобки не расставляют, а диаграммы, изображающие такие композиции, не разбивают на треугольники:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ f \uparrow & \nearrow g \circ f & \downarrow h \\ T & \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} & W \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ f \uparrow & \nearrow h \circ g & \downarrow h \\ T & \xrightarrow{(h \circ g) \circ f} & W \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{g} & V \\ f \uparrow & & \downarrow h \\ T & \xrightarrow{h \circ g \circ f} & W \end{array}$$

Диаграмма – это ориентированный граф, вершины которого изображают объекты, а ребра – их гомоморфизмы. Любая композиция гомоморфизмов изображается путем в таком графе. Два пути с общим началом и общим концом естественно считать *эквивалентными*, если соответствующие композиции гомоморфизмов равны. Если в данной диаграмме любые два пути с общим началом и общим концом эквивалентны, то такая диаграмма называется *коммутативной*.

Коммутативные диаграммы, в частности, в линейной алгебре делают понятными инвариантность минимального полинома линейного оператора, построение двойственного гомоморфизма, связанные с двойственностью "обращение стрелок" и правило композиции, рефлексивность векторных пространств и преобразование подобия матриц линейного оператора при смене базиса.

Пусть $f : V \rightarrow V'$ – гомоморфизм; он может быть разложен в композицию сюръективного и инъективного гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ & \searrow \bar{f} & \nearrow i \\ & \text{im } f & \end{array}$$

Поскольку $\ker(f) = f^{-1}(0)$ и $0 \in \text{im } f \subset V'$, то $\ker f = \ker \bar{f}$.

Такая факторизация гомоморфизмов имеет место в теории (в т.ч. неабелевых) групп, векторных пространств, колец, алгебр, модулей над кольцами.

Теорема 1. (Теорема о гомоморфизме) Если $f : V \rightarrow V'$ – гомоморфизм, то имеет место изоморфизм $\text{im } f \cong V/\ker f$

Такая ситуация может быть отражена в следующей условной записи

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow V \xrightarrow{\bar{f}} \text{im } f \rightarrow 0,$$

которую мы будем называть *основной (короткой) точной последовательностью*.

Точную последовательность вида

$$0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0 \quad (1)$$

иногда называют *короткой точной последовательностью* или *точной тройкой*.

Замечание 1. В теории групп, если они записываются мультипликативно, следует писать $e \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow e$, где e – тривиальная группа, состоящая из одного нейтрального элемента. Однако в целях единообразия мы будем использовать всюду запись с нулями.

Соглашение 1. В точной тройке (1) член U называют *ядром*, W – *коядром*, а средний член V – *расширением*.

Следующие леммы позволяют строить индуцированные гомоморфизмы в стандартных ситуациях. Они справедливы в теории векторных пространств, в теории групп (в том числе неабелевых) и в теории колец, алгебр и модулей.

Лемма 1. (Морфизм коядер) Пусть коммутативна диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \\ 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & W' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Тогда существует гомоморфизм $w : W \rightarrow W'$, дополняющий ее до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & W' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Замечание 2. В частности, в линейной алгебре эта лемма постав-
ляет изоморфность прямых дополнений к данному подпространству
и конструкцию фактороператора.

Лемма 2. (Морфизм ядер) Пусть коммутативна диаграмма с точ-
ными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & W' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Тогда существует гомоморфизм $u : U \rightarrow U'$, дополняющий ее до ком-
мутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \longrightarrow & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & W' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Например, лемма 2 позволяет строить прообраз подобъекта в рас-
ширении.

Пусть $f : V \rightarrow V'$ – гомоморфизм, $U' \subset V'$ – подобъект. Пусть $W' = V'/U'$ – факторобъект; ε – гомоморфизм его формирования $\varepsilon : V' \rightarrow W'$. Пусть $W = \text{im } \varepsilon \circ f$; понятно, что $\varepsilon \circ f(V) = W$ – подобъект в W' . Тогда положим по определению $U := \ker \varepsilon \circ f$ и получим диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\varepsilon \circ f} & W \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow f & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{\varepsilon} & W' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Применение леммы 2 поставляет морфизм $U \rightarrow U'$, делающий диаграм-
му

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\varepsilon \circ f} & W \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & U' & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{\varepsilon} & W' \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2)$$

коммутативной. Из коммутативности диаграммы (2) следует, что $U = f^{-1}(U')$.

Замечание 3. Применение аналогичной конструкции в теории неабелевых групп сразу же ставляет нормальность прообраза нормальной подгруппы.

Следующая теорема является частным случаем леммы о змее.

Теорема 2. Дана диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/S \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/S \longrightarrow 0 \end{array}$$

в которой вертикальный гомоморфизм имеет коядро. Тогда она дополняется до точной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/S \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/S \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & G/K \equiv (G/S)/(K/S) & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Теперь обратимся к теоремам об изоморфизмах. Мы сформулируем обе теоремы для (неабелевых) групп, поскольку этот случай несколько сложнее остальных. Остальные случаи получаются модификацией в сторону упрощения. Обозначение $H \triangleleft G$ используется вместо $H \subset G$, если H – нормальная подгруппа в G . Также, если K и H – две (не обязательно нормальные) подгруппы в группе G , то положим $KH := \{kh | k \in K, h \in H\}$.

Теорема 3. (Первая теорема об изоморфизме) Пусть G – группа, $K \subset G$ – подгруппа, $N \triangleleft G$ – нормальная подгруппа. Тогда имеет место изоморфизм $K/(N \cap K) \cong KN/N$.

Набросок доказательства. Во-первых, необходимо проверить, что $N \cap K \triangleleft K$ и что $N \triangleleft NK$. Это делается обычным способом.

