

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

М. В. Невский, А. Ю. Ухалов

Элементы аналитической геометрии

Учебное пособие

Ярославль
ЯрГУ
2021

УДК 514.12(075.8)
ББК В151.54я73
Н40

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2021 года*

Рецензенты:

кафедра математического анализа, теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского; П. А. Корнилов, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теории и методики обучения информатике Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Невский, Михаил Викторович.

Н40 Элементы аналитической геометрии : учебное пособие / М. В. Невский, А. Ю. Ухалов ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2021. – 112 с.

ISBN 978-5-8397-1206-5

В учебном пособии кратко освещается ряд начальных разделов аналитической геометрии. Предназначено для студентов 1 курса, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика».

УДК 514.12(075.8)
ББК В151.54я73

ISBN 978-5-8397-1206-5

©ЯрГУ, 2021

Оглавление

Введение	5
1 Системы координат. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов	7
1.1 Аффинная и декартова системы координат. Полярная система координат. Цилиндрические и сферические координаты	7
1.2 Векторная и скалярная проекции вектора на ось	13
1.3 Скалярное произведение и его свойства	17
1.4 Векторное произведение и его свойства	19
1.5 Дистрибутивность векторного умножения	23
1.6 Смешанное произведение и его свойства	26
2 Преобразования координат. Уравнения линий и поверхностей	31
2.1 Преобразования аффинных координат на прямой, на плоскости и в пространстве	31
2.2 Преобразование декартовых координат на плоскости. Сдвиг и поворот	33
2.3 Уравнения линии на плоскости. Алгебраические и трансцендентные линии	37
2.4 Уравнения поверхности и линии в пространстве. Алгебраические и трансцендентные поверхности и линии	40
3 Плоскость и прямая в пространстве	42
3.1 Различные виды уравнений плоскости	42
3.2 Неполные уравнения плоскости. Уравнение в отрезках	46
3.3 Нормальное уравнение плоскости. Отклонение и расстояние	48
3.4 Уравнения прямой в пространстве	51
3.5 Примеры задач	54
4 Линии второго порядка	59
4.1 Общее уравнение линии второго порядка	59
4.2 Определение и каноническое уравнение эллипса	60
4.3 Свойства эллипса	63
4.4 Определение и каноническое уравнение гиперболы	66

4.5	Свойства гиперболы	69
4.6	Определение, каноническое уравнение и свойства параболы	74
4.7	Директрисы линий второго порядка	77
4.8	Касательные к линиям второго порядка	82
4.9	Некоторые исторические сведения	83
5	Поверхности второго порядка	88
5.1	Общее уравнение поверхности второго порядка	88
5.2	Эллипсоид	89
5.3	Однополостный гиперболоид	92
5.4	Двуполостный гиперболоид	96
5.5	Эллиптический параболоид	98
5.6	Гиперболический параболоид	101
5.7	Конус второго порядка	104
5.8	Цилиндры второго порядка	106
	Литература	110

Введение

В учебном пособии, предлагаемом вниманию читателя, кратко рассматриваются вопросы, относящиеся к начальным разделам аналитической геометрии (системы координат, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, уравнения линий и поверхностей, плоскость и прямая в пространстве, линии и поверхности второго порядка). Этот материал студенты математического факультета ЯрГУ им. П. Г. Демидова направления «Прикладная математика и информатика» изучают в рамках основной дисциплины «Алгебра и геометрия».

В курсе, читаемом первым автором, перед разделами, включёнными в книгу, даётся ознакомление с основами матричной алгебры, пространствами геометрических векторов, понятиями линейной зависимости и независимости, базиса и размерности. Этот круг вопросов изложен в [8, гл. 2–3] и здесь не рассматривается.

Все вопросы, освещаемые в учебном пособии, более подробно изложены в классической учебной литературе по аналитической геометрии (отметим учебники [1]–[4], [6] и задачники [7], [12]). Однако авторы надеются, что и настоящий краткий текст может быть полезен студентам в их самостоятельной работе, особенно при дистанционном изучении дисциплины.

Изложение материала сопровождается иллюстрациями, выполненными с применением системы Wolfram Mathematica (см., например, [13], [5]). Для большей пользы студентам рекомендуется сопровождать чтение решением упражнений из учебно-методического пособия [9, раздел 7].



Рене Декарт (1596–1650)



Пьер Ферма (1601–1665)

Глава 1

Системы координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

1.1 Аффинная и декартова системы координат. Полярная система координат. Цилиндрические и сферические координаты

Метод координат, представляющий собой главное орудие аналитической геометрии, был введён в математику французскими учеными XVII века Рене Декартом (René Descartes) и Пьером Ферма (Pierre de Fermat). Идея этого метода состоит в том, чтобы задавать точки прямой, плоскости или пространства с помощью координат, т.е. наборов чисел. Такой переход от точки к набору чисел в силу ряда причин является взаимно-однозначным. Это помогает решать геометрические задачи, оперируя не непосредственно с точечными, а с числовыми величинами. Увеличивая количество координат, можно изучать и пространства больших размерностей. То, что поначалу относили к теоретической математике, давно стало мощным прикладным средством исследования. В наш век развитых (и бурно развивающихся) цифровых технологий гениальное изобретение Ферма и Декарта трудно переоценить.

Прежде всего опишем аффинные системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве. Слово *affinis* (лат.) означает *смежный, соседний*.

Аффинная система координат вводится указанием начала координат — точки O — и базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ в ассоциированном пространстве геометрических векторов V_n . Для прямой имеем $n = 1$, для плоскости — $n = 2$, для пространства — $n = 3$. Пусть M — фиксированная точка. По определению, считаем, что M имеет в данной системе координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ тогда и только тогда, когда

в рассматриваемом базисе $\overrightarrow{OM} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, т. е.

