Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Материалы 6-й научной конференции

28 апреля 2016 года

Ярославль
ЯрГУ
2016

УДК 51:681.3(081)
ББК В1я43+3973.2я43
М34

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2016 года

М 34 **Математика и компьютерные науки в классическом университете :** материалы 6-й научной конференции / отв. ред. М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2016. — 172 с.

ISBN 978-5-8397-1082-5

Представлены материалы 6-й научной конференции «Математика и компьютерные науки в классическом университете», состоявшейся в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова в апреле 2016 г.

Материалы печатаются в авторской редакции.

УДК 51:681.3(081)
ББК В1я43+3973.2я43

Ответственный редактор М. В. Невский
Технический редактор А. Ю. Ухалов

ISBN 978-5-8397-1082-5

© ЯрГУ, 2016

Содержание

Предисловие 6

Башкин М. А.
Применение кейс-метода на занятиях по теории вероятностей и математической статистике 8

Бестужева Л. П.
О преподавании дисциплины «Математические методы в филологии» 12

Большаков Ю. И.
Об одной вычислительной задаче на множестве нильпотентных матриц. 17

Бугрова И. К.
Курс иностранного языка на математическом факультете . . 25

Васильчиков В. В.
Шаблон проекта для рекурсивно-параллельных вычислений . 29

Глазков Д. В.
Квазинормальные формы сингулярно возмущенных моделей одного класса оптико-электронных систем 35

Глазков Д. В., Толбей А. О.
О преподавании дисциплины «Дифференциальные уравнения» студентам ЯрГУ 40

Дурнев В. Г.
О следствиях фундаментальных результатов 44

Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И.
Об аменабельных подгруппах F-групп 53

Иродова И. П.
О приближении сплайнами со свободными узлами 62

Казарин Л. С.
Особенности курсов «по выбору» 66

Климов В. С.
Бесконечные цепные дроби в курсе анализа 71

Климов В. С., Ухалов А. Ю.
Максимальные шарнирные многоугольники 77

Краснов М. В.
Внедрение языка программирования Python в процесс обучения студентов. 88

Лагутина Н. С., Ларина Ю. А.
Особенности реализации шаблонов проектирования на языках C++ и Java 91

Майорова Н. Л., Шабаршина Г. В.
Прикладные задачи на занятиях по математическому анализу или как приобщить студента к «большой» науке 96

Мурин Д. М.
Порядок роста числа m-инъективных и m-сверхрастущих векторов 101

Мурин Д. М.
Об исследовании задач рюкзачного типа 109

Невский М. В.
О двух великих теоремах анализа. 114

Невский М. В.
О гомотетическом образе симплекса, поглощающем куб . . . 119

Никулина Е. В.
К вопросу о решении задач теории массового обслуживания с помощью систем дифференциальных уравнений 123

Семко Е. Р.
Обратный отсчет?. 127

Таранин С. М.
Об анализе программных реализаций 131

Тимофеев Е. А.
Система счисления Фибоначчи и нахождение значений самоподобных функций с перекрытием 134

Чалый Д. Ю., Лавровская О. Б.
Об одной методике преподавания вводной дисциплины по информатике и программированию 139

Чаплыгина Н. Б.
Задачи на независимость событий в курсе теории вероятностей 147

Яблокова С. И.
Теорема о факторкольце в курсе алгебраической алгоритмики 151

Яблокова С. И.
О группах гомологий подпространств пространства триангуляций двумерного симплекса с не более чем 7 точками разбиения границы 156

Якимова О. П., Виноградов К. А.
Из опыта преподавания курса «Методы программирования» 166

Предисловие

То, что мы играем, и есть жизнь.

Л. Армстронг, трубач и певец (1901–1971)

Математика, прекрасное ремесло, которым я занимался всю жизнь, служит … не только поводом для нематематических размышлений, но и метафорой человеческого существования. Не следует понимать эту фразу эзотерически. Математиков мало в каждом поколении, и они общаются часто над головами современников и через прошедшие десятилетия и столетия, как это делают поэты, музыканты и философы.

Ю. Манин, «Математика как метафора» (2006)

Эта задача еще не решена. Вы можете попробовать её решить, у вас впереди вечность. Моя вечность лет на пятнадцать короче…

Из лекции Владимира Степановича Климова (1972)

Здесь лежат два кусочка мела — один величиной с ε*, другой величиной с* δ*.*

Из лекции Анатолия Юрьевича Левина (1973)

В Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова подготовка высококвалифицированных кадров в области математики и информационных технологий осуществляется на математическом факультете и факультете информатики и вычислительной техники (ИВТ). Эти два факультета располагаются в седьмом здании ЯрГУ, на левом берегу Волги. Нынешний 2016 год является для них юбилейным: математическому факультету исполняется 40 лет, а факультету ИВТ — 30 лет. За это время факультетами подготовлено большое количество специалистов по ряду наукоёмких специальностей и направлений. Наши выпускники входят в ведущий кадровый состав многих предприятий и организаций Ярославля и всего региона, успешно работают в других регионах России и за рубежом.

Сотрудниками факультетов накоплен значительный и ценный опыт в научно-педагогической области. Этот опыт фиксировался, в частности, посредством проведения своей «заволжской» научно-методической конференции и издания сборника её материалов. Такие конференции под названием «Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете» проводились в 2005, 2007, 2010, 2012 и 2014 годах.

В юбилейном 2016 году традиционная конференция проводится в шестой раз. Факультеты решили расширить тематику конференции, сделав её на этот раз научной и включив в неё, наряду с научно-методическими, и доклады научно-исследовательского направления. Это было сделано, во-первых, в связи с тем, что на большинстве предыдущих конференций научные доклады также присутствовали в итоговых сборниках материалов. Во-вторых, устроители конференции придерживаются того консервативного мнения, что вопросы преподавания математики и информатики скорее относятся непосредственно к этим областям наук, чем составляют отдельную науку. В связи с этим было решено изменить название конференции на следующее: «Математика и компьютерные науки в классическом университете». Нумерация конференций продолжена, и нынешняя конференция, таким образом, стала 6-й научной конференцией университетского уровня.

В настоящем сборнике содержатся материалы конференции. Доклады печатаются в авторской редакции, то есть сохраняют не только суждения, но и особенности стиля авторов. Компьютерный набор докладов в системе LaTeX сделан самими авторами. Ответственным и техническим редакторами был выполнен отбор работ, внесена незначительная, чаще техническая правка в отдельные тексты, собран воедино весь материал, а также осуществлена необходимая подготовка сборника к печати.

М. Невский,
ответственный редактор,
заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

УДК 378

М. А. Башкин
Рыбинский государственный авиационный технический университет им. П. А. Соловьева
E-mail: mbashkin@rsatu.ru

Применение кейс-метода на занятиях по теории вероятностей и математической статистике

Рассматривается кейс-задание по теме «Центральная предельная теорема» для дисциплины "Теория вероятностей и математическая статистика" специальности "Компьютерная безопасность".

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: кейс, центральная предельная теорема, псевдослучайные числа.

В последние годы в России наметилась тенденция к использованию кейс-метода в обучении по естественно-научным дисциплинам. Новые федеральные государственные стандарты предусматривают широкое использование активных методов обучения (см. [1]), к которым относится и кейс-метод. При решении проблемы кейс-методом требуется использование знаний и соответствующих компетенций, формируемых при обучении. Мы рассмотрим кейс-задачу, которая может быть использована для студентов специальности 060301.65 «Компьютерная безопасность» на занятиях по теории вероятностей и математической статистике. Приведенную ниже задачу полезно рассмотреть сразу после изучения темы «Центральная предельная теорема».

Сформулируем кейс-задачу:

1. Изучить алгоритм работы генератора псевдослучайных чисел на основе центральной предельной теоремы.

2. Разработать собственный алгоритм генератора, оценив сложность его работы по времени.

3. Реализовать приложение, которое позволяет генерировать псевдослучайную последовательность.

©Башкин М. А., 2016

4. Исследовать полученную последовательность на случайность с помощью методики NIST.

5. Подготовить и оформить отчет о проведенной работе.

Один из важных разделов теории вероятностей посвящен центральной предельной теореме (ЦПТ). ЦПТ относится ко второй группе теорем (первая группа предельных теорем называется законом больших чисел), которые устанавливают условия, при которых закон распределения суммы большого числа случайных величин неограниченно приближается к нормальному. К сожалению, знакомство с этой теоремой часто носит для студентов чисто теоретический характер. Хотя эта теорема имеет большое прикладное значение.

В рассматриваемой задаче ЦПТ используется для генерации последовательности псевдопростых чисел, имеющих нормальное распределение. Генерация псевдослучайных последовательностей рассматривается в 8 семестре при изучении дисциплины «Теория псевдослучайных генераторов». Эта дисциплина является дисциплиной по выбору. Поэтому данная кейс-задача стимулирует студентов к выбору этой дисциплины, устанавливает междисциплинарные связи, придает большую практическую направленность одной из фундаментальных математических дисциплин (теории вероятностей) и может рассматриваться как опережающая самостоятельная работа по дисциплине «Теория псевдослучайных генераторов».

Приведем описание задачи.

В криптографии (например, при генерации ключей) часто возникает необходимость создания последовательностей псевдослучайных чисел с заданными статистическими свойствами. Такая же необходимость возникает при цифровой обработке изображений и при цифровом моделировании изображающих систем. Обычный способ получения таких последовательностей состоит в том, что сначала с помощью достаточно простых алгоритмов генерируют независимые псевдослучайные числа с равномерным распределением, а затем их подвергают линейным и нелинейным преобразованиям для получения заданных статистических свойств. Построение датчика (генератора) псевдослучайных чисел с равномерным распределением представляет собой достаточно сложную и весьма своеобразную задачу, так как требуется с помощью несложного алгоритма, реализуемого небольшим числом команд, вырабатывать последовательности чисел, которые можно рассматривать с точки зрения решаемых задач как случайные, не описываемые простой закономерностью. Основная трудность здесь заключается в обеспечении независимости в статистическом смысле чисел последовательности.

При получении последовательности псевдослучайных чисел с равномерным распределением можно как воспользоваться стандартными датчиками, так и запрограммировать такой датчик самостоятельно. Преподаватель должен уточнить, требуется ли программировать датчик чисел с равномерным распределением.

Если предполагается, что этот датчик должен быть запрограммирован, то заметим, что для получения последовательностей псевдослучайных чисел с равномерным распределением чаще всего используется конгруэнтный метод (см. [2]), в соответствии с которым каждое последующее число в последовательности получается из предыдущего с помощью простого соотношения

$$R_k = (c_1 R_{k-1} + c_2) \bmod c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы. Начальное число R_0 обычно мало влияет на качество получаемой последовательности. Константа c_3 определяется длиной разрядной сетки используемого процессора. От нее зависит период повторения последовательности, поэтому желательно ее выбирать максимально возможной. Константа c_2 незначительно влияет на свойства последовательности и даже может выбираться равной нулю. Наиболее критичным является выбор константы c_1.

Чтобы из независимых псевдослучайных чисел с равномерным распределением получить последовательность нормально распределенных случайных величин, проще всего воспользоваться центральной предельной теоремой, в соответствии с которой сумма достаточно большого количества независимых случайных величин имеет распределение, приближающееся (с ростом количества складываемых чисел) к нормальному.

Рассмотрим совокупность R_i, $i = 1, \ldots, n$, независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Такая последовательность называется *базовой.* Тогда, как известно, математическое ожидание и дисперсия каждой из них равны

$$M(R_i) = \frac{1}{2}, \qquad D(R_i) = \frac{1}{12}.$$

Определим новую случайную величину S в виде суммы этих случайных величин:

$$S = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$M(S) = \sum_{i=1}^{n} M(R_i) = \frac{n}{2}, \qquad D(S) = \sum_{i=1}^{n} D(R_i) = \frac{n}{12}. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение новую случайную величину

$$Z = \frac{S - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}.$$

Тогда Z – случайня величина, распределенная по нормальному закону с нулевым ожиданием и единичной дисперсией.

При написании собственного алгоритма необходимо выбрать значение параметра n. Опыт показывает, что при сложении всего шести случайных величин равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$, получается случайная величина, которая может считаться нормальной для большинства прикладных задач. Из (1) следует, что наиболее просто формулы будут выглядеть при $n = 12$. Вообще, чем больше n, тем «лучше» будет последовательность Z_n. С другой стороны, описанный метод получения нормально распределенных случайных чисел считается малоэффективным, так как требует генерации нескольких базовых чисел R для получения *одного* нормального выборочного значения Z. Что сказывается на времени работы алгоритма (генератора).

В заключении сделаем три замечания.

1. Для любого нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2 случайная величина Y строится по формуле

$$Y = a + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} R_i - \frac{n}{2}\right).$$

Действительно, данная формула следует из формулы $\frac{Y-a}{\sigma} = Z = \frac{S-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$.

2. Для определения меры близости полученной последовательности к случайной рекомендуется использовать пакет статистических тестов NIST (The National Institute of Standards and Technology, Национальный институт стандартов и технологий США). Особенностью этих тестов является открытость алгоритмов и однозначная интерпретация результатов тестирования.

3. О других подходах к генерации псевдослучайных последовательностей с нормальным распределением студенты узнают в курсе «Теория псевдослучайных генераторов». В частности, будет рассмотрен точный метод, основанный на преобразовании Бокса–Мюллера.

Ссылки

[1] *Башкин М. А.* Использование компьютерных технологий при проведении лекционных занятий по высшей математике в техническом вузе // Актуальные проблемы совершенствования высшего профессионального образования: материалы XII межвуз. науч.-метод. конф. 21–22 ноября 2013 г. / отв. ред. Е. В. Сапир; Яросл. гос. ун-т им. П.Г.Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2013. С. 480–481.

[2] *Кнут Д.* Искусство программирования для ЭВМ: Том 2. Получисленные алгоритмы / пер. с англ. М.: Мир, 1977. 726 с.

УДК 372.851

Л. П. Бестужева
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lpbestlp@mail.ru

О преподавании дисциплины «Математические методы в филологии»

В работе рассматриваются проблемы проектирования содержания дисциплины «Математические методы в филологии» и пути их решения.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: математические методы, филология, содержание учебной дисциплины.

Дисциплина «Математические методы в филологии» включена в учебные планы подготовки бакалавров направления «Прикладная филология» на факультете филологии и коммуникаций. Этот факультет является самым молодым в ЯрГУ им. П. Г. Демидова. Он был организован в 2011 году.

Когда преподаватель впервые сталкивается с новой для себя учебной дисциплиной, то ему приходится решать много проблем, связанных с проектированием ее содержания. Острота проблемы объясняется и тем фактом, что во ФГОС ВО содержание этой дисциплины не прописано. Понятие проектирование содержания учебной дисциплины является весьма широким. Под проектированием понимается, в первую очередь, отбор предметного содержания. Его развернутое представление позволяет структурировать содержание и решать вопросы планирования, организации обучения и контроля усвоения. Источник решения проблемы отбора предметного содержания дисциплины можно искать в дидактике, формулирующей общие принципы отбора содержания учебного материала и их адаптации к конкретной дисциплине на основе собственного опыта и видения проблемы. Перечислим некоторые из этих принципов.

Принцип фундаментальности.

Принцип профессиональной направленности.

Принцип дифференциации глубины и строгости изложения отдельных вопросов в зависимости от их методологической и профессиональной значимости.

©Бестужева Л. П., 2016

Принцип соответствия объема содержания дисциплины времени, отведенному на его изучение;

Принцип избыточности, позволяющий распределить содержание на уровни усвоения и тем самым обеспечить индивидуализацию обучения.

Принцип соответствия содержания дисциплины особенностям студенческой аудитории.

Принцип профессиональной целесообразности, обеспечивающий перспективы применения полученных знаний в процессе дальнейшего образования, самообразования и профессиональной деятельности.

Поскольку направление подготовки «Прикладная филология» в ЯрГУ появилось, как было указано выше, относительно недавно, то собственный опыт не был определяющим при отборе материала для чтения лекций и проведения практических занятий. Ориентиром были рабочие программы дисциплины «Математические методы в филологии», разработанные в ведущих вузах страны, которые имеют давние традиции в обучении студентов-филологов. Анализ этих программ позволил сделать вывод, что во многом они составлены на основе личных вкусов, связанных с научными интересами и пристрастиями их авторов. Более того, обнаружилось, что дисциплине «Математические методы в филологии» в этих вузах предшествует, как правило, другая дисциплина — «Математика». Наибольший интерес вызвали и принесли пользу для решения проблемы отбора материала рабочие программы и другие материалы, включенные в УМК двух дисциплин: «Математика для гуманитарных специальностей» [1] и «Математические методы в филологии» [2] для студентов гуманитарного факультета Новосибирского национального исследовательского государственного университета.

Дисциплины «Математика» в учебных планах факультета филологии и коммуникаций ЯрГУ нет. Это обстоятельство повлияло на решение включить в программу дисциплины «Математические методы в филологии» вопросы, которые относятся к математике и без знания которых нельзя предметно говорить о математических методах. Это соответствует принципу фундаментальности отбора содержания дисциплины. Этот принцип заключается в выделении знаний, обладающих научной и методологической ценностью и многократно использующихся в математической деятельности.

Знакомство с книгой И. В. Арнольда «Основы научных исследований в лингвистике» [3], в которой рассматриваются основные направления лингвистических исследований на основе системного анализа с применением математических идей и методов, позволило выделить оптимальный круг этих вопросов: теория множеств, теория графов, комбинаторика, математическая логика, теория вероятностей и математическая статистика. Это согласуется с содержанием программы по математике для гуманитарных специальностей, упомянутой выше. Разумеется, речь идет об элементах этих фундаментальных математических дисциплин. Книга И. В. Арнольда написана в 1991 году, но своей актуальности не потеряла, разве что в ней не были учтены те возможности, которые дает применение в лингвистических исследованиях вычислительной техники.

В учебном пособии [4] очерчен современный круг задач прикладной лингвистики. Отметим также УМК дисциплины «Математические методы лингвистического анализа», разработанный в ПИ Южного федерального университета [5]. Оперативное знакомство с вышеуказанными источниками стало возможным благодаря интернету. Было бы не лишним при разработке новой учебной дисциплины непосредственное знакомство с постановкой ее преподавания в одном из упомянутых вузах. Идеально было бы соответствующее повышение квалификации в виде стажировки.

В исследованиях существуют различные определения границ предметной области «Филология». При отборе содержания обсуждаемой учебной дисциплины мы придерживались взгляда на филологию, как объединение всех литературоведческих и лингвистических научных дисциплин. Отметим, что математические методы проникли в большей степени в лингвистику. По-видимому, это объясняется тем, что это направление филологии имеет большие прикладные возможности. Недаром существуют такие дисциплины как математическая лингвистика, статистическая лингвистика.

Включение в рабочую программу дисциплины «Математические методы в филологии» чисто математических вопросов потребовало усилить профессиональную направленность их изучения. Приведем примеры реализация этого принципа. Естественный язык и математический язык рассматриваются как семиотические системы. Изучение математических понятий сопровождается литературными или лингвистическими примерами. Рассматриваются лингвистические интерпретации математических понятий, функции, описывающие различные соответствия в языкознании, аналогии между основными понятиями теории множеств и бинарных отношений и понятиями языкознания. Подобраны задачи, иллюстрирующие применение математических методов в филологии. Используются не только учебные примеры, но и результаты современных диссертационных исследований по филологии с применением математических методов [6], [7].

Акцент сделан на изучении статистических методов в языкознании. Корпусная лингвистика рассматривается как важнейший этап решения задачи автоматизированного построения лингвостатистических моделей. Разработаны задания для лабораторных работ по статистическому анализу текстов из Национального корпуса русского языка по грамматическим категориям.

Для того, чтобы расширить кругозор, развить интерес к вопросам использования математики в филологических исследованиях и обозначить перспективы применения полученных знаний в процессе дальнейшего образования, самообразования и профессиональной деятельности, студенты пишут рефераты. Глубина изложения темы, как правило, варьируется в достаточно широких пределах и зависит от индивидуальных возможностей студента. Приведем примеры некоторых тем.

1. Частотные словари и методы их создания.

2. Закон Ципфа и его филологическая интерпретация.

3. Конкордансы и их использование в филологическом анализе.

4. Количественные различия между стилями на фонетическом, морфологическом и синтаксическом уровнях.

5. Количественный анализ в стиховедении.

6. Количественные методы в атрибуции текстов. Вероятностный характер результатов атрибуции.

7. Количественные методы в психолингвистике. Количественные характеристики ассоциативных полей.

8. Индивидуальные вероятностные оценки лексики, их измерение. Возрастные изменения вероятностных индивидуальных оценок речи.

9. Глоттохронология М. Сводеша и ее пять постулатов.

10. Логический анализ русских пословиц.

Как известно, математика имеет высокий общекультурный потенциал. Многие ее идеи и понятия используются в литературных произведениях. Достаточно вспомнить такие произведения как «Мы» Е. Замятина, «Фауст» И. Гете, «История Платтнера» Г. Уэллса и многие другие. Доклады студентов на тему «Математика в произведении ...» не имеют прямого отношения к содержанию обсуждаемой дисциплины, но ценность их в образовании филологов не вызывает сомнений.

Ссылки

[1] *Тимофеева М. К.* Математика для гуманитарных специальностей: Учебно-методический комплекс.
URL: http://www.nsu.ru/xmlui/handle/nsu/932.

[2] *Тимофеева М. К.* Математические методы в филологии: Учебно-методический комплекс.
URL: http://www.nsu.ru/xmlui/handle/nsu/919.

[3] *Арнольд И. В.* Основы научных исследований в лингвистике: Учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1991.

[4] *Соснина Е. П.* Введение в прикладную лингвистику. Учеб. пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2012.

[5] *Агапов А. М.* Математические методы лингвистического анализа: Учебно-методический комплекс.
URL: www.studfiles.ru/preview/1810645/.

[6] *Москин Н. Д.* Теоретико-графовые модели структуры фольклорных текстов, алгоритмы поиска закономерностей и их программная реализация.
URL: http://www.dissercat.com/content/teoretiko-grafovye-modeli-struktury-folklornykh-tekstov-algoritmy-poiska-zakonomernostei-i-.

[7] *Мухин М. Ю.* Лексическая статистика и идиостиль автора: корпусное идеографическое исследование (на материале произведений М. Булгакова, В. Набокова, А. Платонова и М. Шолохова).
URL: http://www.dissercat.com/content/leksicheskaya-statistika-i-idiostil-avtora-korpusnoe-ideograficheskoe-issledovanie-na-materi.

УДК 521.8

Ю. И. Большаков
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: bolshakovyi@mail.ru

Об одной вычислительной задаче на множестве нильпотентных матриц

В настоящей заметке делается попытка вычисления количества всех тех R–классов, состоящих из матриц $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, каждая матрица из которых допускает H–полярное разложение при фиксированной нильпотентной матрице $X^H X$. Идейно работа основана на статьях [1] и [2].

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: H–полярное разложение, канонический вид H–самосопряженной матрицы, классификация собственных подпространств H–самосопряженной матрицы.

Постановка задачи. Речь идет о некоторых следствиях H–полярного разложения матрицы $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$, или $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Пусть H – самосопряженная невырожденная комплексная матрица, т. е. $H^* = H$, $\det H \neq 0$.

Определение 1. H–сопряженной к матрице X называется матрица X^H, определенная равенством $X^H = H^{-1}X^*H$.

Если T – матрица перехода к новому базису, то $X' = T^{-1}XT$, $H^* = T^*HT$ и, кроме того, $(X^H)' = (X')^{H'} = {H'}^{-1}(X')^*H'$.

Определение 2. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется H–самосопряженной, если $A^H = A$. Матрица U называется H–унитарной, если $U^H U = I$.

Определение 3. Представление матрицы $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ в виде

$$X = US \tag{1}$$

назовём H–полярным разложением матрицы X, где U и S — его составляющие с H–унитарной U и H–самосопряженной S (т. е. $U^H U = I$, $S^H = S$).

©Большаков Ю. И., 2016

Заметим, что если $H = I$, то I–полярное разложение становится полярным, если дополнительно потребовать неотрицательную определенность S. В общей же ситуации ($\det H \neq 0$) разложение (1) существует не всегда. В работе [1] показано, что представление (1) равносильно

$$\begin{cases} X^H X = S^2, \\ \text{Ker } X = \text{Ker } S. \end{cases} \tag{2}$$

Следующей простой пример иллюстрирует сказанное выше.

Пример 1. $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, X^H X = 0.$

a) $X = 0$, то $X = US = U \cdot 0$, где U — произвольная H–унитарная матрица, $S = 0$ — единственная H–самосопряженная (что следует из соотношений (2)).

b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $X = US = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. И здесь, очевидно, $X^H X = 0$.

c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ясно, что здесь $\text{Ker } X = \text{span}\{e_1\} = \text{Ker } S$, поэтому, если матрица S существует, то, согласно (2), она имеет вид: $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, где $y = \bar{y}$, тогда $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix}$. Но, согласно (2), $X^H X = S^2 \Leftrightarrow O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0$, что противоречит второму условию в (2). Поэтому для заданного X в пункте c) H–самосопряженной матрицы S, удовлетворяющей (2), не существует и, следовательно, матрица X не допускает H–полярного разложения.

Заметим, что в приведенном выше примере все три заданные матрицы X удовлетворяют равенству $X^H X = 0$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что матрица $X^H X$ нильпотентна. Отметим, что нильпотентность $X^H X$ не влечет нильпотентность матрицы X.

Пример 2. $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Здесь $X^H X = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ — нильпотентная матрица, а $X = X^k = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и поэтому нильпотентной X не является.

Вернемся к соотношению (1). Если матрица $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ допускает H–полярное разложение, то целый класс матриц $Y = V_1\ X\ V_2$ допускает разложение (1) с матрицей S_1, H–унитарно подобной матрице S (здесь V_1 и V_2 — H–унитарные матрицы). В самом деле, $Y = V_1\ X\ V_2 = V_1 U S V_2 = V_1 \cdot U \cdot V_2 V_2^{-1} S V_2 = W S_1$, где $W = V_1 U V_2$, $S_1 = V_2^{-1} S V_2$. Указанное выше отношение на парах $(X,\ Y)$ является, очевидно, отношением эквивалентности.

С другой стороны, в теореме 5.1. работы [1] дана классификация троек $(A,\ \ H,\ \ L)$, где A – H–самосопряженная матрица, H–самосопряженная невырожденная матрица, L подпространство в $\operatorname{Ker} A$ по следующему отношению эквивалентности: $(A,\ \ H,\ \ L)\ \sim\ (A',\ \ H',\ \ L')\ \Leftrightarrow$ существует, невырожденная матрица $T\ \in\ \mathbb{F}^{n\times n}$ такая, что $A'\ =\ T^{-1}AT,\ \ H'\ =\ T^{*}HT,\ \ L'\ =\ T^{-1}(L)$. Нетрудно понять, что указанное отношение равносильно следующему отношению эквивалентности на множестве подпространств $L\subset \operatorname{Ker}\ A$, определяемому условием: $L\sim L'\Leftrightarrow$ существует H–унитарная матрица V и такая, что $AV=VA,\ V(L')=L$. Здесь A – H–самосопряженная матрица, L и L' — подпространства $\operatorname{Ker}\ A$.

Однако в дальнейшем мы будем использовать теорему 1.1 из работы [2], которая гарантирует существование H–полярного разложения заданной матрицы $X\in\mathbb{F}^{n\times n}$. Эта теорема фактически эквивалентна теореме 8.2 из работы [1].

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ *или* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. *Матрица* X *размера* $n\times n$ *допускает* H*–полярное разложение тогда и только тогда, когда выполненяются нижеследующие условия* (i), (ii) и (iii).

(i) *Для любого отрицательного* λ *матрицы* X^HX *часть канонической формы* $\{X^HX,\ H\}$, *отвечающая числу* λ, *может быть представлена в форме*

$$\{\operatorname{diag}\ (A_i)_{i=1}^m,\ \operatorname{diag}(H_i)_{i=1}^m\},$$

где для любого $i=1,2,\dots,m,\ A_i=J_{k_i}(\lambda)\oplus J_{k_i}(\lambda),\ H_i=Q_{k_i}\oplus -Q_{k_i}$.

(ii) *Часть канонической формы* $\{X^HX,\ H\}$, *отвечающая нулевому собственному числу, может быть представлена в форме*

$$\{\operatorname{diag}\ (B_i)_{i=0}^m,\ \operatorname{diag}(H_i)_{i=0}^m\},$$

где $B_0=0_{k_0},\ H_0=I_{p_0}\oplus I_{n_0},\ p_o+n_0=k_0$ *и для любого* $i=1,2,\dots,m$ *пара* $\{B_i,\ H_i\}$ *имеет одну из следующих двух форм:*

$$B_i=J_{k_i}(0)\oplus J_{k_i}(0),\ H_i=Q_{k_i}\oplus -Q_{k_i},\ k_i\geq 1,$$

или

$$B_i=J_{k_i}(0)\oplus J_{k_i-1}(0),\ H_i=\varepsilon_i(Q_{k_i}\oplus Q_{k_\varepsilon-1}),$$

где $\varepsilon_i=\pm 1,\ k_i>1$.

Предположим, далее, что (ii) *имеет место и обозначим соответствующий базис в* $\operatorname{Ker}(X^HX)$ *через* $\{e_{i,j}\}_{i=0,\ j=1}^{m,\ l_i}$, *где* $l_0=k_0$ *и* $l_i=2k_i$ *в случае* B_i *четного размера матрицы, и* $l_i=2k_i-1$ *в случае нечетного ее размера.*

(iii) *Существует базис* $\{e_{i,j}\}_{i=0,\ j=1}^{m,\ l_i}$ *такой, что* (ii) *имеет место и* $\operatorname{Ker}X=\operatorname{span}\{e_{i,1}+e_{i,k_i+1}|l_i=2k_i,\ i=1,2,\ \dots,m\}\oplus\operatorname{span}\{e_{i,1}|l_i=2k_i-1,\ i=1,2,\ \dots,m\}\oplus\operatorname{span}\{e_{0,\ j}\}_{j=1}^{k_0}$.

Так, в примере 2 пункта a) $B_0 = O_2,\ H_0 = (1) \oplus (-1),\ n_0 = p_0 = 1$; в пункте b) $B_1 = J_1(0) \oplus J_1(0),\ H_i = (1) \oplus (-1),\ k_1 = 1,\ \operatorname{Ker} X = \operatorname{span}\{e_{11} + e_{1,2}\}$.

Как было отмечено выше, мы будем предполагать, что матрица $X^H X$ нильпотентна и проблема H–полярного разложения X, разрешённая в теореме 1.1, рассмотрена в пунктах (ii) и (iii). Из этих рассуждений следует, что число неэквивалентных подпространств в $\operatorname{Ker} X^H X$ (и, следовательно, число неэквивалентных матриц X с таким $X^H X$) конечно, и поэтому число неэквивалентных X, допускающих H–полярное разложение конечно.

В настоящей работе делается попытка найти это число, используя результаты теоремы 1.1 из работы [2].

Пусть канонический вид пары $\{X^H X,\ H\}$ таков:

$$\{X^H X,\ H\} = \{\bigoplus_{i=1}^{k_1^+} J_{i,n_1}(0) \bigoplus_{i=1}^{k_1^-} J_{i,n_1}(0); \bigoplus_{i=1}^{k_1^+} Q_{i,n_1} \bigoplus_{i=1}^{k_1^-} -Q_{i,n_1}\} \oplus$$

$$\oplus \{\bigoplus_{i=1}^{k_2^+} J_{i,n_2}(0) \bigoplus_{i=1}^{k_2^-} J_{i,n_2}(0); \bigoplus_{i=1}^{k_2^+} Q_{i,n_2} \bigoplus_{i=1}^{k_2^-} -Q_{i,n_2}\} \oplus \ldots$$

$$\oplus \{\bigoplus_{i=1}^{k_l^+} J_{i,n_l}(0) \bigoplus_{i=1}^{k_l^-} J_{i,n_l}(0); \bigoplus_{i=1}^{k_l^+} Q_{i,n_l} \bigoplus_{i=1}^{k_l^-} -Q_{i,n_l}\}.$$

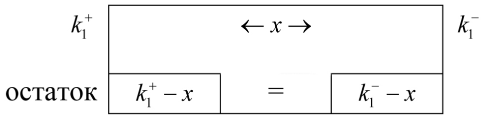
Здесь $n_1 > n_2 > \ldots > n_l$ — размеры соответствующих матриц $J_{i,n_t}(0)$ и $Q_{i,n_t},\ k_t = k_t^+ + k_t^-$ — их количество, символ k_t^+ (k_t^-) отвечает числу $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) матрицы $\varepsilon_t Q_{i,n_t}$. Кроме того, $J_{i,n_t}(0) = J_{n_t}(0)$ для всех t, участвующих в соответствующем суммировании.

Легко понять, что существует единственное разбиение пары $\{X^H X,\ H\}$ в прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^{s} c_i$ таким образом, чтобы каждая из составляющих была "связанной". Так, например, в c_1 входят те и только те слагаемые из прямой суммы $\{X^H X,\ H\}$, начиная с номера n_1, для которых $n_2 = n_1 - 1,\ n_3 = n_2 - 1,\ \ldots,\ n_{r_1} = n_{r_1 - 1} - 1$, причем r_1 — максимальное значение с таким свойством (т. е. $n_{r_1} \geq n_{r_1+1} + 2$), в c_2 входят те и только те слагаемые прямой суммы $\{X^H X,\ H\}$, начиная с номера n_{r_1+1}, для которых $n_{r_1+2} = n_{r_1+1} - 1,\ n_{r_1+3} = n_{r_1+2} - 1,\ \ldots,\ n_{r_2} = n_{r_2-1} - 1$, причем r_2 — максимальное значение с таким свойством (т. е. $n_{r_2} \geq n_{r_2+1} + 2$) и т. д. до слагаемого c_s. Для каждого слагаемого c_i найдем число f_i — количество неэквивалентных решений Z_i с данными $Z_i^{H_i} Z_i$. Тогда общее число неэквивалентных матриц X с данным $X^H X$ будет равно $\prod_{i=1}^{s} f_i$.

В настоящей работе мы будем предполагать, что $r_1 \leq 3,\ r_2 - r_1 \leq 3,\ r_3 - r_2 \leq 3,\ \ldots,\ r_s - r_{s-1} \leq 3$.

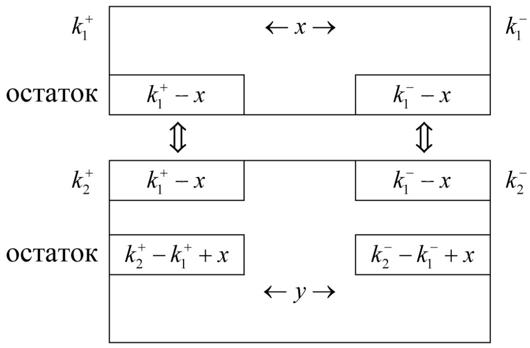
Рассмотрим сначала слагаемое c_1.

a) $r_1 = 1$, т. е. все слагаемые, входящие в c_1, имеют один и тот же размер n_1. Схематически имеем:



Здесь x — количество объединённых пар $(J_{i,n_1}(0),\ J_{i,n_1}(0))$ с различными значениями ε_i в каждой паре. Остатки после объединения $k_1^+ - x$ и $k_1^- - x$ равны нулю, иначе $r_1 > 1$. Таким образом, $x = k_1^+ = k_1^-$. Поэтому число N неэквивалентных решений Z_1 на подпространстве размерности $k_1 \cdot n_1$ равно количеству решений x, а x единственно. Итак, $N = 1$.

b) $r_1 = 2$, т. е. слагаемые, входящие в c_1, имеют размер n_1, либо $n_2 = n_1 - 1$. Соответствующая схема объединения выглядит так:



Здесь x — количество объединённых пар $(J_{i,n_1}(0),\ \ J_{i,n_1}(0))$ с различными значениями ε_i в каждой паре, $k_1^+ - x(k_1^- - x)$ — количество объединенных пар $(J_{i,n_1}(0),\ \ J_{i,n_2}(0))$ с $\varepsilon = +1$ $(\varepsilon = -1)$, после чего клетки размера n_1 исчезнут, а клеток размера n_2 останется $k_2^+ - k_1^+ + x$ $(k_2^- - k_1^- + x)$ с $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon = -1)$, которые равны между собой и равны $y = k_2^+ - k_1^+ + x = k_2^- - k_1^- + x$, отсюда $k_2^+ - k_1^+ = k_2^- - k_1^-$. Поскольку оба остатка — числа неотрицательные, то $k_1^+ - x \geq 0,\ k_1^- - x \geq 0$. Значит, $0 \leq x \leq \min\{k_1^+,\ k_1^-\}$ и $y = k_2^+ - k_1^+ + x = k_2^- - k_1^- + x \geq 0$, поэтому $\max\{0,\ k_1^+ - k_2^+,\ k_1^- - k_2^-\} \leq x \leq \min\{k_1^+,\ k_1-\}$. Очевидно, что любое число, стоящее под знаком $\max$ меньше либо равно любого числа, стоящего справа под знаком $\min$. В самом деле, $0 \leq k_1^+,\ k_1^+ - k_2^+ \leq k_1^+,\ k_1^- - k_2^- = k_1^+ - k_2^+ \leq k_1^+$. Введем следующие обозначения: $\max\{0,\ k_1^+ - k_2^+,\ k_1^- - k_2^-\} = a_1 \geq 0, \min\{k_1^+,\ k_1^-\} = a_2$, тогда $a_1 \leq x \leq a_2$.

Число неэквивалентных решений Z_1 (с заданными $Z_1^{H_1} Z_1$, размера матрицы $k_1 n_1 + k_2 n_2$), каждое из которых допускает H_1–полярное разложение, равно числу N — количеству пар $(x,\ y)$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2, \\ 0 \leq y \leq x + b, \end{cases}$$

где $a_1 = \max\{0,\ k_1^+ - k_2^+,\ k_1^- - k_2^-\}$, $a_2 = \min\{k_1^+,\ k_1^-\}$, $b = k_2^+ - k_1^+ = k_2^- - k_1^-$. В зависимости от b получаем это число N :

$$\begin{aligned} &N = a_2 - a_1 + 1, \quad \text{если } b \geq -a_1; \\ &N = a_2 + b + 1, \quad \text{если } -a_2 \leq b \leq -a_1. \end{aligned}$$

Явное построение матрицы Z_1 по паре $(x,\ y)$ осуществляется с помощью построения прямой суммы из x слагаемых, каждое из которых есть решение матричного уравнения $Y^H Y = J_{n_1}(0) \oplus J_{n_1}(0)$ и $H = Q_{n_1} \oplus -Q_{n_1}$ с $\operatorname{Ker} Y$, натянутом на сумму первых векторов, отнесенных к каждой из клеток $J_{n_1}(0)$ и $J_{n_1}(0)$. Каждая из оставшихся $k_1^+ - x$ $(k_1^- - x)$ клеток $J_{n_1}(0)$ и $\varepsilon = 1 (\varepsilon = -1)$ объединяется с клеткой $J_{n_1 - 1}(0)$ с тем же самым значением ε. Строится решение из $k_1^+ - x$ $(k_1^- - x)$ слагаемых, каждое из которых есть решение матричного уравнения $Y^H Y = J_{n_1}(0) \oplus J_{n_1 - 1}(0)$ и $H = \varepsilon(Q_{n_1} \oplus Q_{n_1 - 1})$ с Ker Y, натянутом на первый вектор первой клетки $J_{n_1}(0)$. После этого останутся лишь клетки типа $J_{n_1 - 1}(0)$, причем их будет равное количество с $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$, иначе заявленное число $r_1 > 2$. Эти оставшиеся $k_2^+ - k_1^+ + x$ и $k_2^- - k_1^- + x$ клеток типа $J_{n_1 - 1}(0)$ и $J_{n_1 - 1}(0)$ обладают свойством

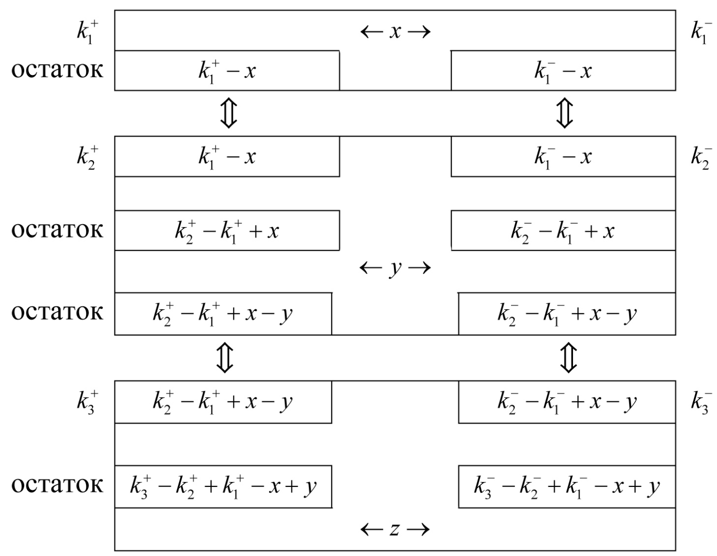
$$y := k_2^+ - k_1^+ + x = k_2^- - k_1^- + x,$$

причем первая группа клеток имеет $\varepsilon = 1$, а вторая — $\varepsilon = -1$.