Гомоморфизм $\varphi : K/(N \cap K) \rightarrow NK/N$ получается по лемме 1

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N \cap K & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K/(N \cap K) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{e} & NK & \longrightarrow & NK/N \longrightarrow 0 \end{array}$$

Остается убедиться в том, что он биективен. \square

Теорема 4. *(Вторая теорема об изоморфизме) Пусть G – группа, K и S – подгруппы в ней, причем $S \triangleleft G \triangleright H$ и $S \subset K$. Тогда имеет место изоморфизм*

$$\frac{G/S}{K/S} \cong G/K.$$

Доказательство. Это версия теоремы 2. \square

Для доказательства аналогов обеих теорем в категориях векторных пространств или модулей над коммутативным ассоциативным кольцом R достаточно проверить совместимость всех рассуждений доказательства с действием поля скаляров или кольца скаляров R .

Литература

- [1] Тимофеева Н. В. Элементарные гомологические методы в курсах алгебры для математического факультета // Актуальные проблемы совершенствования высшего профессионального образования: материалы XI Обл. науч.-метод. конф. 27–28 октября 2011 г.: секция I / отв. ред. Е. В. Сапир; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. С.104 – 105.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПОНЯТИЯ ЗАВИСИМОСТИ В УЧЕБНОМ КУРСЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Н. Б. Чаплыгина

При введении понятия критической статистики $S = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для случайной величины с распределением, зависящим от параметра α , появляются трудности, связанные с понятиями зависимости и с их формальными обозначениями. У студентов возникает вопрос: поскольку объекты x_1, x_2, \dots, x_n и, следовательно, статистика S зависят от α , почему этот параметр не указывается в списке переменных функции S . Библиография: 6 названий.

В математических рассуждениях довольно часто используется понятие зависимости между объектами. Это понятие складывается еще в элементарной математике. И вводится оно как функциональная зависимость. Поскольку иной зависимости вначале и не рассматривается, то прилагательное "функциональная" зачастую опускается для краткости и остается просто понятие зависимости. Говорят, одна переменная зависит от другой, имея в виду то, что одна переменная функционально зависит от другой. И никакого кривотолка это упрощение не вызывает, пока не затрагиваются вопросы стохастического характера, связанные с изучением теории вероятностей и математической статистики. Понятие зависимости здесь имеет различные смыслы в той или иной ситуации, что приводит к затруднению в восприятии математических рассуждений у неискушенного слушателя. Здесь хотелось бы обратить на это внимание и уточнить разные стороны понятия зависимости и формального обозначения ее в учебном курсе теории вероятностей.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

Понятие зависимости относится к двум объектам или множеству объектов некоторой природы. В обыденном смысле под зависимостью понимается возможность одного или нескольких объектов влиять на другой или другие объекты. Говорят, что объекты зависимы друг от друга или связаны друг с другом, если поведение одной группы объектов каким-то образом отражается на поведении другой группы объектов. В математической теории в качестве объектов могут выступать переменные величины, функции, множества, последовательности и другие математические объекты. Функциональная зависимость характеризуется тем, что по значениям одних объектов можно однозначно определить значения других. Функциональная зависимость — это отношение

между двумя объектами, каждый из которых может представлять собой множество. Зависимость — понятие взаимное. Объекты, которые, условно, влияют на другие объекты, принято называть аргументами, переменными или независимыми переменными. Объекты, испытывающие влияние со стороны аргументов, называют функциями этих аргументов или зависимыми переменными. Это — условные определения, так как зачастую можно заметить и обратное влияние, но оно уже может быть и не функциональным. С одной стороны, функциональная зависимость позволяет однозначно определить значение функции по известным значениям аргументов. С другой стороны, функциональная зависимость может и не являться зависимостью вовсе. Это касается, например, случая, когда функция представляет из себя константу и никак не реагирует ни на какие изменения в поведении аргументов. Или функция не изменяет своего значения ни при каких изменениях значений определенного аргумента. Такие аргументы называются несущественными. Таким образом, если функция имеет несущественные переменные, то эти переменные ни в какой зависимости со значением функции не находятся (здесь слово "зависимость" употреблено в обыденном смысле).

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — независимые переменные или аргументы, а y — зависимая от них переменная. Функциональная зависимость представляется формулой

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1)$$

Символ y определяет не только переменную, но и некий закон или правило, следуя которому по значениям переменных однозначно определяется значение функции. Например, $\sin(x)$ или $f(x, y)$.

Формальная запись

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

понимается, как уточняющая определение переменной y .

Формула (1) не говорит о том, что переменная y не зависит более ни от каких других объектов, кроме x_1, x_2, \dots, x_n , но о том, что достаточно определить значения указанных переменных, для того, чтобы определить значение функции y . Представим, что в формуле (1) объект x_1 сам является функцией $x_1 = x_1(t_1, t_2)$, т.е. рассматривается суперпозиция функций. В таком случае значение переменной y будет зависеть от значений переменных t_1, t_2 . Но для вычисления значения y при известных x_1, x_2, \dots, x_n не требуются значения переменных t_1, t_2 . Однако, y можно определить, зная значения переменных $t_1, t_2, x_2, \dots, x_n$:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = y(x_1(t_1, t_2), x_2, \dots, x_n) = g(t_1, t_2, x_2, \dots, x_n),$$

т.е. переменную y можно представить, как функцию от другого набора переменных. Этот закон нахождения значения переменной y в формуле обозначен символом " g ".