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n. \quad (1.1)$$

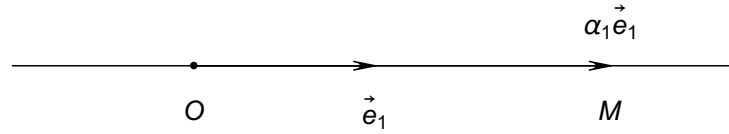


Рис. 1.1. $n = 1$, $\overrightarrow{OM} = \alpha_1 \vec{e}_1$

Так как базис — линейно-независимая система, то числа α_j из (1.1) для данной точки M определяются единственным образом. Поэтому соответствие «точка \longleftrightarrow набор координат» является взаимно-однозначным. Для нахождения координат точки M требуется найти коэффициенты разложения вектора \overrightarrow{OM} по базису $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, см. рис. 1.1–1.3. Аффинные координаты точек могут принимать любое действительное значение.

Если точка M имеет координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, будем писать $M = M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Из правил действий с векторами в координатах следует простая связь между наборами координат векторов и точек. Если $M = M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $N = N(\beta_1, \dots, \beta_n)$, то в нашем базисе

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \{\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n\}.$$

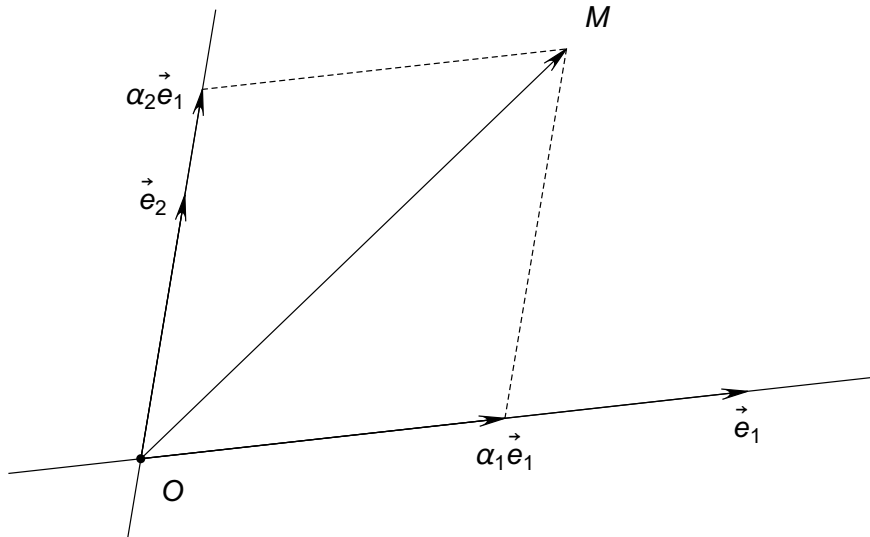


Рис. 1.2. $n = 2$, $\overrightarrow{OM} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$

Аффинная система координат в русской литературе иногда называется *косоугольной*. Чаще всего аффинные координаты обозначают буквами x, y, z , а всю

систему координат — через Ox , Oxy или $Oxyz$ соответственно на прямой, на плоскости или в пространстве. Стандартным образом вводятся координатные оси Ox , Oy , Oz и координатные плоскости Oxy , Oxz , Oyz (в трёхмерной ситуации). Например, ось Oy состоит из точек $M(0, y, 0)$, $y \in \mathbb{R}$, а плоскость Oyz — из точек $N(0, y, z)$.

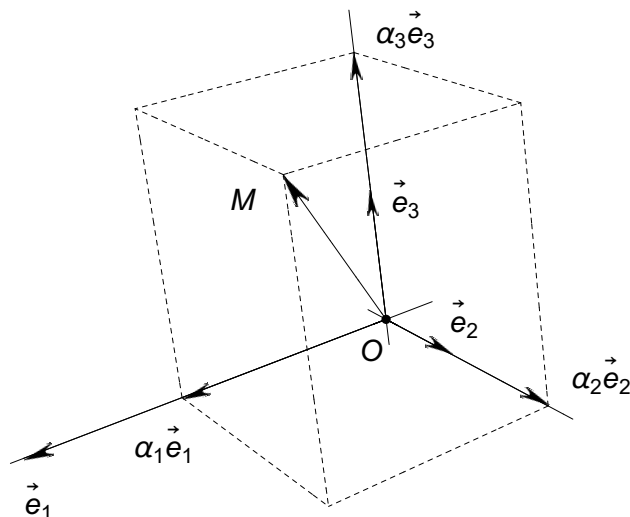


Рис. 1.3. $n = 3$, $\overrightarrow{OM} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$

Заметим, что в случае плоскости уравнения $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ задают прямые, а в случае пространства уравнения $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$ задают плоскости. Они называются координатными линиями и поверхностями.

Декартова прямоугольная, или просто *декартова система координат*, отличается от произвольной аффинной системы двумя дополнительными свойствами базиса — базисные векторы попарно ортогональны и длина каждого равна 1. Векторы такого вида называют *ортами*, а сам базис — *ортонормированным*. Чаще всего орты обозначают буквами \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , см. рис. 1.4а для $n = 2$ и рис. 1.4б для $n = 3$.