Вновь строим прямую сумму из y слагаемых, каждое из которых есть решение матричного уравнения $Y^H Y = J_{n_1 - 1}(0) \oplus J_{n_1 - 1}(0)$ и $H = Q_{n_1 - 1} \oplus -Q_{n_1 - 1}$ с Ker Y, натянутом на сумму двух первых векторов, отнесенных к каждой из клеток $J_{n_1 - 1}(0)$ и $J_{n_1 - 1}(0)$.

Пара $(x,\ y)$ удовлетворяет вышеприведённой системе неравенств.

c) $r_1 = 3$, т. е. слагаемые, входящие в c_1, имеют размер либо n_1, либо $n_1 - 1$, либо $n_1 - 2$. Соответствующая схема объединения выглядит так:



Аналогично случаю $r_1 = 2$ случай $r_1 = 3$ приводит к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} a_1 \le x \le a_2 \\ 0 \le y \le b + x \\ 0 \le z \le c - x + y, \end{cases}$$

где $a_1 = \max\{0, \ k_1^+ - k_2^+, \ k_1^- - k_2^-\}$, $a_2 = \min\{k_1^+, \ k_1^-\}$, $b = \min\{k_2^+ - k_1^+, \ k_2^- - k_1^-\}$, $c = k_3^+ - k_2^+ + k_1^+ = k_3^- - k_2^- + k_1^-$.

Возникает три ситуации:

$$1) \quad \begin{cases} b \ge -a_1 \\ a_1 \ge c \end{cases},$$

тогда $N = (a_2 - a_1 + 1)(b + c + 1)$;

$$2) \quad \begin{cases} b \ge -a_1 \\ a_1 < c \le a_2 \end{cases},$$

тогда $N = (b + 1 + \frac{a_1+c}{2})(c - a_1 + 1) + (b + c + 1)(a_2 - c)$.

3) $-c < b < -a_1$, тогда $N = (b + c + 1)(1 + a_2 + \frac{a_1+c}{2})$.

Символом N_1 обозначим то значение N, которое отвечает значению r_1, т. е. $N_1 = 1$, если в c_1 входят все клетки размера n_1 из $\{X^H X, \ H\}$;

$$\left[\begin{array}{ll} N_1 = a_2 - a_1 + 1, & \text{если } b \ge -a_1, \\ N_1 = a_2 + b + 1, & \text{если } -a_2 \le b < a_1, \end{array} \right.$$

если в c_1 входят все клетки из $\{X^h X, \ H\}$ размера n_1 и $n_2 = n_1 - 1$;

$$\left[\begin{array}{ll} N_1 = (a_2 - a_1 + 1)(b + c + 1), & \text{если } \begin{cases} b \ge -a_1 \\ a_1 \ge c \end{cases}, \\ N_1 = (b + 1 + \frac{a_1+c}{2})(c - a_1 + 1) + & \\ +(b + c + 1)(a_2 - c), & \text{если } \begin{cases} b \ge -a_1 \\ a_1 < c \le a_2 \end{cases}, \\ N_1 = (b + c + 1)(b + 1 + \frac{a_1+c}{2}), & \text{если } -c < b < -a_1. \end{array} \right.$$

Соответствующие параметры $a_1, \ a_2, b$ и c определены ранее.

Аналогично строится та часть Z, которая соответствует прямому слагаемому $c_2, \ \ldots, \ c_s$, тогда общее число неэквивалентных Z, допускающих H–полярное разложение, будет равно числу

$$f = \prod_{i=1}^{s} N_i. \tag{3}$$

Формула (3) представляет собой основой результат настоящей работы. Заметим, что при выводе (3) предполагается отсутствие клеток $J_s(0) = 1$. Этот особый случай легко разрешим с учетом примера 2.

Например, $N_1 = \min\{k_1^+,\ k_1^-\} + 1$, если $c_1 = 0 = X^H X$, вместо $N_1 = 1$ в случае, когда c_1 состоит из k_1^+ (или k_1^-) клеток размера $n_1 > 1$. То же самое относится ко всем клеткам минимального размера, входящих в c_i. Заметим, что задача, в которой хотя бы одно из слагаемых c_i имеет число различных жордановых клеток большее, чем 3, здесь не решена.

Ссылки

[1] *Bolshakov Y., Reichstein B.* Unitary Equivalence in an Indefinite Scalar Product: An Analogue of Singular — Value Decomposition // Linear algebra and its applications. 1995. V. 222. P. 155–226.

[2] *Bolshakov Y., van der Mee C. V. M., Ran A. C. M., Reichstein B., Rodman L.* Errata vor: Polar decompositions in finite dimensional indefinite scalar product spaces: special cases and applications // Integral Equations and Operator Theory. 1997. V. 27, Iss. 4. P. 497–501.

УДК 372.881.1

И. К. Бугрова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lisali56@mail.ru

Курс иностранного языка на математическом факультете

В статье констатируется тенденция к сокращению аудиторных учебных часов по иностранному языку (английскому). Другие иностранные языки давно исчезли из учебного плана университета. Перечисляются основные задачи обучения иностранному языку в неязыковом вузе. Дается краткий обзор возможностей рынка образовательных услуг (по языкам) и его способности возместить сокращение аудиторных часов в высшей школе.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: аудирование лекционного материала на языке оригинала; задачи курса обучения английскому языку в неязыковом вузе; познавательные запросы студента.

Вопросы преподавания иностранного языка в неязыковом вузе являются предметом постоянного обсуждения (см., например, [1,2]).

За последние 30 лет объем часов по дисциплине «Иностранный язык» устойчиво изменялся в сторону уменьшения. В 70–80-ые годы на всех факультетах университета студенты изучали иностранные языки (английский, немецкий, французский) в течение четырех лет по 2–4 часа в неделю. Сегодня этот этап истории Демидовского университета вспоминается с грустью — закон перехода количества в качество никто не отменял.

На первом курсе студенты имели возможность ликвидировать проблемы школьного этапа обучения и даже изучить язык «с нуля», так как времени для этого было достаточно. В 90-е годы изучение иностранных языков было переведено на двухгодичный цикл, но появились нулевые» группы для тех, у кого в школе не было возможности пройти полноценный курс обучения. Постепенно факультеты отказывались от изучения немецкого и французского языков, так как значительная часть научных

©Бугрова И. К., 2016

материалов публикуется на английском языке. Вспоминаются олимпиады по иностранным языкам, вечера, которые можно было назвать событием на уровне города. Коллеги из других вузов города говорили, что начинают день с просмотра сайта Демидовского университета – там всегда что-то новое, актуальное. Да, появилась возможность изучать язык на многочисленных городских курсах, но университетский курс подготовки они не могут заменить, так как обязательные задания и объемы аутентичного дополнительного профессионального чтения, прослушивания специальных профессиональных лекций с последующим обсуждением возможны только в соответствующей профессиональной академической среде. Программа курса иностранного языка в неязыковом вузе прежде всего ставит цель подготовить специалиста, способного применить знания и навыки по иностранному языку в своей профессиональной деятельности: читать профессиональную литературу, не отвлекаясь на трудности перевода (все они должны быть пройдены еще на студенческой скамье), выступать на конференциях, вести деловую переписку, участвовать в обсуждениях профессиональной проблематики. Столь объемные требования невозможно удовлетворить за 3-4 семестра с заявленным объемом в 50% на самостоятельную работу. Общеобразовательный и воспитательный аспекты работы просто некогда реализовать в достаточной степени.

Что мы понимаем под достаточной степенью? Обучение:

1) речевому этикету, без которого невозможно достойно общаться с зарубежными коллегами;

2) умению пользоваться всеми доступными ресурсами в интернете для своих профессиональных задач;

3) грамматике и достаточному словарному запасу для извлечения информацию из англоязычных источников как по своей основной профессии, так и общенаучного плана.

За время обучения в университете у студента должна выработаться потребность слушать лекционный материал как общенаучного и узкоспециального плана, так и научно-популярного цикла. Многие зарубежные университеты выкладывают обширный лекционный материал — не воспользоваться такой возможностью в процессе обучения просто непростительно.

Мы начинаем с элементарных тем: теорема Пифагора, число π, математические игры. Постепенно снимается сложность восприятия звучащей речи, прежде всего потому, что этот материал хорошо знаком им со школы; идет процесс предвосхищения и опознавания знакомой тематики. Параллельно с этим мы традиционно берем несколько лекций научно-популярного содержания со знаменитого сайта TED.com, где представлено около двух тысяч коротких лекций актуальной тематики. Первые две-три лекции обычно вызывают затруднение, но, если студент строго следовал заданиям (прослушал лекцию три раза, выучил список новых слов, обсудил проблематику в диалоге с товарищем), как правило, результат налицо. Кроме того, задача преподавателя — сформировать познавательные запросы студента, потребность продолжать учиться и получать интеллектуальное удовольствие. Для этого требуется время. Магистрантские группы перешли на объем часов вдвое меньше по сравнению с 2002-2010 гг. Требования программы остались прежние:

1) пересказать и перевести 60 страниц в семестр аутентичного текста (две трети по проблематике своей научной работы, одна треть – политика, бизнес и сфера дополнительных интересов);

2) прослушать не менее двух с половиной часов лекционного материала и прореферировать его устно на языке оригинала;

3) освоить грамматику уровня Upper Intermediate, успешно написать контрольную работу;

4) в течение 10 минут участвовать в обсуждении всех актуальных материалов семестра, показать знание разговорных формул, специальных клише, навыки ведения дискуссии.

К сожалению, совсем не остается времени на доклады студентов (раньше времени на это хватало). Курс профессионального ангийского языка в третьем семестре магистратуры посвящен усложнению навыков аудирования профессионального лекционного материала, его обсуждению и реферированию русских статей по специальности на английском языке. Хотелось бы обратить внимание на то, что при сокращении аудитрных часов вдвое и значительном увеличения количества студентов в группе, почти совсем не остается времени на индивидуальный опрос.

Каких-нибудь пять лет назад мы занимали призовые места на межвузовских олимпиадах по языкам, в том числе, по немецкому и французскому языкам. Три года назад команда математического факультета заняла первое место на общеуниверситетской олимпиаде. В текущий период сворачиваются межвузовские мероприятия. Немецкий и французский языки просто исчезают из обихода. Эта тенденция не может не беспокоить.

Закон перехода количества в качество при изучении языка очевиден. Разумный подход к составлению учебного плана сразу дает ощутимые результаты.

Ссылки

[1] *Пермякова Д. И.* Особенности обучения иностранному языку на физическом факультете в ЯрГУ им. П. Г. Демидова // Язык, коммуникация, речевая культура. Ярославль: ЯрГУ, 2015. С. 210.

[2] *Куликова Л. А.* Роль иностранных языков в формировании межкультурной коммуникации // Язык, коммуникация, речевая культура. Ярославль: ЯрГУ, 2015. С. 140.

УДК 519.681.5: 519.682

В. В. Васильчиков
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vasilch@uniyar.ac.ru

Шаблон проекта для рекурсивно-параллельных вычислений

Предлагается типовой проект для быстрой разработки рекурсивно-параллельных программ, выполняемых в локальной сети под .NET Framework. Он основан на использовании разработанных автором библиотек RPM_ParLib и CommModule. Проект может быть использован при изучении курсов по параллельному программированию, а также при подготовке курсовых и дипломных работ.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: параллельные вычисления, рекурсия, .NET Framework.

В [1, 2] были описаны программные компоненты RPM_ParLib и CommModule [3, 4], предназначенные для разработки рекурсивно-параллельных (РП) приложений под .NET Framework. Каждый из них представляет собой динамически подключаемую библиотеку, которая может использоваться в программах для .NET Framework версии 4.0 с любым типом интерфейса (консольный, WPF или Windows Forms). Пользователю они предоставляются в виде DLL-файлов, которые тот должен включить в свой проект.

Классы, представленные в этих библиотеках, обеспечивают необходимую функциональность параллельного приложения: установление сетевого соединения между процессорными модулями (ПМ), распределение и динамическое перераспределение работы, запуск активаций параллельных процедур, возврат результатов, обмен сообщениями и данными, поддержку использования статической и распределенной памяти и многое другое. При разработке программы рекомендуется использовать среду Visual Studio 2010 или более новую.

Использование данных библиотек избавляет программиста от необходимости продумывать изрядное количество непростых вопросов: организация сетевого взаимодействия, использование вспомогательных

©Васильчиков В. В., 2016

потоков вычислений, синхронизация, распределение работы и многих других. Фактически от него требуется только выстроить РП алгоритм, порождающий достаточное количество ветвей вычислений и запрограммировать его на любом языке, поддерживаемом .NET Framework (впрочем, мы предполагаем, что в основном используется C#).

При разработке библиотек автор предполагал, что особенных проблем с их использованием при создании конкретных приложений быть не должно, тем более что библиотеки были очень подробно документированы. Однако не все, что кажется очевидным разработчику, так же очевидно для пользователя (вспомним хотя бы Билла Гейтса с его "интуитивно понятным" Alt-F4). Для студентов было непросто выстроить удачную архитектуру проекта, правильно и в нужный момент создавать объекты классов, представленных в библиотеках, корректно вызывать их методы. Основная проблема состояла в том, что программа функционирует в многопоточном (даже в МНОГОпоточном) окружении, и нужно было заботиться о том, в каком контексте вызывается тот или иной метод, а также понимать, когда будут готовы результаты его работы. А для совсем уж новичков проблемой могла стать даже работа с графическим интерфейсом в многопоточном приложении.

Поэтому автор решил разработать и документировать своего рода шаблонный проект, который можно было бы использовать как отправную точку при создании почти любого РП приложения. Хотя, как было сказано ранее, библиотеки можно использовать при программировании на любом поддерживаемом .NET языке с любым типом интерфейса, мы ограничились самым распространенным вариантом, а именно, язык C# плюс интерфейс WPF. Поскольку, по мнению автора, шаблон должен быть рабочим изначально без всякого дополнительного кодирования, нужно было выбрать какую-нибудь простенькую задачу. На ее примере требовалось продемонстрировать все основные элементы выстраивания кода, включая создание стартовой активации, организацию рекурсивного деления, его ограничение, получение результатов вычислений от параллельных ветвей и их обработку, ну и, возможно, взаимодействие с графическим интерфейсом. Для этих целей трудно придумать что-либо более подходящее, чем вычисление суммы целых чисел. Именно эта задача и легла в основу шаблонного проекта.

Логика нашего проекта сосредоточена в трех классах: $MainWindow$, $RP\_AlgorithmParams$ и $RP\_AlgorithmMethod$. Последние два объявлены в отдельном файле, их имена, по-видимому, следует изменить так, чтобы они соответствовали характеру решаемой задачи. Рассмотрим основные члены и правила работы с перечисленными классами.

В классе $MainWindow$ можно задать ограничение на количество экземпляров приложения, выполняемых на одном компьютере, рекомендуемое значение равно 4. В режиме эксплуатации запускать на одной рабочей станции несколько копий программы смысла нет, зато такая возможность очень помогает при отладке, поскольку отладчик среды Visual Studio можно прицепить к любому процессу. Также там объявлено еще несколько полей, назначение которых ясно из комментариев.

Далее объявляется перечисляемый тип *MessageType*, посредством которого мы будем идентифицировать вид информации, пересылаемой посредством TCP-сообщений. Это могут быть и просто сообщения и блоки данных, которые требуется передать с одного процессорного модуля на другой. Тип сообщений должен базироваться на типе *int*, минимальное допустимое значение равно *ProcModule.MinUserMessageNum*, пример присутствует в коде проекта.

В методе *Window_Loaded*() мы должны запустить процесс установления связи между вычислительными модулями, причем сделать это нужно в отдельном потоке, чтобы не блокировать интерфейс нашего приложения. В нашем примере мы демонстрируем, как это сделать путем вызова метода *StartConnection*() в потоке из пула потоков, предоставляемого средой исполнения .NET Framework. Дополнительно в методе *Window_Loaded*() мы запоминаем дескриптор главного окна приложения, чтобы им можно было управлять программно из других потоков (нам потребуется, в частности, его принудительно закрывать).

Упомянутый выше метод *StartConnection*() выполняет некоторые настройки класса управления процессорным модулем (*ProcModule*) путем установки его свойств. В примере устанавливаются значения следующих свойств.

- *ProgressInfoMethod*. Указывает метод для вывода сообщений информационного характера (в процессе установления соединения, в процессе работы). Поскольку вызываться он будет из других потоков, следует позаботиться об его корректном взаимодействии с графическим интерфейсом. В нашем случае используется метод *AsynchMessage*(), его код можно рассматривать как пример асинхронного взаимодействия с ПИ.
- *ProcessTcpMessageMethod* – метод для обработки принятых по протоколу TCP объектов. В нашем проекте здесь прописан метод *UserProcessTcpMessage*(), о котором мы расскажем далее.
- *FinishMethod* – метод, который следует вызвать по завершении работы процессорного модуля. Метод вызывается в другом потоке. В нашем случае это метод *Finish*(), он закрывает окно программы, используя неуправляемый код из библиотеки user32.dll. Кстати, это еще и демонстрация способа вызова функций Win32 API из управляемого кода .NET Framework.
- *FinishStageMethod* – метод, который следует вызвать по завершении очередного этапа вычислений, то есть в момент, когда параллельный процесс сворачивается в точку (на главном модуле).

Может использоваться для обработки и сброса собранной на очередном этапе статистики. Метод вызывается в другом потоке. В нашем проекте это метод $FinishStage()$, который ничего не делает и присутствует только в качестве примера.

Также в методе $StartConnection()$ устанавливается значение свойства $ProcModule.MemoryClassType$, которое содержит информацию о классе для обеспечения возможности работы с распределенной и статической памятью. Он должен быть наследником класса $MemoryBase$ и содержать объявления дескрипторов для работы с такой памятью. В нашем проекте распределенная и статическая память не используется, однако в соответствии с требованиями библиотеки необходимый класс ($MemoryHandles$) объявлен и оставлен пустым.

Далее в $StartConnection()$ вызывается $InitProcModule()$, статический метод класса $ProcModule$, который и выполняет установление связи между вычислительными модулями по схеме "каждый с каждым". Далее мы вызываем метод $AsynchTitleAndPosition()$. Делать это необязательно, однако такой вызов обеспечивает некоторые дополнительные удобства: главные окна перемещаются на "рекомендованные позиции" (это удобно, если запущено несколько копий приложения), задается текст заголовков. В нашем примере мы отображаем в заголовке номер данного модуля и их общее количество. Также в этом месте кода можно сделать последние настройки исходного состояния элементов пользовательского интерфейса. Кстати, кнопку для начала вычислений имеет смысл сделать активной только на главном модуле, его номер 0. Собственно, главный он только потому, что начинает вычисления, и на нем же они заканчиваются.

В нашем проекте по нажатию упомянутой кнопки создается и начинает работу стартовая активация рекурсивно-параллельного процесса. Как это делается, демонстрирует метод $Start()$. Его код создает объект класса $RP\_AlgorithmParams$ для хранения блока параметров стартовой активации и связанный с ним объект класса $RP\_AlgorithmMethod$, реализующего всю логику необходимых вычислений. Далее для него вызывается метод $First\_Call()$, начинающий процесс параллельного выполнения. При вызове можно также указать метод, который следует вызвать по завершении стартовой активации (фактически, завершении всех вычислений). В нашем случае это метод $ProcessFinishFirstCall()$.

Далее в проекте присутствует некоторое количество вспомогательных методов для корректного взаимодействия с элементами графического интерфейса в многопоточном приложении. Также приводится шаблон метода $UserProcessTcpMessage()$, предназначенного для обработки приходящих Tcp-сообщений. Через свои параметры метод получает номер модуля-отправителя, тип сообщения и блок данных, в него вложенных. Далее в коде можно найти заготовки для упомянутых ранее методов $ProcessFinishFirstCall()$ и $FinishStage()$.

Отдельно следует упомянуть обработчик нажатия кнопки "Stop execution" нашего главного окна. Там вызывается $StopProcModule()$, статический метод класса $ProcModule$. Его срабатывание приводит к завершению выполнения работы на всех вычислительных модулях и закрытию всех главных окон. Отметим, что этот вызов можно сделать на любом из ПМ, поэтому соответствующую кнопку лучше оставить активной для всех модулей.

Для реализации логики рекурсивно-параллельных вычислений необходимо объявить как минимум два класса. Первый должен быть наследником класса $ParamBase$ и служить хранилищем для параметров активации РП процедуры, а также возвращаемых ею результатов. Второй, наследник класса $ParMethodBase$, должен содержать собственно логику. В нашем примере эти классы имеют ничего не говорящие имена $RP\_AlgorithmParams$ и $RP\_AlgorithmMethod$ соответственно. Наполнение этих классов решает сформулированную выше элементарную демонстрационную задачу и соответствует стандартной схеме "всегда делить работу по возможности пополам". Понятно, что основные модификации кода от пользователя потребуется вносить именно в эти два класса. Но давайте разберем, что же уже есть в нашем примере.

В конструкторе добавлена инициализация этих полей, для удобства вывода переопределен метод $ToString()$. Следует обратить внимание на то, как оформлен метод $CopyResults()$. В нашем случае мы обязаны его переопределить, поскольку необходимо скопировать результаты из возвращенного блока параметров в блок параметров текущей активации. Базовая версия метода не делает ничего и годится только для вычислений, в которых результаты возвращаются не через блок параметров, а каким-либо иным образом.

Также в предлагаемом демонстрационном проекте в виде комментария присутствуют заготовки двух методов, управляющих разбиением работы: $MustBeDivided()$ и $DivideParams()$. Их можно использовать, если процесс рекурсивного деления задачи должен реализовывать логику, отличную от рассматриваемого шаблона "деление пополам".

В классе $RP\_AlgorithmMethod$ главное, что нужно сделать – это переопределить метод $ParMethod()$. Он вызывается библиотекой и обязательно должен быть переопределен, поскольку реализация метода в базовом классе не делает ничего. Из предложенного примера должно быть понятно, как можно организовать начальную рассылку данных по всем модулям, если это требуется, и как далее запустить параллельные вычисления. Хочется также обратить внимание на наличие в его коде комментария с демонстрацией примера передачи данных через посредство TCP-сообщения.

Как правило, делить работу до предела весьма неразумно, поэтому рекомендуется оформить хотя бы два метода вычисления, один из которых осуществляет рекурсивное деление работы, пока это требуется, а другой производит последовательные вычисления, когда дробить работу уже не нужно. В нашем примере это демонстрируется методами $ParallelAlgorithm()$ и $SequentialAlgorithm()$ соответственно. В первом из них присутствует типовой код для порождения двух дочерних активаций, ожидания результатов их работы и их обработки на обратном ходе рекурсии. Второй метод для сформулированной задачи в комментариях, очевидно, не нуждается.

В заключение отметим, что предлагаемый проект снабжен подробнейшим справочным руководством в формате chm, которое содержит информацию не только о самом проекте, но и об используемых им библиотеках [3, 4]. Участки кода, в которые пользователю предлагается добавить собственную логику или заменить существующую, помечены специальными комментариями // TODO, их среда Visual Studio воспринимает как список задач, позволяет легко обнаруживать и перемещаться в нужное место кода.

Ссылки

[1] *Васильчиков В. В.* О поддержке рекурсивно-параллельного программирования в .NET Framework // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, №2. С. 15–25.

[2] *Васильчиков В. В.* Компоненты для организации параллельных вычислений в .NET Framework // Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете : материалы 5-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Ярославль, 2014. С. 19–23.

[3] *Васильчиков В. В.* Коммуникационный модуль для организации полносвязного соединения компьютеров в локальной сети с использованием .NET Framework // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013619925, 2013.

[4] *Васильчиков В. В.* Библиотека поддержки рекурсивно-параллельного программирования для .NET Framework // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013619926, 2013.

УДК 517.929

Д. В. Глазков
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: glazkov_d@mail.ru

Квазинормальные формы сингулярно возмущенных моделей одного класса оптико-электронных систем

Рассматриваются некоторые модели динамики полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью. Ставится задача их математического исследования при условии асимптотически больших значений одного из параметров. На этом пути выполняется построение более простых вспомогательных уравнений, которые играют роль нормальных форм для исходных моделей, не содержат больших (малых) параметров и описывают «в главном» динамику решений первоначальных систем дифференциальных уравнений.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: математическая модель, запаздывание, полупроводниковый лазер, нормальная форма.

Система уравнений Ланга–Кобаяши [1] описывает полупроводниковый лазер с обычной оптической обратной связью (conventional optical feedback, COF):

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma e^{-i\omega_0 h}E(t-h), \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $E(t)$ — комплексная амплитуда электрического поля, $Z(t)$ — инверсия носителей; $\gamma>0$ и $-\omega_0 h$ — сила и фаза обратной связи, ω_0 — оптическая частота генерации в отсутствие обратной связи; Q — превышение током накачки первой пороговой величины; v пропорционально отношению времен затухания инверсии носителей и фотонов в резонаторе; α — коэффициент уширения линии, отвечающий за нелинейное

©Глазков Д. В., 2016

взаимодействие между амплитудой и фазой поля; h — время прохода излучения по внешнему резонатору, нормированное в единицах времени затухания инверсии.

Однако это не единственный технически возможный тип обратной связи. Лазер, имеющий обратную связь с обращением волнового фронта (или с сопряжением по фазе, phase conjugate feedback, PCF), описывается следующей системой [2], близкой к (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma\, e^{-i\omega_0 h}\, E^*(t-h), \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{2}$$

Отличие уравнений (2) от (1) заключается в замене $E(t-h)e^{-i\omega_0 h}$ на выражение $E^*(t-h)e^{-i\omega_0 h}$, где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Исследованию модели (2) посвящено множество работ, например [2, 3] и цитируемые там источники. Как и в исходной системе Ланга–Кобаяши, в (2) наблюдаются различные интересные динамические эффекты. Обнаружены области с достаточно сложной, в том числе хаотической, динамикой.

Другая математическая модель позволяет описать полупроводниковый лазер, на который одновременно воздействуют отраженное запаздывающее излучение и внешняя оптическая накачка [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma_1 e^{-i\omega_0 h}E(t-h) + \gamma_2 e^{-i(\omega_1-\omega_0)t}, \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\gamma_2>0$ — интенсивность внешнего излучения, ω_1 — оптическая частота задающего лазера. Авторами статьи [4] отмечается некоторое сходство между динамикой модели (3) и системы, описывающей воздействие оптического фильтра на полупроводниковый лазер с запаздывающей обратной связью.

Для подавления нежелательных эффектов, связанных с низкочастотными флуктуациями (НЧФ), было предложено использование двойного резонатора [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)EZ + \gamma_1 e^{-i\omega_0 h_1}E(t-h_1) + \gamma_2 e^{-i\omega_0 h_2}E(t-h_2), \\ \dfrac{dZ}{dt} = Q - Z - (1+Z)\,|E|^2. \end{cases} \tag{4}$$

Главное отличие этой модели от стандартной системы (1) состоит в наличии двух отражающих поверхностей, которые характеризуются различными временами h_1 и h_2 прохода излучения до его возвращения в резонатор. При этом величины γ_1 и γ_2 сопоставимы и не являются настолько малыми, что ими можно пренебрегать. Утверждается, что воздействие второго запаздывания на резонатор в системе (4) позволяет фактически исключить явление НЧФ из числа возможных динамических состояний полупроводникового лазера [5].

Наряду с моделью Ланга–Кобаяши, описывающей динамику одномодового лазера, рассматривались также близкие по духу модели многомодового лазера, подвергающегося воздействию запаздывающей обратной связи. Одна из них, приведенная в работе [6], может быть выписана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)E_m Z_m + \gamma_m e^{-i\omega_m h} E_m(t-h), \\ \dfrac{dZ_m}{dt} = Q - Z_m - (1+Z_m)\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |E_j|^2, \end{cases} \tag{5}$$

где n — число мод когерентного оптического излучения, индекс m изменяется от 1 до n, величины обратной связи γ_m в простейшем случае одинаковы и от m не зависят. Утверждается [6], что в модели (5) наблюдаются режимы, близкие к НЧФ, что хорошо согласуется с результатами экспериментальных наблюдений.

Относительно недавно была предложена модификация этой модели [7], которая, по мнению ее автора, более корректно учитывает взаимодействие между модами:

$$\begin{cases} \dfrac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)\big[\gamma_m(Z_0-Z_m)-1\big]E_m + \gamma e^{-i\omega_m h} E_m(t-h), \\ \dfrac{dZ_m}{dt} = -\Big(1 + d + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \gamma_j |E_j|^2\Big) Z_m + \gamma_m |E_m|^2 Z_0/2, \\ \dfrac{dZ_0}{dt} = Q - Z_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |E_j|^2 (Z_j - Z_0). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь E_m — медленно меняющиеся комплексные амплитуды полей мод, Z_0 и Z_m — пространственно однородная компонента и амплитуда пространственной решетки плотности неравновесных носителей (инверсии), ω_m — оптические частоты лазерных мод без обратной связи, γ_m — коэффициент усиления соответствующей (m-й) моды относительно усиления моды, ближайшей к центру линии, d — безразмерный коэффициент диффузии. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и в базовой одномодовой модели Ланга–Кобаяши.

В работах [8, 9] проводилось исследование системы (1) и некоторых ее модификаций методами, изложенными в [10, 11, 12]. Считая, как и в [9], параметр Q большим, а $\varepsilon = Q^{-1}$ — малым, и действуя аналогичным образом, можно получить следующие уравнения, выступающие в

качестве нормальных форм для исходных моделей. Для системы (2) — это
$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)(|E|^{-2}-1)E + \gamma\, e^{-i\omega_0 h}\, E^*(t-h), \tag{7}$$
для (3) — комплексное уравнение с запаздыванием
$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)(|E|^{-2}-1)E + \gamma_1 e^{-i\omega_0 h}E(t-h) + \gamma_2 e^{-i(\omega_1-\omega_0)t}, \tag{8}$$
для (4) — уравнение
$$\frac{dE}{dt} = v(1+i\alpha)(|E|^{-2}-1)E + \gamma_1 e^{-i\omega_0 h_1}E(t-h_1) + \gamma_2 e^{-i\omega_0 h_2}E(t-h_2), \tag{9}$$
для (5) — система
$$\frac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)\Biggl(\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|E_j|^2\Bigr)^{-1}-1\Biggr)E_m + \gamma_m e^{-i\omega_m h}E_m(t-h), \tag{10}$$
для (6) — система
$$\begin{cases} \dfrac{dE_m}{dt} = v(1+i\alpha)\Biggl[\gamma_m\Biggl(\Bigl(1+\sum_{j=1}^{n}|E_j|^2 Z_j\Bigr)\Bigl(\sum_{j=1}^{n}|E_j|^2\Bigr)^{-2}-Z_m\Biggr)-1\Biggr]E_m+ \\ \qquad + \gamma e^{-i\omega_m h}E_m(t-h), \\ \dfrac{dZ_m}{dt} = -\Bigl(1+d+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j|E_j|^2\Bigr)Z_m + \gamma_m|E_m|^2\Bigl(1+\sum_{j=1}^{n}|E_j|^2 Z_j\Bigr)/2\sum_{j=1}^{n}|E_j|^2. \end{cases} \tag{11}$$
Изучение свойств полученных уравнений выходит за рамки данной заметки.

Ссылки

[1] *Lang R., Kobayashi K.* External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16, №1. P. 347–355.

[2] *Van Tartwijk G. H. M., Van der Linden H. J. C., Lenstra D.* Theory of a diode laser with phase-conjugate feedback // Opt. Lett. 1992. Vol. 17, №22. P. 1590–1592.

[3] *Green K., Krauskopf B., Samaey G.* A two-parameter study of the locking region of a semiconductor laser subject to phase-conjugate feedback // J. Appl. Dynamical Systems. 2003. Vol. 2, №2. P. 254–276.

[4] *Nizette M., Erneux T.* Stability of injection-locked CW-emitting external-cavity semiconductor lasers // IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron. 2004. Vol. 10. P. 961–967.

[5] *Rogister F. [et al.]* Suppression of low-frequency fluctuations and stabilization of a semiconductor laser subjected to optical feedback from a double cavity: theoretical results // Opt. Lett. 1999. Vol. 24, №17. P. 1218–1220.

[6] *Vicktorov E. A., Mandel P.* Low frequency fluctuations in a multimode semiconductor laser with optical feedback // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85, №15. P. 3157–1360.

[7] *Корюкин И. В.* Динамика многомодового полупроводникового лазера с оптической обратной связью // Физика и техника полупроводников. 2009. Т. 43, №3. С. 405–411.

[8] *Глазков Д. В.* Особенности динамики модели Ланга–Кобаяши в одном критическом случае // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т. 15, №2. С. 36–45.

[9] *Глазков Д. В.* Качественный анализ сингулярно возмущенных моделей одного класса оптико-электронных систем // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16, №4. С. 167–181.

[10] *Кащенко С. А.* Бифуркации цикла в сингулярно возмущенных нелинейных автономных системах // Изв. РАЕН, серия МММИУ. 1998. Т. 2, № 4. С. 5–53.

[11] *Кащенко С. А.* Локальная динамика нелинейных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1343–1355.

[12] *Кащенко С. А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // Журнал Выч. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40, № 5, С. 693–702.

УДК 378.14

Д. В. Глазков, А. О. Толбей
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: glazkov_d@mail.ru
E-mail: bekva@yandex.ru

О преподавании дисциплины «Дифференциальные уравнения» студентам ЯрГУ

Авторы статьи обсуждают опыт преподавания дисциплины «Дифференциальные уравнения» студентам математического, физического факультетов, а также факультета информатики и вычислительной техники.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, мотивация, эффективность занятий.

Курс дифференциальных уравнений является базой для дальнейшего изучения таких дисциплин, как уравнения математической физики, теория вероятностей, функциональный анализ, теория оптимального управления, методы математического моделирования, концепции современного естествознания и других важнейших дисциплин математического и естественнонаучного цикла. Традиционно к курсу дифференциальных уравнений относят следующие разделы: уравнения первого порядка, системы дифференциальных уравнений, линейные системы с постоянными коэффициентами, линейные системы с периодическими коэффициентами, дифференциальные уравнения высших порядков, краевые задачи, теоремы существования, теория устойчивости, уравнения в частных производных первого порядка.

Вопрос повышения эффективности занятий в настоящее время, в период всевозможных перегрузок и информационной перенасыщенности, приобретает особое значение. Усвоению материала курса в значительной мере способствует степень его связи с другими дисциплинами, а

©Глазков Д. В., 2016
©Толбей А. О., 2016

также его роль в общей структуре соответствующего направления подготовки. Например, у студентов, обучающихся на специальности “Компьютерная безопасность” (КБ) и имеющих высокий общий уровень подготовки, на изучение дифференциальных уравнений отведен один семестр. При этом лекции и практика объединены в рамках одной пары в неделю. Контроль знаний ограничивается зачетом. Все это обусловлено особенностями специальности КБ, где основной акцент делается на дисциплины немного иной направленности. Однако некоторая обособленность дифференциальных уравнений от общего контекста обучения несколько снижает интерес к материалу ближе к концу семестра (фраза “все равно только зачет” тоже характеризует отношение к курсу). Вместе с тем широкие связи с другими дисциплинами, а также наличие экзамена на других направлениях подготовки сами по себе не гарантируют должный интерес к предмету со стороны если не всех студентов, то значительной их части. Нередко приходится сталкиваться с откровенным нежеланием студентов преодолевать даже минимальные трудности в освоении материала. Причем, если ранее средний студент приходил на занятия с установкой “непонятно, значит надо посидеть и разобраться”, то теперь об этом чаще всего не может быть и речи. В том, что студенту непонятен предмет, он винит кого угодно, только не себя. При этом различные нововведения извне [1] (например, введения рейтинга за каждую решенную студентом задачу, укрупнение потоков) только усугубляют положение.

“Мотивы – это то, что побуждает деятельность человека, ради чего она совершается. Мотивация ... часто представляет собой сложный акт, требующий анализа и оценки альтернатив, выбора и принятия решений. Этот процесс психологически осложняется тем, что далеко не всегда реальные мотивы осознаются субъектом актуально, т. е. при подготовке и выполнения действия” [2]. Принятие студентом тех или иных моделей поведения или стратегий взаимодействия с преподавателями и сокурсниками в процессе обучения происходит под влиянием многих факторов. В значительной мере это установки, заложенные в семье, в школе и, конечно, теми людьми, мнение которых по тем или иным причинам оказывается важным (известные актеры, писатели, общественные деятели, ученые и т. д., тренер в спортивной секции, друг детства, товарищ по хобби и т. п.). Например, если в ребенка закладывается убеждение, что главное в жизни – это количество денег в кармане, а хорошая учеба этому почти никак не способствует, то его модель поведения на студенческой скамье довольно предсказуема. Вера в необходимость получения “корочек” о высшем образовании, “не забивая себе голову”, поскольку “все равно работать по специальности не буду”, характерна для многих троечников, которые заботятся о том, чтобы их не отчислили, но не стремятся к углублению своих знаний. Конечно, такой взгляд на образование возник не на пустом месте, однако он, очевидно, не способствует достижению заявляемых государством и обществом целей по воспитанию "всесторонне развитой личности", в полной мере владеющей профессиональными навыками, или, если следовать нынешней бюрократической моде, обладающей "всеми необходимыми компетенциями". Можно сказать, что в какой-то степени постоянное разрешение этого противоречия между декларируемыми целями процесса обучения в университете и настроениями большей части студентов и составляет суть работы преподавателя.

Также интересно отметить, что студенты-сокурсники способны оказывать друг на друга серьезное влияние. Несколько отличников с четкими целями и ориентирами, "с крепким внутренним стержнем" способны личным примером увлечь многих товарищей. С другой стороны, примеры противоположного воздействия тоже имеют место. Один из потоков на математическом факультете в условиях негласной установки преподавателям "по возможности не отчислять" расслабился до такой степени, что добрая половина студентов к концу обучения была не в состоянии решать простейшие задачи.

Если вернуться от общих размышлений к более частной тематике, возникает справедливый вопрос о том, как мотивировать студента к изучению дифференциальных уравнений. Как найти разумную середину между строгостью и ослаблением требований? По мнению авторов, мотивация студентов к учебе зависит от следующих факторов, непосредственно связанных с обучением в университете.

– Личность преподавателя, его профессионализм, умение заинтересовать предметом. Один из возможных путей здесь проходит через короткие исторические экскурсы о вкладе таких "научных династий", как П. Л. Чебышев, А. А. Ляпунов, В. А. Стеклов, или Н. Н. Лузин, А. Н. Колмогоров, В. И. Арнольд в развитие теории ОДУ и смежных областей математики. (Ярославский след в биографиях А. А. Ляпунова и А. Н. Колмогорова играет здесь свою роль.) Использование аналогий с материалом других курсов (например, решение линейных ОДУ и линейных рекуррентных уравнений) тоже может приносить определенную пользу.