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

В теории вероятностей кроме функциональной зависимости существует понятие вероятностной зависимости, которое также зачастую используется без прилагательного "вероятностная". Таким образом, одним словом "зависимость" могут обозначаться различные понятия. Помочь уточнить смысл понятия должен контекст, в котором употребляется это понятие зависимости. Вероятностная зависимость может быть не только между двумя объектами, как функциональная, но и между группой объектов. Такая зависимость называется зависимостью в совокупности. Но здесь остановимся лишь на отношении между двумя объектами, событиями или случайными величинами.

Рассмотрим две случайные величины ξ и η на одном вероятностном пространстве. Если экспериментально установлено, что одна случайная величина оказывает заметное влияние на другую, то можно сказать, что случайные величины зависимы друг от друга. Но для определения значения одной случайной величины, вообще говоря, недостаточно значения другой. Таким образом, невозможно связать эти объекты функциональной зависимостью, т.к. неизвестно, какие еще переменные необходимы для определения этой функциональной связи. К примеру, рассмотрим равномерное распределение случайно брошенной точки на круг единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть ξ и η - координаты этой точки, т.е. случайные величины на одном вероятностном пространстве. Можно заметить, что если одна из случайных величин близка к единице, то вторая непременно близка к нулю. Значение ξ определяет промежуток для значений случайной величины η : $|\eta| \leq \sqrt{1 - \xi^2}$, но не определяет значения самой случайной величины η . Между этими величинами если и существует функциональная зависимость, то не представляется возможным ее выявить и не ставится такой задачи.

Здесь речь идет о зависимости вероятностной, которая может связывать события или случайные величины.

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

При использовании понятия функциональной зависимости в теории вероятностей могут быть изменены формальные ее обозначения. Это изменение несет в себе дополнительную информацию о построении данной функции.

В элементарной теории вероятностей с дискретным множеством элементарных событий Ω вероятность — это функция на множестве под-

множеств Ω с вещественными значениями

$$P : 2^\Omega \rightarrow R.$$

После введения вероятности любое подмножество Ω является событием. Пусть A — некоторое событие. В этом случае формула $P(A) = 0,5$ не вызывает вопросов, все элементы ее понятны.

При введении понятия условной вероятности появляется второй аргумент — событие B , обозначающее условие. В таком случае вероятность является функцией двух переменных. Это другая функция на $2^\Omega \times 2^\Omega$ с вещественными значениями. Для ее обозначения используем не новый символ, а тот же P , но перечисление аргументов записываем в другом виде, чтобы различить эти вероятностные функции. Здесь появляются различные нетрадиционные способы записи аргументов функции: либо $P(A|B)$ ([2], [3], [4] и др.), либо $P_B(A)$ ([5], [6]). В первом случае список переменных в качестве разделителя содержит не запятую, а вертикальную черту, которая несет дополнительную информацию о построении функции, о законе ее вычисления. Относительно второго случая: поскольку в математике при обозначении объектов широко используется индексирование, то приведенное обозначение условной вероятности напоминает индексирование $P_N(A)$. При решении задач учебного курса теории вероятностей иногда возникает потребность в индексировании функции вероятности. Но если это не требуется в данной ситуации, то воспринимается и такая форма записи условной вероятности. К тому же, ее можно понимать не только как определение условной вероятности, но и действительно как индексирование: определяется семейство функций одного аргумента для каждого значения события, обозначенного символом B .

ФУНКЦИИ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Некоторые затруднения вызывает понимание формальных обозначений условных функций распределения или плотностей распределения вероятностей. Например, обозначение условной функции распределения случайной величины ξ при условии $\{\eta \leq y\} : F_\xi(x|\eta \leq y)$.

По определению $F_\xi(x|\eta \leq y) = \frac{P(\xi \leq x)}{P(\eta \leq y)}$. При условии известных распределений случайных величин ξ и η последняя формула обозначает закон определения значения функции по двум переменным x и y . Именно такой смысл и вкладывается в эту запись. Но если не определены ξ и η (не их значения, а их распределения), можно воспринимать ее как функцию от четырех переменных: числовых x и y и случайных величин ξ и η . Значениями последних являются не числа, а законы их вероятностных распределений. В этом и заключается трудность понимания.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть на некотором вероятностном пространстве задается случайная величина ξ , распределение вероятностей которой зависит от параметра α , являющегося неизвестным. После n независимых испытаний случайной величины ξ получены ее выборочные значения x_1, x_2, \dots, x_n .

Для проверки различного рода статистических гипотез, оценивания параметров распределения, как правило, строится статистика $S(X) = S(x_1, x_2, \dots, x_n)$. С одной стороны — это числовая функция от n числовых переменных. С другой стороны — это случайная величина, как функция от случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , распределенных по закону случайной величины ξ . Следовательно, их распределение и распределение статистики S зависит от параметра α . Таким образом, на поведение случайной величины S значение параметра α оказывает некоторое воздействие, т.е. величина S зависит от параметра α (как?). Однако функциональная зависимость S от α остается неизвестной (можно предположить, что она все же существует). Функциональную зависимость от α имеют функции и различные характеристики распределения вероятностей случайной величины S . Но для вычисления S достаточно знать лишь выборочные значения x_1, x_2, \dots, x_n , от которых она зависит функционально. В этом случае также можно сказать, что S зависит от α вероятностно или стохастически, хотя эта зависимость и отличается от вероятностной зависимости между объектами, которая рассмотрена выше.

Литература

- [1] Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., Наука, 1984.
- [2] Сборник задач по математике. Теория вероятностей и математическая статистика, *под.ред.Ефимова А.В.*, М., Наука, 1990.
- [3] Крамер Г., Математические методы статистики, М., Мир, 1975.
- [4] Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М., Сборник задач по теории вероятностей, М., Наука, 1980.
- [5] Лоэв М., Теория вероятностей, М., Ин.лит-ра, 1962.
- [6] Гмурман В.Е., Теория вероятностей и математическая статистика, М., Высшая школа, 2001.