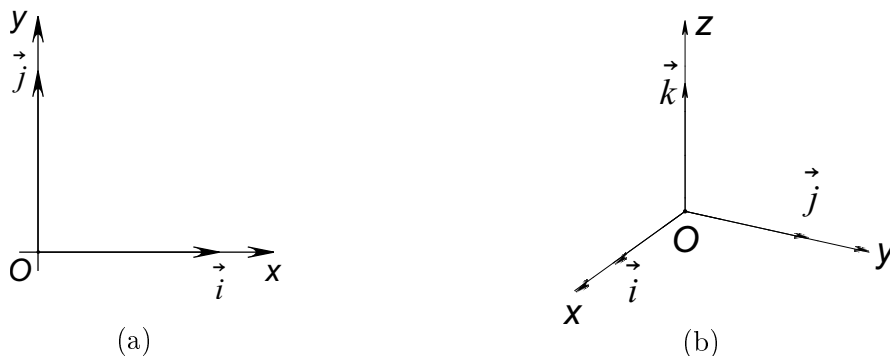
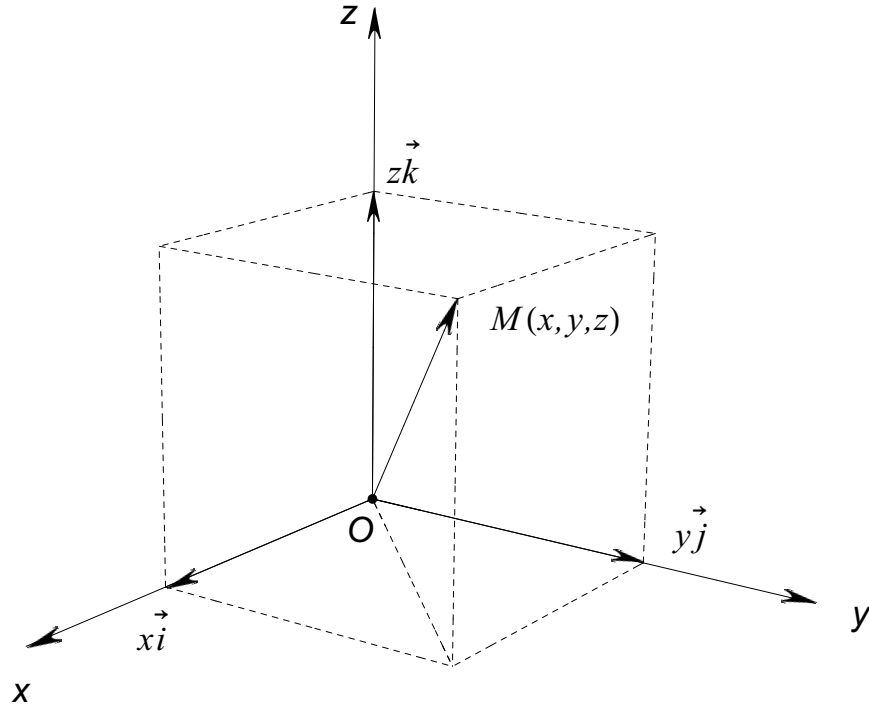


Рис. 1.4

Рис. 1.5. $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Одно из важных достоинств декартовой системы координат состоит в простых формулах для вычисления расстояний между точками в координатах. Возьмём $n = 3$. Если т. $M = M(x, y, z)$, то из свойств длины, базисных ортов и из теоремы Пифагора имеем (см. рис. 1.5):

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OM}|^2 &= |x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}|^2 = |x\vec{i}|^2 + |y\vec{j}|^2 + |z\vec{k}|^2 = \\ &= x^2|\vec{i}|^2 + y^2|\vec{j}|^2 + z^2|\vec{k}|^2 = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Тем самым

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Отсюда для точек $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Отметим, что аналог этой формулы для произвольной аффинной системы координат выглядит существенно сложнее.

Из других систем координат отметим полярную систему на плоскости и её обобщения для пространства — цилиндрическую и сферическую системы координат. В этих системах некоторые координаты представляют собой величины углов.

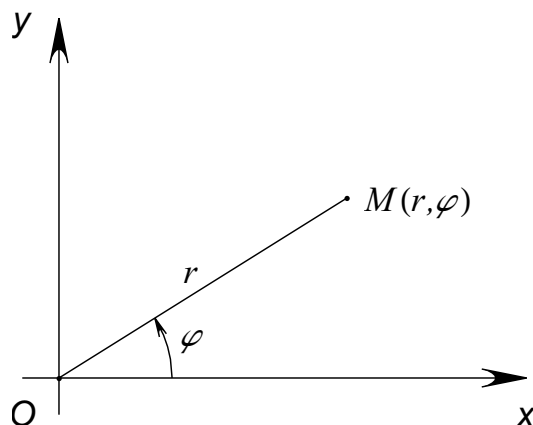


Рис. 1.6. Полярная система координат

Полярная система координат на плоскости вводится указанием фиксированной точки O — *полюса* и *полярной оси* — полупрямой с началом в точке O и выбранным направлением. Полярные координаты точки M суть два числа: r — длина вектора \overrightarrow{OM} и φ — угол между направлением полярной оси и вектором \overrightarrow{OM} . Границы изменения полярных координат: $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Для точек полярной оси считаем $\varphi = 0$. Для точки O имеем $r = 0$, а значение φ не определено. При таком дополнении полярные координаты точек определяются единственным образом и каждой паре координат, заданных в указанных пределах, соответствует некоторая точка плоскости. Связь полярных координат и декартовых координат на рис. 1.6 описывается равенствами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Отметим, что координатные линии $r = \text{const}$ представляют собой окружности, а $\varphi = \text{const}$ — полупрямые (при условии принадлежности констант указанным интервалам).

Цилиндрическая и сферическая системы координат в пространстве представлены на рис. 1.7–1.8. Цилиндрические координаты r, φ, z точки меняются в пределах $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$. Для точки O значение φ не определено. Связь цилиндрических и декартовых координат одной и той же точки для систем, согласованных так, как на рис. 1.7, задаётся равенствами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Координатные поверхности $r = \text{const}$ представляют собой цилиндры, $\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, а $z = \text{const}$ — плоскости.