– Уровень базовых знаний студента и желание учиться. Желание лучше разобраться в своей специальности с помощью данной дисциплины стимулируется различными упражнениями, которые могут внести разнообразие в занятия и показать студентам на примерах из приложений, что язык дифференциальных уравнений является эффективным средством изучения явлений природы.

– Способность студента понимать предмет. Курс дифференциальных уравнений играет большую роль в фундаментальной подготовке студента в плане формирования у него научного мировоззрения, определенного уровня математической культуры, овладения методами математического моделирования.

– Страх перед экзаменом. Наличие экзамена по курсу дифференциальных уравнений на многих направлениях подготовки (причем на разных факультетах) определяет достаточно серьезное отношение к изучению предмета. При этом различные упражнения, предлагаемые для самостоятельного решения дома с целью закрепления лекционного материала, неизменно находят желающих в них разобраться. Конечно, не просто так, а за определенные преференции на экзамене. На КБ такой прием практически не работает, поскольку “пряник недостаточно сладок”, и большинство студентов к середине семестра выбирают путь минимизации усилий на пути получения нужного результата (зачета).

Конечно, данный список не является полным и однозначным. От одного потока к другому главные мотивации могут меняться. Опытный преподаватель вправе поставить студентов перед фактом, что они обязаны делать, а что – нет, но в то же время понимание мотиваций конкретного потока поможет преподавателю наладить контакт с ребятами и проводить занятия более продуктивно.

Ссылки

[1] *Романов Ю.* Волнующий мотив // Наука и жизнь. 2011. № 6. С. 64–66.

[2] Философский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия. Гл. редакция: Л. Ф. Ильичёв, П. Н. Федосеев, С. М. Ковалёв, В. Г. Панов. 1983.

УДК 510.21

В. Г. Дурнев

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: durnev@uniyar.ac.ru

О следствиях фундаментальных результатов

Заметка ориентирована на студентов специальности "Компьютерная безопасность" и направлений "Математика" и "Математика и компьютерные науки", учебные планы по которым включают дисциплины "Введение в теорию множеств и логическую символику", "Математическая логика и терия алгоритмов", "Теория алгоритмов" и "Теория чисел". В ней обсуждается, как фундаментальные результаты в "Теории множеств" и "Теории алгоритмов" в качестве следствий дают ответы на вопросы, исследовавшиеся в, казалось бы, весьма далекой от них математической дисциплине – "Теория чисел". Что, на наш взгляд, будет в определенной мере способствовать укреплению у студентов представления о единстве математики и об особой важности фундаментальных математических результатов.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: алгебраические и трансцендентные числа, числа Лиувилля, числа Ферма, простые числа, рекурсивно перечислимые и диофантовы множества.

©Дурнев В. Г., 2016

Я считаю, что она (теория множеств) представляет собой высочайшее проявление математического гения, а также одно из самых высоких достижений чисто духовной деятельности человека.

Никто не изгонит нас из рая, созданного для нас Кантором.

Д. Гильберт

Алгебраические и трансцендентные числа

Напомним некоторые определения.

Определение 1. *Действительное число α, являющееся корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами, называется алгебраическим числом, в противном случае оно называется трансцендентным числом.*

Мы ограничимся рассмотрением только действительных алгебраических и трансцендентных чисел, хотя аналогичным образом соответствующие понятия вводятся и для комплексных чисел.

Конечно, каждое рациональное число является алгебраическим.

Термин *трансцендентное* восходит к Г. Ф. Лейбницу, а гипотезу о существовании трансцендентных чисел высказал Л. Эйлер.

Первые примеры трансцендентных чисел построил французский математик Ж. Лиувилль в 1844 году на основе доказанной им следующей теоремы.

Теорема 1 (Лиувилль)**.** *Для любого действительного числа α, являющегося корнем многочлена с рациональными коэффициентами степени n неприводимого над полем рациональных чисел существует такое положительное число C, что для любого целого числа a и любого натурального числа b выполняется неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{C}{b^n}$$

за исключением случая, когда $n = 1$ и $\alpha = \frac{a}{b}$.

Как следствие теоремы Лиувилля легко получается доказательство трансцендентности, например, следующего числа

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}.$$

Если

$$a = m!\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{10^{i!}}, \quad b = 10^{m!},$$

то для произвольного натурального числа n и для любого положительного числа C при $m \geq n$ и $10^{m!} \geq 2/C$ выполняется

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{1}{10^{i!}} < \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{10^{m!}}\cdot\frac{1}{10^{m!m}} \leq \frac{C}{b^n}.$$

Значит, в силу теоремы Лиувилля число α не может быть алгебраическим, а, следовательно, оно трансцендентно.

Трансцендентные числа, построенные с помощью теоремы Лиувилля, получили название *числа Лиувилля*.

В 1873 году французским математиком Ш. Эрмитом были развиты новые методы, позволившие ему доказать трансцендентность числа e.

В 1882 году немецкий математик Ф. Линдеман доказал трансцендентность числа π и тем самым доказал невозможность построения циркулем и линейкой квадрата с площадью, равной площади круга единичного радиуса, т. е. с площадью π. Это было решением последней из трех знаменитых задач на построение с помощью циркуля и линейки, решение которых затянулось более чем на две тысячи лет.

Отметим, что в настоящее время вопрос об арифметической природе многих известных чисел, т. е. вопрос о том, являются ли они алгебраическими или трансцендентными, является открытым, например, таков вопрос о трансцендентности постоянной Л. Эйлера C. Напомним, что

$$C = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

В настоящее время даже не известно, является ли постоянная Л. Эйлера рациональным или иррациональным числом.

В конце XIX века в рамках развиваемой им теории множеств немецкий математик российского происхождения Г. Кантор[1] как следствие установленного им фундаментального результата о несчетности множества действительных чисел доказал, что *множество действительных трансцендентных чисел равномощно множеству всех действительных чисел*, а значит, в частности, оно несчетно. На протяжении многих лет математики строили (искали) конкретные трансцендентные числа

[1] Г. Кантор родился в Санкт-Петербурге, на Васильевском острове, и некоторое время с родителями проживал там, о чем свидетельствует установленная уже в наше время на одном из зданий на Васильевском острове мемориальная доска.

– трансцендентные числа Лиувилля либо устанавливали трансцендентность конкретных интересных по тем или иным причинам чисел, напрмер, e и π, а Г. Кантор, исходя из общих принципов теории множеств, установил, что “почти все действительные числа трансцендентны, а алгебраические числа являются достаточно редким исключением”.

Если α – корень полинома с рациональными коэффициентами, то α – корень полинома с целыми коэффициентами. Поэтому можно считать, что алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами. Если ненулевому многочлену $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ степени n сопоставить “норму”

$$||f(x)|| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + n,$$

то легко понять, что для каждого натурального числа m существует лишь конечное число целочисленных полиномов с нормой m. Поэтому множество ненулевых целочисленных полиномов счетно, будучи равным счетному объединению конечных множеств. Так как полином степени n имеет не более, чем n корней, то множество Al всех действительных алгебраических чисел представимо в виде счетного объединения конечных множеств. К тому же, оно содержит множество рациональных чисел, значит, множество Al всех алгебраических действительных чисел счетно.

Множество $R\setminus Al$ трансцендентных чисел бесконечно, так как в противном случае множество R всех действительных чисел было бы счетным, а его несчетность установлена Г. Кантором с помощью хорошо нам известного метода, носящего название *диагональный метод Кантора.* Поэтому во множестве $R \setminus Al$ есть счетное подмножество B. Обозначим через C множество $(R \setminus Al) \setminus B$. Тогда

$$R = C \cup (Al \cup B),$$
$$R \setminus Al = C \cup B.$$

Что позволяет задать биективное отображение множества R всех действительных чисел на множество $R \setminus Al$ всех действительных трансцендентных чисел, отобразив множество C само на себя тождественно, а счетное множество $Al \cup B$ – на счетное множество B. Значит, множество $R \setminus Al$ трансцендентных чисел равномощно множеству R всех действительных чисел.

Формулы для простых чисел

П. Ферма предполагал, что все числа $F_n = 2^{2^n} + 1$ при произвоьных натуральных n являются простыми и проверил это для $n = 1, 2, 3, 4$.

Однако вопрос о простоте числа $F_5 = 2^{2^5} + 1$ из-за его величины для П. Ферма оказался недоступным. И лишь Л. Эйлер в 1739 году установил, что это число составное. Числа $F_n = 2^{2^n} + 1$ получили название чисел Ферма, их важность объясняется, например, теоремой К. Ф. Гаусса, утверждающей, что правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда

$$n = 2^m p_1 p_2 \cdots p_k,$$

где p_1, p_2, ..., p_k – простые числа Ферма. В настоящее время известно лишь конечное число простых чисел Ферма.

К Л. Эйлеру восходит вопрос о построении выражений, дающих "достаточно много" простых чисел. Сам Л. Эйлер привел простой пример полинома $x^2 - x + 41$, который дает "достаточно много" простых значений – при $x = 0, 1, 2, \ldots, 40$ этот полином принимает простые значения.

Теорема Дирихле утверждает, что при любых натуральных взаимно простых a и b арифметическая прогрессия $an + b$ содержит бесконечно много простых чисел, т. е. среди значений полинома $ax + b$ при натуральных значениях аргумента содержится бесконечно много простых чисел, но есть, конечно, и бесконечно много составных, например, числа $a(bn) + b$. В настоящее время не известно ни одного примера многочлена $p(x)$ степени $n > 1$, дающего бесконечно много простых чисел при натуральных значениях аргумента.

Приведем пример формулы, которая дает все простые числа, но не может рассматриваться, как дающая ответ на вопрос Л. Эйлера.

Занумеруем простые числа в порядке их возрастания

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots.$$

Тогда существует такое действительное число α, что при любом n выполняется равенство

$$p_n = \mathrm{rest}([10^{n^2}\alpha], 10^n).$$

Полагаем

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{k^2}}.$$

Тогда

$$10^{n^2}\alpha = 10^{n^2-1}p_1 + 10^{n^2-4}p_2 + \ldots + 10^{2n-1}p_{n-1} + p_n + 10^{-2n-1}p_{n+1} + \ldots.$$

Полагаем

$$\gamma = 10^{-2n-1}p_{n+1} + \ldots.$$

В соответствии с постулатом Бертрана при любом натуральном n выполняется неравенство

$$p_n < p_{n+1} < 2p_n.$$

Поэтому

$$p_{n+1} < 2^{n+1} < 10^{n+1}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$0 < \gamma < 1.$$

Значит

$$[10^{n^2}\alpha] = 10^{n^2-1}p_1 + 10^{n^2-4}p_2 + \ldots + 10^{2n-1}p_{n-1} + p_n.$$

Поэтому

$$[10^{n^2}\alpha] \equiv p_n (\mod 10^{2n-1}).$$

Но тогда

$$[10^{n^2}\alpha] \equiv p_n (\mod 10^n).$$

А так как $p_n < 10^n$, то

$$p_n = \mathrm{rest}([10^{n^2}\alpha], 10^n).$$

Почему же эта "красивая" формула нас не устраивает? Ведь она дает все простые числа и только их! Но для построения входящего в эту формулу числа α необходимо иметь в своем распоряжении все простые числа. Круг замкнулся!

На II Международном математическом конгрессе, проходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, великий немецкий математик Давид Гильберт выступил со ставшим впоследствии знаменитым докладом "Математические проблемы", в котором он сформулировал 23 проблемы из различных разделов математики, на решении которых, по его мнению, могли бы сосредоточить свои усилия математики XX века. Проблема, стоявшая в этом списке под номером 10, получила название 10-я проблема Д. Гильберта. Она была решена лишь в конце 60-х годов прошлого века совместными усилиями американских математиков М. Дэвиса, Х. Путнам, Дж. Робинсон и российского математика Ю. В. Матиясевича [1], [2].

Диофантовыми уравнениями называются уравнения вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad (D)$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами от переменных x_1, x_2, ..., x_n, при условии, что интересуются не произвольными, а лишь целочисленными или натуральными решениями. Хотя сам Диофант (великий древнегреческий математик) интересовался решением уравнений в рациональных числах. Самыми известными диофантовыми уравнениями являются уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ и уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = 1$. Кстати, такое название этому уравнению дал Л. Эйлер, хотя специалисты по истории математики считают, что сам Пелль к этому уравнению не имел никакого отношения. Частные случаи этого уравнения исследовались еще древнеиндийскими математиками, а особое внимание на него обратил Ферма в письме, которое он в феврале 1657 года направил английским математикам и которое получило название “второй вызов Ферма”.

Приведем формулировку 10-й проблемы Д. Гильберта.

Задача о разрешимости диофантова уравнения.

Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах.

Способ, о котором идет речь в 10-ой проблеме Д. Гильберта, теперь называется *алгоритмом.*

Исследования по 10-й проблеме Д. Гильберта велись в рамках “Теории алгоритмов”, “Теории рекурсивных и частично рекурсивных функций”, “Теории рекурсивных и рекурсивно перечислимых множеств” и “Математической логики” – математических дисциплин, казалось бы, весьма далеких от “Теории чисел”. Однако полученные в этих исследованиях фундаментальные результаты позволили решить “достаточно конкретные” задачи из “Теории чисел”, не поддававшиеся решению на протяжении 200 лет.

М. Дэвис, Х. Путнам, Дж. Робинсон и Ю. В. Матиясевич доказали, что такой общий метод или алгоритм, о котором идет речь в 10-ой проблеме Д. Гильберта, разработать невозможно. Заметим, что если для уравнения (D) интересоваться решением в действительных числах, то при $n = 1$ разрешающий алгоритм дает хорошо известная теорема Штурма, а в общем случае – алгоритм А. Тарского. Если же интересоваться решением в рациональных числах, то вопрос о существовании разрешающего алгоритма в настоящее время остается открытым.

Заметим, что вопрос о разрешимости диофантовых уравнений в целых числах эквивалентен вопросу о разрешимости диофантовых уравнений в натуральных числах.

В ходе этих исследований М. Дэвиса, Х. Путнама, Дж. Робинсон и Ю. В. Матиясевича было введено оказавшееся чрезвычайно важным понятие *диофантова* множества натуральных чисел.

Определение 2. *Подмножество U множества натуральных чисел N называется диофантовым, если существует такой полином $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами, что для произвольного натурального числа m справедлива эквивалентность*

$$m \in U \iff$$

уравнение $F(m, x_1, \ldots, x_n) = 0$ *имеет решение в натуральных числах.*

М. Дэвис, Х. Путнам, Дж. Робинсон и Ю. В. Матиясевич установили фундаментальный результат в теории алгоритмов.

Теорема 2 (Дэвис–Путнам–Робинсон–Матиясевич)**.** *Подмножество U множества натуральных чисел N является рекурсивно перечислимым тогда и только тогда, когда оно является диофантовым.*

Этот фундаментальный результат имеет достаточно неожиданное следствие.

Если U – диофантово подмножество множества натуральных чисел, а $F(x, x_1, \ldots, x_n)$ – соответствующий полином, то U совпадает с множеством положительных значений полинома

$$Q(x, x_1, \ldots, x_n) = x \cdot (1 - F^2(x, x_1, \ldots, x_n)),$$

принимаемых при всевозможных натуральных значениях аргументов x, x_1, ..., x_n.

Хорошо известно, что множество P простых чисел является рекурсивно перечислимым, оно даже рекурсивно, поэтому оно диофантово, значит, существует такой полином $Pr(x_1, \ldots, x_n)$ с целыми коэффициентами, что множество P совпадает с множеством всех натуральных значений этого полинома. Это дает ответ на вопрос, восходящий к Л. Эйлеру.

Для полиномов от одной переменной ситуация иная – хорошо известно, что любой полином с целыми коэффициентами, принимающий хотя бы одно отличное от 1 натуральное значение, принимает бесконечно много раз составные натуральные значения.

Отметим, что доказать существование полинома $Pr(x_1, \ldots, x_n)$ "чисто теоретико-числовыми" методами, а тем более, его построить, не представляется возможным, а теорема Дэвиса–Путнама–Робинсон–Матиясевича не только позволяет доказать существование такого полинома, но построить его в явном виде. Явный вид такого полинома можно найти в [3].

Ссылки

[1] Матиясевич Ю.В. Диофантовость перечислимых множеств // ДАН СССР. 1970. Том 130, № 3. С. 495–498.

[2] Матиясевич Ю. В. Десятая проблема Гильберта. М.: Наука, 1993.

[3] Jones J. P., Sato D., Wada H., Wiens D. Diophantine representation of the set of prime numbers // Amer. Math. Mon. V. 83. № 6. C. 449–464.

УДК 512.54

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: durnev@uniyar.ac.ru

Об аменабельных подгруппах F-групп

Устанавливается справедливость альтернативы Титса для аменабельности для подгрупп F-групп.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: фуксовы группы, F-группы, аменабельные группы, альтернатива Титса.

Понятие аменабельной группы было введено Дж. фон Нейманом в работе [1].

Группа G называется *аменабельной*, если на ней существует нетривиальная конечно аддитивная левоинвариантная мера, т. е. на множестве $P(G)$ всех подмножеств множества G определена функция μ, принимающая неотрицательные значения, и удовлетворяющая условиям:

1) $\mu(G) \neq 0$,

2) для любых двух непересекающихся подмножеств U и V множества G выполняется равенство

$$\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V),$$

3) для любого подмножества U множества G и любого элемента g группы G выполняется равенство

$$\mu(gU) = \mu(U).$$

Класс аменабельных групп замкнут относительно взятия подгрупп, факторгрупп и расширений групп. Кроме того объединение возрастающей цепочки аменабельных групп само аменабельно. Поэтому класс аменабельных групп замкнут относительно конечных и даже счетных прямых, но не декартовых, произведений.

Дж. фон Нейман установил [1], что любая локально разрешимая группа аменабельна, а любая свободная нециклическая группа неаменабельна. Так как подгруппа аменабельной группы сама аменабельна,

©Дурнев В. Г., 2016
©Зеткина О. В., 2016
©Зеткина А. И., 2016

то любая группа, в которую вложима свободная группа ранга 2, неаменабельна. К этой же работе Дж. фон Неймана восходит гипотеза о справедливости обратного утверждения, т.е. об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2.

В работе [6] А. Ю. Ольшанский построил контрпример – пример неаменабельной группы без свободных неабелевых подгрупп.

С. И. Адян [7] доказал неаменабельность любой свободной периодической группы $B(m, n)$ при любом $m \geq 2$ и любом нечетном $n \geq 665$. Это был первый пример неаменабельной группы, удовлетворяющей нетривиальному тождеству.

Титсом [2] доказано, что для любой конечно порожденной линейной группы G справедливо утверждение:

либо группа G содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2,

либо группа G почти разрешима.

Это привело к понятию ***альтернатива Титса*** для класса групп:

для класса групп C выполняется ***альтернатива Титса****, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение:*

либо группа G почти разрешима, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Изучению классов групп, для которых справедлива ***альтернатива Титса***, посвящен ряд работ различных авторов.

Альтернатива Титса связана со следующим вопросом, достаточно давно и независимо изучавшимся в комбинаторной теории групп.

Для каких классов групп C справедливо утверждение:

для произвольной группы G из этого класса справедлива альтернатива –

либо на группе G выполняется нетривиальное тождество, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Последнее утверждение мы будем называть ***альтернативой Титса для тождеств***.

Для подгрупп групп с одним определяющим соотношением последний вопрос полностью исследован в работах Д. И. Молдаванского [5], А. А. Чеботаря [8] и А. Карраса и Д. Солитэра [9]. Кроме того, в работе А. Карраса и Д. Солитэра [9] доказано, что если H – подгруппа группы G с одним определяющим соотношением, то либо H содержит свободную подгруппу ранга 2, либо H разрешима, а значит, как доказано Д. И. Молдаванским [5], метабелева. Таким образом для подгрупп групп с одним определяющим соотношением выполнен усиленный вариант ***альтернативы Титса***. Для групп, удовлетворяющих условию малого сокращения 1/6, рассматриваемый вопрос изучен в работах В. П. Классена [10] при описании подгрупп этих групп. Для гиперболических групп, а значит, в частности, для групп, удовлетворяющих условию малого сокращения $1/6$, справедливость ***альтернативы Титса для тождеств*** установлена А. Ю. Ольшанским [11].

В то же время Брин и Сквайер построили группу на которой не выполняется никакое нетривиальное тождество, однако в нее не вложима свободная группа F_2 ранга 2.

По аналогии можно рассмотреть ***альтернативу Титса для аменабельности***.

Для класса групп C выполняется ***альтернатива Титса для аменабельности****, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение:*

либо группа G аменабельна, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Такая формулировка восходит к базовой работе Дж. фон Нейманом в работе [1]: в ней сформулирована гипотеза об аменабельности любой группы, в которую не вложима свободная группа ранга 2.

Из выше сказанного следует, что ***альтернатива Титса для аменабельности*** справедлива для класса всех подгрупп групп с одним определяющим соотношением и для класса подгрупп гиперболических групп.

В соответствии с определением из монографии Р. Линдона и П. Шуппа [4] F-группой мы называем группу с заданием вида

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_n \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \ldots a_p Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

где $p, n \geq 0$, все $m_i > 1$ и либо

$$Q \;=\; [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}],$$

где $2t = n$ и [a, b] – коммутатор элементов a и b, либо

$$Q \;=\; b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Как отмечается в указаной монографии, F-группы – это фуксовы группы с ориентируемым или неориентируемым факторпространством, исключая те из них, которые разлагаются в свободное произведение циклических. Точнее, F-группы – это конечно порожденныые фуксовы группы, а бесконечно порожденные фуксовы группы раскладываются в свободное произведение циклических групп.

В монографии Р. Линдона и П. Шуппа [4] дано полное описание абелевых подгрупп произвольных F-групп. В работе [3] дано описание подгрупп, на которых выполняется нетривиальное тождество, произвольных фуксовых групп. В настоящем сообщении рассматривается вопрос об аменабельности подгрупп произвольных F-групп.

Теорема. *Для подгрупп фуксовых групп выполняется* ***альтернативы Титса для аменабельности****: произвольная подгруппа H фуксовой группы либо является аменабельной, либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга* 2.

Доказательство. Пусть G – произвольная фуксова группа. Если она не является конечно порожденной, то раскладывается в свободное произведение циклических групп [4]. Тогда по теореме А. Г. Куроша [12] произвольная ее нециклическая подгруппа H сама является свободным произведением циклических групп. Пусть $H = A * B$, где A и B – нетривиальные группы. Если хотя бы одна из них содержит не менее трех элементов, то H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2 [13]. Если же A и B – группы второго порядка, то H – метабелева, а значит аменабельная группа.

Если группа G является конечно порожденной фуксовой группой, то G – F-группа, поэтому произвольная ее нециклическая подгруппа H или раскладывается в свободное произведение циклических групп, либо является F-группой [4]. Так как любая циклическая группа аменабельна, то остается доказать, что если H является F-группой и в нее не вложима свободная группа ранга 2, то H является аменабельной группой.

Пусть нециклическая группа H имеет задание

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_n \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \ldots a_p Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

где $p, n \geq 0$, все $m_i > 1$ и либо $Q = [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}]$, где $2t = n$ и $[a, b]$ – коммутатор элементов a и b, либо

$$Q = b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Если $p = 0$, то H имеет задание

$$\langle\langle\, b_1, \ldots, b_n \,|\, Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

и либо

$$Q = [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}], \quad \text{где } 2t = n,$$

либо

$$Q = b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Так как H – нециклическая группа, то $n \geq 2$.

При $n = 2$ задание принимает вид

$$\langle\langle\, b_1, b_2 \,|\, [b_1, b_2] = 1 \,\rangle\rangle$$

или

$$\langle\langle\, b_1, b_2 \,|\, b_1^2 b_2^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

В первом случае H – свободная абелева группа ранга 2, а значит, аменабельная. А во втором случае прямые вычисления показывают, что коммутант группы H – бесконечная циклическая группа, поэтому H – метабелева, а значит аменабельная группа. Заметим, что в рассматриваемом случае группа H содержит в качестве нормальной подгруппы индекса 2 свободную абелеву группу ранга 2 [4].

Случай $n > 2$ невозможен, так как тогда группа H была бы свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, b_1, b_2 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, b_3, \dots, b_n \,\rangle\rangle$$

с объединением по некоторым бесконечным циклическим подгруппам и в нее была бы вложима свободная группа ранга 2, что противоречит сделанному выше предположению.

При $p = 1$ задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, b_1, \dots, b_n \,|\, Q^m = 1 \,\rangle\rangle, \quad \text{где} \quad m > 1.$$

Так как по предположению H не содержит свободную подгруппу ранга 2 и нециклическая, а кроме того H имеет кручение, так как $m > 1$, то в силу результата А. Карраса и Д. Солитэра [9] H – бесконечная диэдральная группа, т. е. имеет задание

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,|\, c_1^2 = 1, c_2^2 = 1 \,\rangle\rangle,$$

что, как легко понять, невозможно.

Пусть $p \geq 2$.

Если $n \geq 1$, то H – свободное произведение групп

$$\langle\langle\, a_1, \dots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \dots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, b_1, \dots, b_n \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соответственно элементами $a_1 \dots a_p$ и Q.

Так как по предположению в группу H не вложима свободная подгруппа ранга 2, то $n = 1$.

Так как при $p \geq 3$ и при $p = 2$, но $m_1 \geq 3$ или $m_2 \geq 3$, группа

$$\langle\langle\, a_1, \dots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \dots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle$$

содержит свободную подгруппу ранга 2, то остаетсяя рассмотреть два случая:

1) $n = 0$, $p \geq 2$;

2) $n = 1$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

В первом случае задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, a_1, \dots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \dots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \dots a_p = 1 \,\rangle\rangle.$$

Если $p \geq 4$, то H – свободное произведение групп

$$\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^{m_1} = 1, a_2^{m_2} = 1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, a_3, \ldots a_p \,|\, a_3^{m_3} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соответственно элементами a_1a_2 и $a_3 \ldots a_p$.

Так как в случаях, когда $p \geq 5$, либо $p = 4$, но по крайней мере одно из чисел m_1, m_2, m_3 или m_4 не меньше 3, одна из этих групп содержит свободную подгруппу ранга 2, а по предположению в группу H не вложима свободная подгруппа ранга 2, то $p = 4$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$.

В этом случае группа H имеет задание

$$\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_3^2 = 1, (a_1a_2a_3)^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Обозначим через N циклическую подгруппу, порожденную элементом a_1a_2. Из равенств

$$\begin{aligned}
&(a_1a_2a_3)^2 = 1, \quad a_1a_2a_3 = a_3a_2a_1,\\
&a_1^{\varepsilon} \cdot a_2a_3 \cdot a_1^{-\varepsilon} = a_3a_2 = (a_2a_3)^{-1},\\
&a_2^{\varepsilon} \cdot a_2a_3 \cdot a_2^{-\varepsilon} = a_3a_2 = (a_2a_3)^{-1},\\
&a_3^{\varepsilon} \cdot a_2a_3 \cdot a_3^{-\varepsilon} = a_3a_2 = (a_2a_3)^{-1},
\end{aligned}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, следует, что N – нормальная подгруппа. При этом

$$H \diagup N \;=\; \langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1 \,\rangle\rangle -$$

бесконечная диэдральная группа, метабелева. Значит сама группа H – разрешимая ступени 3, а значит аменабельная.

Рассмотрим оставшийся подслучай $p = 3$ рассматриваемого первого случая, когда $n = 0$. В этом случае задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^{m_1} = 1, a_2^{m_2} = 1, a_3^{m_3} = 1, a_1a_2a_3 = 1 \,\rangle\rangle.$$

т.е. H – группа многогранника (m_1, m_2, m_3) [14]. Можно считать, что $m_1 \leq m_2 \leq m_3$. Для завершения доказательства воспользуемся тем, что в любой F-группе есть подгруппа конечного ранга без кручения [4].

Каждая конечная группа аменабельна. Известно [14], что группа многогранника (m_1, m_2, m_3) конечна лишь в следующих четырех случаях:

1) $m_1 = m_2 = 2$,

2) $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 3$,

3) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$,

4) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$.

Пусть группа H бесконечна. В любой F-группе H есть нормальная подгруппа N конечного индекса без кручения [4], которая тоже является F-группой. Значит N имеет задание вида

$$\langle\langle\, t_1, s_1, \ldots, t_m, s_m \,|\, \prod_{i=1}^{m} [t_i, s_i] \;=\; 1 \,\rangle\rangle$$

или вида

$$\langle\langle\, c_1, \ldots, c_k \,|\, c_1^2 \ldots c_k^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Покажем, что в рассматриваемом случае в группе H есть нормальная подгруппа конечного индекса, являющаяся свободной абелевой группой ранга 2, значит H почти абелева, а значит аменабельна.

Предположим, что рассматриваемая подгруппа N имеет задание первого типа.

Так как по предположению в H не вложима свободная группа ранга 2, то $m = 1$, ибо в противном случае группа N является свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, t_1, s_1 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, t_2, s_2, \ldots, t_m, s_m \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденымм соответственно элементами

$$[t_1, s_1] \quad \text{и} \quad \prod_{i=2}^{m} [t_i, s_i].$$

Поэтому в N, а значит и в H, вложима свободная группа ранга 2.

Итак в этом случае N – свободная абелева группа ранга 2.

Предположим, что рассматриваемая подгруппа N имеет задание второго типа. Так как подгруппа N без кручения, то $k \geq 2$.

Так как по предположению в H не вложима свободная группа ранга 2, то $k = 2$, ибо в противном случае группа N является свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, c_3, \ldots, c_k \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденымм соответственно элементами

$$c_1^2 c_2^2 \quad \text{и} \quad c_3^2 \ldots c_k^2.$$

Поэтому в N, а значит и в H, вложима свободная группа ранга 2.

Итак в этом случае N имеет задание вида

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,|\, c_1^2 c_2^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

В этом случае N содержит в качестве нормальной подгруппы индекса 2 свободную абелеву группу ранга 2.

Итак, N содержит в качестве нормальной подгруппы конечного индекса свободную абелеву группу ранга 2. Значит в рассматриваемом случае H содержит в качестве подгруппы конечного индекса свободную абелеву группу ранга 2. Поэтому H аменабельна.

Этим завершается рассмотрение случая $n = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $n = 1$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

$$H = \langle\langle\, a_1, a_2, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_1 a_2 b_1^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Обозначим через N циклическую подгруппу, порожденную элементом b_1^2. Легко проверить, что N – нормальная подгруппа и

$$H/N = \langle\langle\, a_1, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, b_1^2 = 1 \,\rangle\rangle$$

– бесконечная диэдральная группа, метабелева. Значит сама группа H – разрешимая ступени 3, а значит аменабельная. □

Ссылки

[1] Neumann, J. Zur allgemeinen Theorie des Masses / J. von Neumann // Fund. Math. 1929. V. 13. S. 73–116.

[2] Tits, J. Free subgroups in linear groups / J. Tits // J. Algebra.– 1972. V. 20. P. 250–270.

[3] Дурнев В. Г. О некоторых подгруппах фуксовых групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. ЯрГУ. 1998. С. 69–77.

[4] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[5] Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журнал. 1967. Т. 8. С. 1370–1384.

[6] Ольшанский А. Ю. К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе // Успехи матем. наук. 1980. Т. 35, Вып.Ё4. С. 199–200.

[7] Адян С. И. Случайные блуждания на свободных периодических группах // Известия РАН. Серия математическая. 1982. Т. 46, Вып. 6. С. 11139–1149.

[8] Чеботарь А. Подгруппы групп с одним определяющим соотношением, не содержащие свободных подгрупп ранга 2 // Алгебра и логика. 1971. Т. 10. С. 570–586.

[9] Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Canad. J. Math. 1971. V. 23. P. 627–643.

[10] Классен В. П. Строение подгрупп с тождеством в группах с малой мерой налугания определяющих слов // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 3. С. 305–313.

[11] Ольшанский А. Ю. SQ-универсальность гиперболических групп // Матем. сборник. 1995. Т. 186, Вып. 8. С. 119–132.

[12] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука. 1967.

[13] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука. 1974.

[14] Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука. 1980.

УДК 517.51

И.П. Иродова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: IrinaIrodova@gmail.com

О приближении сплайнами со свободными узлами

В статье приводится один из способов приближения функции на отрезке с помощью сплайнов со свободными узлами

Библиография: 1 название.

Ключевые слова: сплайн, узлы сплайна, приближение функции, скорость приближения.

Теория приближения, основоположником которой считается П. Л. Чебышев, является одним из разделов анализа. Она изучает закономерности, связанные с заменой функции более простой. Используя методы теории приближения, можно решать задачи численного анализа, дифференциальных и интегральных уравнений. Алгоритмы теории приближения активно используются при сжатии изображений. В рамках спецкурса "Алгоритмы теории приближения" студенты применяют полученные знания для написания программ.

В этой статье будет рассмотрен один из способов приближения функции одной переменной, заданной на отрезке. В качестве аппарата приближения выбираются сплайны со свободными узлами. После изучения этой темы студенты должны написать программу, реализующую алгоритм. Кроме того, им нужно сравнить результаты приближения одной и той же функции с помощью разных аппаратов приближения.

Перейдем к описанию алгоритма. Для этого сначала дадим определение множества S_n^k сплайнов со свободными узлами.

Множество S_n^k состоит из сплайнов степени k, гладкости $k-1$ подчиненных разбиению отрезка на n частей.

©Иродова И П., 2016

Заметим, что множество S_n^k отличается от множества сплайнов $S^k(T_n)$ с фиксированными узлами тем, что фиксируется не разбиение T_n, а только количество узлов в разбиении. Это позволяет получать хорошую скорость приближения с помощью сплайнов со свободными узлами, так как алгоритм подстраивается под особенности функции. Такие алгоритмы называют адаптивными.

Покажем на простом примере преимущество приближения функциями из множества S_n^k. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана функция $F(x) = x^r$, $0 < r < 1$. Будем приближать ее кусочно - постоянными функциями из S_n^0. Разобьем область значений этой функции на n равных частей. Получившиеся точки обозначим y_i.Искомые узлы x_i сплайна s найдем из условия $F(x_i) = y_i$. Остается взять $s(x) = y_i$, если $x_i < x < x_{i+1}$. Тогда

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - s(x)| = \frac{1}{n}.$$

Известно (см., например, [1]), что такой же порядок аппроксимации дает и сплайн наилучшего приближения из S_n^0. Для сравнения найдем скорость приближения кусочно-постоянными функциями с равномерными узлами разбиений. Так как первый модуль непрерывности функции $F(x) = x^r$ с ней совпадает, то по теореме Джексона скорость приближения функции F с помощью сплайнов из пространства $S^0(T_n)$ имеет порядок $O(n^{-r})$. Заметим, что если $r > 1$, то скорость приближения в обоих случаям одна и та же $O(n^{-1})$.

Этот пример подтверждает известный факт: в случае приближения гладких функций равномерное распределение узлов сплайна является почти оптимальным. Таким образом, мы показали, что используя сплайны со свободными узлами вместо сплайнов с равномерными узлами, мы смогли улучшить погрешность приближения с $O(n^{-r})$ до $O(n^{-1})$.

Перейдем к случаю приближения произвольной непрерывной функции f на отрезке $[a,b]$. По-прежнему будем приближать кусочно-постоянными функциями из множества S_n^0. Рассмотрим функцию

$$g(x) := \mathrm{Var}_{[a,x]}\, f.$$

Функция g непрерывна в силу непрерывности f и неубывает от 0 до $V := g(b)$ по определению вариации. Применим к функции g алгоритм, описанный выше. Для этого разобьем отрезок $[0,V]$ на n равных частей, $y_i = \frac{iV}{n}, i = 0,1,...,n$, и решим уравнения

$$g(x) = y_i, i = 0,1,...,n.$$

Пусть x_i – наибольший из корней уравнения. Тогда

$$g(x_{i+1}) - g(x_i) = \mathrm{Var}_{[x_i,x_{i+1}]}\, f = \frac{V}{n}. \tag{1}$$

Если функция непрерывно-дифференцируема, то известно, что

$$\mathrm{Var}_{[c,d]}\, f = \int_c^d |f^{'}(t)|dt,$$

и уравнение (1) перепишем в виде

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{'}(t)|dt = \frac{1}{n}\int_a^b |f^{'}(t)|dt. \tag{2}$$

Теперь объясним, как решить уравнение (2). Для этого нужно с хорошей точностью приблизить функцию f интерполяционной ломаной l с равномерными узлами (узлы интерполяции и узлы ломаной совпадают) и заменить f в уравнении (2) на l. Введем в рассмотрение функцию

$$z(x) = \int_a^x |l^{'}(t)|dt.$$

Тогда уравнение (2) в терминах функции z имеет вид

$$z(x_{i+1}) - z(x_i) = \frac{z(b)}{n}, \quad z(a) = 0. \tag{3}$$

Так как производная функции $l(x)$ является кусочно-постоянной, то z – непрерывная, монотонно возрастающая, кусочно-линейная функция. Такой же будет и обратная к ней функция z^{-1}. Кроме того, $z(x_0) = 0$, $a = x_0$. Тогда задача (3) сводится к вычислению функции z^{-1} в точках $\frac{iz(b)}{n}$.

В заключение покажем, по каким формулам вычислять искомые узлы x_i сплайна s. Пусть мы приблизили функцию f интерполяционной ломаной l, $f(t_i) = l(t_i)$, $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{N} = t$. Тогда

$$l^{'}(x) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t};$$

здесь $t_i < x < t_{i+1}$. Обозначим

$$B_i := \frac{|f(t_{i+1}) - f(t_i)|}{t}; \quad A_i := \sum_{k=0}^{i-1} B_k.$$

Из определения функции $z(x)$ следует, что

$$z(x) = A_i + B_i(x - t_i);$$

здесь $t_i < x < t_{i+1}$. Обратная функция z^{-1} на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ определяется по формуле

$$z^{-1}(x) = \frac{x - A_i}{B_i} + t_i.$$

Окончательно имеем:

$$x_i = z^{-1}\left(\frac{iz(b)}{n}\right), \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Мы рассмотрели случай приближения множеством S_n^0. Если приближение осуществлять сплайнами степени k со свободными узлами, то в описанный выше алгоритм нужно внести некоторые изменения. Во-первых, функцию f нужно приближать не ломаной l, а сплайном w степени k гладкости $k-1$, подчиненным равномерному разбиению. Во-вторых, вместо функции z нужно ввести функцию h по формуле

$$h(x) = \int_a^x |w^{(k)}(t)|^{\frac{1}{k}} dt.$$

Так как функция h – кусочно-линейная, непрерывная, неубывающая, то дальнейший ход алгоритма остается без изменений.

В заключение отметим, что теоретическое обоснование алгоритма можно найти в [1].

Ссылки

[1] *К. Де Бор* Практическое руководство по сплайнам М.: Наука. 1985.

УДК 378.147

Л. С. Казарин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lsk46@mail.ru

Особенности курсов «по выбору»

В этой заметке автор делится своими соображениями о содержании и организации некоторых курсов «по выбору» для направления «Математика и компьютерные науки» в классическом университете.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: курсы по выбору, учебный план, компетенции, бакалавриат, магистратура, философия, методология.

Курсы «по выбору» для студентов были введены в результате многолетнего реформирования системы высшего образования и поначалу не очень привлекали внимание преподавателей на нашем факультете. Возможно, это явление новое для многих факультетов и вузов. Во всяком случае, не заметить его в нынешнем учебном году было весьма трудно, ибо учебная нагрузка существенно возросла. Вероятно, это нововведение было задумано много ранее, но внедрялось постепенно. На ранних этапах использование таких курсов помогало сгладить недостатки планирования и некоторые проблемы в распределении учебной нагрузки. Была даже своеобразная апология некоторых курсов в духе «социалистических» выборов, когда дозволялось «выбирать» из единственной возможности.