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЖОРДАНА

В. К. Шалашов, А. В. Балабохина

*Излагается новый метод приведения матрицы к
Жордановой форме*

Вопрос: Даны две матрицы A и B размером $n \times n$. Когда они подобны?

$$A \sim B?$$

То есть, существует ли обратимая матрица P такая, что

$$AP = PB \quad (1)$$

Стартуя с данной матрицы A , мы исследуем множество всех матриц, подобных A . Это множество называется классом эквивалентности матрицы A , и обозначается через (A) . Наша цель - выбрать особенно простой член из (A) , который будет называться канонической формой матрицы A (отношениями подобия). Мы уже знаем, что все члены из (A) имеют одни и те же собственные значения. Сначала предположим, что собственные значения матрицы A разные, и что они записаны в определенном порядке:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (2)$$

Тогда каждый член из (A) подобен матрице

$$O = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

и, таким образом, диагональная матрица есть каноническая форма для A .

Пусть A имеет кратные корни, тогда каноническая форма имеет вид

$$C = \text{diag}(C_1, C_2, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_s \end{pmatrix} \quad (3)$$

где диагональные блоки - квадратные матрицы. Для случая (3) мы будем писать

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_s$$

и говорить, что C есть прямая сумма матриц C_1, \dots, C_s . Если C имеет порядок n , и C_1, \dots, C_s порядки k_1, \dots, k_s , то

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_s$$

Для комплексного числа α и положительного целого k мы определим Жордановый блок порядка k так

$$J(\alpha; k) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (4)$$

где α - на главной диагонали и 1 выше, например

$$J(2; 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J(2; 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J(2; 1) = 2$$

Заметим, что каждое собственное значение равно α и $\det J(\alpha; k) = \alpha^k$. Более обще мы рассмотрим составную Жорданову матрицу.

$$J_s = J(\alpha; k_1, k_2, \dots, k_s) = J(\alpha; k_1) + J(\alpha; k_2) + \dots + J(\alpha; k_s), \quad (5)$$

которая есть прямая сумма Жордановых блоков. Ради определенности будем всегда предполагать, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s$. Наиболее важное свойство Жордановых матриц состоит в том, что

$$J(\alpha; k_1, k_2, \dots, k_s) \sim J(\beta; l_1, l_2, \dots, l_s)$$

если и только если

$$\alpha = \beta, s = t, k_i = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

Это один из глубочайших результатов в линейной алгебре и мы его принимаем здесь без доказательства. Мы начинаем с рассмотрения матриц, чьи собственные значения равны. Таким образом, предположим, что характеристический полином матрицы K задан как

$$\det(tI - K) = (t - \alpha)^n \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть K есть матрица $n \times n$, у которой единственное собственное значение равно α . Тогда существует единственное множество положительных целых k_1, \dots, k_s таких, что

$$\begin{aligned} k_1 &\geq k_2 \geq \dots \geq k_s \\ k_1 + k_2 + \dots + k_s &= n \\ K &\sim J(\alpha; k_1, k_2, \dots, k_s) \end{aligned} \quad (7)$$

Правая сторона в (7) есть каноническая форма для K .

Пусть $r_h = \operatorname{rg}((K - \alpha I)^h) \quad (h = 0, 1, \dots)$

Отметим, что $n = r_0 > r_1 > \dots > r_k = 0$

$$r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq \dots \geq 0$$

Мы введем обозначение

$$\Delta_h = r_h - r_{h+1} \quad (h = 0, 1, \dots)$$

Для достаточно больших значений h как r_h , так и Δ_h становятся нулями. Отметим, что

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \dots = r_0 = n$$

Пусть n - фиксированное положительное целое. Мы говорим, что целые n_1, \dots, n_t образуют разбиение числа n , если

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t > 0$$

и

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_t \quad (9)$$

Число t - произвольно. Удобно представлять разбиение диаграммой точек, расположенных в строки, чьи начальные числа расположены в вертикальную линию: первая строка состоит из n_1 точек, вторая из n_2 точек и т. д.

Пример 2. Разбиение числа 12 дано равенством

$$12 = 5 + 3 + 2 + 2$$

Этому соответствует диаграмма

```

. . . . .
. . .
. .
. .

```

С каждым разбиением числа n мы ассоциируем сопряженное разбиение, полученное чтением диаграммы точек по столбцам, а не по строкам.

Таким образом, в примере выше сопряженное разбиение есть
 $12 = 4 + 4 + 2 + 1 + 1$

• • • •
 • • • •
 • •
 •
 •

Мы теперь готовы сформулировать наш основной результат.

Теорема 2. Пусть K есть матрица $n \times n$, имеющая единственное собственное значение α . Полагаем, что

$$r_h = \text{rg}((K - \alpha I)^h)$$

$$\Delta_h = r_h - r_{h+1}, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\Delta_0 \geq \Delta_1 \geq \dots$$

и существует целое t такое, что

$$\Delta_t > 0, \text{ а } \Delta_{t+1} = 0$$

$$n = \Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_t \quad (10)$$

есть разбиение числа n . Характеристика Сегре матрицы K относительно α есть разбиение

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_s$$

сопряженное к (10). Таким образом,

$$K \sim J(\alpha; k_1, k_2, \dots, k_s)$$

Более того,

$$t = k_1 \quad s = \Delta_0$$

Теперь мы устраняем ограничение, что матрица имеет только одно собственное значение. Мы рассмотрим наиболее общий случай $n \times n$ матрицы A , которая имеет разные собственные значения

$$\alpha, \beta, \dots, \omega$$

с кратностями

$$p, q, \dots, z$$

соответственно. Таким образом,

$$\det(t - A) = (t - \alpha)^p (t - \beta)^q \dots (t - \omega)^z$$

Тогда

$$A \sim J(\alpha; k_1, k_2, \dots, k_u) + J(\beta; l_1, l_2, \dots, l_v) + \dots + J(\omega; m_1, m_2, \dots, m_\omega)$$