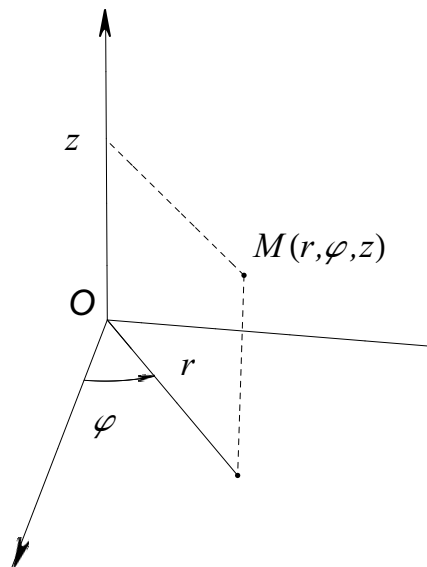


Рис. 1.7. Цилиндрическая система координат

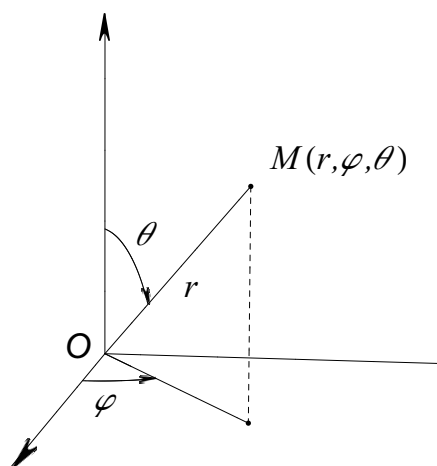


Рис. 1.8. Сферическая система координат

Две из трёх сферических координат, а именно φ и θ , представляют собой величины углов. Сферические координаты меняются в пределах $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$. Для точки O угловые координаты не определены. Связь сферических и декартовых координат одной и той же точки для систем, согласованных так, как на рис. 1.8, задаётся равенствами

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Координатные поверхности $r = \text{const}$ представляют собой сферы, $\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, а $\theta = \text{const}$ — однополостные конусы с вершиной в точке O .

1.2 Векторная и скалярная проекции вектора на ось

Пусть \vec{a}, \vec{b} — два ненулевых вектора. Через $\widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ обозначается угол φ между этими векторами, лежащий в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$. Угол между нулевым и любым другим вектором не определен, но ряд дальнейших формул остаётся справедливым, если принять $\widehat{\vec{0}, \vec{b}} := 0$. Считаем $\vec{0} \perp \vec{b}$ и $\vec{0} \parallel \vec{b}$ для любого \vec{b} .

Пусть $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}_n$. Векторная и скалярная проекции вектора \vec{b} на ось вектора \vec{a} — это соответственно вектор из \mathbb{V}_n и действительное число, которые мы будем обозначать через $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}$ и $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$. Указанные проекции определяются следующим образом.

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, считаем

$$\vec{c} = \vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b} \iff \vec{c} \parallel \vec{a} \text{ и } \vec{b} - \vec{c} \perp \vec{a},$$

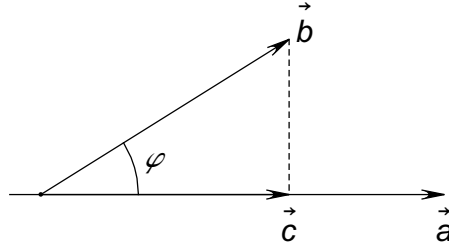
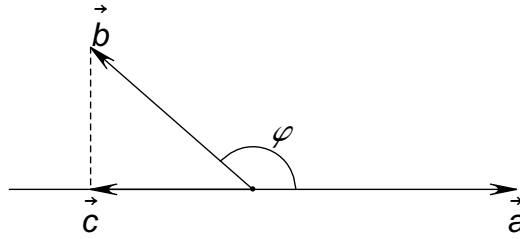
$$\lambda = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} := \pm |\vec{c}|.$$

Плюс берётся в случае, если угол $\varphi := \widehat{\vec{b}, \vec{a}}$ является острым, а минус — тупым (см. рис. 1.9–1.10). Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, выбор знака безразличен, так как $\vec{c} = \vec{0}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, полагаем $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b} := \vec{0}$, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} := 0$.

Отметим простейшие свойства проекций.

1) Если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b}$. Если $\vec{b} \perp \vec{a}$, то $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{0}$, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = 0$.

Рис. 1.9. Угол φ – острый, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{c}|$ Рис. 1.10. Угол φ – тупой, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = -|\vec{c}|$

$$2) \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Действительно, в ситуации рис. 1.9 (угол φ – острый), очевидно, $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{c}| = |\vec{b}| \cos \varphi$. В ситуации же рис. 1.10 (угол φ – тупой) имеем

$$\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = -|\vec{c}| = -(|\vec{b}| \cos(\pi - \varphi)) = |\vec{b}| \cos \varphi.$$

$$3) \text{ Пусть } |\vec{e}| = 1. \text{ Тогда } \overrightarrow{\text{pr}}_{\vec{e}} \vec{b} = \text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} \cdot \vec{e}.$$

Применим предыдущие обозначения, считая $\vec{a} = \vec{e}$. Если угол φ – острый, то векторы $\vec{c} = \overrightarrow{\text{pr}}_{\vec{e}} \vec{b}$ и \vec{e} сонаправлены. Поскольку $|\vec{e}| = 1$, справедливо равенство $\vec{c} = |\vec{c}| \cdot \vec{e}$. Так как $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} = |\vec{c}|$, оно эквивалентно доказываемому. Если же угол φ – тупой, то $\vec{c} = -|\vec{c}| \cdot \vec{e}$. Но теперь $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} = -|\vec{c}|$, что опять даёт $\overrightarrow{\text{pr}}_{\vec{e}} \vec{b} = \text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} \cdot \vec{e}$.

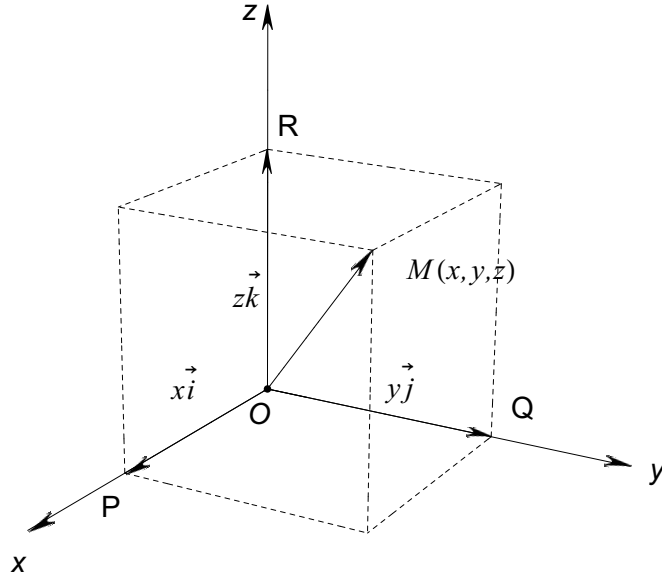
$$4) \text{ Для любого } \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{|\vec{b}| \cos \varphi}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Для доказательства положим $\vec{e} := \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$. Вектор \vec{e} сонаправлен с \vec{a} и $|\vec{e}| = 1$, поэтому из предыдущих свойств получаем:

$$\overrightarrow{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b} = \overrightarrow{\text{pr}}_{\vec{e}} \vec{b} = \text{pr}_{\vec{e}} \vec{b} \cdot \vec{e} = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{|\vec{b}| \cos \varphi}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}.$$

Следующие два свойства отметим особо. Первое из них выражает геометрический смысл декартовых координат.