Рассматриваемая технология образования (использование курсов «по выбору») не является реально новой. Она базируется на исследованиях, проводимых в конце 80-х – начале 90-х годов прошлого столетия и «обкатывалась» в некоторых учебных заведениях России. Знакомство с зарубежным опытом (ФРГ и Испании) показывает, что эта деятельность шла почти одновременно и там (в связи с «болонским процессом»). Более того, ступени ввода различных новшеств были не форсированными, а слегка растянутыми (учитывая сопротивление преподавательской и студенческой среды). По крайней мере, идеология была готова уже лет 15 назад, хотя детали и различные бюрократические

©Казарин Л.С., 2016

тонкости дорабатывались до совсем не давней поры. По крайней мере, автору приходилось встречать острую критику понятия «компетенция» еще года 3 назад, а сам набор «компетенций» не был устоявшимся даже в прошлом году (многие преподаватели недоумевали, зачем «знания, умения и навыки» заменялись «компетенциями»).

Надо отметить достаточно умную, психологически выверенную, последовательность изменений в образовании, отвечающую целям некоей, не формулируемой в явном виде, концепции, фрагменты которой появлялись в общественном сознании только в свернутом виде. Например, многие детали (в том числе, и в формальном воплощении) были отработаны в школьном образовании. Сейчас затронут «нижний» этаж высшего образования (бакалавриат). На очереди магистратура и аспирантура. Когда нынешнее поколение преподавателей и научных работников уйдет из активной деятельности, может произойти кардинальное изменение научно-педагогической элиты. Но это дело более отдаленных дней.

В какой-то мере, нынешнее поколение студентов также оказалось не вполне готовым к происходящим изменениям. Поэтому важно понять, как адаптировать складывающуюся систему обучения в вузе (сейчас речь должна идти о ступени бакалавриата), поскольку образование в вузе, по факту, уже расслоилось и магистратура теперь может рассматриваться как образование лишь для существенно меньшей части студенчества.

Курсы по выбору «Философия и методология науки», «Основания науки» и «История науки» были введены в обиход в работах исследователей в области теории образования уже в начале 90-х годов прошлого века (в том числе и в работах В. С. Сенашенко, В. А. Кузнецовой и других авторов, работавших в ЯрГУ им. П. Г. Демидова) как некоторые блоки «ядра» образования бакалавров. Здесь мы рассмотрим эти курсы для студентов направления «Математика и компьютерные науки».

Автор должен признаться, что он также находился среди разработчиков учебных планов и программ бакалавриата. Первоначальное видение проблемы формирования содержания этого блока дисциплин было довольно смутным. Однако разработчики, помнится, считали, что преподавание этих дисциплин должно осуществляться лишь на старших курсах.

Что такое «философия», более или менее понятно тем, кто сам учился в университете. Кстати, у большинства знакомых автору математиков (как на Западе, так и на Востоке) отношение к этому предмету довольно неоднозначное, а к методологии, которую многие путают с методикой, оно едва ли не отрицательное.

На первом курсе у студентов, обучающихся по программе бакалавриата направления «Математика и компьютерные науки» (далее

МКН), курс «История математики» вполне естествен и служит дополнительным источником мотивации и ориентации в специальнвости. Однако с курсами «Основания математики» (для МКН-1) и «Философия и методология математики» (для МКН-2) имеются немалые трудности. Здесь необходимо учитывать два фактора:

1. Уровень культурного багажа слушателя.

2. Уровень ориентации в данной науке.

Замечу, что к изучению философии в Древней Греции молодые люди просто не допускались. Уровень культурного багажа наших недавних школьников хорошо известен. К примеру, тех, кто сумел окончить, не имея «хвостов», первый курс, не более половины при весьма щадящем подходе к экзаменам. Но надо хорошо понимать две вещи: математика сама по себе – наука, отчасти, являющаяся родоначальницей философии, и имеющая к тому же серьезные нерешенные проблемы в этих самых «Основаниях математики», вряд ли может служить полигоном для тренировки начинающих математиков. Можно, конечно, дать понятие об аксиоматическом методе в математике и других науках, но рассматривать «основные требования к системам аксиом» математики, сравнивать аксиоматику Гильберта и аксиоматическую теорию множеств ZFC, теорию ординалов Неймана и сугубо логические проблемы без курса «Математической логики» означает полную профанацию. Мне доводилось читать лекции по высшей математике для экономистов при схожем восприятии слушателей, но там уровень понимания был лучше. Кстати, в официальных бумагах (рабочая программа дисциплины) записано, что под аудиторные занятия отводится 88 часов! Не будет ли следующим шагом достижение этого уровня изучения в ущерб фундаментальному образованию?

Курс «Философия и методология математики» чуть легче хотя бы потому, что студенты уже знакомы с некоторыми из математических дисциплин (алгебра, математический анализ, геометрия) в пределах 1 курса (то есть на уровне XIX века). Однако слово «методология», которое определяет область знания, изучающую средства, предпосылки и принципы организации познавательной и практически преобразующей деятельности, обязывает ко многому. В первую очередь, к основам математики, к ее философским проблемам, к условиям применимости к реальности, к терминологии. Напомню, что математика уже сама является философской наукой и претендует на значительное место в объяснении бытия. Высшие разделы математики на этом уровне не обсуждаются даже в общих чертах. А от них многое зависит. Наконец, без «Истории математики» также не обойтись, а она содержится в совсем других курсах «по выбору». Вероятно, необходимо выбирать блоками, так, чтобы просматривалась возможная индивидуальная траектория для конкретной персоны.

Имеется совсем небольшое количество учебной литературы по обсуждаемым дисциплинам. Во - первых, это книга В. А. Светлова [1] и книги Ю. П. Петрова [2] и коллектива авторов под редакцией С. А. Лебедева [3]. В первой рассматривается проблема обоснования математики от Г. Фреге, Г. Кантора, Б. Рассела до Д. Гильберта, К. Геделя и А. А. Маркова. Описаны течения классицизма, интуиционизма и конструктивизма в математике. В книге Ю. П. Петрова дана кратко история математики, проблема обоснования анализа и математики в целом, дано описание некоторых примечательных теорем и история и философия информатики. Собственно говоря, книга содержит много интересных фактов из истории математики и информатики, но не очень много о собственно философских проблемах математики (не говоря уж о методологии). Наконец, солидная книга под редакцией С. А. Лебедева посвящена философии науки вообще, но не математики.

Таким образом, как-то сориентировать студента в нужном направлении нелегко. Интересно, что Министерство образования требует учебных пособий по любой дисциплине издания не старше 5 лет. Это хорошая политика для людей, зарабатывающих деньги на издании учебников, но плохая для вузов ввиду постоянного расхода средств на приобретение литературы.

Кстати, в отличие от гуманитарных наук, знания в области фундаментальных наук меняются не так быстро. Есть хорошие книги, которые могут успешно использоваться довольно долго (десятилетиями).

Что же касается дисциплин, упомянутых мною выше, то необходимо серьезное обсуждение их содержания и места в образовании бакалавров направления МКН. При этом не следует спешить с публикацией подробных рабочих программ курсов, которые читаются (в авторской редакции) первый раз. Наконец, касательно выбора студентами дисциплин из списка курсов, которые студент должен выбрать, можно рекомендовать вывешивание перед началом семестра тезисного описания предполагаемых курсов и читающих эти курсы лекторов. Иначе это будет выбор «кота в мешке».

Ссылки

[1] *Светлов В А.* Философия математики. Основные программы обоснования математики XX столетия: Учебное пособие. М. : КомКнига, 2010. 208 с.

[2] *Петров Ю П.* История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. СПб: БХВ-Петербург, 2012. 448 с.

[3] *Лебедев С. А.* Философия науки. / Под ред. С.А.Лебедева; Учебное пособие для вузов. М.: Академический Проект, 2010. 731 с.

УДК 517.2

В. С. Климов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vsk76@list.ru

Бесконечные цепные дроби в курсе анализа

Приводятся краткие сведения и несколько характерных задач, посвященных цепным дробям и их приложениям к вычислительной математике.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: цепные дроби, последовательность, сходимость, неравенство.

В течение большей части двадцатого века цепные дроби считали несправедливо забытыми. Теперь цепные дроби вновь становятся горячим разделом математики. Выходит немалое число монографий и статей, в которых используются и существенным образом развиваются идеи и методы обсуждаемой теории (см., например, книги [1–5] и приведенную там литературу). Вместе с тем раздел «Цепные дроби» отсутствует в задачниках по математическому анализу.

Основное внимание ниже уделяется приложениям цепных дробей к задачам вычислительного характера. Степень трудности предлагаемых ниже упражнений различна. Как правило, решения задач можно найти в руководствах [1–9]. Некоторые из упражнений могут составить темы докладов на семинарах, рефератов, курсовых, дипломных и других квалификационных работ.

I. Определение цепной дроби. Цепной дробью называют выражение вида

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}} = \left[a_0; \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \cdots\right]. \qquad (1)$$

В общем случае элементы цепной дроби a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, \cdots)$ – комплексные числа или скалярные функции нескольких переменных. Выражения вида

©Климов В. С., 2016

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1}, \quad a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}}, \cdots$$

именуют соответственно первой, второй и т. д. подходящими дробями для дроби (1) и обычно обозначают символами $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots, \frac{P_n}{Q_n}$. Если дробь (1) содержит конечное число звеньев $\frac{b_k}{a_k}$, $k = 1, \cdots, n$, то она называется конечной, в противном случае дробь (1) называют бесконечной. Употребляют обозначения

$$\left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^n, \qquad \left[a_0; \frac{b_k}{a_k}\right]_1^\infty.$$

Дробь (1) именуют обыкновенной, если $b_k = 1$ для всех k, в этом случае числа a_k называют неполными частными.

II. Свойства подходящих дробей. Каждую подходящую дробь можно найти, выполнив все действия, указанные в изображении цепной дроби. Ясно, например, что

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{b_1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_1}{a_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2}} = \frac{a_0(a_2 a_1 + b_2) + b_1 a_2}{a_2 + a_1}.$$

К сожалению, уже третья подходящая дробь выглядит в общем случае достаточно громоздко. Введём в рассмотрение последовательности $x[n], y[n]$ $(n = -1, 0, 1, \cdots)$, полагая

$$x[-1] = 1, \quad y[-1] = 0, \quad x[0] = a_0, \quad y[0] = 1, \tag{2}$$

а для натуральных значений n зададим последовательности $x[n], y[n]$ рекуррентными соотношениями

$$x[n] = a_n x[n-1] + b[n]x[n-2], \quad y[n] = a_n y[n-1] + b_n y[n-2]. \tag{3}$$

Очевидно, что последовательности $x[n], y[n]$ условиями (2), (3) определяются однозначно. Они являются решениями одного и того же разностного уравнения $z[n] = a_n z[n-1] + b[n]z[n-2]$, соответствующими различным начальным условиям (2). В качестве самостоятельного упражнения прдлагается установить ряд свойств подходящих дробей

1. Последовательность подходящих дробей $\dfrac{P_n}{Q_n}$ для цепной дроби (1) совпадает с последовательностью частных $\dfrac{x[n]}{y[n]}$.

Замечание. Простоты ради ниже считаем, что $P_n = x_n, Q_n = y_n$. В общем случае $P_n = \gamma_n x_n, Q_n = \gamma_n y_n$, где $\gamma_n \neq 0$; подобная запись также оказыватся полезной [8].

2. Для двух соседних подходящих дробей $\dfrac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ и $\dfrac{P_k}{Q_k}$ цепной дроби (1) справедлива формула

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = (-1)^{k-1}\frac{b_1 b_2 \cdots b_k}{Q_{k-1}Q_k} \quad (k \geqslant 1).$$

3. Для двух одинаковой четности соседних подходящих дробей $\dfrac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}$ и $\dfrac{P_k}{Q_k}$ цепной дроби (1) справедливо соотношение

$$\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} = (-1)^{k}\frac{b_1 b_2 \cdots b_{k-1} a_k}{Q_{k-2}Q_k} \quad (k \geqslant 1).$$

4. Если все элементы a_k, b_k цепной дроби (1) положительны, то её подходящие дроби чётного порядка образуют монотонно возрастающую последовательность, а подходящие дроби нечётного порядка образуют монотонно убыающую последовательность. При этом каждая подходящая дробь четного порядка меньше любой подходящей дроби нечетного порядка.

5. Принцип вилки Если все элементы a_k, b_k конечной цепной дроби (1) положительны, то число α, выражаемое цепной дробью, содержится между двумя соседними подходящими дробями. Справедлива оценка

$$\left|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}\right| \leqslant \frac{b_1 b_2 \cdots b_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}}.$$

III.Сходимость последовательности подходящих дробей. Бесконечную цепную дробь (1) называют сходящейся, если существует конечный предел последовательности $\dfrac{P_k}{Q_k}$ подходящих дробей

$$\alpha = \lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{Q_k}, \tag{4}$$

в этом случае α принимается за значение дроби (1). Если предел (4) не существует, то дробь (1) называется расходящейся.

6. Если все элементы a_k, b_k цепной дроби (1) положительны, причём

$$b_k \leqslant a_k \quad \text{и} \quad a_k \geqslant d > 0 \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

то цепная дробь (1) сходится. Имеет место следующее неравенство

$$\left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leqslant \left|\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{Q_{n-1} Q_n}\right|.$$

7. Если $b_k = 1$, $a_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, то сходимость дроби (1) эквивалентна расходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Для цепных дробей с комплексными элементами не удаётся получить столь эффективных критериев сходимости. Ограничимся лишь одним утверждением.

8. Пусть $a_0 = 0$ и $|a_n| \geqslant |b_n| + 1 \quad (n = 1, 2, \cdots)$. Тогда цепная дробь (1) сходится и её абсолютное значение не превышает 1.

IV.Разложение действительных чисел в цепную дробь. Ниже $[s]$ – целая часть действительного числа s.

Теорема. *Каждое положительное число x допускает представление*

$$x = \left[a_0; \frac{1}{a_k}\right]_1^{\omega},$$

в котором $a_0 = [x], a_k \, (k > 0)$ – натуральные числа; ω конечно, если x – рационально и $\omega = \infty$ для иррационального числа x.

9. Обосновать следующее правило формирования последовательности a_k :

$$a_0 = [x],\ x_1 = x - [x],\ a_1 = \left[\frac{1}{x_1}\right],\ x_2 = \frac{1}{x_1} - a_1,\ a_2 = \left[\frac{1}{x_2}\right], \cdots .$$

После того, как определены x_{n-1} и a_{n-1}, следующая пара x_n, a_n находится по формулам

$$x_n = \frac{1}{x_{n-1}} - a_{n-1}, \quad a_n = \left[\frac{1}{x_n}\right].$$

10. Число Фидия $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ иррационально, поэтому может быть представлено в виде обыкновенной бесконечной цепной дроби. Найдите соответствующее разложение.

11. Найти первые пять подходящих дробей для числа 3, 14159265359 – приближенного значения числа π.

12. Найти первые пять подходящих дробей для числа 365, 2422 – приближенного значения числа суток тропического года.

13. Найти последовательность подходящих дробей и вычислить предел этой последовательности для непрерывной дроби $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ в случае

$$a_0 = 4,\ a_n = 8 (n > 0); \quad a_0 = 0, a_n = 6 (n > 0)$$

14. Формат A_4**.** Найти наименьшее натуральное n, для которого существует такое натуральное число m, что

$$\sqrt{2} < \frac{m}{n} = \frac{297}{210} = \frac{99}{70}.$$

V. Разложение некоторых функций в цепную дробь.

15. Формулы Лагража. Равенства

$$(1+z)^m = \left[1; \frac{mz}{1}, \frac{(1-m)z}{2}, \frac{(1+m)z}{3}, \cdots, \frac{(n-m)z}{2}, \frac{(n+m)z}{2n+1}, \cdots\right]; \tag{6}$$

$$ln(1+z) = \left[0; \frac{z}{1}, \frac{z}{2}, \frac{z}{3}, \frac{2z}{2}, \frac{2z}{3}, \cdots, \frac{nz}{2}, \frac{nz}{2n+1}, \cdots\right] \tag{7}$$

справедливы для любого действительного числа m и всех комплексных чисел z, не принадлежащих лучу $(-\infty, -1)$. Для всех комплексных z имеет место равенство

$$e^z = \left[1, \frac{z}{1}, \frac{z}{-2}, \frac{z}{3}, \frac{z}{-2}, \frac{z}{5}, \cdots, \frac{z}{-2}, \frac{z}{2n+1}, \cdots\right] e. \tag{8}$$

16. Разложение в цепную дробь $\operatorname{tg} z$**.** Имеет место формула Ламберта

$$\operatorname{tg} z = \left[0, \frac{z}{1}, \frac{-z^2}{3}, \frac{-z^2}{5}, \cdots, \frac{-z^2}{2n+1}, \cdots\right]. \tag{9}$$

Это разложение справедливо во всех точках непрервности функции $\operatorname{tg} z$.

17. Найти подходящие дроби $\dfrac{P_n}{Q_n}$, $(n = 1, 2, 3, 4, 5)$ для цепных дробей, фигурирующих в равенствах (6) – (9).

18. Пользуясь разложениями функций $(1+z)^m$, $\ln(1+z)$, e^z, $\operatorname{tg} z$ в цепные дроби, составить таблицы их значений на промежутке $[a, b]$ с точностью до $\varepsilon = 0,00001$. Сравнить объёмы вычислений с возникающими при использовании аппарата степенных рядов.

Ссылки

[1] *Арнольд В. И.* Цепные дроби. Издательство МЦНМО, 2001.

[2] *Гашков С. Б., Чубариков В. Н.* Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М. : Изд-во «Высшая школа», 2000.

[3] *Джоунс У., Троп В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. М. : Мир. 1985.

[4] *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и её применения в вычислительной математике. М. : Наука, 1983.

[5] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Aplications. Amsterdam: North-Holland, 1992.

[6] *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М. : Наука, 1966.

[7] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть 1. М. : Наука 1971. С. 284–290.

[8] *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. Гостехиздат, 1956.

[9] *Хинчин А. Я.* Принятие решений: Метод анализа иерархий / пер. с англ. М. : Радио и связь, 1993. 278 с.

УДК 514.177.2+517.97

В. С. Климов, А. Ю. Ухалов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vsk76@list.ru
E-mail: alex@ukhalov.com

Максимальные шарнирные многоугольники

Изучаются шарнирные многоугольники, имеющие максимальные площади при дополнительных условиях геометрического характера.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: шарнирный многоугольник, площадь, окружность, уравнение.

Всюду ниже шарнирные многоугольники – это многоугольники, у которых длина по крайней мере одной стороны имеет фиксированное значение. В статье рассматриваются различные классы допустимых шарнирных многоугольников, удовлетворяющих дополнительным ограничениям геометрического характера. В классе допустимых шарнирных многоугольников находятся максимальные по площади; краткости ради они будут именоваться максимальными. В первом пункте изучаются задачи для треугольников и четырехугольников. Второй пункт посвящен многоугольникам с большим числом сторон. Основное внимание уделено вычислительным аспектам.

1. Треугольники и четырехугольники. Самой простой из рассматриваемых ниже задач является необходимая для дальнейшего задача

I) Среди треугольников ΔABC, длины двух сторон которых фиксированы $|CB| = a, |CA| = b$, найти максимальный по площади.

Почти столь же просты следующие задачи.

II) Среди треугольников ΔABC с фиксированной одной стороной $|CB| = a$ и противолежащим ей углом A найти максимальный по площади.

©Климов В. С., 2016
©Ухалов А. Ю., 2016

III) Среди треугольников ΔABC с фиксированной одной стороной $|CB| = a$ и периметром $P = |AB| + |BC| + |CA|$ найти максимальный по площади.

IV) Среди треугольников ΔABC с фиксированной одной стороной $|CB| = a$ и длиной биссектрисы AD угла A найти максимальный по площади.

Комментарий. Решением первой задачи является прямоугольный треугольник. В остальных задачах максимален равнобедренный треугольник с основанием BC. Соответствующие треугольники могут быть построены циркулем и линейкой (см. любой курс планиметрии).

Перейдем к задачам для четырехугольников. Естественный аналог первой задачи сформулируем таким образом:

V) Среди выпуклых четырехугольников $ABCD$, длины трех сторон которых фиксированы ($|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c$), найти максимальный по площади.

На этом примере достаточно подробно обсудим возникающие здесь вопросы. Существование максимального четырехугольника следует из теоремы Вейерштрасса. Основная трудность связана с фактическим нахождением этого четырехугольника $ABCD$. В частности, нам неизвестна длина d отрезка DA. Если применить результат задачи I), то становится ясным, что отрезок DA есть гипотенуза прямоугольных треугольников ABD, ACD. Положим $|AC| = u, |BD| = v$. Теорема Пифагора влечет за собой равенства

$$u^2 + c^2 = d^2, \quad v^2 + a^2 = d^2. \tag{1}$$

Точки A, B, C, D находятся на полуокружности с диаметром DA. В силу теоремы Птолемея имеет место соотношение

$$uv = ac + bd. \tag{2}$$

Комбинируя (1) и (2), получаем последовательно равенства

$$(uv)^2 = (d^2 - c^2)(d^2 - a^2) = (ac + bd)^2,$$

$$d^4 - (a^2 + c^2)d^2 + (ac)^2 = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2,$$

$$d^4 - (a^2 + b^2 + c^2)d^2 - 2abcd = 0.$$

Отсюда вытекает, что число d есть положительный корень алгебраического уравнения третьей степени

$$z^3 - (a^2 + b^2 + c^2)z - 2abc = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) эквивалентно равенству

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{z^2} + \frac{2abc}{z^3} = 1,$$

что очевидным образом влечет за собой существование и единственность положительного корня d уравнения (3). Геометрический смысл двух отрицательных корней уравнения (3) неясен.

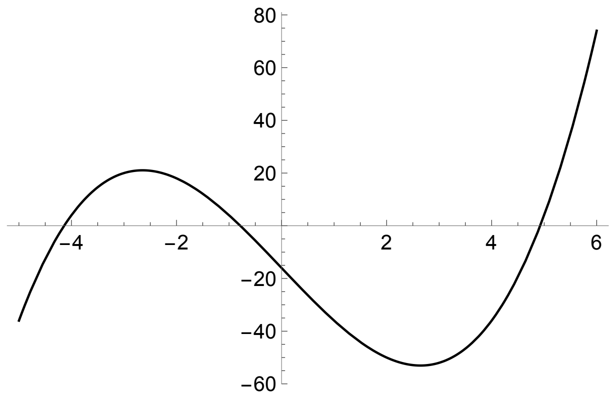


Рис. 1: Решение задачи V) для случая $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. График функции $u = z^3 - (a^2 + b^2 + c^2)z - 2abc$

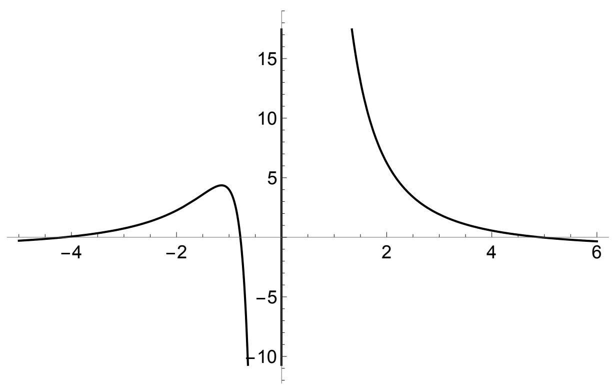


Рис. 2: Решение задачи V) для случая $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. График функции $u = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{z^2} + \dfrac{2abc}{z^3} - 1$

Из общей теории геометрических построений вытекает следующий факт: если a, b, c – натуральные числа, а уравнение (3) не имеет натуральных корней, то это уравнение неразрешимо в квадратных радикалах. Построение отрезка DA длины d с помощью циркуля и линейки невозможно. Например, это так, если $a = 1, b = 2, c = 4$. Оставляя в стороне возможные уточнения и обобщения алгебраического характера, вернемся к вопросу фактического нахождения числа d – положительного корня уравнения (3).

Разумеется, здесь можно применить формулу Тарталья–Кардано, но представляется более рациональным прием, восходящий к Виету, основанный на сведении уравнения (3) к задаче о трисекции угла. Пусть

$$K = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

– среднее квадратичное чисел a, b, c. Как хорошо известно, $K^3 \geqslant abc$, знак равенства возможен лишь в случае равных a, b, c. В уравнении (3) сделаем замену $z = 2K\cos\theta$. Из определения числа K следует, что $a^2+b^2+c^2 = 3K^2$. С учетом этого выводим из (3) соотношения

$$8K^3(\cos\theta)^3 - 6K^3\cos\theta = 2abc,$$

$$4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta = \frac{abc}{K^3}, \quad \cos(3\vartheta) = \frac{abc}{K^3}.$$

Тем самым, доказана явная формула

$$d = 2K\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{abc}{K^3}\right)\right), \tag{4}$$

устанавливающая связь исходной экстремальной задачи с задачей о трисекции угла. Зная число d, нетрудно построить искомый четырехугольник, найти его площадь и другие элементы. В более общем контексте эти вопросы обсуждаются ниже.

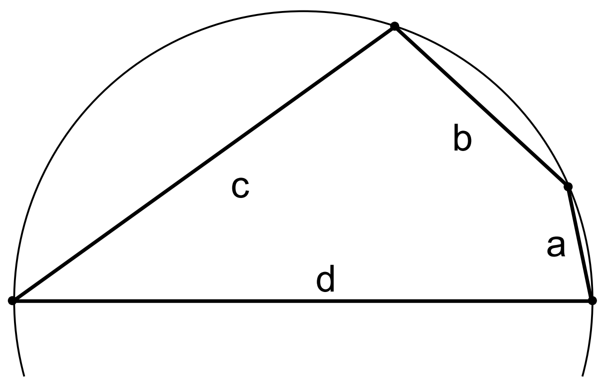


Рис. 3: Решение задачи V) для случая $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. По формуле (4) находим $d \approx 4.92434$

VI) Среди выпуклых четырехугольников $ABCD$, у которых фиксированы длины двух сторон ($|AB| = a$, $|BC| = b$) и угол при вершине D, найти максимальный по площади.

Решение этой задачи достаточно просто. Обозначим через δ и β величины углов при вершинах D и B соответственно. В наших предположениях число δ фиксировано. Если вспомнить решение задачи II, то можно считать, что треугольник $T_1 = ADC$ – равнобедренный

($|AD| = |DC| = c$). Обозначим через u длину отрезка AC. Очевидно, что AC – общая сторона треугольников T_1 и $T_2 = BAC$. В силу теоремы косинусов имеем

$$u^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta. \tag{4}$$

Площади S_1, S_2 треугольников T_1, T_2 считаются по известным формулам

$$S_1 = \frac{u^2}{4tg\frac{\delta}{2}}, \quad S_2 = \frac{1}{2}ab\sin\beta. \tag{5}$$

Площадь S четырехугольника $ABCD$ равна S_1+S_2. Объединяя (4) с (5), получаем

$$S = S_1 + S_2 = \frac{u^2}{4tg\frac{\delta}{2}} + \frac{1}{2}ab\sin\beta =$$

$$\frac{a^2+b^2}{4tg\frac{\delta}{2}} + \frac{ab}{2}\left(\sin\beta - \frac{\cos\beta}{tg\frac{\delta}{2}}\right) = \frac{a^2+b^2}{4tg\frac{\delta}{2}} - \frac{ab}{2\sin\frac{\delta}{2}}\cos\left(\beta + \frac{\delta}{2}\right).$$

Теперь очевидно, что площадь S достигает своего максимума по β лишь для $\beta = \pi - \frac{\delta}{2}$. Совокупность точек, из которых отрезок AC виден под постоянным углом $\pi - \frac{\delta}{2}$, есть дуга $\breve{AC}$ окружности радиуса $c = |CD| = |DA|$ с центром в точке D. Таким образом, три точки A, B, C находятся на окружности радиуса c с центром в точке D.

Из проведенных рассуждений вытекают равенства

$$u^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\frac{\delta}{2}, \quad c = \frac{u}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \tag{6}$$

Формулы (6) подсказывают способ построения отрезка длиной c при помощи циркуля и линейки. Можно сказать, что и весь максимальный четырехугольник может быть построен лишь с помощью этих инструментов.

Решение задачи VI) для случая $a = 4$, $b = 2$, $\delta = 3\pi/5$ показано на рисунке 4. Для этого случая $\beta = 7\pi/10$. По формулам (6) находим

$$u = 2\sqrt{5 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 5.4226,$$

$$c = \left(-1 + \sqrt{5}\right)\sqrt{5 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \approx 3.35135.$$

Теперь перейдем к четырехугольникам. Следующая задача является подготовительной.

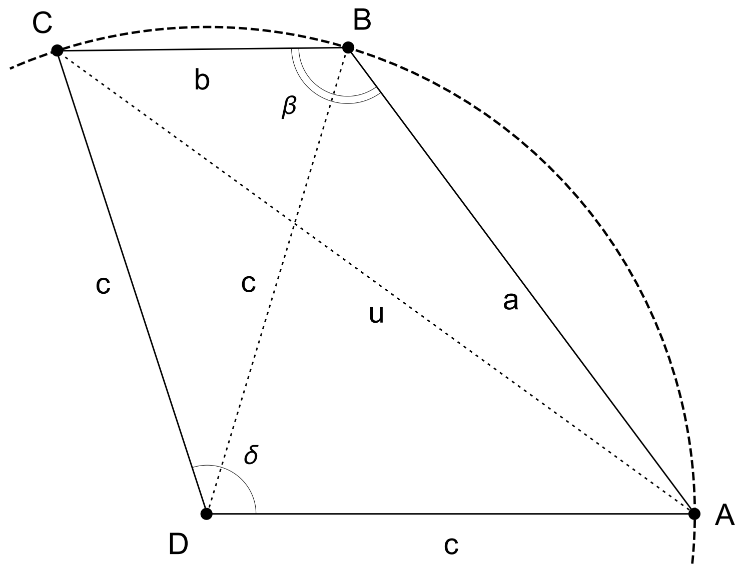


Рис. 4: Решение задачи VI) для случая $a = 4$, $b = 2$, $\delta = 3\pi/5$

VII) Для того, чтобы существовал выпуклый четырехугольник $ABCD$, длины сторон которого равны положительным числам a, b, c, d, необходимо и достаточно неравенство

$$\max\{a, b, c, d\} < p \overset{def}{=} \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Площадь S четырехугольника можно выразить через длины его сторон и сумму θ пары противоположных углов:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\theta}{2}}. \tag{7}$$

Четырехугольник не является жесткой фигурой. В частности, знание длин его сторон не позволяет найти его площадь. Естественно поставить вопрос о максимизации площади четырехугольника с заданными длинами сторон.

VIII) Доказать, что из всех выпуклых четырехугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет тот, вокруг которого можно описать окружность.

Комментарий. Доказав формулу (7), мы автоматически получаем решение задачи VIII). Максимальное значение площади

$$S_{max} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \tag{8}$$

Равенство (8) называют формулой Брахмагупта (7-й век). Диаметр D окружности, описанной около четырехугольника, также можно легко найти:

$$D = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{2S_{max}}. \tag{9}$$

В формулах (8), (9) фигурируют квадратные корни. Это дает основание предполагать, что оптимальный четырехугольник можно построить с помощью циркуля и линейки. Так оно и оказывается; подобное построение приведено, например, в книге [1, стр. 45].

2. Многоугольники. Предшествующие результаты естественным образом обобщаются на многоугольники с любым числом сторон. Начнем с аналога задач I), V), формулируемого следующим образом.

IX) Среди выпуклых многоугольников, у которых фиксированы длины всех сторон, кроме одной, найти максимальный по площади.

Существование максимального по площади многоугольника вытекает из теоремы Вейерштрасса. Простой анализ, основанный на результате задачи I), показывает, что оптимальным может быть лишь многоугольник, все вершины которого лежат на полуокружности, опирающейся на незаданную сторону как на диаметр. Построение оптимального многоугольника связано с нахождением диаметра. В общем случае диаметр d есть корень многочлена, степень которого катастрофически быстро растет с ростом числа сторон многоугольника [3], [4]. Более оправданным с вычислительной точки зрения оказывается переход к трансцендентному уравнению относительно диаметра.

Рассмотрим выпуклые многоугольники с вершинами $A_0, A_1, \cdots, A_n$, проходимыми против часовой стрелки. Длины сторон $A_{i-1}A_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ заданы; обозначим их через a_i. Длина стороны A_nA_0 заранее неизвестна; ее и требуется найти.

X) Диаметр d полуокружности, на который опирается максимальный $(n+1)$-угольник с длинами сторон a_i $(i = 1, \cdots, n)$, есть единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{a_i}{d} = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Геометрический смысл уравнения (10) очевиден, если учесть, что центральный угол, который опирается на хорду длины a_i окружности диаметра d , равен $2\arcsin \dfrac{a_i}{d}$. Поскольку диаметр окружности есть наибольшая из хорд, то $d > a_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. В силу неравенства треугольника $d < a_1 + \cdots + a_n$. Для оценки снизу числа d применим неравенство $\arcsin t > t$ для любого $t \in (0, 1]$ и равенство (10). Получаем последовательно соотношения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{d} < \sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{a_i}{d} = \frac{\pi}{2}.$$

Из проведенных рассуждений вытекают оценки числа d снизу и сверху

$$\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n} a_i < d < \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \max_i a_i < d. \tag{11}$$

Обсудим свойства функции $\mathscr{D}$, сопоставляющей набору $a = (a_i)$ положительных чисел a_i единственный положительный корень уравнения (10). Она допускает представление

$$\mathscr{D}(a) = \min\{t > 0, \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n} \arcsin\frac{a_i}{t} \leqslant 1\}. \tag{12}$$

XI) Используя (12), установить следующие свойства функции $\mathscr{D}$:

i) положительная однородность: $\mathscr{D}(\lambda a) = \lambda\mathscr{D}(a)$ для любого $\lambda > 0$;

ii) субаддитивность: $\mathscr{D}(a+b) \leqslant \mathscr{D}(a) + \mathscr{D}(b)$ для любых наборов $a = (a_i), b = (b_i)$ с положительными компонентами;

iii) монотонность: если $a = (a_i), b = (b_i), a_i \leqslant b_i$ и хотя бы для одного индекса i неравенство строгое, то $\mathscr{D}(a) < \mathscr{D}(b)$;

$iiii$) Симметричность: если набор b получен перестановкой набора a, то $\mathscr{D}(a) = \mathscr{D}(b)$.

Для доказательства достаточно использовать монотонность и выпуклость функции arcsin. Равенство (10) определяет $\mathscr{D}$ как неявную функцию векторного аргумента a. Отсюда можно вывести свойства непрерывности (гладкости) функции $\mathscr{D}$. Простых формул (типа (4)) получить не удается. Поэтому представляют интерес методы численного решения уравнения (10).

В качестве примера рассмотрим случай, когда $n = 5$, а длины сторон равны 2, 3, 5, 8, 10. Опишем схему решения задачи в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Присваивание

$$a = \{2, 3, 5, 8, 10\}$$

задает пятимерный вектор. Интересующую нас функцию

$$h(x) = \sum_{i=1}^{5} \arcsin\frac{a[i]}{x} - \frac{\pi}{2}$$

представим, не гоняясь за точностью, в виде

$$h[x\_] := N\left[\sum_{k=1}^{5} ArcSin\left[\frac{a[[k]]}{x}\right] - \frac{\pi}{2}, 6\right].$$

Для достижения большей точности следует заменить число 6 большим числом. Полезно построить график функции $h(x)$ на отрезке $[12, 20]$, используя функцию

$$Plot[h(x), \{x, 12, 20\}].$$

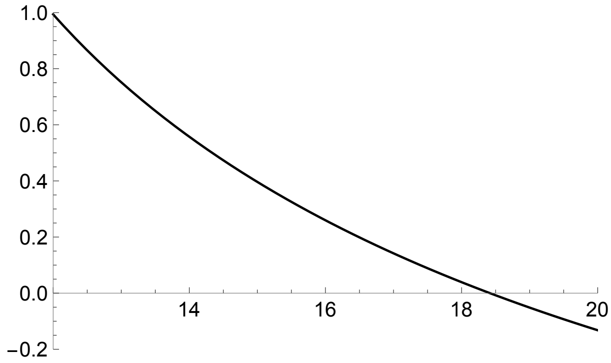


Рис. 5: График функции $y = h(x)$

График может подсказать начальное приближение к корню уравнения $h(x) = 0$; использование графика, в принципе, не обязательно. Функция

$$FindRoot[h[z] == 0, \{z, 18.5\}]$$

выдает решение уравнения $h(x) = 0$ в виде $\{z \to 18.4159\}$. Искомая длина диаметра найдена: $d = 18.4159$, $r = d/2 = 9.208$.

Построим максимальный шестиугольник со сторонами 2, 3, 5, 8, 10, 18.4159 и полуокружность вида $x^2 + y^2 = r^2, y \geq 0$, на которой находятся вершины $P_0, P_1, \cdots, P_5, P_6 = P_0$ шестиугольника. Пусть $(x[i], y[i])$ – декартовы координаты точки P_i. Введем в рассмотрение последовательности $t[i], s[i]$, полагая

$$t[0] = 0, t[i\_] := t[i-1] + 2 * ArcSin\left[\frac{a[[i]]}{d}\right] \quad (i = 0, 1, \cdots, 5).$$

$$s[i] := t[Mod[i, 6]]\,(i = 0, 1, \cdots, 5, 6).$$

Координаты точки P_i можно подсчитать по формулам

$$x[i\_] := r * Cos[s[i]], y[i\_] := r * Sin[s[i]].$$

Функция $L[i\_] := Graphics[Line[\{\{x[i-1], y[i-1]\}, \{x[i], y[i]\}\}]]$ создает отрезок $[P_{i-1}P_i]$. Нужное построение реализует функция

$$Show[Table[L[i], \{i, 1, 6\}], Graphics[Circle[\{0, 0\}, r, \{0, \pi\}]]].$$

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что по сходной схеме могут быть изучены естественные аналоги задач VI), VIII). Рассмотрим лишь вариант задачи VIII).

XII) Площадь выпуклого n-угольника ($n > 3$), вписанного в окружность, больше площади любого другого n-угольника с соответственно равными сторонами, но не являющегося вписанным.

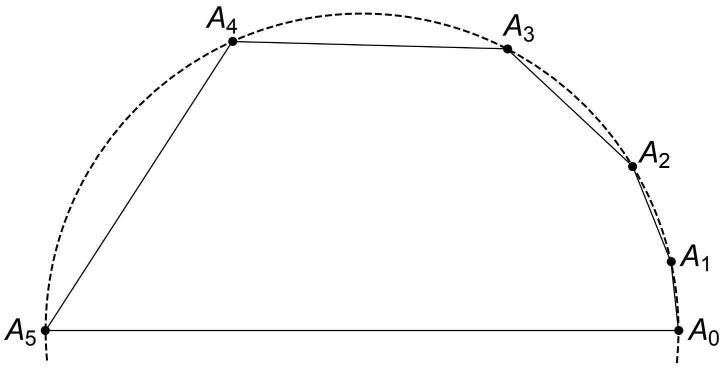


Рис. 6: Решение задачи IX) для случая, когда $n = 5$ и длины известных сторон равны 2, 3, 5, 8, 10. Найденное значение $A_5A_0 = d \approx 18.4159$

Задачу XII) именуют (см. [1], [2]) задачей Крамера по имени математика, первым нашедшего ее решение аналитическими методами. Диаметр d окружности есть единственный положительный корень трасцендентного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \arcsin \frac{a_i}{d} = \pi, \tag{13}$$

где $a_1, a_2, \cdots, a_n$ – длины сторон n- угольника. Достаточно очевидны геометрический смысл и свойства решения уравнения (13).