причем

$$p = k_1 + k_2 + \dots + k_u$$

$$q = l_1 + l_2 + \dots + l_v$$

$$\vdots$$

$$z = m_1 + m_2 + \dots + m_\omega$$

Замечание. Чтобы найти характеристики Сегре, например, для β , мы положим

$$r_h(\beta) = \text{rg}((A - \beta I)^h)$$

$$\Delta_h(\beta) = r_h(\beta) - r_{h+1}(\beta) \quad (h = 0, 1, \dots)$$

Тогда мы имеем разбиение

$$q = \Delta_0(\beta) + \Delta_1(\beta) \dots$$

и сопряжение

$$q = l_1 + l_2 + \dots + l_v$$

Теорема 3. Пусть

$$\alpha, \beta, \dots, \omega$$

- разные собственные значения матрицы A , и предположим, что наибольшие Жордановы блоки, которые соответствуют разным собственным значениям, имеют размерности k_1, l_1, \dots, m_1 . Тогда минимальный полином для A имеет вид

$$(t - \alpha)^{k_1} (t - \beta)^{l_1} \dots (t - \omega)^{m_1}$$

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ИЗУЧЕНИЯ КИТАЙСКОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ ОСТАТКАХ ДЛЯ ЧИСЕЛ В КУРСЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ АЛГОРИТМИКИ

С. И. Яблокова

*Обсуждаются некоторые подходы к изложению
китайской теоремы об остатках для чисел в курсе
"Алгебраическая алгоритмика".*

Библиография: 4 названия.

Теорема, которую мы называем китайской теоремой об остатках, ведет свою историю с древнейших времен. Простейший ее вариант приписывают китайскому математику Сунь - Цзы, жившему по некоторым источникам в I веке н.э., а по другим – в III веке н.э. В своей книге "Суань - Цзынь" ("Математический трактат") он указал правило "тя - тен" (большое обобщение) определения натурального числа, дающего остатки 2,3,2 при делении на 3,5 и 7 соответственно. Подобную же задачу находим в трудах греческого математика и пифагорейского философа Никомаха из Герасы, жившего в I веке н.э. Сочинение Никомаха "Арифметическое введение" (Introductionis Arithmeticae) – одно из наиболее полно сохранившихся изложений пифагорейской арифметики. В этом труде Никомах вводит как игру метод для определения натурального числа по остаткам, полученным от деления этого числа на другие натуральные числа. Методы решения задачи у обоих математиков похожи.

С китайской теоремой об остатках для натуральных чисел студенты специальности "Компьютерная безопасность" знакомятся на первом курсе при изучении дисциплины "Алгебраическая алгоритмика". Но прежде чем изучать эту теорему им требуется усвоить некоторые новые понятия такие, как сравнение по модулю натурального числа, классы вычетов, определения и простейшие свойства колец и полей. Поэтому сначала на лекции вводятся понятия сравнения по модулю натурального числа, определяются классы вычетов кольца \mathbb{Z} по модулю n , доказывается теорема о кольце вычетов, а также выводятся необходимые и достаточные условия того, чтобы кольцо вычетов являлось полем.

Стоит отметить, что хотя свойства сравнений и доказательства их достаточно просты, у студентов часто возникают затруднения с использованием этих свойств. Так, самое первое и простое свойство:

если $a \equiv b \pmod{n}$ и d делит n , то $a \equiv b \pmod{d}$. (1)

приходится напоминать неоднократно и не только первокурсникам, но и студентам 4 курса при изучении последними теоретико-числовых дисциплин. Меньшие затруднения вызывают свойства, связанные со сложением, вычитанием и перемножением сравнений. Свойство же, связанное с делением, а именно:

если $ab \equiv ac \pmod{n}$, то $b \equiv c \pmod{\frac{n}{d}}$, где $d = \text{НОД}(a, n)$. В частности, если $\text{НОД}(a, n) = 1$, то из $ab \equiv ac \pmod{n}$ следует $b \equiv c \pmod{n}$. (2)

не всегда правильно используется при решении задач, и зачастую плохо запоминается обучаемыми. При делении обеих частей сравнения на общий множитель студенты забывают заменить модуль n на $\frac{n}{d}$.

Простейшая задача, возникающая после введения сравнений по модулю натурального числа, это задача решения сравнения вида

$$ax \equiv b \pmod{n}. \quad (3)$$

На лекции доказывается теорема об условиях разрешимости сравнения (3) и количестве решений, если сравнение разрешимо.

Теорема 1. Сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $d = \text{НОД}(a, n)$ делит b . Если решение существует, то оно единственно по модулю $\frac{n}{d}$; по модулю n оно имеет d решений.

Из доказательства теоремы можно извлечь способ получения всех решений, если известно одно, а именно: решение сравнения

$$a_1 x \equiv b_1 \pmod{n_1}, \quad (4)$$

где $a_1 = \frac{a}{d}$, $b_1 = \frac{b}{d}$, $n_1 = \frac{n}{d}$. Естественный путь решить (4) – найти и умножить на этот элемент обе части (4). Поэтому сначала решается задача нахождения обратного к данному элементу в конечном кольце. При этом достигается сразу несколько целей: студенты усваивают условие обратимости элементов конечного кольца, закрепляют материал изученный ранее, поскольку для отыскания обратного элемента им приходится пользоваться расширенным алгоритмом Евклида. При этом полезно решать такие задачи, в которых удобно применять свойство (2), т.е. такие, где его использование облегчает решение. Так, например, вместо сравнения $7x \equiv 3 \pmod{9}$, имеющего одно решение, им предлагается решить сравнение $125x \equiv 375 \pmod{45}$, которое после приведения обеих частей по данному модулю с помощью свойства (2) сводится к предыдущему, но имеет 5 решений по модулю 45.