Рис. 1.11. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$

Теорема 1. *Декартовы координаты точки M суть скалярные проекции вектора \overrightarrow{OM} на координатные оси.*

Уточним формулировку теоремы в трёхмерной ситуации. Пусть $Oxyz$ — декартова система координат в пространстве, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — соответствующий ортонормированный базис, т. $M = M(x, y, z)$. Тогда

$$x = \text{pr}_{\vec{i}} \overrightarrow{OM}, \quad y = \text{pr}_{\vec{j}} \overrightarrow{OM}, \quad z = \text{pr}_{\vec{k}} \overrightarrow{OM}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Обозначим через P, Q, R ортогональные проекции точки M на координатные оси (см. рис. 1.11). Тогда

$$\overrightarrow{OP} = \text{pr}_{\vec{i}} \overrightarrow{OM} = \text{pr}_{\vec{i}} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i},$$

$$\overrightarrow{OQ} = \text{pr}_{\vec{j}} \overrightarrow{OM} = \text{pr}_{\vec{j}} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j},$$

$$\overrightarrow{OR} = \text{pr}_{\vec{k}} \overrightarrow{OM} = \text{pr}_{\vec{k}} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}.$$

Мы применили свойство 3, поскольку $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Значит,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \text{pr}_{\vec{i}} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} + \text{pr}_{\vec{j}} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} + \text{pr}_{\vec{k}} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}.$$

С другой стороны, так как $M = M(x, y, z)$, выполняется $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Равенства (1.2) следуют из единственности разложения вектора \overrightarrow{OM} по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. \square

Следствие 1. Пусть $\vec{a} \neq 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — углы, которые вектор \vec{a} образует с осями координат, т. е. ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тогда в этом базисе

$$\vec{a} = \{|\vec{a}| \cos \varphi_1, |\vec{a}| \cos \varphi_2, |\vec{a}| \cos \varphi_3\}.$$

Доказательство. По теореме 1 имеем $\vec{a} = \{\text{pr}_{\vec{i}} \vec{a}, \text{pr}_{\vec{j}} \vec{a}, \text{pr}_{\vec{k}} \vec{a}\}$. Остаётся привлечь свойство 2), согласно которому $\text{pr}_{\vec{i}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi_1$, $\text{pr}_{\vec{j}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi_2$, $\text{pr}_{\vec{k}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi_3$. \square

Следствие 2. В обозначениях предыдущего следствия

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1. \quad (1.3)$$

Доказательство. Применим правило вычисления длины вектора в декартовых координатах и следствие 1:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_1 + |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_2 + |\vec{a}|^2 \cos^2 \varphi_3 = |\vec{a}|^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3).$$

Так как $|\vec{a}| \neq 0$, то выполняется (1.3). \square

Величины $\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3$ из формулировок следствий 1–2 называются *направляющими косинусами* вектора \vec{a} .

При фиксированном $\vec{a} \in \mathbb{V}_n$ векторную проекцию $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}$ и скалярную проекцию $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$ можно рассматривать как функции аргумента $\vec{b} \in \mathbb{V}_n$; в этом случае они обозначаются соответственно $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}}(\cdot)$ и $\text{pr}_{\vec{a}}(\cdot)$. При этом отображение $\vec{\text{pr}}_{\vec{a}}(\cdot)$ действует из \mathbb{V}_n в \mathbb{V}_n , а $\text{pr}_{\vec{a}}(\cdot)$ — из \mathbb{V}_n в \mathbb{R} , поскольку значение первого отображения есть n -мерный геометрический вектор, а второго — действительное число. Следующее утверждение устанавливает *линейные свойства* этих отображений.

Теорема 2. Для $\vec{b}, \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in \mathbb{V}_n, \beta \in \mathbb{R}$ справедливы равенства:

$$\vec{\text{pr}}_{\vec{a}}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}_1 + \vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}_2, \quad (1.4)$$

$$\vec{\text{pr}}_{\vec{a}}(\beta \vec{b}) = \beta \vec{\text{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}, \quad (1.5)$$

$$\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}_1 + \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}_2, \quad (1.6)$$

$$\text{pr}_{\vec{a}}(\beta \vec{b}) = \beta \text{pr}_{\vec{a}} \vec{b}. \quad (1.7)$$

Доказательство. Докажем теорему в случае $n = 3$. При $\vec{a} = \vec{0}$ векторные проекции равны $\vec{0}$, скалярные проекции равны 0, поэтому равенства очевидны. Считаем, что вектор \vec{a} — ненулевой. Если это так, определён вектор $\vec{i} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$. Это вектор единичной длины, сонаправленный с \vec{a} . Введём в пространстве ортонормированный базис, первым ортом которого является \vec{i} . Пусть в этом базисе

$\vec{b}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$. По геометрическому смыслу декартовых координат (теорема 1) имеем равенства:

$$x_1 = \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b}_1, \quad x_2 = \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b}_2, \quad x_1 + x_2 = \operatorname{pr}_{\vec{a}} (\vec{b}_1 + \vec{b}_2).$$