Во всех рассмотренных выше задачах максимальные многоугольники выпуклы и вписаны в окружность, диаметр которой заранее неизвестен, но сравнительно легко находится. Понятие площади естественным образом распространяется на невыпуклые многоугольники, например, вводится понятие ориентированной площади A многоугольника с возможными самопересечениями. Функция A, рассматриваемая на совокупности шарнирных многоугольников, имеет критические точки. В работе [5] показано, что шарнирный многоугольник P является критической точкой функции A тогда и только тогда, когда P – циклический многоугольник, т. е. все его вершины лежат на одной окружности. Циклические многоугольники изучались многими математиками (см., например, [3] – [6] и приведенную там литературу). Представляется достаточно перспективным привлечение к этому кругу вопросов идей и методов нелинейного анализа. Несомненно, окажется полезным и поиск новых приложений.

Ссылки

[1] *Бляшке В.* Круг и шар. М. : Наука, 1967.

[2] *Крыжановский Д. А.* Изопериметры. М. : Госиздат, 1959.

[3] *Варфоломеев В. В.* Вписанные многоугольники и полиномы Герона // Матем. сборник. 2003. Т. 194, № 3, С. 3–24.

[4] *Robbins D.* Areas of polygons inschribed in a circle // Discrete Comput. Geom. 1994. Vol. 12, Iss. 2. P. 223–236.

[5] *Khimshiashvili G., Panina G.* Cyclic polygons are critical points of area // Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI). 2008. Vol. 360. P. 238–245.

[6] *Жукова А. М.* Индекс Морса циклического многоугольника. II // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, Вып. 3. С. 128–147.

УДК 372.08

М. В. Краснов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kmvivt@uniyar.ac.ru

Внедрение языка программирования Python в процесс обучения студентов

В последнее время все более популярным становится язык Python, который можно и необходимо внедрять в процесс обучения. Автор анализирует сущность языка Python и раскрывает важность его изучения.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: язык программирования Python, внедрение языка Python.

В современном мире информационные технологии проникли во все сферы человеческой деятельности. Широко используются информационные технологии в экономике, в биологии, в социологии и т. д. Во многих отраслях требуется автоматизировать обработку информации. Следовательно, при обучении студентов предмету «Информатика» надо обратить особое внимание на обучение основам алгоритмизации и программирования.

По мнению автора, к языку на котором будет проходить обучение, должны предъявляться следующие требования.

- Легкость обучения и простота использования основных конструкций.
- Наличие бесплатной реализации транслятора языка.
- Переносимость языка, доступность трансляторов для разных платформ.
- Возможность использования языка при изучении других курсов.
- Возможность его практического использования после окончания обучения.

©Краснов М. В., 2016

По мнению автора, таким языком является Python. Python – мощный и простой для изучения язык программирования (с 2015 года в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ включены примеры программ на Python). В нём предоставлены проработанные высокоуровневые структуры данных и простой, но эффективный подход к объектно-ориентированному программированию. Сочетание изящного синтаксиса и динамической типизации, совмещённых с интерпретируемой сущностью, делает Python идеальным языком для написания сценариев и ускоренной разработки приложений в различных сферах и на большинстве платформ. Существует возможность применения языка для расширения функциональных возможностей других программ: Blender[1], ArcGIS[2] и так далее. Кроме того, присутствует широкий спектр библиотек готового кода, которые можно бесплатно получить и использовать как в процессе обучения, так и после него, в профессиональной (в т. ч. и коммерческой) деятельности (официальный сайт поддержки: http://www.python.org).

Существует много материалов по обучению языку, создания различных приложений и модификаций на основе языка Python. Студентам можно порекомендовать следующую литературу.

- Swaroop Chitlur. A Byte of Python. Книга свободно распространяется в сети интернет (см. [3]).
- Луис Педро Коэльо, Вилли Ричарт. Построение систем машинного обучения на языке Python / пер. с англ. Слинкин А. А. М.: ДМК Пресс, 2016. 302 с.
- Уэс Маккинли. Python и анализ данных / Пер. с англ. Слинкин А. А. М.: ДМК Пресс, 2015. 482 с.

По мнению автора, особое внимание студентов факультета биологии и экологии следует обратить на следующие библиотеки:

- Numeric Python – библиотека для работы с многомерными массивами позволяет достичь производительности научных расчётов, сравнимой с Matlab. Библиотека NumPy – краеугольный пакет для высокопроизводительных научных расчетов и анализа данных.
- Tkinter – это графическая библиотека, позволяющая создавать программы с оконным интерфейсом. Tkinter является кроссплатформенной библиотекой. Выбор библиотеки обусловлен ее простотой (она включает около 25 основных типов виджетов, а также различные диалоги и другие инструменты).

- Matplotlib – библиотека, которая обеспечивает Matlab-подобный набор команд для построения графиков (визуализация данных двумерной (2D) графикой).

Перечислим пакеты, которые могут потребоваться студентам при изучении других предметов:

- PyBrain – библиотека, которая предоставляет алгоритмы машинного обучения для различного класса задач.
- PubChemPy – библиотека предоставляет разнообразные функции и классы, которые позволяют получать информацию от PubChem.
- Pycrypto – коллекция криптографических модулей, реализующих различные алгоритмы и протоколы.

Проиллюстрируем полезность бесплатных библиотек. Создадим хеш-значения для некоторого сообщения (нам потребовалось всего несколько команд).

```
from Crypto.Hash import SHA256
h = SHA256.new()
h.update(b'Hello')
print h.hexdigest()
```

Студентам можно выдавать индивидуальные задания, которые формируются с учетом следующих принципов. Задания должны быть основаны на реальных задачах. Они должны включать элементы исследовательской работы, что способствует формированию навыков по проведению исследований и анализу их результатов (можно брать задачи из научных журналов и пытаться реализовать их на Python). Задания к новым изучаемым разделам должны быть связаны с заданиями, выполненными ранее. При успешной «защите» заданий студенты могут быть освобождены от вопросов по разделу «основы алгоритмизации и программирования» при проведении текущего контроля успеваемости.

Ссылки

[1] *Anders M.* Blender 2.49 Scripting // Published by Packt Publishing Ltd., 2010. 292 с.

[2] *Pimpler E.* Programming ArcGIS 10.1 with Python Cookbook // Published by Packt Publishing Ltd., 2013. 284 с.

[3] *Swaroop C. H.* Укус Питона – A Byte of Python по-русски / Пер. Смоляр В. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://wombat.org.ua/AByteOfPython/ (дата обращения: 26.01.2015).

УДК 004.424

Н. С. Лагутина, Ю. А. Ларина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lagutinans@rambler.ru
E-mail: lar_u_a@mail.ru

Особенности реализации шаблонов проектирования на языках C++ и Java

Авторы рассматривают основы применения технологии шаблонов проектирования при обучении разработчиков программного обеспечения. Основное внимание уделяется шаблону Observer и его реализации на языках C++ и Java.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: шаблоны проектирования, языки программирования.

Введение

В основе применения технологии шаблонов проектирования лежит идея стандартизации информации о типичных проблемах проектирования и разработки программного обеспечения и методах их решения. Шаблоны проектирования предоставляют в распоряжение разработчиков эффективный способ делиться опытом со всеми участниками сообщества объектно-ориентированного программирования независимо от того, какой язык программирования используется в процессе разработки, и того, в какой сфере проектируется программное обеспечение [1].

Знакомство студентов с использованием таких шаблонов позволяет решить ряд проблем обучения программированию, например, использование разных языков и инструментов для написания кода в различных учебных курсах. Этот подход позволяет, с одной стороны, изучить сами инструменты для разработки программных приложений, с другой стороны, студенты осваивают принципы программирования, которые могут быть использованы в дальнейшем.

©Лагутина Н. С., 2016
©Ларина Ю. А., 2016

Одними из наиболее часто применяемых в разработке программного обеспечения шаблонов проектирования являются поведенческие шаблоны, которые представляют собой набор проверенных на практике, понятных и простых в применении методов организации управления, использование которых позволяет добиться значительного повышения как эффективности системы, так и удобства ее эксплуатации.

В данной статье рассматривается шаблон Observer, который часто используется в тех случаях, когда в модели реализуются сложные операции изменения, удаления или обновления информации.

Шаблон проектирования Observer

Шаблон Observer, или Listener (наблюдатель, слушатель), применяется как способ структурировать поведение и взаимодействие большого количества объектов, которые должны находиться в согласованных состояниях. Шаблон определяет зависимость типа «один ко многим» между объектами таким образом, что при возникновении некоторого события в одном из объектов (его называют диспетчером события) все объекты, подписавшиеся на оповещение об этом событии, извещаются о его возникновении (эти объекты называются слушателями события или наблюдателями) [2].

Задача шаблона Observer организовать простое, прозрачное и логичное взаимодействие большого количества объектов различных типов и при этом сделать зависимости между ними слабыми. Это обстоятельство позволяет избежать сильного связывания классов, что делает программу более гибкой.

Шаблон Observer находит широкое применение в системах, основанных на архитектуре, где данные и их представление отделены друг от друга. В этом случае диспетчером событий может являться модель, а слушателем – вид. Диспетчер должен обладать следующими функциями: хранить множество слушателей событий, добавлять (регистрировать подписку) слушателя события, удалять (отписывать) слушателя события, оповещать всех слушателей, если произошло соответствующее событие. Задача слушателя – обновить свое состояние, в зависимости от этого события, например, заменить отображаемые данные на актуальные, если параметры модели изменились.

Шаблон Observer в общем случае представлен рис. 1.

При проектировании модели для решения конкретной задачи данный паттерн должен быть конкретизирован, то есть должны быть разработаны классы, предназначенные для решения соответствующей задачи. В различных технологиях программирования реализация шаблона Observer может иметь свои особенности.

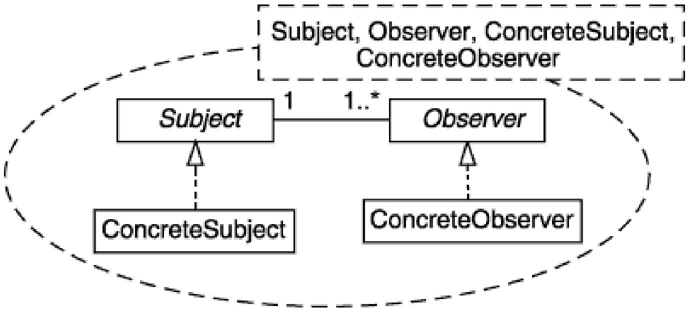


Рис. 1: Общее представление шаблона проектирования Observer

Реализация шаблона Observer на языке C++

Рассмотрим пример программной реализации шаблона Observer на языке C++. Создание слушателей осуществляется при помощи механизма наследования классов. Соответствующая диаграмма классов приведена на рис. 2.

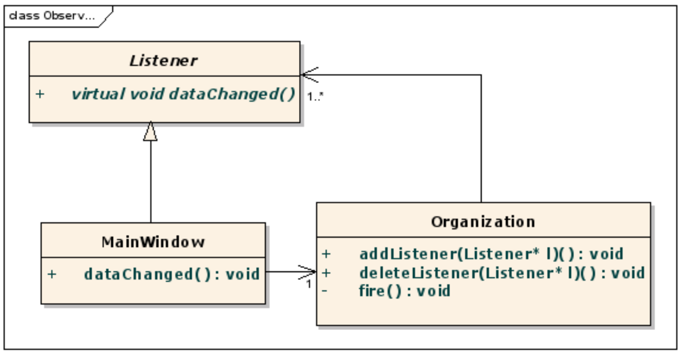


Рис. 2: Диаграмма классов реализации шаблона Observer для C++

Поскольку единственной задачей слушателя является обновление своего состояния, причем наблюдателями могут быть совершенно разные по своей функциональности классы, то необходимо создать базовый абстрактный класс `Listener` с единственным методом `dataChanged()`.

Теперь каждый слушатель может стать наследником этого класса и самостоятельно реализовать обновление в методе `dataChanged()`. Классу диспетчеру достаточно знать, что наблюдатель является потомком `Listener` и обновляет свое состояние вызовом указанного метода. Таким образом диспетчер не должен знать никаких других детелей реализации слушателя и классы становятся максимально независимыми друг от друга.

Для реализации функций диспетчера в классы модели добавляют поле-контейнер, хранящий список слушателей, а также методы добавления, удаления, оповещения слушателей.

Слушателем может быть одно из окон графического приложения. Для обновления данных используется указатель на объект класса-модели `*organization`.

Современные инструменты разработки программного обеспечения широко применяют шаблоны проектирования. для создания графических пользовательских интерфейсов на языке C++ используется библиотека Qt. В ней есть ряд классов основанных, в частности на шаблоне Observer.

Реализация шаблона Observer на языке Java

Принцип наследования подразумевает, что производный класс является разновидностью базового. В случае шаблона Observer слушатели не соответствуют этому условию, они лишь обладают общим поведением – реакцией на определенное событие. Поэтому реализация слушателей, как наследников общего предка, не вполне удовлетворяет смыслу задачи и принципам объектно-ориентированного программирования.

В языке Java для решения подобных проблем существует механизм создания интерфейсов. Интерфейс – это специальный вид абстрактного класса, содержащий только абстрактные методы, определяющие совокупность методов и правил взаимодействия элементов системы. Классы могут реализовывать интерфейсы (т. е. получать от интерфейса список методов и описывать реализацю каждого из них), притом, что особенно важно, один класс может реализовывать сразу несколько интерфейсов.

Программный код слушателей шаблона Observer основывается на реализации интерфейса, создаваемого пользователем или стандартного интерфейса `Observer` из пакета `java.util`. Класс диспетчер реализуется также, как и в языке C++. Дополнительно можно использовать наследование от стандартного класса `Observable` из того же пакета `java.util` и переопределить нужные методы. Диаграмма классов практически полностью соответствует рис. 2.

Заметим, что интерфейсы представляют собой более высокий уровень абстракции по сравнению с наследованием и построением иерархии базовых и производных классов.

Ссылки

[1] *Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р. , Влиссидес Д.* Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. СПб.: Питер, 2001. 368 с.

[2] *Фримен Э., Сьерра К., Бейтс Б.* Паттерны проектирования. СПб.: Питер, 2011. 656 с.

УДК 517

Н. Л. Майорова, Г. В. Шабаршина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mnlv@yandex.ru
E-mail: shegeve@yandex.ru

Прикладные задачи на занятиях по математическому анализу или как приобщить студента к «большой» науке

Рассматривается вопрос об использовании изученного материала курса математического анализа к решению прикладных задач с целью улучшения подготовки студентов.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: математический анализ; аппроксимационная задача; эмпирическая функция; сложные проценты; объемы и поверхности тел.

С каждым годом расширяется область применения математических методов в науке и практической деятельности человечества. Большие и малые научные проекты часто не могут обойтись без математики. Важным является приложение существующих математических теорий к практическим проблемам, разработка новых математических моделей, установление логических связей, построение алгоритма решения, его оптимизация. Поэтому успешность и востребованность выпускника университета на рынке труда напрямую зависит от уровня его математической подготовки.

Работая на экономическом факультете, каждый год сталкиваешься с частью студентов, негативно относящихся к математике как к предмету изучения. «Зачем нам нужна эта математика? Зачем такие сложности изучать? Мы хотим стать экономистами, а не математиками.» Обучение студентов по направлению «Прикладная математика и информатика», конечно, не встречает такого непонимания необходимости изучения математики. Но и здесь есть большие сложности, связанные с тем, что

©Майорова Н. Л., 2016
©Шабаршина Г. В., 2016

при преподавании математического анализа принят логический подход, основанный на четких определениях, системе аксиом и строгих доказательствах, в результате чего курс математического анализа содержит много технических деталей. Некоторые соображения по этому поводу авторы приводили в [1]. Поэтому «Нужна ли математика программисту, экономисту...?», «В каком объеме и как глубоко следует изучать, какой материал нужно использовать для обучения?» — эти и другие подобные важные вопросы обсуждаются в самых разных сообществах. Это студенческие и программистские форумы, это и разных уровней научно-методические конференции преподавателей.

В связи со всем вышесказанным современный учитель высшей школы ищет новые формы обучения студентов, делит изучаемый материал на мелкие части, а затем прикладывает усилия к тому, чтобы убедить учащегося выучить этот материал, выполнить персональное задание и отчитаться по нему. Приходится заинтересовывать студентов какими-либо фактами из истории математики, фактами оценивания научной общественностью ученых-экономистов, сделавших большой вклад в развитие именно математики, показывать решения «красивых» задач из других (высших) разделов математики. Все это, кстати, требует от педагога затрат большого незапланированного времени.

Помочь решить проблему усвоения студентами учебного материала, который предусмотрен программой, и значительно активизировать деятельность студентов могут задания, требующие умения применять математические методы к решению задач профессионального направления. Таким образом, возникает необходимость в преподавании математики прикладной направленности, которая должна способствовать формированию и развитию профессионально значимых знаний, умений и навыков. Эти задачи имитируют реальные исследования явлений и процессов, но в виде более простой модели.

Например, в курсе математического анализа, изучая тему пределов функций и замечательных пределов, можно акцентировать внимание учащихся, что к числу e приводят решения многих прикладных задач статистики, физики, биологии, химии, то есть анализ таких процессов, как рост народонаселения, распад радия, размножение бактерий и других. Более подробно можно рассмотреть экономическую задачу о непрерывном начислении процентов. Некоторым студентам из курса средней школы известна формула капитализации вкладов, когда банк выплачивает ежегодно $p\%$ и требуется определить сумму вклада через n лет: $X_n = X_0(1 + \frac{p}{100})^n$. Однако можно начислять проценты по вкладам не один раз в год, а m раз. Например, можно полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие ($m = 2$), ежеквартально ($m = 4$), ежемесячно ($m = 12$), каждый день ($m = 365$), каждый час ($m = 8760$) и так далее непрерывно. Тогда, используя формулу второго замечательного предела, размер вклада за n лет составит:

$$X_n = \lim_{m\to\infty}\left[X_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}\right] = X_0 e^{\frac{pn}{100}}.$$

Эта формула выражает показательный (экспоненциальный) закон роста (при $p > 0$) или убывания (при $p < 0$). Эта формула используется при непрерывном начислении процентов. Можно показать студентам, что погрешность начисления суммы вклада по двум приведенным формулам оказывается незначительной (около 2,5%), а также пояснить, что вторая формула используется в практических финансово-кредитных операциях крайне редко, но оказывается весьма полезной при анализе сложных финансовых проблем, например, при выборе инвестиционных решений.

Приведем еще ряд примеров реализации прикладной направленности курса «Математический анализ». Вообще говоря, практически каждая тема содержит систему прикладных задач. Пределы последовательностей уже упоминались выше. В теме «дифференциальное исчисление функции одной переменной» обязательно надо показать студентам конкретные примеры использования производной в разных отраслях. Помимо стандартного физического и геометрического понятия производной требуется раскрыть химический, биологический, экономический смыслы. В этой теме полезно рассмотреть набор задач на обоснование оптимальных размеров предметов. Например, в [2] приводится задача следующего содержания: консервная банка имеет цилиндрическую форму. Найти наиболее выгодные размеры банки, т. е. отношение диаметра основания к высоте цилиндра, имеющего при заданной полной поверхности наибольший объем. Иначе говоря, из всех банок заданной формы и при заданном расходе жести требуется выбрать ту, которая имеет наибольшую вместимость.

Особый класс задач составляют задачи на обоснование оптимальной геометрии предметов. Здесь обычно интерес вызывает рассказ о доказательстве П. Ферма факта, почему пчелиная ячейка является более целесообразной в смысле расходования воска, чем какая-либо иная. Причем эта задача интересна и магистрантам в курсе истории прикладной математики. Мы исследуем функцию, задающую площадь ее поверхности. Находим наименьшее значение и убеждаемся в том, что площадь поверхности ячейки меньше площади поверхности правильной шестиугольной призмы, имеющей такой же объем.

Еще одной из таких задач, которую авторы вводят в учебный процесс, является аппроксимационная задача построения эмпирических функций. Эта задача может охватить следующие аспекты. Во-первых, идет закрепление темы «Экстремумы функций многих переменных». При этом, согласно принципу Лежандра, вводится функция двух переменных равная сумме квадратов отклонений заданной табличной функции и строящейся линейной или квадратичной функции

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i-y_i+b)^2.$$

Для нахождения экстремума (минимума) этой функции используется необходимое условие наличия экстремума функции в критической точке, а именно, равенство нулю частных производных функции двух переменных в этой точке. Возникает так называемая нормальная система для нахождения коэффициентов искомой эмпирической функции:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i,\\ a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

При этом каждый учащийся, имея персональное задание, еще раз учится находить частные производные, получать нормальную систему и решать ее каким-либо способом (например, методом Крамера). Во-вторых, студент-экономист осознает, что большинство формул в экономике — эмпирические, которые должны проверяться опытом, уточняться. И что строить надо, как правило, самую простую эмпирическую функцию — линейную или квадратичную. При этом построенная аналитическая функция может позволить делать прогнозы для тех значений аргумента, которые не были получены опытным путем. Тем самым студент как бы осознает важность изучаемой дисциплины, чувствует свою приобщенность к «большой науке». И, наконец, выполнение этих заданий требует от учащегося большой вычислительной работы (в задании требуется очень высокая точность вычислений), что, в свете сложившейся в образовании ситуации, весьма полезно современному студенту. Завершать работу требуется построением графиков всех найденных функций в одной системе координат и обоснованным выводом, какая из них лучше приближает заданную табличную функцию.

Аналогичной научно-практической работой, предлагаемой студентам для закрепления изучаемого материала, является работа по составлению математической модели задачи линейного программирования. Задания также персонифицированы, задачи приближены к практике, что позволяет заинтересовать студента, оживить «мертвую» и скучную для них науку математику.

Вообще, подобные темы позволяют сформировать у студентов умения реализовать знания, как в условиях образовательного учреждения, так и вне него. Они показывают, что учебный процесс — это не только изучение большого количества несвязанных между собой дисциплин, а единое целое, способствующее выработать навыки теоретических и эмпирических методов исследования.

Ссылки

[1] *Майорова Н. Л., Шабаршина Г. В.* Из практики обучения математике в условиях современного вуза. // Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации. Материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики информатики университетов и педагогических вузов.-Москва: Изд-во: ООО «ТРП» , 2015, с. 379–384.

[2] *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пос. 2-е изд., перер. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003–496 с.

УДК 519.61

Д. М. Мурин
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: nirum87@mail.ru

Порядок роста числа m-инъективных и m-сверхрастущих векторов

В работе определены верхние и нижние границы для числа m-инъективных векторов размерности n с фиксированным максимальным элементом M и предложен алгоритм перечисления m-сверхрастущих векторов размерности n с фиксированным максимальным элементом в лексикографическом порядке.

Работа обобщает результаты автора, полученные в работе [2] для инъективных и сверхрастущих векторов.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: m-инъективные векторы, m-сверхрастущие векторы, обобщенная задача о рюкзаке.

Введение

В работе В. О. Осипяна [1] введена в рассмотрение обобщенная задача о рюкзаке, которая для фиксированного натурального числа $m \geq 2$ – параметра задачи, заданных вектора $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ и числа $S \in \mathbb{N}$ состоит в ответе на вопрос: имеет ли уравнение $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = S$, где $x_1, \ldots, x_r$ – неизвестные, решение в числах $0, 1, \ldots, m-1$.

Будем называть вектор $A = (a_1, \ldots, a_n)$ m-сверхрастущим, если для всех j, таких что $2 \leq j \leq n$, выполняется неравенство

$$a_j > (m-1) \sum_{i=1}^{j-1} a_i.$$

Будем называть вектор $A = (a_1, \ldots, a_n)$ m-инъективным, если обобщенная задача о рюкзаке с параметром m имеет для данного вектора не более одного решения для любого $S \in \mathbb{N}$.

©Мурин Д. М., 2016

Оценка сверху

Будем называть вектор $A = (a_1, \ldots, a_n)$ *возрастающим*, если для всех j, таких что $2 \leq j \leq n$ выполняется неравенство $a_j > a_{j-1}$.

Обозначим через $INV(m, n, M)$ число возрастающих m-инъективных векторов $A = (a_1, \ldots, a_n)$ размерности n, максимальный элемент которых равен M.

Теорема 1 дает верхнюю оценку для функции $INV(m, n, M)$.

Теорема 1. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ и любом натуральном M выполняется неравенство

$$INV(m, n, M) \leq C^{n-1}_{\frac{M-m+1}{m-1}},$$

где через C^l_k обозначено число сочетаний.

Доказательство. Необходимо оценить число m-инъективных возрастающих векторов размерности n с максимальным элементом равным M. Такие векторы имеют вид $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, M)$, причем

$$a_i < \sum_{j=1}^{n-1} a_j \leq \frac{M-m+1}{m-1}, \qquad 1 \leq i \leq n-1,$$

и $a_{i-1} < a_i$, $2 \leq i \leq n-1$. Число векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, удовлетворяющих таким условиям, не превосходит числа сочетаний $C^{n-1}_{\frac{M-m+1}{m-1}}$.

□

Оценка снизу

Обозначим через $FGV(m, n, M)$ число m-сверхрастущих векторов размерности n, максимальный элемент которых равен M.

Нетрудно понять, что вектор $(1, m, m^2, \ldots, m^{n-1})$ является единственным m-сверхрастущим вектором размерности n с максимальным элементом, не превосходящим m^{n-1}.

Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – вектор размерности n. Определим следующим образом операции $P^n_0(A), \ldots, P^n_n(A)$:

$$P^n_0(A) : (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n);$$

$$P^n_1(A) : (a_1 + 1, a_2 + m - 1, a_3 + (m-1)m, \ldots, a_{n-1} + (m-1)m^{n-3}, a_n + (m-1)m^{n-2});$$

$$\vdots$$

$$P_k^n(A) : (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k + 1, a_{k+1} + m - 1, \ldots, \\ a_{n-1} + (m-1)m^{n-k-2}, a_n + (m-1)m^{n-k-1});$$

$$\vdots$$

$$P_{n-1}^n(A) : (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1} + 1, a_n + m - 1);$$

$$P_n^n(A) : (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1).$$

Определим также обратное преобразование $(P_k^n)^{-1}(A)$:

$$(P_k^n(A))^{-1} : (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1} - (m-1), \ldots, a_n - (m-1)m^{n-k-1})$$

и положим для любых натуральных чисел i, $k < n$:

$$(P_k^n(A))^{-i} = (P_k^n(A))^{-i+1}(P_k^n(A))^{-1}.$$

Теорема 2. Все m-сверхрастущие векторы могут быть получены из вектора $(1, m, \ldots, m^{n-1})$ путем применения к нему некоторого набора операций $P_0^n(A), \ldots, P_n^n(A)$.

Доказательство. Вектор $(1, m, m^2, \ldots, m^{n-1})$ сам является m-сверхрастущим и

$$(1, m, m^2, \ldots, m^{n-1}) = P_0^n((1, m, m^2, \ldots, m^{n-1})).$$

Рассмотрим m-сверхрастущий вектор

$$(a_1, \ldots, a_n) \neq (1, m, m^2, \ldots, m^{n-1}).$$

Пусть $1 \leq k \leq n$ – первый (наименьший) номер такой, что $a_k > m^{k-1}$, тогда $a_k \geq m^{k-1} + 1$,

$$a_{k+1} > (m-1)\sum_{i=1}^{k} a_i \geq m^{k-1} - 1 + (m-1)(m^{k-1} + 1) = m^k + m - 2,$$

таким образом,

$$a_{k+1} \geq m^k + m - 1,$$

$$a_{k+2} > (m-1)\sum_{i=1}^{k+1} a_i \geq m^{k-1} - 1 + (m-1)(m^{k-1} + m^k + m)$$

и

$$a_{k+2} \geq m^{k+1} + m(m-1),$$

$$\vdots$$

$$a_n > (m-1)\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq m^{k-1} - 1 + (m-1)(m^{k-1} + 1 + m^k + m - 1 + \\ + m^{k+1} + m(m-1) + \ldots + m^{n-2} + m^{n-k-2}(m-1)) =$$

$$= m^{k-1} - 1 + (m-1)(m^{k-1}(1 + \ldots + m^{n-k-1}) + 1 + (m-1)(1 + \ldots + m^{n-k-2})) =$$

$$= m^{k-1} - 1 + m^{k-1}(m^{n-k} - 1) + (m-1)m^{n-k-1} = m^{n-1} + (m-1)m^{n-k-1} - 1$$

и

$$a_n \geq m^{n-1} + (m-1)m^{n-k-1}.$$

Вектор $(P_k^n)^{-1}((a_1, \ldots, a_n))$ будет m-сверхрастущим. Действительно,

$$a_k - 1 \geq m^{k-1} > m^{k-1} - 1 = (m-1)\sum_{i=1}^{k-1} a_i,$$

$$a_{k+1} - (m-1) > (m-1)(\sum_{i=1}^{k-1} a_i + (a_k - 1)),$$

$$a_{k+2} - (m-1)m > (m-1)(\sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k - 1 + a_{k+1} - (m-1)),$$

$$\vdots$$

$$a_n - (m-1)m^{n-k-1} > (m-1)(\sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k - 1 + \sum_{i=k+1}^{n-1} (a_i - (m-1)m^{i-k-1})).$$

Рассмотрим следующую процедуру.

Процедура. Сведение m-сверхрастущего вектора к вектору $(1, m, \ldots, m^{n-1})$.

Процедуре на вход поступает m-сверхрастущий вектор $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

k, n – натуральные числа, $b[1..n]$ – массив натуральных чисел размерности n.

Тело процедуры:

1. $k := 1$;

2. Пока $k < n + 1$ выполнять:

2.1. Если $a_k > m^{k-1}$,

2.1.1. То $b_k := a_k - m^{k-1}$;

2.1.2. $A := (P_k^n)^{-b_k}(A)$;

2.2. Иначе

2.2.1. $b_k := 0$;

2.3. $k := k + 1$.

Конец процедуры.

После завершения процедуры $A = (1, m, \ldots, m^{n-1})$. Кроме того,

$$(a_1, \ldots, a_n) = (P_n^n)^{b_n}(P_{n-1}^n)^{b_{n-1}} \ldots (P_1^n)^{b_1}((1, m, \ldots, m^{n-1})).$$

Поскольку исходный m-сверхрастущий вектор выбирается произвольно, то из вышесказанного следует, что любой m-сверхрастущий вектор $A = (a_1, \ldots, a_n)$ представим в виде

$$(a_1, \ldots, a_n) = (P_n^n)^{x_n}(P_{n-1}^n)^{x_{n-1}} \ldots (P_1^n)^{x_1}((1, m, \ldots, m^{n-1})),$$

для некоторых неотрицательных целых чисел $x_1, \ldots, x_n$.

□

По аналогии с доказательством теоремы 3 в работе [?] можно легко установить, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Операции $P_0^n, P_1^n, \ldots, P_n^n$ коммутируют.

Следствие. Каждый m-сверхрастущий вектор размерности n определяется только набором операций $\{P_i^n\}$, позволяющих получить его из вектора $(1, m, m^2, \ldots, m^{n-1})$, а не последовательностью применения данных операций.

Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n, M)$ – m-сверхрастущий вектор с максимальным элементом M. Тогда $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – m-сверхрастущий вектор, сумма элементов которого меньше $\frac{M}{m-1}$. Следовательно, количество m-сверхрастущих векторов с максимальным элементом равным M равно количеству m-сверхрастущих векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, сумма элементов которых меньше $\frac{M}{m-1}$. Или количеству таких наборов операций $\{P_i^n\}_{1 \le i \le n}$, что применение набора операций к вектору $(1, m, m^2, \ldots, m^{n-1})$ переводит его в вектор, сумма элементов которого меньше $\frac{M}{m-1}$. Другими словами, нас интересуют все такие наборы неотрицательных целых чисел $x_0, \ldots, x_{n-1}$, что

$$(a_1, \ldots, a_n) = (P_n^n)^{x_0}(P_{n-1}^n)^{x_1} \ldots (P_1^n)^{x_{n-1}}((1, m, \ldots, m^{n-1})),$$
$$\text{и } \sum_{i=1}^{n} a_i < \frac{M}{m-1}.$$

Заметим, что при применении операции P_i^n при $1 \le i \le n$ сумма элементов вектора увеличивается на m^{n-i}. Поэтому наборы $x_0, \ldots, x_{n-1}$ можно рассматривать как решения в $\mathbb{N}_0$ неравенства

$$m^n - 1 + (m-1)\sum_{i=1}^{n} x_{n-i} \cdot m^{n-i} < M,$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ – неизвестные.

Оценим снизу $FGV(m, n, M)$:

Теорема 4. При фиксированном $n \ge 2$ и любом натуральном $M \ge m^{n-1}$ выполняется неравенство $FGV(m, n, M) \ge P(M)$, где $P(M)$ – некоторый полином $n-1$ степени от M.

Доказательство. Обозначим $T(n, S)$ количество решений в $\mathbb{N}_0$ неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} x_{n-i} \cdot m^{n-i} < S,$$

где $S \in \mathbb{N}_0$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ – неизвестные. Тогда $T(n-1, S)$ – количество решений в $\mathbb{N}_0$ неравенства $\sum_{i=1}^{n-1} x_{n-1-i} \cdot m^{n-1-i} < S$. Заметим также, что неравенство $x_0 < S$ имеет ровно S решений в $\mathbb{N}_0$, поэтому $T(1, S) = S$. Тогда

$$T(n,S) = \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{S}{m^{n-1}}\right]} T(n-1, S - k_1 m^{n-1}) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{S}{m^{n-1}}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{S-k_1 m^{n-1}}{m^{n-2}}\right]} T(n-2, S - \sum_{i=1}^{2} k_i m^{n-i}) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{S}{m^{n-1}}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{S-k_1 m^{n-1}}{m^{n-2}}\right]} \ldots \sum_{k_{n-1}=0}^{\left[\frac{S-k_1 m^{n-1}-k_2 m^{n-2}-\ldots-k_{n-2}m^2}{m}\right]} T(1, S - \sum_{i=1}^{n-1} k_i m^{n-i}) \geq$$

$$\geq \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{(m-1)S}{2^n}\right]} \ldots \sum_{k_{n-1}=0}^{\left[\frac{(m-1)S}{m^n}\right]} T(1, S - \sum_{i=1}^{n-1} k_i m^{n-i}) \geq$$

$$\geq \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{(m-1)S}{m^n}\right]} \ldots \sum_{k_{n-1}=0}^{\left[\frac{(m-1)S}{m^n}\right]} T(1, \left[S - \frac{(m-1)S}{m^n} \sum_{i=1}^{n-1} m^{n-i}\right]) =$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{(m-1)S}{m^n}\right]} \ldots \sum_{k_{n-1}=0}^{\left[\frac{(m-1)S}{m^n}\right]} T(1, \left[\frac{S}{m^{n-1}}\right]) = \left[\frac{S}{m^{n-1}}\right] \left(\left[\frac{(m-1)S}{m^n}\right] + 1 \right)^{n-1}.$$

Откуда следует, что

$$FGV(m, n+1, M) = T(n, \left[\frac{M - m^n + 1}{m-1}\right]) \geq \left[\frac{M - m^n + 1}{(m-1)m^{n-1}}\right] \left[\frac{M+1}{m^n}\right]^{n-1}.$$

Следовательно, при фиксированном $n \geq 2$ и любом натуральном $M \geq m^{n-1}$ (при $M < m^{n-1}$ $FGV(m, n, M) = 0$) выполняется неравенство

$$FGV(m, n, M) \geq P(M) = \Big(\frac{M - m^{n-1} + 1}{(m-1)m^{n-2}} - 1\Big)\Big(\frac{M - m^{n-1} + 1}{m^{n-1}}\Big)^{n-2}.$$

$\square$

Алгоритм перечисления m-сверхрастущих векторов с фиксированным максимальным элементом

Для того, чтобы перечислить все m-сверхрастущие векторы размерности $n+1$ с фиксированным максимальным элементом M в лингвистическом порядке, нам достаточно построить только «начала» $(a_1, \ldots, a_n)$ этих векторов, поскольку для них $a_{n+1} = M$. Ввиду того, что m-сверхрастущих векторов размерности $n+1$ с фиксированным максимальным элементом $M \leq m^n - 1$ не существует, полагаем, что $M \geq m^n$.

Алгоритм.

$A[1..n]$ – массив векторов размерности n.

$I[1..n]$ – массивы неотрицательных целых чисел размерности n.

S – целое неотрицательное число.

$P_1^n, \ldots P_n^n$ – рассмотренные выше операции с m-сверхрастущими векторами.

Тело алгоритма:

$A_1 := (1, m, \ldots, m^{n-1})$;
$S := \frac{M - m^n + 1}{m - 1}$;
print (A_1);
for($I_1 := 0$; $I_1 \leq \left[\frac{S}{m^{n-1}}\right]$; $I_1 := I_1 + 1$)
{
if$(I_1 \neq 0)$
    {
        $A_1 := P_1^n(A_1)$;
        print (A_1);
    }
    $A_2 := A_1$;

$$\ldots$$

        for($I_k := 0$; $I_k \leq \left[\frac{S - I_1 \cdot m^{n-1} - \ldots - I_{k-1} \cdot m^{n-k+1}}{m^{n-k}}\right]$; $I_k := I_k + 1$)
        {
            if$(I_k \neq 0)$
            {
                $A_k := P_k^n(A_k)$;
                print (A_k);
            }
            $A_{k+1} := A_k$;

$$\ldots$$

            for($I_n := 1$; $I_n < S - I_1 \cdot m^{n-1} - \ldots - I_{n-1} \cdot m$; $I_n := I_n + 1$)

```
        {
            A_n := P_n^n(A_n);
            print (A_n);
        }
                        ...
    }
                        ...
}
```

Конец алгоритма.

Ссылки

[1] *Осипян В. О.* О криптосистемах с заданным рюкзаком // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Информационная безопасность». Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2004. С. 269–271.

[2] *Мурин Д. М.* О порядке роста числа инъективных и сверхрастущих рюкзачных векторов // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, N 3. С. 124–135.

УДК 519.61

Д. М. Мурин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: nirum87@mail.ru

Об исследовании задач рюкзачного типа

В работе приведен полиномиальный алгоритм для решения задачи о рюкзаке со сверхрастущим вектором в физической интерпретации.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: сверхрастущие векторы, задача о рюкзаке, обобщенная задача о рюкзаке.

В работе рассматривается физическая интерпретация задачи о рюкзаке, которую можно формально сформулировать следующим образом. Пусть заданы вектор $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ и число $S \in \mathbb{N}$, задача о рюкзаке состоит в ответе на вопрос, имеет ли уравнение $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = S$, где $x_1, \ldots, x_r$ – неизвестные, решение в числах $0, 1$.

В физической интерпретации элементы вектора A приобретают смысл весов гирь, число S – контрольного веса. В такой интерпретации требуется определить, можно ли набрать контрольный вес гирями из имеющегося набора с использованием весов с двумя чашками.

Будем называть вектор $(a_1, \ldots, a_n)$ сверхрастущим, если для всех j, таких что $2 \leq j \leq n$, выполняется неравенство $a_j > (m-1)\sum_{i=1}^{j-1} a_i$.

Представим себе следующую ситуацию. Пусть нам даны набор гирь с известными весами, являющимися натуральными числами, и контрольный вес – также натуральное число. Сможем ли мы набрать контрольный вес с помощью гирь данного набора?

Эта естественная по формулировке задача носит название «Задача о рюкзаке» и относится к классу NP-трудных [1], что говорит о том, что она не имеет эффективных алгоритмов решения. На самом деле, таковых не имеет ни одна из задач этого класса. Говоря грубо, это означает, что методов, позволяющих значительно улучшить метод перебора при решении таких задач, не изобретено за всю историю человечества. Несмотря на то, что для решения некоторых задач метод перебора может оказаться приемлемым, нужно помнить о том, что число перебираемых вариантов в данном случае растет как экспонента от

©Мурин Д. М., 2015

числа гирь. Если принять число гирь за r, то число вариантов, которые предстоит перебрать, будет 2^r, то есть для $r = 10$ необходимо перебрать приблизительно 10^3 вариантов, но для $r = 20$ – уже 10^6, а для $r = 30$ – 10^9, что уже явно не подходит для ручного перебора, а при $r \sim 100$ с перебором не справятся даже самые мощные на сегодняшний день суперкомпьютеры.