Далее в курсе речь идет о группах и их свойствах. Рассматриваются аддитивная группа кольца и мультипликативная группа этого кольца. Теперь слушатели готовы к знакомству с китайской теоремой об остатках в простейшем ее варианте.

Теорема 1. Если m и n – два взаимно простых целых положительных числа, то абелевы группы \mathbb{Z}_{mn} и $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ изоморфны.

Доказательство этой теоремы конструктивно, в ходе его получается способ решения системы (5) из двух сравнений по взаимно простым модулям. В ходе доказательства теоремы решение системы (5) представляется в виде $x \equiv a_1 + tq \pmod{mn}$. При решении таких систем сравнений очень распространенной ошибкой является то, что если система задана в виде (6), то, решая ее, обучаемые забывают привести ее к виду (5), поэтому стоит обращать на это внимание, и прежде чем решать системы с большим числом сравнений, остановиться на задачах вида (6).

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m} \\ x \equiv a_2 \pmod{n} \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} a_1x \equiv b_1 \pmod{m} \\ a_2x \equiv b_2 \pmod{n} \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{4} \\ 2x \equiv 6 \pmod{9} \end{cases} \quad (7)$$

Так, система (7) имеет решение $x \equiv 30 \pmod{36}$, но обучаемый вполне может получить неверный ответ, если плохо усвоил свойство (2) и не привел ее к виду (5) прежде чем искать x .

Обобщая теорему 1 для нескольких взаимно простых модулей, приходим к теореме.

Теорема 2. Пусть m_1, m_2, \dots, m_k – попарно взаимно простые числа, $m_i > 1, i = 1, \dots, k$, и пусть $M = m_1 m_2 \dots m_k$. Тогда существует единственное неотрицательное решение по модулю M системы

$$x \equiv a_i \pmod{m_i} \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (8)$$

Для решения системы (8) предлагается воспользоваться уже имеющимся методом решения системы из двух сравнений, т.е. решить систему из первых двух сравнений системы (8), заменить первые два сравнения на сравнение $x \equiv a_1 + q_1 m_1 \pmod{m_1 m_2}$, добавить третье сравнение системы (8), опять решить систему из двух сравнений и повторять этот процесс, пока не получится x , удовлетворяющий всем сравнениям системы (8). В результате ответ представляется в виде

$$x \equiv a_1 + q_1 m_1 + q_2 m_1 m_2 + \dots + q_{k-1} m_1 m_2 \dots m_{k-1} \pmod{M}.$$

Это полезное представление решения системы (8) называется представлением со смешанными основаниями и в дальнейшем будет использовано в данном курсе при изучении модульной арифметики.

Еще один вариант китайской теоремы об остатках дает другой способ решения системы (8).

Теорема 3. Пусть m_1, m_2, \dots, m_k – попарно взаимно простые числа, $m_i > 1, i = 1, \dots, k$, и пусть $M = m_1 m_2 \dots m_k$. Тогда единственное неотрицательное решение по модулю M системы сравнений (8) является

$$x \equiv \sum_{i=1}^k a_i M_i N_i \pmod{M}, \quad (9)$$

где $M_i = \frac{M}{m_i}$, а N_i – целое, удовлетворяющее условию $M_i N_i + m_i n_i = 1, i = 1, 2, \dots, k$.

Формула (9) дает возможность найти решение сразу, если известны числа M_i и N_i . Этот метод решения системы сравнений также необходимо отработать на практических занятиях. Уместно здесь же обсудить вопрос о том, какой способ решения системы сравнений предпочтительнее: последовательное решение пар сравнений или формула (9). С одной стороны, формула (9) дает решение сразу, а первый способ кажется достаточно громоздким. Но с другой стороны, если к системе добавляются новые сравнения, то при последовательном способе надо будет просто продолжать решать систему дальше, добавляя очередной шаг с появлением нового сравнения, тогда как при втором способе придется все числа и каждый раз пересчитывать заново. Но формула (9) также полезна. Ее удобно использовать при решении подобной задачи в кольце многочленов, с которой слушатели встретятся на втором курсе в рамках этой же дисциплины. Решение же систем сравнений для многочленов по взаимно простым модулям – важный шаг, используемый при построении быстрых алгоритмов обработки сигналов, в частности, линейной и циклической сверток. Введение в эти алгоритмы – один из разделов курса.

Проблемой является фактическое отсутствие задачника по курсу "Алгебраическая алгоритмика". Лектор собирает задачи из разных задачников по алгебре и теории чисел, но этих источников недостаточно. Поэтому были разработаны варианты задач для студентов, изучающих этот курс по каждой теме.

Кроме трех перечисленных уже формулировок в ходе лекции получают еще два варианта китайской теоремы об остатках, формулируемых в терминах групп и колец.

Теорема 4. Пусть $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s – попарно различные простые целые числа и $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, s$) – целые. Тогда кольцо \mathbb{Z}_m изоморфно прямой сумме (или декартовому произведению) колец $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$, т.е.