Отсюда немедленно следует (1.6). Далее, если $\vec{b} = \{x, y, z\}$, то $\beta \vec{b} = \{\beta x, \beta y, \beta z\}$. Поскольку $x = \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b}$, а $\beta x = \operatorname{pr}_{\vec{a}} (\beta \vec{b})$, выполняется (1.7). Оставшиеся равенства (1.4) и (1.5) получаются из уже доказанных с применением связи векторной и скалярной проекций. Для примера получим (1.4):

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{pr}}_{\vec{a}} (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) &= \overrightarrow{\operatorname{pr}}_{\vec{i}} (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \operatorname{pr}_{\vec{i}} (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) \cdot \vec{i} = (\operatorname{pr}_{\vec{i}} \vec{b}_1 + \operatorname{pr}_{\vec{i}} \vec{b}_2) \cdot \vec{i} = \\ &= \operatorname{pr}_{\vec{i}} \vec{b}_1 \cdot \vec{i} + \operatorname{pr}_{\vec{i}} \vec{b}_2 \cdot \vec{i} = \overrightarrow{\operatorname{pr}}_{\vec{i}} \vec{b}_1 + \overrightarrow{\operatorname{pr}}_{\vec{i}} \vec{b}_2 = \overrightarrow{\operatorname{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}_1 + \overrightarrow{\operatorname{pr}}_{\vec{a}} \vec{b}_2. \end{aligned}$$

Соотношение (1.5) устанавливается аналогично. Соответствующую цепочку равенств запишите самостоятельно. \square

1.3 Скалярное произведение и его свойства

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}_n$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \varphi := \widehat{\vec{a}, \vec{b}}.$$

Если один из векторов является нулевым, считаем здесь $\varphi = 0$. Запись $\vec{a} \perp \vec{b}$ означает, что $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или хотя бы один из векторов есть $\vec{0}$.

Сначала отметим следующие свойства скалярного произведения:

- 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$;
- 2) $(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \iff$ угол φ — острый, $(\vec{a}, \vec{b}) < 0 \iff$ угол φ — тупой;
- 3) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$;
- 4) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;
- 5) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;
- 6) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 7) $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0$; $(\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}$.

Геометрические свойства 1), 2) очевидны. Свойство 3) следует из равенства $\operatorname{pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$. Свойство 4), называемое *коммутативностью* скалярного умножения, связано с коммутативностью умножения чисел и равенством $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \widehat{\vec{b}, \vec{a}}$. Утверждение 7) следует из свойств длины вектора, поскольку $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$. Более сложными являются свойства 5) и 6) (соответственно *дистрибутивность* и *однородность* скалярного умножения). Установим их с помощью равенств 3) и линейных свойств проекций:

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}| \operatorname{pr}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| (\operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{a} + \operatorname{pr}_{\vec{c}} \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c});$$

$$(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda (\vec{a}, \vec{b}).$$

Алгебраические свойства 4)–7) важны не только сами по себе. С их помощью мы получим простое правило вычисления скалярного произведения в декартовых координатах. Сформулируем этот результат для $n = 3$.

Теорема. Пусть в ортонормированном базисе $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (1.8)$$

Доказательство. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированный базис, в котором заданы координаты векторов \vec{a} и \vec{b} . Так как базисные орты попарно ортогональны и имеют единичную длину, то

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{j}, \vec{i}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{k}) = (\vec{k}, \vec{j}) = 0, \quad (\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1.$$

Отсюда и из свойств скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) = x_1 x_2 (\vec{i}, \vec{i}) + x_1 y_2 (\vec{i}, \vec{j}) + x_1 z_2 (\vec{i}, \vec{k}) + \\ &+ y_1 x_2 (\vec{j}, \vec{i}) + y_1 y_2 (\vec{j}, \vec{j}) + y_1 z_2 (\vec{j}, \vec{k}) + z_1 x_2 (\vec{k}, \vec{i}) + z_1 y_2 (\vec{k}, \vec{j}) + z_1 z_2 (\vec{k}, \vec{k}) = \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

□

Из (1.8) получаются простые формулы для вычисления длин и углов в декартовых координатах. Пусть $\vec{a} = \{x, y, z\}$, тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, то в обозначениях теоремы косинус угла $\varphi = \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$ вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Формула (1.8) существенно усложнится, если координаты векторов задать не в ортонормированном, а в произвольном базисе \mathbb{V}_n . Рассуждая по той же схеме, получим, что в этом случае в правую часть войдут все девять попарных произведений координат \vec{a}, \vec{b} , причём каждое — со своим множителем, равным скалярному произведению каких-то двух базисных векторов. Читателю рекомендуется записать соответствующую точную формулу.

Из приложений скалярного произведения отметим некоторые задачи, связанные с определителем Грама системы векторов.

Обозначим через S площадь параллелограмма, построенного на двумерных или трёхмерных векторах \vec{a} и \vec{b} . Нетрудно показать, что выполняется равенство (докажите его самостоятельно)

$$S^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Определитель, стоящий в правой части (1.9), называется определителем Грама векторов \vec{a} и \vec{b} .

Интересно заметить, что аналог (1.9) справедлив и для трёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3$. Именно, пусть V есть объём параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах. Тогда

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

В правой части стоит определитель Грама системы векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Последнее равенство можно доказать с применением свойств смешанного произведения (см. далее п. 1.6) и некоторых свойств определителя третьего порядка.