Давайте проведем эксперимент. В ноябре 2015 года производительность самого мощного общественно известного суперкомпьютера (Tianhe-2, рейтинг TOP500) составляла 33,86 петафлопсов, следовательно, этот компьютер может выполнять $33,86 \cdot 10^{15}$ операций с плавающей запятой в секунду. Допустим, что этот компьютер способен одной операцией с плавающей запятой рассматривать один набор гирь, тогда он сможет перебрать 2^{100} вариантов наборов за

$$\frac{2^{100}}{33,86 \cdot 10^{15}} = \frac{(2^{10})^{10}}{33,86 \cdot 10^{15}} \geq \frac{(10^3)^{10}}{33,86 \cdot 10^{15}} \geq 2{,}9{\cdot}10^{13} \text{ секунд } \geq 900000 \text{ лет.}$$

Задача о рюкзаке является массовой задачей, то есть бесконечной совокупностью однотипных индивидуальных задач, зависящих от некоторых параметров. Как только мы фиксируем параметры – в данном случае это число и веса гирь, контрольный вес – мы получаем индивидуальную задачу о рюкзаке.

Не все подмножества индивидуальных задач о рюкзаке трудноразрешимы. Например, можно выделить множество задач о рюкзаке со сверхрастущим набором гирь (гири такого набора можно упорядочить строго по возрастанию, причем вес каждой следующей гири будет превосходить сумму весов предыдущих, более легких гирь).

Пусть у нас есть весы с двумя чашками и стрелкой, которые показывают, на какой чашке груз тяжелее. На одну из чашек (первую) положим контрольный вес и будем рассматривать гири в порядке убывания их весов. Положим первую по весу (самую тяжелую) гирю на вторую чашку весов: если вес гири превышает контрольный, то брать его нельзя – сразу будет перевес, поэтому откладываем такую гирю в сторону и исключаем из рассмотрения. Если же вес гири меньше контрольного, то брать ее необходимо – исключив эту гирю из рассмотрения, мы никогда не наберем ее вес более легкими оставшимися гирями (по определению сверхрастущего набора гирь). В этом случае оставляем рассматриваемую гирю на второй чашке весов и переходим к следующей гире.

Таким образом, задачу о рюкзаке со сверхрастущим набором гирь можно решить всего за r взвешиваний.

Сложность решаемой задачи – это не только камень преткновения. В криптографии (науке о тайнописи) научились использовать сложность NP-трудных задач для обеспечения характеристик безопасности защищаемой информации. Так, криптография с открытым ключом строится на следующем принципе. Пусть два легитимных корреспондента Алиса и Боб желают обмениваться друг с другом сообщениями через сеть Интернет, не раскрывая информацию другим людям, а нарушитель Кэрри хочет во что бы то ни стало получить доступ к их переписке. В такой ситуации Алиса и Боб могут выбрать некоторое подмножество легко разрешимых индивидуальных задач NP-трудной задачи (например, множество индивидуальных задач о рюкзаках со сверхрастущими наборами гирь) и запутывающее преобразование, необходимое для того, чтобы замаскировать легко разрешимую задачу так, что сторонний наблюдатель – Кэрри – не могла бы отличить полученную в результате запутывающего преобразования индивидуальную задачу о рюкзаке от задачи общего положения, произвольно и равновероятно выбранной из всего множества задач о рюкзаках. Таким образом, Кэрри предстоит решать сложную задачу о рюкзаке, в то время как знающие запутывающее преобразование Алиса и Боб могут применить обратное преобразование и решать задачу о рюкзаке из множества легко решаемых.

В 1978 году американские математики Р. Меркль и М. Хеллман [2] предложили первую в истории схему шифрования с открытым ключом. Эта система, получившая название система Меркля–Хеллмана, базировалась на задаче о рюкзаке. В качестве множества легко разрешимых задач было выбрано множество индивидуальных задач о рюкзаках со сверхрастущими наборами, в качестве запутывающего преобразования – сильное модульное умножение. Для осуществления этого преобразования выбирается модуль – натуральное число, значение которого превосходит сумму весов всех имеющихся по условию задачи гирь, и множитель — натуральное число, меньшее выбранного модуля и взаимно простое с ним. Преобразование состоит в переходе от первоначального набора гирь к набору, вес каждой гири которого определяется по следующему правилу: необходимо взять вес одной из гирь начального набора, умножить его на множитель и взять остаток от деления этого произведения на модуль. Этот остаток и будет являться весом гири из нового набора. Система Меркля–Хеллмана обладала рядом существенных достоинств, таких как простота реализации и высокое быстродействие, однако не прошло и десяти лет, как она была взломана, причем несколькими различными способами, предложенными математиками А. Шамиром (Израиль, исследования 1979–1982 годов) [3, 4]; Э. Ф. Брикеллем (США, исследования 1983–1984 годов) [5, 6]; Дж. Лагариасом и А. Одлыжко (США, исследования 1985 года) [7].

Взлом системы Меркля–Хеллмана с лежащей в ее основе NP-трудной задачей стал очень значительным событием. Стало ясно, что даже если лежащая в основе криптосистемы задача будет трудной, это не гарантирует само по себе надежности системы. После взлома системы Меркля–Хеллмана задача о рюкзаке перестала быть мэйнстримом в криптографии, однако даже из факта взлома системы можно получить интересные следствия о свойствах некоторых задач о рюкзаке.

Так, в ходе проведенных автором исследований было установлено, что задачи о рюкзаке, получаемые из задач о рюкзаке со сверхрастущими наборами с помощью сильного модульного умножения, действительно можно считать задачами общего положения, поскольку они составляют значительную часть всех возможных задач о рюкзаке. Более того, для достаточно больших модулей практически все задачи о рюкзаке, которые могут получаться из задач о рюкзаке со сверхрастущими наборами с помощью сильного модульного умножения, действительно реализуются на практике, но, что является основной причиной слабости системы Меркля-Хеллмана, эти наборы возникают неравномерно, имеются наборы, которые получаются значительно чаще других. Эта неравномерность и создает уязвимость, с помощью которой удается построить удачные атаки на криптосистему Меркля-Хеллмана.

В заключение отметим, что в настоящий момент в качестве основы для построения криптографических систем рассматривается обобщенная задача о рюкзаке, отличающаяся от уже известной нам задачи тем, что изначально гирь каждого веса дается $m \geq 2$ штук [8].

Ссылки

[1] *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. М. : Мир, 1984. 510 с.

[2] *Merkle R., Hellman M.* Hiding information and signature in trapdoor knapsacks // IEEE Transaction on Information Theory, IT-24-5, September. 1978. P. 525–530.

[3] *Shamir A.* On the Cryptocomplexity of Knapsack Systems // Proceedings of the 11th ACM Symposium on the Theory of Computing. 1979. P. 118–129.

[4] *Shamir* A. A polynomial time algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman cryptosystem // Proceedings of the 23rd FOCS Symposium. 1982. P. 145–152.

[5] *Brickell E. F.* The cryptanalysis of knapsack cryptosystems // Applications of Discrete Mathematics, R. D. Ringeisen and F. S. Roberts, eds. SIAM (1988). P. 3–23.

[6] *Brickell E. F.* Solving Low-Density Knapsacks // Advances in Cryptology, Proceedings of Crypto 83, Plenun Press. 1984. P. 25–37.

[7] *Odlyzko A. M., Lagarias J. C.* Solving Low-Density Subset Sum Problems // Journal of the Association for Computing Machinery. 1985. Vol. 32, № 1. P. 229–246.

[8] *Осипян В. О.* О криптосистемах с заданным рюкзаком // Материалы VI Международной научно-практической конференции «Информационная безопасность». Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2004. С. 269–271.

УДК 517.51, 517.53

М. В. Невский
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

О двух великих теоремах анализа

Обсуждаются доказательства Гурса и Лебега двух основополагающих теорем анализа: теоремы Коши об интеграле от аналитической функции комплексного переменного и теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами.

Библиография: 4 *названия.*

Ключевые слова: *аналитическая функция, интеграл, контур, равномерная норма, многочлен, ломаная.*

Главные составляющие математической науки — теоремы и доказательства. Именно изучение доказательств даёт глубокое проникновение в предмет, знание исторических корней науки и представляет неоценимую пользу для будущего исследователя. Вместе с тем на знакомство с доказательствами теорем на математических факультетах новые образовательные стандарты предусматривают совсем немного времени – по ряду направлений и дисциплин лекционные часы сократились весьма значительно. Что же касается школьного курса математики, то из него многие доказательства удалены уже давно, и для некоторых студентов процесс формирования доказательного математического мышления начинается практически с нуля.

В этой заметке обсуждаются две фундаментальные теоремы анализа — теорема Коши об интеграле по замкнутой кривой от аналитической функции комплексного переменного и теорема Вейерштрасса о возможности равномерной аппроксимации непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами. Автору представляется весьма интересным отметить методическую (или идеологическую) общность подходов к некоторым доказательствам этих теорем.

Теорема Коши. *Пусть f — однозначная аналитическая функция, заданная в односвязной области E, Γ — контур, лежащий в E. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

©Невский М. В., 2016

В 1825 г. Огюстен Коши (A. L. Cauchy) доказал эту теорему в следующем эквивалентном виде: *для аналитической функции f интеграл*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

не зависит от кусочно-гладкого пути, соединяющего точки z_1 и z_2 и лежащего в области аналитичности f. Однако в своём доказательстве Коши использовал дополнительное предположение о непрерывности $f'(z)$. Это предположение даёт возможность применить формулу Грина и затем условия Коши–Римана, что существенно упрощает изложение доказательства. Первое же доказательство теоремы Коши в общей формулировке было дано в 1884 г. французским математиком Эдуаром Гурса (E. J.-B. Goursat).

Доказательство теоремы Коши, открытое Гурса, состоит из следующих этапов.

1) Интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ может быть с любой точностью приближен с помощью интегралов вида $\int\limits_{\gamma_P} f(z)\,dz$, где γ_P — контур многоугольника P, целиком лежащий в E. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует принадлежащий E многоугольник P, для которого

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\gamma_P} f(z)\,dz \right| < \varepsilon.$$

Эта лемма Гурса об аппроксимации справедлива и для кусочно-непрерывной (не обязательно аналитической) функции f.

2) Теорема Коши верна для случая, когда Γ — контур треугольника. Именно на этом этапе используется аналитичность функции f.

3) Теорема Коши верна для случая, когда Γ — контур многоугольника.

4) Из предыдущего следует, что теорема Коши верна в общем случае.

Почему теорема Коши является краеугольным камнем теории аналитических функций комплексного переменного? Дело в том, что из неё выводятся все основные утверждения об аналитических функциях, и это не случайно. Как доказал итальянский математик Джиачинто Морера (G. Morera, 1886), свойство аналитической функции, выраженное теоремой Коши, является характеристическим. Именно, *если функция f непрерывна в односвязной области E и интеграл от неё по любому* *контуру, лежащему в E, равен нулю, то f является аналитической в E* (теорема Мореры).

Полностью доказательство Гурса приведено, например, в учебнике [4; с. 149], а также учебных пособиях [2; с. 96] и [3; с. 78].

Перенесёмся теперь в область вещественного анализа. В 1885 г. Карл Вейерштрасс (K. T. W. Weierstrass [6]) опубликовал доказательство следующей замечательной теоремы, относящейся к теории приближения функций. Интересно заметить, что Вейерштрасс родился в 1815 г.

Теорема Вейерштрасса. *Каждую функцию, непрерывную на конечном отрезке, можно с любой точностью равномерно приблизить алгебраическими многочленами.*

Пусть $C[a,b]$ есть пространство непрерывных функций $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ с равномерной (или чебышёвской) нормой

$$\|f\|_{C[a,b]} := \max_{a\le x\le b}|f(x)|.$$

Теорема Вейерштрасса утверждает, что для любой $f\in C[a,b]$ и любого $\varepsilon>0$ существует алгебраический многочлен p, для которого $\|f-p\|_{C[a,b]}<\varepsilon$.

Принято подчёркивать фундаментальную роль этого открытия в теории приближения. Например, С. Н. Бернштейн писал: «Открытие этой замечательной по своей общности теоремы определило дальнейший ход развития анализа». Действительно, теорема Вейерштрасса в соединении с результатами и идеями П. Л. Чебышёва натолкнула на мысль искать взаимосвязи между гладкостью функций и её наилучшими приближениями. Теорема Вейерштрасса оказалась отправной точкой и для проблематики, связанной с аппроксимацией функций комплексного переменного.

Первоначальное доказательство Вейерштрасса основано на идее сглаживания и применении тейлоровских многочленов. Конструктивное доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на соображениях теории вероятностей, дал в 1912 г. С. Н. Бернштейн. Он доказал следующее. Пусть $[a,b]=[0,1]$ (к этому всё сводится). Введём в рассмотрение многочлены

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k},$$

тогда $\|f-B_n\|_{C[0,1]}\to 0,\ n\to\infty$. Доказательство Бернштейна полностью излагается в [1; с. 38].

Остановимся более подробно на доказательстве теоремы, которое в 1898 г. дал Анри Лебег (H. L. Lebesgue). Оно складывается из следующих простых утверждений (см. [5; с. 134]).

1) Непрерывная функция равномерно приближаема ломаными. Иначе говоря, для любой $f \in C[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ломаная, т. е. непрерывная кусочно-линейная функция l, для которой

$$\|f - l\|_{C[a,b]} < \varepsilon.$$

2) Каждая ломаная представима в виде

$$l(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j |x - x_j|. \tag{1}$$

3) Функция $|x|$ равномерно аппроксимируется алгебраическими многочленами на $[-1,1]$.

Последнее следует, например, из равномерной сходимости на $[-1,1]$ биномиального ряда

$$(1+t)^m = 1 + mt + \frac{m(m-1)}{2!}\,t^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,t^n + \ldots$$

Здесь $b \in \mathbb{R}$; если m — неотрицательное целое, то правая часть содержит конечное число слагаемых. Взяв $m = \frac{1}{2}$, получим, что равномерно по $x \in [-1,1]$ выполняется

$$|x| = (x^2)^{1/2} = (1 - (1-x)^2)^{1/2} = \lim_{n\to\infty} p_n(x),$$

где

$$p_n(x) := 1 - \frac{1-x^2}{2} - \frac{(1-x^2)^2}{8} + \ldots +$$
$$+ (-1)^n \frac{(1-x^2)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right).$$

4) Из предыдущего следует теорема Вейерштрасса.

Обратите внимание, насколько схожи подходы Гурса и Лебега к доказательству этих двух теорем, первая из которых относится к комплексному, а вторая — к вещественному анализу. Оба доказательства методически совершенны, прозрачны и могут быть с большой пользой разобраны студентами. В основе каждого доказательства лежит лемма об аппроксимации с помощью ломаных; этот этап рассуждения является первым. Один этап является конструктивным, «кирпичиком» доказательства (это пункт 2 в доказательстве Гурса и пункт 3 в доказательстве Лебега), с помощью которого строится более общий случай (этапы 3 и 2 соответственно).

В заключение заметим, что в рамках рассматриваемой тематики имеется ряд полезных для студента упражнений. В качестве примеров отметим комбинаторные тождества, применяемые в доказательстве Бернштейна, свойства многочленов B_n, а также вопросы существования и единственности представления данной ломаной равенством (1).

Ссылки

[1] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Гостехиздат, 1947. 324 с.

[2] *Бицадзе А. В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М: Наука, 1972. 264 с.

[3] *Невский М. В.* Элементы теории функций комплексного переменного. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 106 с.

[4] *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М: Наука, 1977. 444 с.

[5] *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1987. С. 103–260.

[6] Weierstrass K. Über die analytische Darstellung sogennanter willürlicher Funktionen einerieelen Väränderlichen // Sitzungsberichte der Acad. zu Berlin, 1885. S. 633–639, 789–805.

УДК 514.17

М. В. Невский
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

О гомотетическом образе симплекса, поглощающем куб

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\alpha(S)$ минимальное $\sigma > 0$ такое, что единичный куб $Q_n := [0,1]^n$ принадлежит трансляту σS. В случае $\alpha(S) \neq 1$ транслят $\alpha(S)S$, содержащий Q_n, есть образ S при гомотетии с центром в некоторой точке $x \in \mathbb{R}^n$. В статье приводятся формулы для вычисления x по вершинам S.

Библиография: 3 *названия.*

Ключевые слова: n-мерный симплекс, n-мерный куб, осевой диаметр, гомотетия, центр гомотетии.

В этой заметке $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обозначает совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 (линейных функций). Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $j = 1, \ldots, n+1$. Матрица

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}$$

является невырожденной. Положим $\Delta := \det(\mathbf{A})$, тогда $\mathrm{vol}(S) = \frac{|\Delta|}{n!}$. Обозначим через $\Delta_j(x)$ определитель, который получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Введём в рассмотрение многочлены из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$, определяемые равенством $\lambda_j(x) := \frac{\Delta_j(x)}{\Delta}$. Пусть

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \tag{1}$$

©Невский М. В., 2016

Так как $\lambda_j\left(x^{(k)}\right)=\delta_j^k$ (здесь δ_j^k — символ Кронекера), то коэффициенты λ_j удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1j} \\ l_{2j} \\ \vdots \\ l_{n+1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(в правой части 1 стоит только в j-й строке). Умножая это равенство слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получаем, что коэффициенты λ_j составляют j-й столбец $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $\mathbf{A}^{-1}=(l_{ij})$.

Любой многочлен $p\in\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ может быть записан в виде

$$p(x)=\sum_{j=1}^{n+1} p\left(x^{(j)}\right)\lambda_j(x). \tag{2}$$

В связи с этим равенством мы называем многочлены λ_j базисными многочленами Лагранжа симплекса S. Применяя (2) последовательно к $p(x)=1,\ x_1,\ \dots,\ x_n$, получим

$$\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x)=1,\quad \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(x)x^{(j)}=x. \tag{3}$$

Соотношения (3) означают, что числа $\lambda_1(x),\dots,\lambda_{n+1}(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x\in\mathbb{R}^n$ относительно симплекса S. Симплекс S задаётся равенствами

$$S=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \lambda_j(x)\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}^n: 0\leq\ \lambda_j(x)\leq 1\};$$

$(n-1)$-мерные грани S принадлежат гиперплоскостям с уравнениями $\lambda_j(x)=0$.

Обозначим через $d_i(S)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного i-й координатной оси. Величина $d_i(S)$ называется i-м осевым диаметром S. В [1] автор показал, что

$$\frac{1}{d_i(S)}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|\,. \tag{4}$$

Центр этого отрезка есть точка

$$m^{(i)}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{|l_{ij}|}{\sum\limits_{k=1}^{n+1}|l_{ik}|}\,x^{(j)}. \tag{5}$$

Под σS будем понимать результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Через $S_{x,\sigma}$ обозначим образ S при гомотетии с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ и коэффициентом σ. Тем самым, $\sigma S = S_{m,\sigma}$, где m — центр тяжести S. Напомним, что m — внутренняя точка S, все барицентрические координаты которой равны $\frac{1}{n+1}$:

$$m = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)}.$$

Пусть Q_n — n-мерный единичный куб $[0,1]^n$. Определим $\alpha(S)$ как минимальное $\sigma > 0$, для которого Q_n принадлежит трансляту (результату параллельного переноса) симплекса σS. В [3] установлено, что

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}. \tag{6}$$

Из (6) и (7) следует равенство

$$\alpha(S) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу о вычислении для симплекса S такой точки $x \in \mathbb{R}^n$, для которой с минимальным возможным для этого симплекса коэффициентом $\sigma > 0$ справедливо включение $Q_n \subset S_{x,\sigma}$. Задача имеет решение, и причём единственное, в случае $\alpha(S) \neq 1$; при этом минимальное σ как раз и равно $\alpha(S)$. Мы приведём формулы, в которых центр x минимальной положительной гомотетии при поглощении симплексом единичного куба вычисляется через вершины S и числа l_{ij} — коэффициенты многочленов λ_j.

Из определения $\alpha(S)$ легко следует, что некоторый транслят симплекса $\alpha(S)S$ описан вокруг Q_n, т. е. каждая $(n-1)$-мерная грань этого транслята содержит вершину Q_n. Поэтому $\alpha(S) = 1$ тогда и только тогда, когда существует транслят S, описанный вокруг Q_n.

Теорема 1. *Если $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \neq 1$, то существует единственная точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ такая, что $Q_n \subset S_{x,\sigma}$. Имеют место равенства*

$$x_k = \frac{1}{2(\sigma - 1)} \left[\sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} |l_{ij}| \right) x_k^{(j)} - 1 \right], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Если же $0 < \sigma < \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}$, то для любой $x \in \mathbb{R}^n$ верно $Q_n \not\subset S_{x,\sigma}$.

Приведём формулы для вычисления x, в которых используются только вершины S и числа l_{ij}.

Теорема 2. *Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ условие $\alpha(S) \neq 1$ эквивалентно*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| \neq 2. \tag{9}$$

Пусть выполнено (9) *и* $\sigma := \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n+1}|l_{ij}|$. *Тогда единственная точка* x, *для которой верно включение* $Q_n \subset S_{x,\sigma}$, *может быть вычислена по формулам*

$$x_k = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|l_{ij}|\right)x_k^{(j)} - 1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n+1}|l_{ij}| - 2}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Доказательства теорем 1 и 2 даются в статье автора [2].

Приведённые в настоящей заметке формулы (4)–(8), (10) могут применяться при решении различных вычислительных задач, в том числе, и с применением компьютера.

Ссылки

[1] *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. (Английский перевод: *Nevskii M. V.* On a property of n-dimensional simplices // Math. Notes. 2010. V. 87, № 4. P. 543–555.)

[2] *Невский М. В.* Об одной задаче для симплекса и куба в $\mathbb{R}^n$ // Модел. и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 3. С. 77–85. (Английский перевод: *Nevskii M. V.* On some problem for a simplex and a cube in $\mathbb{R}^n$ // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. V. 48, № 7. P. 521–527.)

[3] *Nevskii M.* Properties of axial diameters of a simplex // Discrete Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

УДК 519.872:517.91

Е. В. Никулина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lena.vnik@gmail.com

К вопросу о решении задач теории массового обслуживания с помощью систем дифференциальных уравнений

Ключевые слова: теория массового обслуживания, система массового обслуживания, система дифференциальных уравнений.

Теория массового обслуживания (далее – ТМО) имеет тесную связь с теорией вероятностей, математическим анализом, теорией дифференциальных уравнений. Остановимся более подробно на последней взаимосвязи.

Целью решения задач ТМО является оптимизация и упорядочивание работы систем массового обслуживания (далее – СМО). В зависимости от режима работы систем их можно разделить на системы, работающие в стационарном режиме и не в стационарном. Работа последних СМО описывается различными системами дифференциальных уравнений. Неизвестными функциями в них являются $p_k(t)$ – вероятности того, что в момент времени t в системе находится k заявок. Допущение, что в момент начала работы СМО пуста, приводит к следующим начальным условиям:

$$p_k(0) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases} \qquad (1)$$

В зависимости от исходных характеристик системы её работа может описываться конечной или бесконечной системой дифференциальных уравнений (см. [1]).

Конечными системами описывается работа СМО следующих типов.

– Системы с потерями, без очереди.

Пример из текста лекций [2]. СМО без очереди, с двумя обслуживающими приборами, интенсивностью входного потока, равной

©Никулина Е. В., 2016

двум заявкам в единицу времени, интенсивностью обслуживания, равной одной заявке в единицу времени, начальными условиями (1). Работа такой СМО будет описываться системой:

$$\begin{cases} {p_0}'(t) = -2p_0(t) + p_1(t), \\ {p_1}'(t) = 2p_0(t) - 3p_1(t) + 2p_2(t), \\ {p_2}'(t) = 2p_1(t) - 2p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Последнее уравнение не является дифференциальным и получается из соображений теории вероятностей. Система линейно зависима, убрав, например, третье уравнение и решив её, получим:

$$p_0(t) = \frac{1}{5} + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{15}e^{-5t},$$

$$p_1(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t},$$

$$p_2(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{4}{15}e^{-5t}.$$

Найденные функции позволяют, в свою очередь, определить многие характеристики СМО. В данном случае это: вероятность того, что все приборы заняты (свободны), вероятность того, что заявка получит отказ (не получит отказ), среднее число заявок в системе, среднее число занятых (свободных) приборов и т. п. Кроме того, найдя пределы

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k \ ,$$

мы определим так называемые стационарные значения вероятностей состояний СМО. В этом случае p_k – вероятность того, что в произвольный достаточно отдалённый момент времени в СМО будет находиться k заявок. Вслед за этим можно будет найти стационарные значения и других характеристик системы, в том числе средних. Построив графики функций $p_k(t)$, можно приблизительно определить, в какой момент времени установится стационарный режим работы СМО.

– Замкнутые системы массового обслуживания. В этом случае, в отличие от предыдущего, интенсивность входного потока меняется в зависимости от состояний СМО.

Пример. Рабочий обслуживает группу из шести автоматов. В среднем автомат останавливается один раз в час. Обслуживание одного автомата занимает у рабочего в среднем двенадцать минут. Математической моделью описанной СМО является следующая конечная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} {p_0}'(t) = -6p_0(t) + 5p_1(t), \\ {p_1}'(t) = 6p_0(t) - 10p_1(t) + 5p_2(t), \\ {p_2}'(t) = 5p_1(t) - 9p_2(t) + 5p_3(t), \\ {p_3}'(t) = 4p_2(t) - 8p_3(t) + 5p_4(t), \\ {p_4}'(t) = 3p_3(t) - 7p_4(t) + 5p_5(t), \\ {p_5}'(t) = 2p_4(t) - 6p_5(t) + 5p_6(t), \\ {p_6}'(t) = p_5(t) - 5p_6(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) + p_6(t) = 1. \end{cases}$$

Здесь $p_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t *сломаны* k автоматов. Заметим, что за $p_k(t)$ можно принять вероятность того, что в момент t *работают* k автоматов, но тогда система дифференциальных уравнений будет другой.

– Системы с ожиданием, но с ограничениями на длину очереди, на количество заявок в системе и т. п.

Бесконечной системой дифференциальных уравнений описываются различные системы с ожиданием, без потерь. Огромную роль в теории массового обслуживания играет и так называемый процесс чистого размножения (частный и общий случаи), когда, по сути, рассматривается только входной поток заявок в СМО. В частном случае, когда интенсивность входного потока не зависит от состояния системы, решая бесконечную систему дифференциальных уравнений, мы приходим к пуассоновскому закону распределения числа заявок в системе (доказательство этого факта подробно представлено в тексте лекций [2]), который в ТМО имеет очень большое значение:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{2}$$

где λ – интенсивность входного потока в СМО.

Таким образом, взаимосвязь теории массового обслуживания и теории дифференциальных уравнений очень тесная, и благодаря задачам ТМО раскрывается ещё одно прикладное значение дифференциальных уравнений, которые обычно рассматриваются как инструмент решения естественнонаучных задач физики, химии, биологии и т. п.

Ссылки

[1] *Никулина Е. В.* Системы дифференциальных уравнений в курсе «Теория массового обслуживания» // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские

чтения 2014»: Тезисы докладов Международной научной конференции (Новополоцк, 19-22 мая 2014г.) Часть 2. Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. 120 с.

[2] *Кузнецова В. А., Никулина Е. В.* Введение в теорию массового обслуживания: Текст лекций. Ярославль: ЯрГУ, 2005. 60 с.

УДК 372.851

Е. Р. Семко

Средняя школа «Провинциальный колледж», город Ярославль
E-mail: yarprovcol@yandex.ru

Обратный отсчет?

Рассматриваются некоторые проблемы математической подготовки школьников и студентов, связанные с опережающим введением новых стандартов высшего образования (ФГОС ВО 3+) и предстоящим переходом на новый стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО).

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: федеральные государственные образовательные стандарты высшего, среднего общего образования, математическая подготовки школьников и студентов, корректирующие мероприятия.

С первого сентября 2013 года в десятых-одиннадцатых классах общеобразовательных школ возможен переход на федеральный государственный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) [1] «по мере готовности» образовательных учреждений. Ожидаемый результат от введения стандарта нового поколения – повышение качества подготовки российских школьников, которое оценивается в том числе по результатам их участия в международных сопоставительных исследованиях.

Одним из международных исследований является тестирование PISA (Programme for International Student Assessment), проверяющее математическую грамотность 15-летних школьников – способность ученика определять и понимать роль математики в реальном мире, высказывать обоснованные математические суждения, использовать математику так, чтобы удовлетворять потребности, присущие заинтересованному и созидающему члену общества. За годы участия в программе PISA (более десяти лет) не произошло существенных изменений в состоянии математической грамотности российских 15-летних учащихся, результаты оказываются существенно ниже мировых стандартов.

Анализ ситуации [2] приводит специалистов, занимающихся этой проблемой, к выводу о том, что причины кроются в абсолютизации

©Семко Е. Р., 2016

академической составляющей школьного курса математики, что приводит к уменьшению внимания к практической составляющей обучения математике. Умения школьников воспроизводить знания и применять известные алгоритмы преобладают над интеллектуальными умениями высокого уровня (обобщать, анализировать, прогнозировать, выдвигать гипотезы и т. д.). Становясь студентами, они успешно справляются с математическими заданиями, требующими воспроизведения изученного материала (если объем материала не превышает привычного невысокого уровня), но испытывают серьезные трудности при выполнении заданий, требующих самостоятельного вывода, анализа новой математической ситуации или решения новой поставленной проблемы.

ФГОС СОО впервые предъявляет четкие требования к результатам обучения и к их структуре. Это единство и взаимосвязь личностных, предметных и метапредметных результатов. Хочется перечислить некоторые новые требования к результатам освоения выпускниками школ основной образовательной программы среднего общего образования: умение использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей; владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, границ своего знания и незнания; умение использовать средства ИКТ в решении когнитивных, коммуникационных и организационных задач.

Для достижения таких «фантастических» результатов предполагается, что каждая школа разработает программу развития универсальных учебных действий на ступени среднего общего образования, включающую формирование компетенций обучающихся в области учебно-исследовательской и проектной деятельности; разработает, с учетом объявленных стандартом новых требований, учебный план, включающий 9(10) предметов (вместо сегодняших 15), из них 3(4) на углубленном уровне, и обязательный индивидуальный проект; программу внеурочной деятельности, в рамках которой ученик также может выполнять работу над индивидуальным проектом.

В основе методологии разработки ФГОС СОО лежит уже знакомый по стандартам для высшей школы компетентностный подход. Этот подход, называемый в истории отечественной психолого-педагогической науки системно-деятельностным подходом, определяет главную ценность учебной деятельности как «компетентность к обновлению компетентности» [3] .

В стране только единицы школ перешли на ФГОС СОО (обязательный переход предполагается к 2020 году), в Ярославской области лишь одна школа проходит апробацию нового стандарта – Средняя школа «Провинциальный колледж».

Серьезная проблема заключается в том, что новые стандарты высшего образования, имеющие в основе компетентностный подход, опережают введение новых стандартов среднего образования. Нарушается преемственность между требованиями к выпускнику школы и требованиями к студенту-первокурснику. Уровень математической подготовки выпускников школ во многом недостаточен для освоения математических дисциплин в вузе. Основные причины те же: отсутствие навыков самостоятельной работы; неумение работать с учебной, научной литературой, электронными источниками информации; значительное отличие объемов информации, изучаемой в школе и в университете; просто слабая предметная подготовка по математике.

С другой стороны, еще многие преподаватели высшей школы, декларируя переход на работу по стандартам третьего поколения, продолжают работать без использования новых, так называемых активных и интерактивных форм работы со студентами (в школе использование таких методов уже вышло из разряда «новых» и стало привычным делом для учителя и для ученика).

Затронутая проблема несоответствия по времени введения уже действующих стандартов высшего образования (третьего поколения) и не введенных окончательно стандартов среднего общего образования (второго поколения) требует серьезного и неформального подхода к ее решению на уровне школы, вуза, системы управления образованием.

На уровне вуза на направлениях, требующих серьезного изучения дисциплин математического цикла, можно для локального решения поставленной проблемы с помощью профессорско-преподавательского состава выполнить ряд мероприятий:

- внимательно отнестись к входному контролю знаний по математике студентов первого курса и продолжить практику введения так называемых «курсов выравнивания»;

- проводить анализ того, как идет восприятие данной студенческой аудиторией нового материала, корректировать способы и форму его представления, вплоть до изменения темпа, громкости, скорости письма на доске, частоты смены слайдов и т. п.;

- познакомиться с опытом использования активных и интерактивных форм работы со студентами в рамках преподавания математических дисциплин; использовать комплексные задания, в которых студенты используют различные виды деятельности (формулируют цели, определяют математические, программные и другие методы обработки информации); ввести в практику методы коллективной деятельности студентов;

- широко использовать учебно-методические материалы, подготовленные в электронном виде;

- разработать и использовать балльно-рейтинговую систему для оценки успеваемости студентов, позволяющую повысить вес работы студента в течение семестра и снизить уровень стресса в период сессии.

Ссылки

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. М.: Просвещение, 2014.

[2] *Ковалева Г. С.* Что же показывают результаты исследования PISA? // Доклад на семинаре «Актуальные исследования и разработки в области образования». Институт развития образования ГУ-ВШЭ 21.08.2008.

[3] *Асмолов А. Г., Бурменская Г. В., Володарская И .А., Карабанова О. А., Молчанов С. В., Солмина Н. Г.* Проектирование универсальных учебных действий в старшей школе // Национальный психологический журнал. 2011. №1(5). С. 104–110.

УДК 004.4'418, 004.4'422

С. М. Таранин
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: STARanin0208@yandex.ru

Об анализе программных реализаций

Приводится краткий обзор прикладных инструментов, которые можно использовать для анализа программного обеспечения при отсутствии его исходного кода.

Библиография: 1 название.

Ключевые слова: программа, анализ, отладчик, дизассемблер

Практические занятия по дисциплине «Защита программ и данных» предполагает изучение программных реализаций. В качестве исходных данных берутся исполняемые файлы и библиотеки, в которых содержится информация, необходимая для восстановления и исследования алгоритмов работы программы. Подобная деятельность направлена не только на обход защиты от копирования или кражу злоумышленниками интеллектуальной собственности. Анализом работы программ занимаются и специалисты по защите информации, такие как разработчики антивирусного программного обеспечения. Для того чтобы система антивирусной защиты могла своевременно находить вредоносную программу, необходимо изучить алгоритмы ее работы и выделить признаки, по которым ее можно идентифицировать.

Таким образом, одним из этапов работы по анализу программного обеспечения является восстановление алгоритмов его функционирования [1]. Для этого используются специальные приложения: дизассемблеры, отладчики, специальные редакторы. Рассмотрим их более подробно.

Дизассемблеры. Позволяют перевести код исполняемого файла или библиотеки на язык понятный аналитику. В зависимости от того, под какую платформу была собрана программа, необходимо подобрать соответствующий дизассемблер и попытаться восстановить исходный код для его дальнейшего изучения. Например, если исполняемый файл был скомпилирован для выполнения в среде Common Language Runtime (CLR), то с помощью дизассемблера ILSpy можно восстановить его

©Таранин С. М., 2016

исходный код на языке высокого уровня с точностью до именования переменных и функций. Если же исполняемый файл был собран из исходников на языке C/C++, то удастся восстановить код, близкий к исходному, только на языке ассемблера. В данном случае эффективные средства перевода на языки высокого уровня, к сожалению, отсутствуют (за исключением плагина Hex-Rays для дизассемблера IDA). Если исполняемый файл доступен вместе с отладочной информацией (файлы с расширением pdb), то возможно узнать имена классов и функций.

Отладчики. Часто для понимания логики работы программы недостаточно просмотра ее исходного кода. В таком случае применяют так называемые программы-отладчики. Они позволяют выполнять программу по шагам (по одной инструкции) и таким образом понять логику ее работы.

Редакторы исполняемых файлов и библиотек. Сюда относятся приложения для модификации исполняемых файлов с целью изменить алгоритм работы анализируемой программы.

Первая проблема, с которой приходится сталкиваться при подготовке практических занятий, заключается в выборе необходимого программного обеспечения для выполнения студентами лабораторных работ и разбора тестовых примеров. Ниже представлены бесплатные приложения, которые можно свободно устанавливать на учебные машины.

Интерактивный дизассемблер IDA Pro Free. Включает в себя отладчик, производит неполный автоматический анализ кода, а также самостоятельно ищет файлы с отладочной информацией. Например, если открыть в IDA исполняемый файл системной программы операционной системы Windows, IDA предложит самостоятельно скачать необходимую отладочную информацию с официального сайта компании Microsoft.

Отладчик ImmunityDebugger. Включает в себя интерфейс прикладного программирования (англ. application programming interface, API), с помощью которого можно писать собственные подпрограммы (расширения) для ImmunityDebugger на языке программирования Python. Данное API помогает упростить поиск и эксплуатацию уязвимостей в исходном коде исследуемой программы.

Редактор CFF Explorer. Позволяет читать и редактировать заголовки исполняемых файлов и библиотек. Включает шестнадцатеричный редактор (hex-редактор), позволяющий изменять исполняемые файлы и библиотеки анализируемой программы.

Дизассемблер ILSpy. Данное приложение позволяет восстановить исходный код программы, разработанной на платформе .NET. Компиляторы, поддерживающие платформу .NET, транслируют код на языках высокого уровня в байт-код инструкций языка CIL (Common Intermediate Language). Поэтому соответствующие дизассемблеры могут с одинаковой точностью восстановить исходный код таких приложений как на языке CIL, так и на языках высокого уровня. Дизассемблер ILSpy может представить исходный код на языках программирования C#, Visual Basic или CIL. Для ILSpy существует плагин Reflexil, который позволяет редактировать исполняемые файлы исследуемого приложения на уровне инструкций языка CIL.

Вторая проблема заключается в подготовке задач для аудиторных занятий и самостоятельной работы. Для аудиторных занятий необходимо заранее реализовать тестовые приложения для демонстрации примеров эксплуатации наиболее распространенных уязвимостей, описанных в учебных пособиях. В качестве базы для практической работы по дисциплине «Защита программ и данных» можно рассмотреть API отладчика Immunity Debugger. Например, составить несколько вариантов реализации плагина решающего ту или иную задачу.

Вариантом задания для самостоятельной работы может быть анализ системных утилит операционной системы Windows таких, как more, tree, ipconfig и др. От версии к версии исходный код этих утилит меняется. Поэтому другим вариантом может быть поиск отличий в алгоритмах работы таких программ в разных версиях операционной системы Windows.

Ссылки

[1] *Проскурин В. Г.* Защита программ и данных. М. : Издательский центр «Академия», 2012.

УДК 123.45

Е. А. Тимофеев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: timofeevEA@gmail.com

Система счисления Фибоначчи и нахождение значений самоподобных функций с перекрытием

В заметке описано применение системы счисления Фибоначчи для нахождения значений некоторых самоподобных функций с перекрытием.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: Система счисления Фибоначчи, самоподобные функции, перекрытия, свертка Бернулли, мера Бернулли.

Система счисления Фибоначчи является примером непозиционной системы счисления и применяется очень редко. В настоящей заметке приводятся примеры ее применения для нахождения значений самоподобных функций с перекрытием.

Самоподобные функции на отрезке строятся по заданным линейным отображениям этого отрезка. Если внутренности областей значений линейных отображений не пересекаются, то нахождение значений таких функций задается простым рекурсивным алгоритмом. Если же есть перекрытие, то аналогичные алгоритмы неизвестны, а построение функций обычно сводится к приближенному построению аттрактора подбираемой динамической системы.

В этой заметке приведены примеры двух самоподобных функций, заданных линейными отображениями с перекрытием и коэффициентом подобия, равным золотому сечению. Для этих функций описан рекурсивный алгоритм нахождения их значений.

©Тимофеев Е. А., 2016

Система счисления Фибоначчи. Через F_n будем обозначать числа Фибоначчи: $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Теорема Цекендорфа [1] утверждает, что любое натуральное число n можно представить единственным образом в виде суммы чисел Фибоначчи:

$$n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k F_k,$$

где $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ и в последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ нет двух подряд идущих 1.