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{a_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_s^{a_s}}.$$

Теорема 5. Пусть $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s – попарно различные простые целые числа и $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, s$) – целые. Тогда мультипликативная группа \mathbb{Z}_m^* кольца \mathbb{Z}_m изоморфна декартовому произведению мультипликативных групп $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}^*$ колец $\mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$, т.е.

$$\mathbb{Z}_m^* \cong \mathbb{Z}_{p_1^{a_1}}^* \times \mathbb{Z}_{p_2^{a_2}}^* \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_s^{a_s}}^*.$$

Последняя теорема приводит к возможности изучения строения мультипликативных групп колец \mathbb{Z}_m^* в случае, когда m – составное число.

Студентам уже можно предложить, например, следующую задачу: найти строение и порядок мультипликативной группы кольца \mathbb{Z}_{35} . Применяя теорему 5, они получают $\mathbb{Z}_{35}^* \cong \mathbb{Z}_5^* \times \mathbb{Z}_7^*$, а группы \mathbb{Z}_5^* и \mathbb{Z}_7^* уже можно построить, найти их порядки, а значит, и порядок \mathbb{Z}_{35}^* . Здесь же можно поставить следующую задачу: найти элементы максимального порядка в каждой из групп \mathbb{Z}_5^* и \mathbb{Z}_7^* и соответствующий этой паре элемент из \mathbb{Z}_{35}^* . Определить порядок найденного элемента группы \mathbb{Z}_{35}^* . В ходе отыскания элемента наибольшего порядка в группах \mathbb{Z}_5^* и \mathbb{Z}_7^* слушатели обнаружат, что обе группы являются циклическими. Затем им придется решить систему из двух сравнений для отыскания соответствующего элемента из \mathbb{Z}_{35}^* и провести вычисления, связанные с возведением его в степень по модулю 35. Подобная задача приближает обучаемых к восприятию одной из самых сложных теорем курса – теорема Гаусса о строении мультипликативной группы кольца \mathbb{Z}_m .

Таким образом, изучая китайскую теорему об остатках для целых чисел, студенты не только обучаются решать сравнения и системы сравнений, но и постепенно готовятся к восприятию более сложных и абстрактных утверждений, а также к применению этих понятий на более высоком уровне, в том числе для решения практически значимых задач.

Литература

- [1] *Ноден П., Китте К.* Алгебраическая алгоритмика. М.: Мир, 1999. 720 с.
- [2] *Акритас А.* Основы компьютерной алгебры с приложениями. М.: Мир, 1994. 544 с.
- [3] *Яблокова С. И.* Основы алгебраической алгоритмики. Часть 1. Ярославль, ЯрГУ, 2008. 126 с.
- [4] *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1984. 284 с.

О ЗАДАЧАХ НА МАССИВЫ

О. П. Якимова

*Приводится набор задач, рекомендуемых для изучения
темы "Одномерные массивы"*

Библиография: 1 название.

Для современного специалиста уверенное владение современными компьютерными технологиями – необходимое условие успешной работы практически в любой сфере деятельности. Первым предметом в курсе обучения студентов компьютерным наукам является „информатика“, где основное внимание уделяется формированию алгоритмического мышления и программированию, как наиболее важным и сложным задачам, которые закладывают фундамент профессии.

Первый и самый простой контейнер для хранения данных — это массив. Заметим, что с понятием массива студенты должны были познакомиться в школе, несложные задачи с использованием массивов входят в программу ЕГЭ по информатике, хотя зачастую эти знания очень поверхностные. Возникает задача, как построить лекцию, чтобы поддержать интерес у всех групп аудитории – и тех, кто уже знаком с понятием массива, и тех кто впервые сталкивается с ним. Имеет смысл показать различные алгоритмически интересные задачи.

Задача 1. Найти в одномерном целочисленном массиве второй максимум, то есть элемент следующий по величине за максимальным.

Например, если на входе задачи будет массив из 6 элементов: -2, 7, 1, 4, -8, 9, то ответом будет 7.

Легко сформулировать алгоритм, который решает эту задачу за два прохода по массиву. Во время первого прохода ищется максимальный элемент, а во время второго - наибольший элемент, не совпадающий с максимальным.

Но эффективным будет алгоритм, который решает данную задачу за один проход по массиву. Для этого нам потребуются две вспомогательные переменные *max* и *max2*. Первые два элемента массива сравниваются и большее заносится в *max*, а меньшее, соответственно, в *max2*. При просмотре массива значения этих переменных корректируются. Приведем код соответствующего фрагмента программы на языке C#, предполагая что описание и ввод данных уже произведено.

```
if (a[0] > a[1])  
{
```

```
    max = a[0]; max2 = a[1];
}
else {
    max = a[1]; max2 = a[0];
}
for (int i = 2; i < a.Length; i++)
{
    if (a[i] > max)
    {
        max2 = max; max = a[i];
    }
    else if ((a[i] < max) && (a[i] > max2))
        max2 = a[i];
}
```

В вышеприведенном коде намеренно допущена одна ошибка: если первые два элемента массива совпадают, то программа выдаст неверный результат. На лекции предлагается найти набор данных, на котором программа работает неверно и предложить свой вариант, как исправить программу. Например, можно сравнивать последовательно элементы массива до тех пор, пока не найдутся два различных. Если при этом будет достигнут конец массива, то выводится сообщение, что второго максимума нет.

Задача 2. Даны натуральное n , целые числа a_1, \dots, a_n . Внутри данной последовательности могут быть повторяющиеся члены. Найти число различных членов последовательности.

Как и выше, члены последовательности заносятся в массив. Можно предложить два варианта решения: первый — с использованием дополнительного массива, второй — с помощью сортировки. Код первого варианта получается более прозрачным и легким для понимания. Все элементы дополнительного массива пометок *mark* первоначально равны нулю. Возьмем первый элемент исходного массива. Счетчик различных элементов увеличим на 1. Соответствующий элемент массива *mark* также положим 1. Далее для всех элементов исходного массива, равных первому, положим 1 соответствующие элементы массива пометок.