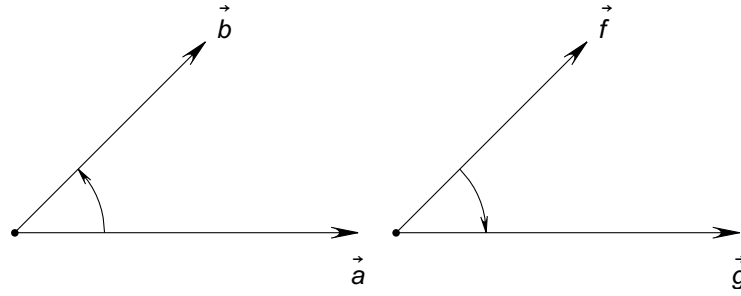
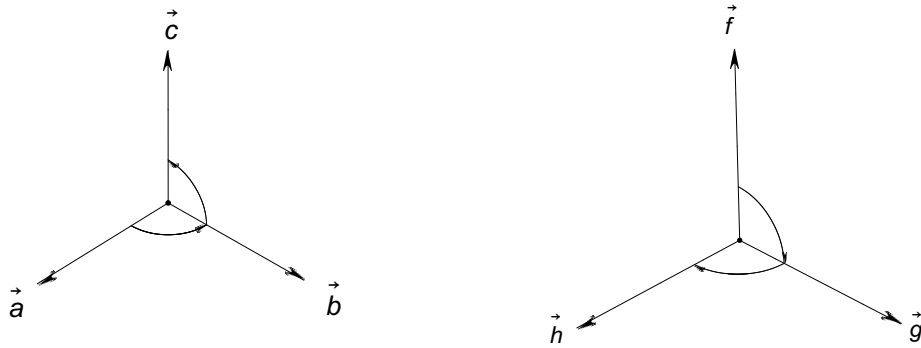
1.4 Векторное произведение и его свойства

Начнём с определений ориентации упорядоченной пары неколлинеарных векторов на плоскости и упорядоченной тройки некомпланарных векторов в пространстве. Каждый такой набор называется *правым* или *левым* в соответствии со следующими определениями.

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}_2$ называется *правой*, если кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} осуществляется в направлении против часовой стрелки, и *левой*, если указанный поворот осуществляется по часовой стрелке. Мы считаем, что векторы отложены от одной точки.

Нетрудно видеть, что если \vec{a}, \vec{b} — правый базис \mathbb{V}_2 , то \vec{b}, \vec{a} — левый базис, и наоборот. Умножение одного из векторов на положительное число сохраняет ориентацию, а на отрицательное — меняет её на противоположную.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3$ называется *правой*, если кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} и затем от \vec{b} к \vec{c} осуществляется против часовой стрелки, если наблюдатель находится внутри трёхгранного угла, образованного этими векторами. Это эквивалентно тому, что, если смотреть на плоскость векторов \vec{a} и \vec{b} со стороны того полупространства, в которое направлен вектор \vec{c} , то кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} выполняется против часовой стрелки. Если вращение, о котором идёт речь, происходит по часовой стрелке, то тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется *левой*.

Рис. 1.12. \vec{a}, \vec{b} – правый базис, \vec{f}, \vec{g} – левый базис \mathbb{V}_2 Рис. 1.13. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правый базис, $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ – левый базис \mathbb{V}_3

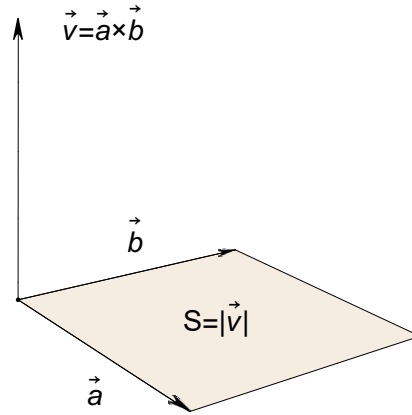
Нетрудно видеть, что циклическая перестановка трёх векторов сохраняет их ориентацию, а перестановка двух из трёх векторов меняет её на противоположную. Так, например, если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка, то тройки $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ и $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ также являются правыми, а $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$, как $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ и $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$, являются левыми. Аналогично предыдущему, умножение одного вектора из трёх на положительный множитель сохраняет ориентацию тройки, а на отрицательный — меняет на противоположную.

Правый базис \vec{a}, \vec{b} и левый базис \vec{f}, \vec{g} пространства \mathbb{V}_2 представлены на рис. 1.12. Правый базис $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и левый базис $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$ трёхмерного пространства изображены на рис. 1.13.

Векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}_3$ называется вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}_3$ (запись: $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$), удовлетворяющий условиям:

- 1° $|\vec{v}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$, $\varphi := \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$;
- 2° $\vec{v} \perp \vec{a}, \vec{b}$;
- 3° тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ — правая.

Условие 1° означает, что длина \vec{v} численно равна площади S параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} . Условие 2° равносильно тому, что вектор \vec{v}

Рис. 1.14. $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$

ортогонален плоскости векторов-сомножителей. Наконец, третье условие вступает в действие, если \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны; в противном случае из 1° следует, что $\vec{v} = \vec{0}$. Векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ изображены на рис. 1.14.

Отметим свойства векторного умножения.

$$1) \quad \vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}. \text{ В частности, всегда } \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}.$$

$$\text{Действительно, } \vec{v} = \vec{0} \iff |\vec{v}| = S = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

$$2) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{антикоммутативность}).$$

Это равенство можно усмотреть из рисунка. Однако мы отметим и более строгий способ. Для того чтобы убедиться в равенстве двух векторов, достаточно проверить, что эти векторы равны по длине, коллинеарны и одинаково направлены. Считаем, что \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны (иначе равенство очевидно). Длины каждого из векторов $\vec{a} \times \vec{b}$ и $-\vec{b} \times \vec{a}$ одинаковы и равны S . Оба вектора ортогональны плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} и потому коллинеарны. Наконец, заметим, что эти векторы одинаково направлены. Действительно,

тройка \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} \times \vec{b}$ — правая по определению,

тройка \vec{b} , \vec{a} , $\vec{b} \times \vec{a}$ — также правая,

тройка \vec{a} , \vec{b} , $\vec{b} \times \vec{a}$ — левая (мы поменяли местами первые два вектора),

тройка \vec{a} , \vec{b} , $-\vec{b} \times \vec{a}$ — снова правая (умножили третий вектор на -1).