Позиционная система счисления на базе золотого сечения. Пусть $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Любое действительное число можно записать по основанию q с помощью цифр 0 и 1. Так любое число x, $0 \le x \le 1$, можно представить как

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k q^k.$$

Если потребовать, чтобы не встречались подряд две единицы и чтобы не появлялось бесконечной последовательности $010101\ldots$, то каждое число имеет единственное представление [2]. Отметим, что $q + q^2 = 1$.

Числа с конечным числом единиц называются q-рациональными.

Между q-рациональными числами из отрезка $[0, 1]$ и множеством натуральных чисел легко установить взаимно-однозначное соответствие

$$\nu\left(\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k q^k\right) = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k F_k. \tag{1}$$

Свертка Бернулли. Рассмотрим функцию

$$G(t) = \frac{1}{2} G\left(\frac{t}{q}\right) + \frac{1}{2} G\left(\frac{t - q^2}{q}\right). \tag{2}$$

Отметим, что $G(t)$ является функцией распределения случайной величины (свертки Бернулли)

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n q^{n+2},$$

где ξ_n – независимые случайные величины, принимающие значения 0 и 1 с вероятностями 1/2. Поэтому $G(t) = 0$ при $t \le 0$ и $G(t) = 1$ при $t \ge 1$.

Выбранное значение q (обратное золотому сечению) интересно по следующим причинам:

1) функция $G(t)$ является чисто сингулярной [3];

2) носитель E меры, заданной функцией $G(t)$, имеет лебегову меру 0 и является областью единственности ряда Фурье на отрезке $[0,1]$, т. е. из равенства нулю ряда в точках из E следует равенство нулю всех коэффициентов [4].

Основная трудность в нахождении функции $G(t)$ состоит в том, что на отрезке $[q^2,q]$ оба слагаемых в (2) являются ненулевыми (перекрытие).

Опишем рекурсивный алгоритм нахождения значений функции $G(t)$ в q-рациональных точках. Для этого достаточно описать алгоритм нахождения значений функции

$$G^*(n) = G(\nu^{-1}(n)) \tag{3}$$

для всех натуральных значений.

1. Находим $G^*(1) = G(q) = 2/3$, $G^*(2) = G(q^2) = 1/3$.
2. Для $n = 2,3,\ldots$ находим
$$G^*(F_{2n}-1) = G(1-q^{2n}) = 1 - \frac{1}{3}2^{-2n+2},$$
$$G^*(F_{2n-2}+F_{2n}-1) = G(1-q^{2n-1}) = 1 - \frac{1}{3}2^{-2n+3}.$$
3. Пусть значение $G^*(n)$ неизвестно, но известны значения во всех меньших точках и пусть $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k F_k$, $n_1 = \sum_{k=3}^m \varepsilon_k F_{k-1}$, тогда полагаем
$$G^*(n) = \begin{cases} 0.5G^*(n_1), & \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \\ 0.5G^*(1+n_1) + 0.5G^*(n_1)), & \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1; \\ 0.5 + 0.5G^*\left(\nu(q^2 + \sum_{k=3}^m \varepsilon_k q^{k-1})\right), & \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Для обоснования достаточно доказать неравенство

$$\nu(q^2 + \sum_{k=3}^m \varepsilon_k q^{k-1}) < n = 1 + \sum_{k=3}^m \varepsilon_k F_k,$$

при $n \neq F_{2l} - 1$ для любого l. Для таких n в последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ есть два нуля подряд. Пусть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_{2j-1} = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = \cdots = \varepsilon_{2j} = \varepsilon_{2j+1} = 0,$$

тогда

$$q^2 + \sum_{k=3}^m \varepsilon_k q^{k-1} = q^2 + q^2 + q^4 + \cdots + q^{2j-2} + \sum_{k=2j+2}^m \varepsilon_k q^{k-1} =$$
$$= q + q^3 + \cdots + q^{2j-3} + q^{2j} + \sum_{k=2j+2}^m \varepsilon_k q^{k-1}.$$

Если $\varepsilon_{2j+2} = 1$, то

$$\nu(q^2 + \sum_{k=3}^{m} \varepsilon_k q^{k-1}) = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2j-3} + F_{2j-1} + \sum_{k=2j+3}^{m} \varepsilon_k F_{k-1} <$$

$$< n = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2j-3} + F_{2j+2} + \sum_{k=2j+3}^{m} \varepsilon_k F_k.$$

Если $\varepsilon_{2j+2} = 0$, то

$$\nu(q^2 + \sum_{k=3}^{m} \varepsilon_k q^{k-1}) = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2j-3} + F_{2j} + \sum_{k=2j+3}^{m} \varepsilon_k F_{k-1} <$$

$$< n = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2j-3} + \sum_{k=2j+3}^{m} \varepsilon_k F_k,$$

поскольку $F_{2j} + F_{k-1} < F_k$ при $k \geq 2j+3$.

Средний радиус шара. Рассмотрим функцию

$$\rho(t) = \frac{q^2}{2}\rho\left(\frac{t}{q^2}\right) + \frac{q}{2}\rho\left(\frac{t}{q}\right) + \frac{q^2}{2}\rho\left(\frac{t-q^2}{q}\right) + \frac{q}{2}\rho\left(\frac{t-q}{q^2}\right). \tag{4}$$

Отметим, что эта функция задает средний радиус шара с мерой t в пространстве правосторонних последовательностей из 0 и 1 с мерой Бернулли, имеющей параметры $p = q^2$ и q. Напомним, что $q + q^2 = 1$. Поэтому $\rho(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\rho(t) = 1$ при $t \geq 1$.

Аналогичный алгоритм справедлив для нахождения значений функции $\rho(t)$ в q-рациональных точках. Приведем описание алгоритма нахождения значений функции

$$\rho^*(n) = \rho(\nu^{-1}(n)) \tag{5}$$

для всех натуральных значений.

1. Находим $\rho^*(1) = \rho(q) = \dfrac{22-7q}{31}$, $\rho^*(2) = \rho(q^2) = \dfrac{12-q}{31}$.

2. Для $n = 3, 4, \ldots$ находим

$$\rho(1-q^n) = \frac{1}{2} + \frac{q^2}{2}\rho(1-q^{n-1}) + \frac{q}{2}\rho(1-q^{n-2}),$$

и полагаем

$$\rho^*(F_{2n}-1) = \rho(1-q^{2n}), \quad \rho^*(F_{2n-2}+F_{2n}-1) = \rho(1-q^{2n-1}).$$

3. Пусть значение $\rho^*(n)$ не известно, но известны значения во всех меньших точках и пусть

$$n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k F_k, \quad n_1 = \sum_{k=3}^{m} \varepsilon_k F_{k-1}, \quad n_2 = \sum_{k=3}^{m} \varepsilon_k F_{k-2},$$

тогда полагаем

$$\rho^*(n) = \begin{cases} \frac{q^2}{2}\rho^*(n_2) + \frac{q}{2}\rho^*(n_1), & \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0; \\ \frac{q^2}{2} + \frac{q^2}{2}\rho^*(n_1) + \frac{q}{2}\rho^*(n_1 + 1), & \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1; \\ \frac{1}{2} + \frac{q^2}{2}\rho^*\left(\nu(q^2 + \sum_{k=3}^{m} \varepsilon_k q^{k-1})\right) + \frac{q}{2}\rho^*(n_2), & \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Ссылки

[1] *Грэхэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998. 708 с.

[2] *Bergman, G.* A Base Number system with an Irrational Base //Mathematics Magazine. 1957. Vol. 11, № 2. P. 98–110.

[3] *Erdös P.* On a Family of Symmetric Bernoulli Convolutions //American Journal of Mathematics. 1939. Vol. 61, № 4. P. 974–976.

[4] *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.

УДК 37.022:681.3

Д. Ю. Чалый, О. Б. Лавровская
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: chaly@uniyar.ac.ru
E-mail: olavr@gmail.com

Об одной методике преподавания вводной дисциплины по информатике и программированию

Авторы суммируют опыт и делятся своими методическими подходами, которые использовались в преподавании дисциплины «Информатика и программирование» в первом семестре 2015/2016 учебного года. В рамках этой дисциплины первокурсники должны развить основные навыки решения практических задач и усвоить ряд фундаментальных концепций современной информатики. Полученные знания должны формировать целостное впечатление об информатике как о науке и быть востребованными при изучении других дисциплин, а также развивать студента как ИТ-специалиста.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: информатика, программирование, методика, преподавание.

Введение

Содержание и методика преподавания вводной дисциплины по информатике и программированию являются чрезвычайно важными элементами образовательного процесса студентов ИТ-специальностей. Действительно, именно здесь закладывается базис соответствующих знаний и навыков, а также формируется первое впечатление о том, что такое современная информатика. При этом важным при реализации этой дисциплины является усвоение студентами фундаментальных

©Чалый Д. Ю., 2016
©Лавровская О .Б., 2016

принципов и алгоритмов, которые составляют основу этой науки, и формирование навыков решения реальных задач, а не просто написание кода, который предназначен для решения абстрактных задач, скажем, для перемещения байтов из одной области памяти в другую.

Целевая аудитория

При создании и реализации вводной дисциплины необходимо понимать способности целевой аудитории. В 2015/2016 учебном году рассматриваемый в статье подход к преподаванию дисциплины «Информатика и программирование» реализовывался для студентов первого курса направления 09.03.03 «Прикладная информатика». Статистика по итогам приемной кампании на факультете информатики и вычислительной техники приведена на рис. 1 (исходные данные были взяты из приказов к зачислению и списков абитуриентов с сайта [1]). Медианное значение балла экзамена ЕГЭ по ИКТ равно 67, по математике 69, а по русскому языку 83. Большой разброс оценок абитуриентов усугубляет сложность преподавания дисциплины, так как сложный материал может быть не воспринят студентами, имеющими слабую начальную подготовку, а простой материал демотивирует сильных студентов. Необходимо внимательно подходить к методике преподавания информатики, постоянно следить за тем, чтобы предлагаемый материал был доступен аудитории и студенты понимали, зачем им рассказывается та или иная концепция или прием программирования.

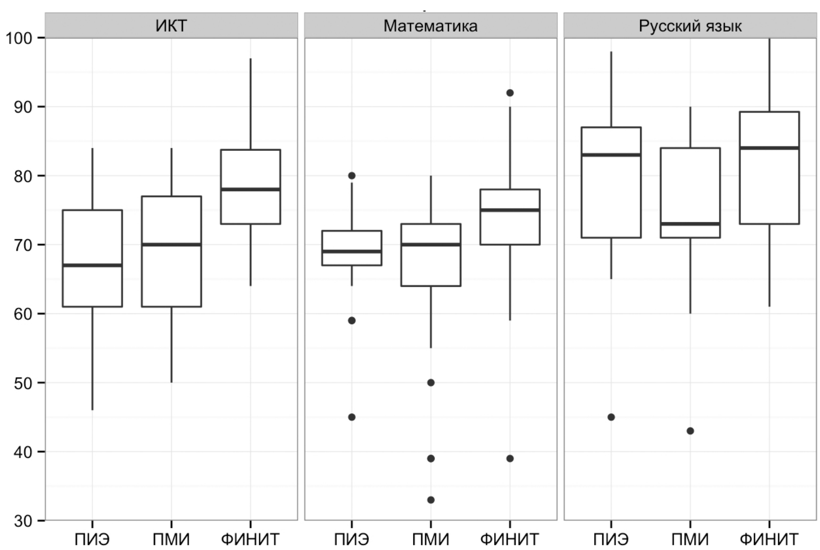


Рис. 1: Распределение баллов ЕГЭ по предметам, включенным в программу вступительных испытаний, у студентов первого курса факультета ИВТ

Однако баллы ЕГЭ не в полной мере отражают способности студентов. Опыт взаимодействия со студентами в процессе учебных занятий в течение первого семестра выявил следующие особенности. В целом после школы студентам знакомы основные конструкции языка программирования, такие как условный оператор, цикл, массив. Несколько в меньшей степени им известны такие фундаментальные понятия как функция или процедура, несмотря на то, что большинство из них в рамках школьной программы изучало язык программирования Pascal. В этом языке понятие указателя не является основополагающим, поэтому многие его не знают. Большинство обучающихся не знакомо с моделью работы с файлами в языках программирования. Студенты, как правило, не знают о рекурсии. В целом студенты не слишком внимательны при чтении условий задач, не уясняют, как вводятся входные данные и в каком формате должен выводиться результат.

Учитывая все эти особенности, необходимо было разработать методический подход, в рамках которого студенты развивают навыки программирования, получают позитивное первое впечатление о предмете и до конца семестра остаются достаточно мотивированными к изучению дисциплины.

Методика преподавания дисциплины

В этом разделе мы рассмотрим основные идеи и подходы, которые лежали в основе нашей методики преподавания предмета.

Выбор языка программирования. Выбор языка программирования является одним из определяющих факторов преподавания дисциплины. Уровень знаний первокурсников, только-только закончивших школу, определяет, чтó им необходимо изучить и как освоиться с образом мышления и подходами, лежащими в основе программирования. При этом такие языки, как C/C++ или Java, не слишком, на наш взгляд, подходят для этой цели из-за трудностей в изучении, а также достаточно сложной синтаксической и семантической структуры. При этом трудно не согласиться, что изучение программирования с использованием этих языков дает более целостную, фундаментальную и системную картину низкоуровневой организации вычислительных процессов в современных ЭВМ. С другой стороны, особенности целевой аудитории не позволяют надеяться на освоение одного из этих языков в полной мере. Значительная проблема кроется в поддержании мотивации студентов, поскольку для того, чтобы начинать решать интересные задачи, необходимо освоить значительный объем нового, сложного материала, что весьма трудно за отведенный объем аудиторных занятий. Эти выводы приводят нас к тому, что для преподавания в рамках этой дисциплины имеет смысл рассмотреть другой язык программирования.

Наш выбор остановился на скриптовом языке программирования Python [2], который, по оценкам [3, 4], является наиболее популярным языком, использующемся во вводных дисциплинах по информатике и программированию в лучших университетах США. Авторы этой статьи не ставят своей задачей всеобъемлющее сравнение Python, C/C++, Java и других языков программирования с методической точки зрения, интересную дискуссию на эту тему можно найти в [4, 5]. Тем не менее, хотелось бы отметить простоту изучения этого языка. Наш опыт показывает, что все основные конструкции языка студенты успевают изучить в достаточной мере за полтора месяца аудиторных занятий, после чего им можно давать решать интересные практические задачи. Это является действительно важным, так как позволяет вторую половину семестра посвятить рассмотрению фундаментальных тем, составляющих базис информатики и программирования.

Обзор фундаментальных концепций современной информатики и программирования. Любая образовательная программа по компьютерным наукам в университетах должна уделять значительное внимание развитию фундаментальных знаний. Вводная дисциплина должна начинаться с простых алгоритмов. На первых занятиях мы рассмотрели алгоритмы сортировки пузырьком (оказалось, что не все уверенно знают этот алгоритм), алгоритм бинарного поиска. После наработки практических навыков языка Python было решено перейти к рассмотрению переборных алгоритмов, реализующих перебор по основным комбинаторным объектам — перестановкам, сочетаниям и размещениям. Действительно, главное, в чем компьютер превосходит человека – это скорость счета, а самый простой подход к решению многих задач — это полный перебор. Далее мы рассмотрели рекурсию и рекурсивные алгоритмы, в частности, алгоритм быстрой сортировки. К этой теме мы вернемся еще раз во втором семестре, так как она является достаточно сложной для понимания, и должно пройти какое-то время, чтобы она усвоилась. Последней темой, которую мы затронули, являлась тема экспериментального анализа сложности алгоритмов, в которой мы попытались донести основную идею, как можно оценивать трудоемкость алгоритмов, какие классы сложности существуют и что они означают с практической точки зрения.

Демонстрация процесса решения задач. Начать программировать, лишь слушая лекции и изучая сущность алгоритмов на бумаге, невозможно. Вместе с этим необходимо на личном примере показывать, как нужно писать программы. На каждом лекционном занятии, помимо объяснения теоретического материала, рассматривалось три-пять задач, которые тут же и решались. При этом исходные коды решений вместе с дополнительными материалами, включая презентацию, рассылались студентам сразу же после лекции для самостоятельного изучения. На практических занятиях студентам для самостоятельного решения предлагались задачи из тем, которые рассматривались на лекции.

Постоянная вовлеченность в процесс изучения материала. Рабочие учебные планы по данной дисциплине предполагают одно лекционное и одно практическое занятие в неделю. Очевидно, что этого недостаточно для усвоения материала. В связи с этим возрастает роль самостоятельной работы над материалом, которая представлена двумя видами работ – тестами и лабораторными работами. Каждую неделю студенты получают домашнее задание в виде теста по пройденному материалу, закрепленному на практическом занятии. В итоге у нас получилось создать восемь тестов, покрывающих все темы первого семестра, по 15 вопросов в каждом тесте. При этом часть вопросов требует от студентов запуска/модификации/анализа предлагаемых программ. Все тесты были созданы на платформе Google Forms и доступны студентам онлайн. При таком подходе не было сдано лишь 4 работы из 160 (20 студентов $\times$ 8 тестов $=$ 160 работ). В качестве проверочных были проведены три контрольные работы по текущему материалу и итоговый зачет по дисциплине в рамках аудиторных занятий. Это позволило проверить усвоение студентами материала и разобрать наиболее трудные темы.

Решение практических заданий. Для успешного усвоения материала студенты должны писать программы, решающие интересные задачи. Проблема поиска и формулировки задач при наличии широкого набора Интернет-ресурсов, классических трудов по информатике и программированию, является скорее трудоемкой, чем сложной. Однако проверка этих задач традиционным способом, лично преподавателем, отнимает слишком много времени, влечет значительные транзакционные издержки и оказывает некоторое негативное влияние на эффективность преподавания. Во-первых, на это жалко тратить драгоценное аудиторное время, которое хочется использовать для объяснения нового и закрепления пройденного материала. Во-вторых, чтобы сдать работу, студенту необходимо лично придти к преподавателю и дождаться, пока он примет других студентов. Здесь также необходимо отметить типичную ситуацию, когда студент невнимательно прочитал задание либо просто написал программу, в которой есть ошибки. Исправление этих ошибок и новая итерация сдачи требует времени. Все это влечет ситуацию, когда преподаватель вынужден давать либо простые задачи, либо тратить слишком много времени на проверку задач, либо студенты просто отказываются сдавать задачи.

Чтобы исправить эту ситуацию, мы использовали возможности архива задач и автоматической системы проверки решений Timus Online Judge [6]. Эта система создана для подготовки к олимпиадам по программированию. Нам удалось выбрать два десятка задач, которые подходят для наших студентов. Каждому студенту было выдано оригинальное индивидуальное задание на три недели. При этом студент самостоятельно, из дома отправлял свои решения на проверку, после чего присылал преподавателю только решение, которое проходило все тесты в тестирующей системе. Это позволило добиться качественных решений от студентов, которые решают не только типичные, но и крайние случаи для каждой задачи. При этом система оценивает каждую программу по следующим параметрам: корректная трансляция, положительное прохождение всех предусмотренных тестов, выполнение программы за указанное в задании время. Вся группа студентов, за исключением одного-двух человек сдали индивидуальное задание, а подавляющее большинство студентов уложились в срок.

Использование указанного сайта имеет как положительные, так и отрицательные стороны. Безусловным плюсом можно считать автоматическую проверку программы на большом количестве тестов. Но в этом кроются некоторые проблемы методического характера. Самая существенная состоит в том, что не известны тесты (входные данные) на которых проверяются программы, а это затрудняет поиск и исправление логических ошибок программы. Формулировка некоторых задач не содержит полных требований к программе, эти требования понимаются, только в ходе тестирования программы. Сталкиваясь с указанными проблемами использования системы Timus Online Judge, мы пришли к выводу, что необходимо создание собственной системы для принятия заданий по программированию у студентов.

Еще одним недостатком автоматической проверки программ является невозможность проверить самостоятельность выполнения работы студентом. Чтобы убедиться в оригинальности работ, была устроена серия докладов, в рамках которой каждый учащийся должен был рассказать всей группе решение своей задачи и какие трудности пришлось при этом решать. Выступление с докладом помогает достигнуть нескольких целей. Во-первых, как уже было сказано выше, проверяется, насколько самостоятельно была выполнена работа. Во-вторых, развивается речь студента, проводится его подготовка к публичным выступлениям, что, безусловно, необходимо в связи с отсутствием устных экзаменов в школе. В-третьих, несмотря на то, что студенты выполняли разные задания, прослушав доклады своих товарищей, они включаются в обсуждение решения всех заданий.

Демонстрация связи с другими дисциплинами. Информатика как наука имеет тесные связи с математикой. У студентов ИТ-направлений должно складываться целостное впечатление о своей профессиональной области. При этом необходимо избегать организации образовательного процесса как набора изолированных дисциплин. В рамках преподавания в первом семестре мы обращали внимание студентов на комбинаторные объекты, которые они предварительно прошли в рамках дисциплины «Дискретная математика», а также применяли математические подходы для оценки сложности алгоритмов. Такой подход позволяет студентам не только лучше усвоить сложный материал других дисциплин, но и развивает целостное представление о предметной области.

Заключение

Изучение информатики и программирования является сложным и трудоемким процессом. Задача высшего образования состоит в том, чтобы развить в студенах фундаментальное, целостное понимание предмета, демонстрировать логические связи с другими научными дисциплинами и дать полезные практические навыки, востребованные в индустрии. Наш методический подход состоит в том, чтобы использовать средства, такие как язык программирования Python, которые могут быть освоены значительной частью вчерашних выпускников школ и которые одновременно имеют большое практическое значение. Действительно, этот язык программирования используется в широком спектре актуальных приложений: от научных вычислений до современных веб-сервисов. При этом необходимо постоянно демонстрировать и обращать внимание студентов на фундаментальные идеи, подходы и классические алгоритмы, которые есть в современной информатике. Такое сочетание позволяет подготовить студентов к освоению более сложных дисциплин на следующих курсах и сформировать в них компетенции, которые будут востребованы на практике.

Ссылки

[1] Официальный сайт приемной комиссии ЯрГУ им. П. Г. Демидова // URL: priem.uniyar.ac.ru. Дата доступа: 10.09.2015.

[2] Python.org // URL: https://www.python.org. Дата доступа: 30.01.2016.

[3] *Guo Ph.* Python is Now the Most Popular Introductory Teaching Language at Top U.S. Universities // BLOGS@Communications of the ACM. July, 7, 2014. URL: http://bit.ly/W0vtox. Дата доступа: 30.01.2016.

[4] *Shein E.* Python for Beginners // Communications of the ACM. 2015. Vol. 58, № 3. P. 19 – 21.

[5] Letters to the Editor // Communications of the ACM. 2015. Vol. 58, № 7. P. 8–9.

[6] Timus Online Judge // URL: acm.timus.ru. Дата доступа: 30.01.2016.

УДК 519.21

Н. Б. Чаплыгина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: chaplygin@yuniyar.ac.ru

Задачи на независимость событий в курсе теории вероятностей

В статье отмечаются некоторые особенности, возникающие при решении задач на независимость событий, приводится ряд примеров с акцентированием внимания на этих особенностях.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: события, вероятность, независимость, условная вероятность.

Вопрос о независимости событий в задачах теории вероятностей зачастую воспринимается студентами в обыденном смысле, интуитивно. Однако математическая вероятностная независимость двух событий A и B определяется формально и состоит в выполнении мультипликативного свойства:

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{1}$$

или равенства апостериорной (условной) и априорной вероятностей:

$$P(A|B) = P(A). \tag{2}$$

Эти равенства являются равносильными, если $P(B) \neq 0$ ([1], гл. 2, §3). Поэтому для установления независимости событий достаточно установить справедливость одного из вышеуказанных равенств. Приведем ряд задач на понятие независимости двух событий.

Задача 1.

Являются ли события $A + B$ и AB независимыми? ([2], № 5.19.)

Интуитивные соображения о том, что оба события существенно зависят и от A и от B, приводят к предположению о зависимости событий. Но проверка формального равенства (1) выявляет условие, при котором указанные события независимы. Принимая во внимание равенство $AB(A + B) = AB$, получаем

©Чаплыгина Н. Б., 2016

$$P(AB(A+B)) = P(AB),$$

тогда равенство (1) выполняется при $P(A+B) = 1$. Последнее приводит к выводу , что при $A+B=\Omega$ указанные события независимы. Например, при бросании игральной кости события $A+B$ и AB являются независимыми, если $A = \{$число очков $>2\}$, $B = \{$ число очков $<4\}$.

Следует отметить, что событие Ω является независимым с любым событием, даже с самим собой, так же, как и пустое событие $\emptyset$.

Задача 2.

Бросаем две игральные кости. Обозначим события:

$A_k = \{$число очков на 1-й кости кратно $k\}$,

$S_k = \{$сумма очков на двух костях кратна $k\}$.

Требуется исследовать вопрос о независимости событий A_k и S_k при различных значениях $k = 1, 2, \ldots, 6$ ([3], № 2.12).

При $k = 1$ события являются достоверными и потому независимы. Для других значений k проверим условие независимости (1). Приходим к следующему выводу: при $k = 2, 3, 6$ указанные события независимы, при $k = 4, 5$ равенство (1) нарушается, что говорит об отсутствии независимости. При значениях $k = 4, 5$ осуществление события A_k уменьшает вероятность события S_k, и в таком случае событие $\overline{A_k}$ увеличивает вероятность события S_k .

Справедливо свойство: если $P(A|B) > P(A)$, то $P(A|\overline{B}) < P(A)$.

Обобщим задачу, заменив две игральные кости двумя независимыми датчиками случайных целых чисел, генерирующими числа от 1 до m. Остается вопрос: при каких значениях k события A_k и S_k независимы?

Обозначим числа, получаемые датчиками, D_1 и D_2. Имеем:

$$P(A_k) = \left[\frac{m}{k}\right] \cdot \frac{1}{m},$$

где $[x]$ – целая часть x.

Если k – делитель m, то $P(A_k) = \frac{1}{k}$. В таком случае при каждом числе D_1 первого датчика число благоприятных сумм равно $\frac{m}{k}$. Если считать элементарным исходом любую допустимую пару значений (D_1, D_2), то для осуществления события S_k число благоприятных исходов равно $\frac{m}{k} \cdot m$ из m^2 возможных. Отсюда $P(S_k) = \frac{1}{k}$.

Обозначим событие $B_k = \{$число очков на 2-й кости кратно $k\}$. Вероятность произведения событий $P(A_k S_k) = P(A_k B_k) = \left(\frac{1}{k}\right)^2$. Выполнение равенства (1) свидетельствует о независимости событий A_k и S_k.

Рассмотрим случай, когда k не является делителем m. Тогда m можно представить как $m = ck+t$, где c, t – целые и $0 < t < k$. Вероятности интересующих событий равны:

$P(A_k) = [\frac{m}{k}] \cdot \frac{1}{m} = \frac{c}{m}$,

$P(A_k S_k) = P(A_k B_k) = \left(\frac{c}{m}\right)^2$.

$P(S_k) = \sum_{i=1}^{m} P(S_k|D_1 = i)P(D_1 = i) = \sum_{i=1}^{m} P(S_k|D_1 = i) \cdot \frac{1}{m}$.

Чтобы найти последнюю вероятность, для каждого значения первого датчика $D_1 = i$ введем счетчик ν_i, равный числу значений D_2 таких, что $D_1 + D_2$ кратно k. Счетчик ν_i может принимать значения c или $c+1$. Тогда $P(S_k|D_1 = i) = P(D_1 + D_2$ кратно $k|D_1 = i) = \frac{\nu_i}{m}$. Так как $\frac{\nu_i}{m} \geq \frac{c}{m}$, то $P(S_k) \geq \frac{c}{m}$.

Поскольку хотя бы при одном значении i, например при $i = k - 1$, счетчик $\nu_i = c+1 > c$, то $P(S_k) > \frac{c}{m}$, что нарушает равенство (1). Таким образом, если k не является делителем m, события A_k и S_k не являются независимыми. Условная вероятность

$P(S_k|A_k) = \left(\frac{c}{m}\right)^2 : \frac{c}{m} = \frac{c}{m} < P(S_k)$.

Наступление события A_k уменьшает вероятность события S_k.

Множество задач вероятностного характера порождается опытами, связанными с выбором игральных карт. В случае выбора из колоды одной карты приведение примеров независимых событий не составляет труда. Например, $A = \{$выбранная карта является красной$\}$,
$B = \{$выбранная карта является тузом$\}$. Найдем вероятности событий, если колода состоит из 36 карт:

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{9}$, $P(AB) = \frac{1}{18}$.

Выполнение равенства (1) позволяет сделать вывод о независимости событий A и B, что соответствует интуитивному ощущению независимости этих событий. Однако увеличение множества выбираемых карт даже до двух заметно усложняет ситуацию – трудно привести примеры независимых событий, существенно зависящих от выбора обеих карт в этом опыте.

Задача 3.

Производится случайный выбор двух карт из колоды в 36 карт. Являются ли независимыми события:

а) $A = \{$выбраны карты разного цвета$\}$,
$B = \{$среди выбранных двух карт есть туз$\}$;

б) $A = \{$хотя бы одна из двух карт красная$\}$,
$B = \{$обе карты из множества $\{6,7,8,9,10\}\}$?

Зависимость указанных событий далеко не очевидна. На первый взгляд, события не влияют друг на друга. Найдем вероятности:

а) $P(A) = \frac{18}{35} \approx 0,514$;

$P(B) = 1 - \frac{32 \cdot 31}{36 \cdot 35} = \frac{67}{9 \cdot 35}$,

$P(AB) = P(A) - P(A\overline{B}) = \frac{18}{35} - \frac{16 \cdot 16 \cdot 2}{36 \cdot 35} = \frac{34}{9 \cdot 35}$,

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{34}{67} \approx 0,507$.

Проверка равенства (2) показывает, что $P(A) \neq P(A|B)$. Следовательно, события не являются независимыми, хотя вероятности различаются незначительно (зависимость слабая, почему и незаметна интуитивно).
б) Аналогично предыдущему,

$P(A) = 1 - \frac{C_{18}^2}{C_{36}^2} = \frac{53}{2 \cdot 35} \approx 0,757$;

$P(B) = \frac{C_{20}^2}{C_{36}^2} = \frac{5 \cdot 19}{9 \cdot 35}$;

$P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B) = \frac{5 \cdot 19}{9 \cdot 35} - \frac{C_{10}^2}{C_{36}^2} = \frac{5 \cdot 29}{18 \cdot 35}$;

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{29}{38} \approx 0,763$.

Равенство (2) нарушено, события не являются независимыми.

Попытаемся найти независимые друг от друга события, возможные в этом выборе двух карт. Для удобства пронумеруем масти числами $1, 2, 3, 4$. Рассмотрим события:

$A = \{$среди выбранных нет карт 4-й масти, королей и дам$\}$,

$B = \{$обе выбранные карты – тузы 1,2 или 4-й мастей$\}$.

Найдем соответствующие вероятности:

$P(A) = \frac{C_{7 \cdot 3}^2}{C_{36}^2} = \frac{21 \cdot 20}{36 \cdot 35} = \frac{1}{3}$;

$P(B) = \frac{C_3^2}{C_{36}^2} = \frac{3}{C_{36}^2}$;

$P(AB) = \frac{1}{C_{36}^2}$;

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3}$, т. е. события являются независимыми.

В последнем случае интерес представляет задача на нахождение таких нетривиальных независимых событий.

Ссылки

[1] *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М. : Наука, 1976.

[2] *Коршунов Д. А., Фосс С. Г., Эйсымонт И. М.* Сборник задач и упражнений по теории вероятностей. Учебное пособие. СПб., М., Краснодар: Лань, 2004.

[3] *Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1980.

УДК 5122+519.6

С. И. Яблокова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: yabl@uniyar.ac.ru

Теорема о факторкольце в курсе алгебраической алгоритмики

В статье рассматривается подход к изучению теоремы о факторкольце, являющейся основополагающим результатом для понимания структуры конечных полей и способа получения таких полей.

Библиографи : 2 названия.

Ключевые слова: вычет по модулю многочлена , факторкольцо, конечное поле.

Теорема о факторкольце тесно связана с построением конечных полей или полей Галуа. Вопрос о построении конечных полей, вычислениях в таких полях важен для будущих специалистов по компьютерной безопасности. Такие дисциплины как криптография, теоретико-числовые методы в криптографии, криптографические протоколы требуют понимания и знания этого вопроса.

Первое короткое знакомство с конечными полями студенты специальности компьютерная безопасность получают в курсе алгебры. Затем в четвертом семестре в курсе алгебраической алгоритмики при изучении сравнений делается первый шаг, приближающий обучаемых к понятию конечного поля, а именно, вводится понятие кольца вычетов (факторкольца) $\mathbb{Z}_n$ кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ по модулю некоторого натурального числа $n > 1$ и доказываются два следующих важных на этом этапе утверждения.

Теорема 1. Элемент $a \in \mathbb{Z}_n$ имеет мультипликативный обратный по модулю n тогда и только тогда, когда НОД$(a, n) = 1$.

Теорема 2. Для всякого целого $n > 1$ множество $\mathbb{Z}_n$ с операциями сложения и умножения по модулю n является коммутативным кольцом с единицей. Оно является полем тогда и только тогда, когда n – простое число.

Теорема 2 – простейший вариант теоремы о факторкольце, в данном случае это факторкольцо $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n)$. В течение этого семестра

©Яблокова С. И., 2016

студенты еще не раз встречаются с факторкольцом $\mathbb{Z}_n$. В частности, в курсе изучается мультипликативная группа $\mathbb{Z}_n^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$, ее свойства и строение.

В пятом семестре обучающиеся вновь встречаются с кольцом вычетов, но уже на более сложном уровне. Появляется понятие кольца вычетов $K[x]/(m(x))$ кольца многочленов $K[x]$ над полем K по модулю многочлена $m(x) \in K[x]$, $\deg m(x) \geq 1$. Доказывается теорема о факторкольце.

Теорема 3. Пусть K – поле, $m(x)$ – нормированный многочлен из кольца $K[x]$, $\deg m(x) \geq 1$. Тогда $K[x]/(m(x))$ есть коммутативное кольцо с единицей. Оно является полем тогда и только тогда, когда $m(x)$ неприволим в $K[x]$.

В ходе доказательства этой теоремы получается алгоритм нахождения обратного $f^{-1}(x)$ к обратимому в кольце $K[x]/(m(x))$ многочлену $f(x)$. Это метод, который использует расширенный алгоритм Евклида для многочленов и понятие сравнимости многочленов по модулю многочлена $m(x)$. Из доказанной теоремы делается вывод о том, как можно строить конечные поля:

следует рассмотреть кольцо многочленов $K[x]$ над полем K, выбрать в $K[x]$ неприводимый многочлен $m(x)$ и построить факторкольцо $K[x]/(m(x))$.

Следующий шаг делается в ходе изучения вопроса о неприводимых многочленах над конечными полями $\mathbb{Z}_p$ (p – простое). Доказывается основной результат.

Теорема 4. Пусть K – поле, $m(x)$ – многочлен из кольца $K[x]$, deg $m(x) = n \geq 1$. Тогда факторкольцо $K[x]/(m(x))$ является коммутативным кольцом с единицей. Если $m(x)$ – неприводимый многочлен в $K[x]$, то $K[x]/(m(x))$ – поле. $K[x]/(m(x))$ является линейным пространством размерности n над полем K. Если K – конечное поле из p элементов, то поле $K[x]/(m(x))$ состоит из p^n элементов.

Для доказательства этой теоремы используется теорема 3, из которой следует верность первых двух утверждений теоремы 4. Для доказательства третьего утверждения замечаем, что все аксиомы линейного пространства в факторкольце выполнены. Далее, в $K[x]/(m(x))$ выбирается система классов вычетов

$$[1]_{m(x)} = \overline{1},\ [x]_{m(x)} = \overline{x},\ [x^2]_{m(x)} = \overline{x^2},\ \dots,\ [x^{n-1}]_{m(x)} = \overline{x^{n-1}}$$

и доказывается, что любой элемент $[f(x)]_{m(x)} \in K[x]/(m(x))$ можно представить в виде линейной комбинации выбранных классов, и что эти классы линейно независимы. Таким образом, получается базис линейного пространства а, значит, и размерность этого пространства. Последнее утверждение теоремы вытекает из следующих соображений. Любой элемент из $K[x]/(m(x))$ однозначно представляется в виде линейной комбинации элементов базиса с коэффициентами из поля K :

$$c_0\overline{1} + c_1\overline{x} + c_2\overline{x^2} + \cdots + c_{n-1}\overline{x^{n-1}}, \quad c_i \in K, \tag{1}$$

поэтому мощность поля $K[x]/(m(x))$ равна числу различных линейных комбинаций такого вида. Если в K всего p элементов, то число линейных комбинаций вида (1) равно p^n (так как любой коэффициент c_i независимо от других коэффициентов может принимать p различных значений). Это и есть мощность факторкольца $K[x]/(m(x))$.

Из последней теоремы следует способ построения полей, содержащих p^n элементов, где p – простое число. Для этого следует рассмотреть поле $\mathbb{Z}_p$, в кольце многочленов $\mathbb{Z}_p[x]$ найти неприводимый многочлен $m(x)$ степени n и построить факторкольцо $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$. Сразу возникает естественный вопроос: существует ли в $\mathbb{Z}_p[x]$ неприводимый многочлен нужной степени n? Поэтому далее в курсе изучается вопрос о неприводимых многочленах в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$, вычисляется число неприводимых унитарных многочленов любой степени $n \geq 1$ в этом кольце и доказывается, что для любого натурального n в $\mathbb{Z}_p[x]$ найдется хотя бы один неприводимый унитарный многочлен степени n.

Теорема 5. Пусть I_p^n – число неприводимых унитарных многочленов степени n в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$, где p – простое, n – натуральное. Тогда справедливы утверждения:

i) $$p^n = \sum_{d|n} dI_p^d; \tag{2}$$

ii) $I_p^n \geq 1$ *для всякого простого числа p и натурального n.*

Формула (2) при простом n принимает вид

$$p^n = nI_p^n + I_p^1,$$

и так как $I_p^1 = p$, то число неприводимых унитарных многочленов степени n можно вычислить по формуле

$$I_p^n = \frac{p^n - p}{n}. \tag{3}$$

При составном n из (2) получаем формулу

$$I_p^n = \frac{1}{n}\left(p^n - \sum_{d|n} dI_p^d\right), \tag{4}$$

которую не очень удобно применять для вычисления I_p^n, так как требуется знать все значения I_p^d для делителей n. Но с помощью формулы обращения Мебиуса можно преобразовать формулу (2) к виду

$$I_p^n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d)\, p^{\frac{n}{d}}. \qquad (5)$$

Доказывается также критерий неприводимости многочлена над конечным полем.

Теорема 6. Пусть p – простое натуральное число, $q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ – многочлен степени n. Многочлен $q(x)$ неприводим в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$ тогда и только тогда, когда для любого простого делителя d числа n выполнено:

$$q(x) \ \textit{делит} \ x^{p^n} - x \qquad \textit{и} \qquad \textit{НОД}(x^{p^{\frac{n}{d}}} - x\,,\, q(x)) = 1.$$

Наконец, в теме «Поля Галуа» вновь происходит обращение к теореме о факторкольце. В формулировку теоремы 4 добавляется еще одно утверждение.

Теорема 7. Пусть p – простое число и $m(x)$ – неприводимый многочлен степени $n > 0$ в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$. Тогда факторкольцо $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$ является полем из p^n элементов, содержащим $\mathbb{Z}_p$ и корень многочлена $m(x)$. Кроме того, $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$ является линейным пространством над полем $\mathbb{Z}_p$ размерности n.

Большая часть утверждений этой теоремы уже знакома слушателям. Доказать требуется только то, что $\mathbb{Z}_p$ содержится в $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$, и что $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$ содержит корень многочлена $m(x)$.