Следующим текущим элементом будет элемент исходного массива с нулевой пометкой. И те же действия повторяются для него. Ниже приведен соответствующий код.

```
count = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
{
    if (mark[i] == 0)
    {
        count++;
    }
}
```

```

        mark[i] = 1;
        for (j = i + 1; j < n; j++)
            if(a[i] == a[j])
                mark[j] = 1;
    }
}
Console.WriteLine("count = {0}" , count);

```

Второй вариант решения этой задачи требует знания какого-то алгоритма сортировки.

```

for (i = 1; i < n; i++)
{ // сортировка исходного массива
    j = i;
    elem = a[i];
    while ((j >= 1) && (elem < a[j - 1]))
    {
        a[j] = a[j - 1];
        j--;
    }
    a[j] = elem;
}
// подсчет количества различных элементов в отсортированном массиве
count = 1;
for (i = 0; i < (n - 1); i++)
{
    if (a[i] != a[i + 1])
    {
        count++;
    }
}
Console.WriteLine ("count = {0}",count);

```

Теперь можно перейти к более алгоритмически сложным задачам. Их условия взяты из книги [1].

Задача 3. Даны два неубывающих целочисленных массива $x[0] \leq x[1] \leq \dots \leq x[n-1]$ и $y[0] \leq y[1] \leq \dots \leq y[m-1]$. „Соединить“ их в массив $z[0] \leq z[1] \leq \dots \leq z[h]$ ($h = n + m$), причем каждый элемент должен входить в массив z столько раз, сколько раз он входит в общей сложности в массивы x и y . Число действий порядка h .

Идею решения можно пояснить следующим образом: пусть у нас есть две стопки карточек с числами, отсортированные по возрастанию (точнее по неубыванию). Мы соединяем их в одну стопку, выбирая каждый раз ту из верхних карточек обеих стопок, чье число меньше. Если

в одной стопке карточки закончились, то просто берем их из другой стопки. Приведем фрагмент кода, иллюстрирующий этот алгоритм.

```

indX = 0; indY = 0
while ((indX! = n) || (indY! = m))
{
    if (indX == n) // массив x уже переписан в z
    {
        z[indX + indY] = y[indY]; indY++;
    }
    else if (indY == m) // массив y уже переписан в z
    {
        z[indX + indY] = x[indX]; indX++;
    }
    else if (x[indX] <= y[indY])
    {
        z[indX + indY] = x[indX]; indX++;
    }
    else if (x[indX] >= y[indY])
    {
        z[indX + indY] = y[indY]; indY++;
    }
}

```

Следующая задача требует более тщательной разработки алгоритма, и поэтому представляется необходимым разработка полного набора тестов, чтобы разглядеть ее тонкие места.

Задача 4. Даны два неубывающих целочисленных массива $x[0] \leq x[1] \leq \dots \leq x[n-1]$ и $y[0] \leq y[1] \leq \dots \leq y[m-1]$ и число q . Найти сумму вида $x[i] + y[j]$, наиболее близкую к числу q . Число действий порядка $n + m$, дополнительная память — фиксированное число целых переменных, сами массивы менять не разрешается.

Фактически в этой задаче надо найти минимальное расстояние между $x[0] \leq x[1] \leq \dots \leq x[n-1]$ и $q - y[m-1] \leq q - y[m-2] \leq \dots \leq q - y[0]$, поэтому будем двигаться по массиву y с конца. Код основной части программы приведен ниже:

```

int i = 0, j = y.Length - 1;
bool flag = true; // флажок конца обработки
int mind, delta, indX, indY;
mind = Math.Abs(x[0] + y[j] - q); // нач. значение миним. расстояния
indX = 0; indY = j; // индексы эл-тов, для кот. расст-е минимально
if (mind! = 0)
{
    while (((i < x.Length) || (j >= 0)) && flag)

```

```

    {
        if (i == x.Length - 1)
        {
            j--; flag = false;
        }
        if (j == 0)
        {
            i++; flag = false;
        }
        if (x[i] == y[j]) flag = false;
        else if (x[i] < y[j]) i++;
        else j--;
        delta = Math.Abs(x[i] + y[j] - q); // расст. между тек. элементами
        if (delta < mind)
        {
            indX = i; indY = j;
            mind = delta;
        }
    }
}
Console.WriteLine("x[{0}] = {1} y[{2}] = {3}", indX, x[indX], indY, y[indY]);

```

В завершение лекции приводится набор задач для самостоятельного решения. Например, такой:

1. Даны натуральное n , целые числа a_1, \dots, a_n . Внутри данной последовательности могут быть повторяющиеся члены. Вывести элементы, которые входят в последовательность ровно один раз.
2. Даны два неубывающих целочисленных массива $x[0] \leq x[1] \leq \dots \leq x[n-1]$ и $y[0] \leq y[1] \leq \dots \leq y[m-1]$. Найти количество общих элементов в этих массивах, то есть количество целых t , для которых $t = x[i] = y[j]$ для некоторых i и j . Число действий порядка $n + m$, дополнительная память — фиксированное число целых переменных.

Литература

- [1] Шень А. Программирование: теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 1995. 265 с.

Научное издание

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ
И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

*Материалы 4-й научно-методической конференции
преподавателей математического факультета
и факультета информатики и вычислительной техники
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова*

Компьютерная верстка А. Ю. Ухалов

Подписано в печать 16.04.2012. Формат 60×84 1/8.

Бумага тип. Усл. печ. л. 12,55. Уч.-изд. л. 6,5

Тираж 30 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
редакционно-издательским отделом
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.
150000, г. Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано

ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.

Ярославль, пр. Октября, 94, оф. 37.

тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.