Первый из этих фактов доказывается с помощью отождествления элемента a поля $\mathbb{Z}_p$ с классом вычетов $a \ (mod \ m(x)) = [a]_{m(x)} = \overline{a}$. Второй следует из очевидного сравнения $m(\overline{x}) \equiv m(x) \ (mod \ m(x)) \equiv 0$.

Этот результат вместе с другими теоремами о конечных полях позволяет строить поля Галуа и получать различные представления элементов этих полей.

Для закрепления изученного материала на практических занятиях студентам предлагаются задания следующих типов.

1). Решить сравнение: а) по простому модулю; б) по составному модулю.

2). Найти обратный к элементу a в кольце $\mathbb{Z}_m$.

3). Описать структуру мультипликативной группы $\mathbb{Z}_n^*$ кольца вычетов $\mathbb{Z}_n$.

4). Найти обратный к многочлену $f(x)$ в факторкольце $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$.

5). Найти число неприводимых унитарных многочленов степени n в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$.

6). Выяснить, является ли многочлен $f(x)$ неприводимым в кольце $\mathbb{Z}_p[x]$.

7). Построить поле $\mathbb{Z}_p[x]/(m(x))$.

Например, это могут быть следующие задачи.

1. Решить сравнение: а) $7x \equiv 11\ (mod\ 37)$; б) $15x \equiv 12\ (mod\ 33)$.

2. Найти обратный к элементу:

1). $a = 45$ в кольце $\mathbb{Z}_{142}$; 2). $a = 19$ в кольце $\mathbb{Z}_3$.

3. Описать структуру мультипликативной группы:

1). $\mathbb{Z}_{125}^*$; 2). $\mathbb{Z}_{56}^*$.

4. Найти обратный к многочлену $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ в факторкольце $\mathbb{Z}_3[x]/(x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 2)$.

5. Найти число неприводимых унитарных многочленов:

1). степени 6 в кольце $\mathbb{Z}_2[x]$; 2). степени 7 в кольце $\mathbb{Z}_3[x]$.

6. Выяснить, является ли многочлен $f(x)$ неприводимым:

1). $f(x) = x^6 + x + 1$ в кольце $\mathbb{Z}_2[x]$; 2). $f(x) = x^4 + 4x^2 + 2x + 5$ в кольце $\mathbb{Z}_7[x]$.

7. Построить поле:

1). $\mathbb{Z}_2[x]/(x^4 + x + 1)$; 2). $\mathbb{Z}_3[x]/(x^3 + x^2 + 1)$.

Ссылки

[1] *Яблокова С. И.* Основы алгебраической алгоритмики. Часть I. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 127 с.

[2] *Яблокова С. И.* Основы алгебраической алгоритмики. Часть II. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 120 с.

УДК 515:142

С. И. Яблокова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: yabl@uniyar.ac.ru

О группах гомологий подпространств пространства триангуляций двумерного симплекса с не более чем 7 точками разбиения границы

Статья посвящена вычислению групп гомологий подпространств пространства триангуляций двумерного симплекса с не более чем 7 точками разбиения границы в случае, когда триангуляции с границы продолжаются на внутренность симплекса без добавления новых точек разбиения.

Библиография : 2 названия.

Ключевые слова: симплекс, триангуляция, клеточный комплекс, группа гомологий, матрица инцидентности, числа Бетти.

Рассматривается двумерный симплекс σ^2 с вершинами $D_0,\ D_1,\ D_2$, граница которого подразделена. Пусть разбиение границы содержит, кроме трех вершин симплекса, еще не более семи точек, причем на грани D_0D_1 находится не более чем p точек разбиения, на грани D_1D_2 – не более чем q точек, на грани D_2D_0 – не более чем s точек, $p+q+s=n,\ 0 \le n \le 7,\ p,q,s \ge 0$. Такое разбиение границы назовем (p,q,s)-разбиением. Отождествляя множество разбиений границы симплекса с полиэдром $\nabla^n_{p,q,s}$ получаем сюръективное отображение

$$\pi\ :\ \ Tr(p,q,s) \to \nabla^n_{p,q,s},$$

сопоставляющее триангуляциям симплекса σ^2 соответствующие разбиения его границы. Это отображение не является взаимно однозначным, поскольку триангуляции с границы симплекса на внутренность продолжаются неоднозначно. Будем рассматривать расслоение $\tilde{\nabla}^k_{p,q,s}$ над каждым полиэдром $\nabla^k_{p,q,s}$, $(2 \le k \le n)$, содержащее

$$T_k = C^{p-1}_{k-1} + C^{q-1}_{k-1} + C^{s-1}_{k-1} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\ C^{p-i}_{p-i+j-1}\, C^{s-1}_{q+s+i-j-1}$$

©Яблокова С.И., 2016

слоев ($T_0 = T_1 = 1$), каждый из которых соответствует одному способу продолжения триангуляции с границы на внутренность симплекса σ^2. В результате получаем клеточный комплекс $W_1(\nabla^7)$, который назовем пространством триангуляций двумерного симплекса с не более чем семью точками разбиения границы. Нас будут интересовать группы гомологий подкомплексов клеточного комплекса $W_1(\nabla^7)$.

В клеточном комплексе $W_1(\nabla^7)$ имеется:

3 подкомплекса, соответствующие триангуляциям σ^2 с одной подразделенной стороной ($\tilde{\nabla}^7_{7,0,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{0,7,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{0,0,7}$);

по 6 подкомплексов трех видов, соответствующих триангуляциям σ^2 с двумя подразделенными сторонами ($\tilde{\nabla}^7_{p,q,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{p,0,q}$, $\tilde{\nabla}^7_{q,p,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{0,p,q}$, $\tilde{\nabla}^7_{q,0,p}$, $\tilde{\nabla}^7_{0,q,p}$, $p = 4, 5, 6$, $q = 7 - p$);

по 3 подкомплекса двух видов, соответствующих триангуляциям σ^2 с тремя подразделенными сторонами в случае, когда две из них имеют одинаковое число точек подразбиения ($\tilde{\nabla}^7_{p,q,q}$, $\tilde{\nabla}^7_{q,p,q}$, $\tilde{\nabla}^7_{q,q,p}$, $p = 1, 5$);

6 подкомплексов, соответствующих триангуляциям σ^2 с 4 точками подразбиения на одной из сторон, 2 и 1 точками подразбиения на двух других сторонах симплекса ($\tilde{\nabla}^7_{4,2,1}$, $\tilde{\nabla}^7_{4,1,2}$, $\tilde{\nabla}^7_{2,4,1}$, $\tilde{\nabla}^7_{1,4,2}$, $\tilde{\nabla}^7_{2,1,4}$, $\tilde{\nabla}^7_{1,2,4}$).

Рассмотрим подкомплексы клеточного комплекса $W_1(\nabla^7)$, соответствующие (p, q, s)– разбиениям всех возможных видов с условием $p \geq q \geq s \geq 0$, $p + q + s = 7$, т. е. $\tilde{\nabla}^7_{7,0,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{6,1,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{5,2,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{5,1,1}$, $\tilde{\nabla}^7_{4,3,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{4,2,1}$, $\tilde{\nabla}^7_{3,3,1}$. Нас будут интересовать группы гомологий этих подкомплексов.

Для нахождения групп гомологий используем цепной комплекс $C = \oplus_n C_n$, соответствующий нашему клеточному комплексу, и построим матрицы инцидентности ${}^nE$, определяющие отображение $C_{n+1} \to C_n$. Верхний вход ${}^nE$ содержит все $(n+1)$-мерные клетки ($(n+1)$-слои) полиэдра $\tilde{\nabla}^{n+1}_{p,q,s}$, $(p+q+s = n+1,\ p, q, s \geq 0)$, левый вход – все n-мерные клетки (n-слои) полиэдра $\tilde{\nabla}^{n+1}_{p,q,s}$. Каждая клетка комплексов имеет раз и навсегда выбранную ориентацию. На пересечении строки i и столбца j стоит коэффициент инцидентности $(n+1)$-мерной клетки с номером j и n-мерной клетки с номером i. Специальный порядок нумерации n-клеток в базисе группы C_n позволяет получить наиболее простой вид матрицы ${}^nE$, которая разбивается на блоки.

В каждом расслоении $\tilde{\nabla}^n_{p,q,s}$ клетки нумеруются с помощью весов точек разбиения границы симплекса σ^2. Под весом точки разбиения границы σ^2 понимаем число отрезков разбиения, выходящих из этой точки (без учета отрезков, лежащих на границе симплекса). Набор весов точек разбиения границы однозначно определяет триангуляцию симплекса. Клетка $\tilde{\nabla}^n_{n,0,0}$ содержит один слой, в этом случае триангуляция симплекса однозначно определяется набором весов $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 1$ точек подразбиения ребра D_0D_1.

Если подразделены два ребра симплекса σ^2, то сумма весов точек подразделения одного из ребер максимальна и равна n. В каждом расслоении $\tilde{\nabla}^n_{p,q,0}$ нумерация n-клеток определяется следующим порядком изменения весов точек подразбиения граней симплекса. Сначала идут клетки, соответствующие следующим наборам весов точек подразбиения:

$$\begin{gathered}
(n-p+1, 1, \ldots, 1; v_1^{(1)}, \ldots, v_q^{(1)}; 0)\\
(1, n-p+1, \ldots, 1; v_1^{(2)}, \ldots, v_q^{(2)}; 0)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(1, 1, \ldots, n-p+1; v_1^{(p)}, \ldots, v_q^{(p)}; 0)\\
(u_1^{(1)}, \ldots, u_p^{(1)}; n-q+1, 1, \ldots, 1; 0)\\
(u_1^{(2)}, \ldots, u_p^{(2)}; 1, n-q+1, , \ldots, 1; 0)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(u_1^{(q)}, \ldots, u_p^{(q)}; 1, 1, \ldots, n-q+1; 0)
\end{gathered}$$

Затем идут клетки, соответствующие триангуляциям симплекса σ^2, где один из весов точек разбиения ребра D_0D_1 равен $n-p$, один равен 2, а остальные равны 1. Затем следуют клетки, соответствующие наборам весов точек разбиения ребра D_1D_2, где один из весов равен $n-q$, один равен 2, а остальные равны 1. Далее, нумеруем следующие n-слои, уменьшая вес u_1 на 1, фиксируя веса $u_2, \ldots, u_p$ так, чтобы $u_1+u_2+\cdots+u_p=n$, $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_p$, и рассматриваем все перестановки этого набора весов. Затем нумеруем n-слои, уменьшая на 1 вес v_1 и фиксируем набор весов $v_2, \ldots, v_q$ так, чтобы $v_1+v_2+\cdots+v_q=n$, $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_q$. Аналогично рассматриваем все перестановки этого набора весов и т. д. Всего в таком расслоении имеется C_n^p n-клеток (слоев).

В подкомплексе $\tilde{\nabla}^n_{p,q,s}$ $(p,q,s>0)$ разобьем n-слои на группы блоков: сначала нумеруются слои, соответствующие триангуляциям симплекса σ^2 с максимальной суммой весов точек подразбиения на ребре D_0D_1, затем на ребре D_1D_2, наконец, на ребре D_2D_0. Эти блоки вместе содержат $C_{n-1}^{p-1}+C_{n-1}^{q-1}+C_{n-1}^{s-1}$ n-клеток (слоев). В каждом блоке n-слои нумеруются так же, как в подкомплексе $\tilde{\nabla}^n_{p,q,0}$ с той только разницей, что точки подразбиения лежат на всех ребрах симплекса, поэтому следует учитывать веса $t_1, \ldots, t_s$ точек подразбиения ребра D_2D_0. Все эти клетки соответствуют триангуляциям симплекса σ^2 без внутреннего подсимплекса τ^2, имеющего вершины на всех трех гранях σ^2. За ними следуют n-клетки, соответствующие триангуляциям симплекса σ^2 с внутренним подсимплексом τ^2. Порядок следования этих клеток зависит от расположения вершин подсимплекса τ^2 на гранях симплекса σ^2. Сначала берутся клетки, отвечающие случаю, когда две вершины τ^2 являются первыми точками подразбиения ребер D_0D_1 и D_1D_2 соответственно, а третья вершина τ^2 пробегает все точки подразбиения грани D_2D_0. Нумерация клеток, соответствующих триангуляциям симплекса σ^2 с фиксированной третьей вершиной τ^2 проводится также, как и ранее (в соответствии с изменением весов точек подразбиения). Затем вторую вершину τ^2 перемещаем во вторую точку подразбиения ребра D_1D_2, а третьей вершине разрешаем пробегать все точки подразбиения грани D_2D_0 и т. д. После того, как вторая вершина τ^2 пробежит все точки подразбиения ребра D_1D_2, сдвигаем первую вершину τ^2 на ребре D_0D_1 во вторую точку подразбиения этой грани симплекса σ^2 и начинаем рассматривать триангуляции симплекса σ^2, когда вторая и третья вершины τ^2 пробегают точки подразбиения граней D_1D_2 и D_2D_0 в том же порядке, что и выше. Продолжаем этот процесс, пока вершины τ^2 не пробегут все точки подразбиения граней симплекса σ^2.

Базис группы C_{n+1} строится аналогично.

Для преобразования матриц инцидентности используем согласованные преобразования каждой пары матриц ${}^{n-1}E$ и ${}^{n}E$.

Рассматриваются следующие элементарные преобразования столбцов матрицы ${}^{n-1}E$:

1) перестановка i-го и j-го столбцов;

2) умножение i-го столбца на -1;

3) прибавление к i-му столбцу j-го столбца.

В матрице ${}^{n}E$ при этом будут происходить соответствующие согласованные преобразования строк:

1) перестановка i-й и j-й строк;

2) умножение i-й строки на -1;

3) вычитание i-й строки из j-й.

Группы гомологий H_n $(n = 1, 2, \dots, 6)$ подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{7,0,0}$, очевидно, тривиальны.

Рассмотрим подкомплекс $\tilde{\nabla}^7_{6,1,0}$. Матрицы инцидентности этого подкомплекса имеют небольшие размеры, на их примере покажем как происходят согласованные преобразования каждой пары матриц ${}^{n-1}E$ и ${}^{n}E$. Имеем:

$$
{}^{1}E = \begin{pmatrix} -1 & & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}, \quad {}^{2}E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & & & 0 \\ & 1 & & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
{}^{3}E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ & 1 & & & \\ & & & -1 & \\ & -1 & & & \end{pmatrix}, \quad {}^{4}E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & & & & 0 \\ & & 1 & 1 & \\ 0 & & & & 0 \\ & 1 & & & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
{}^5E = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 1 & & & & & 0 \\
 & & & -1 & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & & -1 & \\
 & -1 & & & & &
\end{pmatrix},
$$

$$
{}^6E = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
0 & & & & & & 0 \\
 & 1 & 1 & & & & \\
0 & & & & & & 0 \\
 & & & 1 & 1 & & \\
0 & & & & & & 0 \\
1 & & & & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

Преобразуем ${}^1E$ и ${}^2E$, вычитая из третьего столбца ${}^1E$ первый, соотвественно в матрице ${}^2E$ третья строка прибавляется к первой. Получаем

$$
{}^1E' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ & -1 & \end{pmatrix}, \qquad {}^2E' = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},
$$

откуда $rang\,{}^1E = 2, \quad rang\,{}^2E = 1$.

Далее, проводим согласованные преобразования в ${}^2E'$ и ${}^3E$, вычитая в ${}^2E'$ из 4-го столбца 2-й, соответственно в ${}^3E$ ко 2-й строке прибавляется 4-я. Получаем

$$
{}^2E' = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad {}^3E' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & & & & 0 \\ & & & -1 & \\ & -1 & & & \end{pmatrix},
$$

В ${}^3E'$ вычитаем первый столбец из 2,3 и 5-го столбцов, в ${}^4E$ к первой строке прибавляются 2, 3 и 5-я:

$$
{}^3E' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & & & -1 & \\ & -1 & & & \end{pmatrix}, \qquad {}^4E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & & 1 & 1 & \\ 0 & & & & 0 \\ & 1 & & & 1 \end{pmatrix},
$$

отукуда $rang\,{}^3E = 3, \quad rang\,{}^4E = 2$. В ${}^4E'$ из 4-го столбца вычитаем 3-й и из 6-го вычитаем 2-й, в ${}^5E$ к 3-й строке прибавляются 4-я, а ко 2-й прибавляется 6-я:

$$
{}^4E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ & & 1 & 0 & \\ 0 & & & & 0 \\ & 1 & & & \end{pmatrix}, \quad {}^5E' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & -1 & \\ & -1 & & & & & \end{pmatrix},
$$

На последнем этапе в ${}^5E'$ вычитаем 1-й столбец из 2, 3, 4, 5 и 7-го столбцов, в ${}^6E$ к 1-й строке прибавляются 2, 3, 4, 5 и 7-я:

$$
{}^5E' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & & 1 & & & \\ & & & & & -1 & \\ & -1 & & & & & \end{pmatrix}, \quad {}^6E' = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & 1 & 1 & & & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & & 1 & 1 & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ 1 & & & & & & 1 \end{pmatrix},
$$

откуда $rang\,{}^5E = 4, \quad rang\,{}^6E = 3.$

Вычисляем числа Бетти, пользуясь формулами

$$
p_0 = 1,\ p_1 = \alpha_1 - rang\,{}^1E,\ p_k = \alpha_k - rang\,{}^kE - rang\,{}^{k-1}E\ (k = 2, \ldots, n-1),
$$

где α_k – число k-мерных клеток (слоев). Для нашего подкомплекса получаем $p_1 = \cdots = p_6 = 0$. Коэффициенты кручения в матрицах отсутствуют, следовательно, группы гомологий H_n $(n = 1, \ldots, 6)$ тривиальны.

Матрицы инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{5,2,0}$ имеют размеры: ${}^1E$ – 2×4, ${}^2E - 4 \times 7$, ${}^3E - 7 \times 11$, ${}^4E - 11 \times 16$, ${}^5E - 16 \times 21$, ${}^6E - 21 \times 21$. В результате согласованных преобразований получаем их ранги:
$rang\,{}^1E = rang\,{}^2E = 2$, $rang\,{}^3E = 5$, $rang\,{}^4E = 6$, $rang\,{}^5E = 10$, $rang\,{}^6E = 11$,
откуда числа Бетти равны $p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = 0$.

Матрицы инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{4,3,0}$, имеют размеры:${}^1E$ – 2×4, ${}^2E - 4 \times 8$, ${}^3E - 8 \times 15$, ${}^4E - 15 \times 25$, ${}^5E - 25 \times 35$, ${}^6E - 35 \times 35$. Получены ранги этих матриц:
$rang\,{}^1E = rang\,{}^2E = 2$, $rang\,{}^3E = 6$, $rang\,{}^4E = 9$, $rang\,{}^5E = 16$, $rang\,{}^6E = 19$,
откуда числа Бетти равны $p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = 0$.

Коэффициенты кручения во всех этих случаях отсутствуют. В результате получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Группы гомологий H_n клеточных комплексов $\tilde{\nabla}^7_{7,0,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{6,1,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{5,2,0}$, $\tilde{\nabla}^7_{4,3,0}$ для $n = 1, 2, \ldots, 6$ тривиальны.*

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{5,1,1}$ матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E-3\times 7$, ${}^2E-7\times 11$, ${}^3E-11\times 16$, ${}^4E-16\times 22$, ${}^5E-22\times 28$, ${}^6E-28\times 22$.

Укажем блочную структуру матриц ${}^4E$, ${}^5E$, ${}^6E$:

$$
{}^4E=\begin{pmatrix}0 & A_1 & A_2 & \\ & B_1 & & C_1\\ & & B_2 & C_2\\ & & D & \end{pmatrix},\quad
{}^5E=\begin{pmatrix}F_1 & F_2 & \\ J_1 & & K_1\\ & J_2 & K_2\\ & & L\end{pmatrix},\quad
{}^6E=\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\\ N\end{pmatrix},
$$

где $A_i-1\times 6$ $(i=1,2)$, $B_i-5\times 6$ $(i=1,2)$, $C_i-5\times 16$ $(i=1,2)$, $D-11\times 16$, $F_i-1\times 6$ $(i=1,2)$, $J_i-5\times 6$ $(i=1,2)$, $K_i-5\times 16$ $(i=1,2)$, $L-11\times 16$, $M_i-6\times 22$ $(i=1,2)$, $N-16\times 22$.

В результате согласованных преобразований матриц инцидентности получаются их ранги:
$rang\,{}^1E=rang\,{}^2E=3$, $rang\,{}^3E=rang\,{}^4E=8$, $rang\,{}^5E=14$, $rang\,{}^6E=13$,
значит, $p_1=p_3=p_4=p_5=0$, $p_2=1$, $p_6=1$. Коэффициенты кручения отсутствуют. Таким образом, получаем утверждение.

Теорема 2 ([1]). *Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}^7_{5,1,1}$, при $n=1,3,4,5$ тривиальны, при $n=0,2,6$ они являются свободными циклическими группами.*

Рассмотрим подкомплекс $\tilde{\nabla}^7_{4,2,1}$. Для этого подкомплекса матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E-3\times 8$, ${}^2E-8\times 17$, ${}^3E-17\times 29$, ${}^4E-29\times 45$, ${}^5E-45\times 56$, ${}^6E-56\times 41$.

Укажем блочную структуру матриц ${}^3E$, ${}^4E$, ${}^5E$ и ${}^6E$:

$$
{}^3E=\begin{pmatrix}-1 & A_1 & A_2 & & & \\ 0 & B_1 & & C_1 & D_1 & \\ & & B_2 & & D_2 & \\ & & & C_2 & & D_3\\ & & & & & D_4\\ & & & & J_1 & J_2\end{pmatrix},\qquad
{}^4E=\begin{pmatrix}K_1 & K_2 & & & \\ L_1 & & M & N_1 & \\ & L_2 & & N_2 & \\ & & P & & S\\ & & & R & T_1\\ & & & & T_2\end{pmatrix},
$$

$$
{}^5E=\begin{pmatrix}Q & U_1 & \\ & U_2 & \\ V & & X\\ & W & Y\\ & & Z\end{pmatrix},\qquad
{}^6E=\begin{pmatrix}F\\ G\\ H\end{pmatrix},
$$

где $A_i-1\times 4$ $(i=1,2)$, $B_i-3\times 4$ $(i=1,2)$, $C_i-3\times 6$ $(i=1,2)$, $D_i-3\times 7$ $(i=1,\ldots,4)$, $J_i-4\times 7$ $(i=1,2)$, $K_i-1\times 5$ $(i=1,2)$, $L_i-4\times 5$ $(i=1,2)$, $M-4\times 10$, $R-7\times 11$, $N_i-4\times 11(i=1,2)$, $P-6\times 10$, $S-6\times 14$, $T_i-7\times 14$ $(i=1,2)$, $Q-5\times 15$, $U_i-5\times 16$ $(i=1,2)$, $V-10\times 15$,

$X - 10 \times 25$, $W - 11 \times 16$, $Y - 11 \times 25$, $Z - 14 \times 25$, $F - 15 \times 41$, $G - 16 \times 41$, $H - 25 \times 41$.

Ранги матриц инцидентности подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{4,2,1}$, равны:
$rang\,^1E = 3$, $rang\,^2E = 5$, $rang\,^3E = 12$, $rang\,^4E = 17$, $rang\,^5E = 28$, $rang\,^6E = 25$,

откуда $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$, $p_6 = 3$. Коэффициенты кручения отсутствуют.

Теорема 3 ([2]). *Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}^7_{4,2,1}$, при $n = 1,2,3,4,5$ тривиальны, H_0 – свободная циклическая группа, H_6 – прямое произведение трех свободных циклических групп.*

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{3,3,1}$, матрицы инцидентности имеют следующие размеры: $^1E - 3 \times 8$, $^2E - 8 \times 18$, $^3E - 18 \times 36$, $^4E - 36 \times 56$, $^5E - 56 \times 70$, $^6E - 70 \times 50$.

Матрицы инцидентности ^3E, ^4E, ^5E и ^6E имеют блочную структуру:

$$^3E = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & & & & & \\ & & G_3 & G_4 & & & \\ H_1 & & & & Q_1 & R_1 & \\ & H_2 & & & & R_2 & \\ & & H_3 & & Q_2 & & R_3 \\ & & & H_4 & & & R_4 \\ & & & & & S & T \end{pmatrix}, \quad ^4E = \begin{pmatrix} A_1 & & B_1 & & \\ & & B_2 & & \\ & A_2 & & B_3 & \\ & & & B_4 & \\ D_1 & D_2 & & & C \\ & & F_1 & & K_1 \\ & & & F_2 & K_2 \end{pmatrix},$$

$$^5E = \begin{pmatrix} L_1 & M_1 & \\ L_2 & & M_2 \\ & N_1 & \\ & & N_2 \\ & P_1 & P_2 \end{pmatrix}, \qquad ^6E = \begin{pmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix},$$

где $A_i - 4 \times 10$ $(i = 1,2)$, $B_i - 4 \times 11$ $(i = 1,2,3,4)$, $C - 6 \times 14$, $D_i - 6 \times 10$ $(i = 1,2)$, $F_i - 7 \times 11$, $(i = 1,2)$ $K_i - 7 \times 14$ $(i = 1,2)$, $L_i - 10 \times 20$ $(i = 1,2)$, $M_i - 10 \times 25$ $(i = 1,2)$, $N_i - 11 \times 25$ $(i = 1,2)$, $P_i - 14 \times 25$ $(i = 1,2)$, $G_i - 1 \times 4$ $(i = 1,\ldots,4)$, $H_i - 3 \times 4$ $(1,\ldots,4)$, $Q_i - 3 \times 6$ $(i = 1,2)$, $R_i - 3 \times 7$ $(i = 1,\ldots,4)$, $S - 4 \times 7$, $T - 4 \times 7$, $U - 20 \times 50$, $V_i - 25 \times 50$.

Ранги матриц инцидентности равны:
$rang\,^1E = 3$, $rang\,^2E = 5$, $rang\,^3E = 13$, $rang\,^4E = 21$, $rang\,^5E = 34$, $rang\,^6E = 33$,

значит, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = 2$, $p_5 = 1$, $p_6 = 3$. Коэффициенты кручения отсутствуют. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}^7_{3,3,1}$, при $n = 1,2,3$ тривиальны, H_5 – свободная циклическая группа, H_4 есть прямое произведение двух свободных циклических групп, H_6 есть прямое произведение трех свободных циклических групп.*

Для подкомплекса $\tilde{\nabla}^7_{3,2,2}$, матрицы инцидентности имеют следующие размеры: ${}^1E - 1\times 9$, ${}^2E - 9\times 23$, ${}^3E - 23\times 47$, ${}^4E - 47\times 73$, ${}^5E - 73\times 79$, ${}^6E - 79\times 55$.

Матрицы инцидентности ${}^3E$, ${}^4E$, ${}^5E$ и ${}^6E$ имеют следующий блочный вид:

$$
{}^3E=\begin{pmatrix}
G_1 & G_2 & & & & & & \\
 & H_2 & J_1 & & & Q_1 & & \\
H_1 & & & J_2 & & Q_2 & & \\
 & & J_3 & & & & Q_3 & \\
 & & & J_4 & & & & Q_5 \\
 & & & & J_5 & & Q_4 & \\
 & & & & J_6 & & & Q_6 \\
 & & & & & S_1 & S_2 & S_3
\end{pmatrix}, \quad
{}^4E=\begin{pmatrix}
A_1 & & C_1 & & & \\
 & A_2 & C_2 & & & \\
 & B_1 & & & D_1 & \\
B_2 & & & D_2 & & \\
 & & & & & D_3 \\
 & & F & L_1 & L_2 & \\
 & & & & L_3 & L_4 \\
 & & & L_5 & & L_6
\end{pmatrix},
$$

$$
{}^5E=\begin{pmatrix}
 & K_1 & \\
 & & K_2 \\
 & M_1 & M_2 \\
N_1 & P_1 & \\
N_2 & & P_2 \\
N_3 & &
\end{pmatrix}, \qquad
{}^6E=\begin{pmatrix}
T \\ U_1 \\ U_2
\end{pmatrix},
$$

где $A_i - 4\times 10$ $(i=1,2)$, $B_i - 6\times 10$ $(i=1,2)$, $C_i - 4\times 11$ $(i=1,2)$, $D_i - 6\times 14$ $(i=1,2,3)$, $F - 7\times 11$ $(i=1,2)$, $L_i - 7\times 14$ $(i=1,2,\dots,6)$, $K_i - 10\times 25$ $(i=1,2)$, $M_i - 15\times 25$ $(i=1,2)$, $N_i - 14\times 29$ $(i=1,2,3)$, $P_i - 14\times 29$ $(i=1,2)$, $G_i - 1\times 4$ $(i=1,2)$, $H_i - 3\times 4$ $(i=1,2)$, $J_i - 3\times 6$ $(i=1,\dots,6)$, $Q_i - 3\times 7$ $(i=1,\dots,6)$, $S_i - 4\times 7$ $(i=1,2,3)$, $T - 29\times 55$, $U_i - 25\times 55$ $(i=1,2)$.

В результате проведения согласованных преобразований матриц инцидентности получаем ранги этих матриц:

$rang\,{}^1E = 3,\quad rang\,{}^2E = 6,\quad rang\,{}^3E = 16,\quad rang\,{}^4E = 29,$
$rang\,{}^5E = 43,\quad rang\,{}^6E = 35,$

откуда $p_1 = p_2 = 0,\ \ p_3 = 1,\ \ p_4 = 2,\ \ p_5 = p_6 = 1$. Коэффициенты кручения отсутствуют.

Теорема 5. *Группы гомологий H_n клеточного комплекса $\tilde{\nabla}^7_{3,2,2}$, при $n = 1,2$ тривиальны, при $n = 0,3,5,6$ – это свободные циклические группы, H_4 есть прямое произведение двух свободных циклических групп.*

Ссылки

[1] *Яблокова С. И.* Группы гомологий пространств триангуляций двумерного симплекса // Математика в Ярославском университете.

Сборник обзорных статей. К 35-летию математического факультета. Ярославль, 2011. С. 207–218.

[2] *Яблокова С. И.* О группах гомологий некоторых подпространств пространства триангуляций двумерного симплекса с семью точками разбиения границы // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2012. С. 180–183.

УДК 004.424

О. П. Якимова, К. А. Виноградов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: polya@uniyar.ac.ru
E-mail: ViKiAn050194@yandex.ru

Из опыта преподавания курса «Методы программирования»

В статье обсуждаются содержание и структура одного из опорных курсов университетской подготовки программистов.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: IT-образование, алгоритмы, типы и структуры данных.

Дисциплина «Методы программирования» согласно ФГОС [1] относится к базовой части профессионального цикла дисциплин. На ее изучение отводится два семестра. УМО по компьютерной безопасности рекомендует первый семестр посвятить изучению технологий программирования, а второй – алгоритмов и структур данных (см. [2]). Именно о второй части курса и пойдет речь в этой статье.

Первая проблема, с которой сталкивается каждый преподаватель, приступая к разработке учебного курса, – отбор материала для чтения лекций и проведения лабораторных занятий. ФГОС дает краткое описание обязательных для изучения тем, но наполнение этих тем содержанием с учетом выделенных часов – дело преподавателя. Нужно решить, какие именно вопросы и насколько глубоко следует рассмотреть, исходя из профессиональной целесообразности, и как уложиться в отведенное количество часов.

С нашей точки зрения основная, цель курса – научить студентов понимать роль абстрактных структур данных при построении эффективных алгоритмов. Курс состоит из теоретической (36 часов) и практической (36 часов) частей.

Для теоретической части были отобраны следующие темы.

©Якимова О. П., 2016
©Виноградов К. А., 2016

1. Структуры данных.

   а) Элементарные структуры данных: стек, очередь, список. Их внутренняя реализация.

   б) Деревья. Бинарные деревья поиска. АВЛ-деревья.

   в) Хеш-таблицы. Способы разрешения коллизий.

   г) Список с пропусками. Особенности его реализации.

   д) B-деревья.

2. Алгоритмы.

   а) Алгоритмы сортировки, их классификация. Алгоритмы внутренней сортировки: сортировки вставками, выбором и обменами. Распределяющие сортировки. Оценка сложности работы алгоритмов внутренней сортировки.

   б) Пирамидальная сортировка. Очередь с приоритетами.

   в) Быстрая сортировка. Вероятностный анализ и рандомизированные алгоритмы.

   г) Алгоритмы поиска подстрок. Простого поиска, алгоритм Рабина-Карпа. Алгоритм Кнута-Морриса-Пратта. Алгоритм Бойера- Мура.

   д) Алгоритмы на графах. Способы задания графов. Алгоритмы обхода графов в ширину и глубину. Алгоритмы нахождения сильно связных и двусвязных компонент графа. Остовные деревья минимальной стоимости и алгоритмы их построения. Алгоритмы нахождения кратчайших расстояний между вершинами. Алгоритм Беллмана-Форда. Потоки в сетях.

   е) Решение задач методом динамического программирования.

Хорошим подспорьем для преподавателя при подготовке к лекциям являются книги [3] и [4], причем первая из них отличается фундаментальностью изложения и наличием доказательств для всех утверждений, а вторая – обилием практических примеров. Обе книги содержат достаточное количество задач и упражнений, которые позволяют проверить усвоение материала.

С целью научить студентов самостоятельно анализировать задачу при изложении алгоритмов стоит уделить внимание подбору примеров, демонстрирующих ключевую роль выбора структур данных для эффективного решения задач. Примеры призваны показать, что анализ задачи есть необходимая часть разработки алгоритма и программы.

Так, для различных постановок классической задачи поиска подмножества элементов из некоторого множества требуются совершенно разные структуры данных в зависимости от вида исходного множества (может ли оно динамически меняться в период между запросами и т. п.). Поиск двусвязных компонент в графе иллюстрирует использование стека, алгоритм Краскала построения минимального остовного дерева – очередь с приоритетами и т. д. При этом необходимо вовлекать студентов в активный диалог по поиску более оптимального решения, наиболее подходящей структуры данных.

Не менее важной является практическая часть курса. Студентам предлагается выполнить следующие семь лабораторных работ.

1. *Применение стандартных контейнеров данных для решения задач.* Пример задания: необходимо найти первые 10 часто встречающихся слов из текста объемом в 3-5 Мб. Напишите три метода, решающих эту задачу, причем в одном методе в качестве контейнера для данных используется SortedDictionary<TKey, TValue>, в другом – Dictionary<TKey, TValue>, в третьем – SortedList<TKey, TValue>. Сравните время работы для каждого из методов. Объясните результаты сравнения.

2. *Реализация и использование бинарных деревьев поиска.* Пример задания: напишите обобщенный класс BinaryTree<T>, который содержит методы удаления элемента из дерева, поиска элемента в дереве, вставки элемента, балансировки. Сравните время работы по поиску, вставке, удалению элементов разных типов двух коллекций – стандартного SortedDictionary и вашего BinaryTree<T> на множестве, состоящем из десяти тысяч элементов.

3. *Реализация и использование хеш-таблиц.* Пример задания: напишите обобщенный класс HashTable<TKey, TValue>, который содержит открытые методы: удаления элемента, поиска элемента по ключу, вставки элемента, открытое свойство – количество элементов в таблице, а также реализует интерфейс IEnumerable <KeyValuePair< TKey, TValue>> и необходимые внутренние методы(например, увеличения таблицы). Разрешение коллизий в таблице методом цепочек (методом открытой адресации – по вариантам).

   Проведите сравнение времени работы по поиску, вставке, удалению элементов разных типов для двух контейнеров данных – стандартного Dictionary и вашей хеш-таблицы. Объем множества, на котором будет производиться тестирование, должен составлять не менее десяти тысяч элементов.

4. *Реализация и использование списка с пропусками.* Пример задания: допишите метод удаления элемента (поиска элемента и т. п. – по вариантам) в проект, созданный на лекции. Сравните время работы по поиску, вставке, удалению элементов разных типов двух коллекций – стандартного SortedList и списка с пропусками на не менее чем 10000 элементов.

5. *Использование очереди с приоритетами (пирамиды, двоичной кучи) для решения различных задач.* Пример задания: напишите класс BinaryHeap<T>, который содержит открытые методы вставки элемента, удаления наибольшего (наименьшего) элемента, поиска наибольшего (наименьшего) элемента и необходимые закрытые методы (например, метод восстановления свойств пирамиды).

   Напишите приложение, решающее задачу (по вариантам) и использующее описанный вами класс. Дано k отсортированных списков с общим количеством n элементов. Надо их соединить в один отсортированный список за время $O(n \log k)$, используя пирамиду.

6. *Алгоритмы поиска подстроки.* Пример задания: опишите интерфейс для алгоритма поиска подстроки. Напишите два класса, реализующие этот интерфейс, для алгоритмов, указанных в вашем варианте (алгоритма Кнута–Морриса–Пратта, Бойера–Мура, Рабина–Карпа или простого, решающего задачу «в лоб»).

   Напишите приложение, которое ищет все вхождения подстроки, заданной пользователем в большом текстовом файле (3-5 Мб). Сравните время работы двух различных алгоритмов.

7. *Алгоритмы на графах.* Пример задания: опишите класс «Граф». Граф считывается из файла. В первой строке файла указывается количество вершин в графе. Во второй строке – номера вершин, смежных с нулевой, в третьей – номера вершин смежных с первой и т. д.

   Напишите реализацию алгоритма согласно варианту (алгоритм Краскала, Прима, Дейкстры, Беллмана–Форда, выделения двусвязных компонент, поиска максимального потока и т. д.).

Практика показала, что хорошей идеей является разделение лабораторных работ по уровням. Например, лабораторная работа по деревьям может быть выполнена для обычного дерева поиска, а студент, претендующий на отличную оценку, должен реализовать сбалансированное двоичное дерево – АВЛ или красно-черное.

Приведем еще пример. Реализация многих структур данных представляет собой достаточно объемный код, и не все студенты способны справиться с этой работой самостоятельно. Поэтому нами были подготовлены заготовки, шаблоны для соответствующих классов. Сильные студенты должны написать весь код самостоятельно, более слабые – дописать методы в предложенную заготовку.

Сделаем заключительное замечание. Почувствовать эффект от применения «правильной» структуры данных можно только на больших множествах. Поэтому тестирование работ студентов удобно проводить, например, на текстах романов Л. Н. Толстого «Анна Каренина» и «Война и мир».

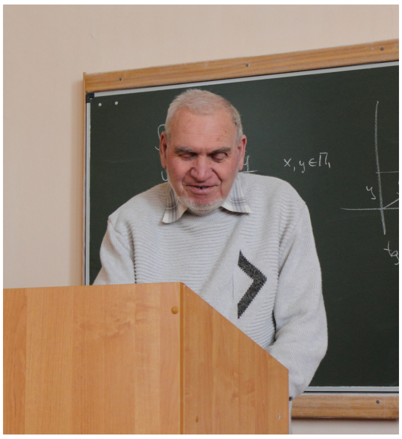
Ссылки

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки (специальности) 090301 Компьютерная безопасность (квалификация (степень) "специалист") (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 17 января 2011 г. № 69).

[2] Сборник примерных программ учебных дисциплин по направлению подготовки (специальности) 090301 «Компьютерная безопасность» (квалификация (степень) «специалист») / Новосибирск, 5–9 июня 2012 года. 212 с.

[3] *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ, 2-е изд./пер. с англ. М: Вильямс, 2011. 1296 с.

[4] *Скиена С.* Алгоритмы. Руководство по разработке. 2-е изд. / пер. с англ. СПб: БХВ-Петербург, 2011. 720 с.



На 5-й научно-методической конференции «Преподавание математики и комьютерных наук в классическом университете». Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова. Апрель, 2014 г. *Фото А. Ю. Ухалова.*

Научное издание

Математика и компьютерные науки в классическом университете

Материалы 6-й научной конференции

Компьютерная верстка А. Ю. Ухалов

Подписано в печать 4.04.2016. Формат 60×84 1/8.
Усл. печ. л. 19,99. Уч.-изд. л. 14,0.
Тираж 56 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано в типографии ООО «Филигрань».
г. Ярославль, ул. Свободы, д. 91. Тел. (4852) 982705, pechataet@bk.ru