Сравнивая первую и четвертую тройки, получаем, что коллинеарные векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ и $-\vec{b} \times \vec{a}$ имеют одинаковое направление.

$$3) \quad (\alpha \vec{a}) \times (\beta \vec{b}) = \alpha \beta \vec{a} \times \vec{b} \quad (\text{однородность по любому сомножителю}).$$

Докажем сначала равенство $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \vec{a} \times \vec{b}$. Если $\alpha = 0$ или $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то оно имеет вид $\vec{0} = \vec{0}$. Поэтому считаем, что это не так. Векторы $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b}$ и $\alpha \vec{a} \times \vec{b}$ коллинеарны, так как ортогональны плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} . Их дли-

ны одинаковы и равны $|\alpha|S$:

$$|(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}| = |\alpha\vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{\alpha\vec{a}, \vec{b}} = |\alpha||\vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}, \vec{b}} = |\alpha|S = |\alpha\vec{a}||\vec{b}| \sin \widehat{\vec{a}, \vec{b}}.$$

Здесь есть тонкость. Если $\alpha > 0$, то, очевидно, $\widehat{\alpha\vec{a}, \vec{b}} = \varphi = \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$. Если же $\alpha < 0$, то $\widehat{\alpha\vec{a}, \vec{b}} = \pi - \varphi$, однако $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$. Наконец, покажем, что векторы $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$ и $\alpha\vec{a} \times \vec{b}$ одинаково направлены. Имеем:

тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ — правая по определению,

тройка $\alpha\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{a} \times \vec{b}$ — также правая (мы умножили на α два вектора),

тройка $\alpha\vec{a}, \vec{b}, (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$ — правая по определению.

Нужный результат следует из сравнения ориентаций второй и третьей троек.

Однородность по второму сомножителю следует из доказанного равенства и антикоммутативности:

$$\vec{a} \times (\beta\vec{b}) = -(\beta\vec{b}) \times \vec{a} = -\beta\vec{b} \times \vec{a} = \beta\vec{a} \times \vec{b}.$$

$$4) (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} \quad (\text{дистрибутивность}).$$

Второе равенство следует из первого и антикоммутативности. Доказательство первого равенства вынесено в следующий пункт.

Указанные свойства 1)–4) векторного умножения оказываются весьма важными. С их применением получается простая формула для вычисления векторного произведения в декартовых координатах.

Теорема. Пусть в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы \vec{a} и \vec{b} имеют координатный вид $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Равенство (1.10) понимается в смысле разложения определителя по третьей строке:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Доказательство. Из определения векторного произведения и свойств 1)–2) вытекают следующие равенства для попарных произведений базисных ортов:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k},$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Применяя ещё свойства 3)–4), запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\vec{i} \times \vec{k} + y_1x_2\vec{j} \times \vec{i} + \\ &+ y_1y_2\vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \times \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \times \vec{k} = \\ &= x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

и мы получим формулу (1.11). Теорема доказана. \square

Применение равенства (1.10) позволяет эффективно вычислять в декартовых координатах вектор, ортогональный двум данным векторам из \mathbb{V}_3 , и находить площадь параллелограмма, построенного на данных векторах. В качестве вектора, ортогонального векторам $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, можно взять их векторное произведение

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Площадь S параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , вычисляется по формуле

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}.$$

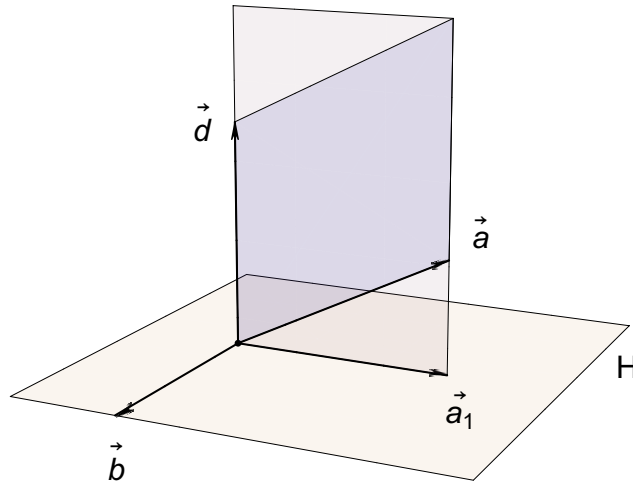
1.5 Дистрибутивность векторного умножения

Приведём доказательство первого равенства из свойства 4) предыдущего пункта, которое мы отложили для специального рассмотрения.

Проекцией вектора $\vec{a} \in \mathbb{V}_3$ на плоскость H называется вектор \vec{a}_1 , который определяется условиями $\vec{a}_1 \in H$, $\vec{a} - \vec{a}_1 \perp H$.

Лемма 1. Пусть \vec{a}_1 есть проекция вектора \vec{a} на плоскость H , вектор \vec{d} ортогонален H . Тогда $\vec{a} \times \vec{d} = \vec{a}_1 \times \vec{d}$.

Доказательство иллюстрируется на рис. 1.15. Векторы \vec{a} , \vec{a}_1 и \vec{d} лежат в одной плоскости. Поскольку векторы $\vec{a} \times \vec{d}$ и $\vec{a}_1 \times \vec{d}$ ортогональны этой плоскости, то они коллинеарны. Кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{d} и от \vec{a}_1 к \vec{d} осуществляется в одном

Рис. 1.15. $\vec{b} = \vec{a} \times \vec{d} = \vec{a}_1 \times \vec{d}$

и том же направлении, значит, $\vec{a} \times \vec{d}$ и $\vec{a}_1 \times \vec{d}$ одинаково направлены. Длина $\vec{a} \times \vec{d}$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на \vec{a} и \vec{d} , а длина $\vec{a}_1 \times \vec{d}$ есть площадь прямоугольника, построенного на \vec{a}_1 и \vec{d} . Очевидно, эти площади равны, т.е. $|\vec{a} \times \vec{d}| = |\vec{a}_1 \times \vec{d}|$. Таким образом, $\vec{a} \times \vec{d} = \vec{a}_1 \times \vec{d}$. \square

Лемма 2. Пусть $|\vec{e}| = 1$, $\vec{e} \perp H$, $\vec{a} \in H$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда вектор $\vec{a} \times \vec{e}$ получается из вектора \vec{a} поворотом в плоскости H на угол $\frac{\pi}{2}$.

Доказательство. Утверждение леммы 3 следует из определения векторного произведения (см. рис. 1.16). \square

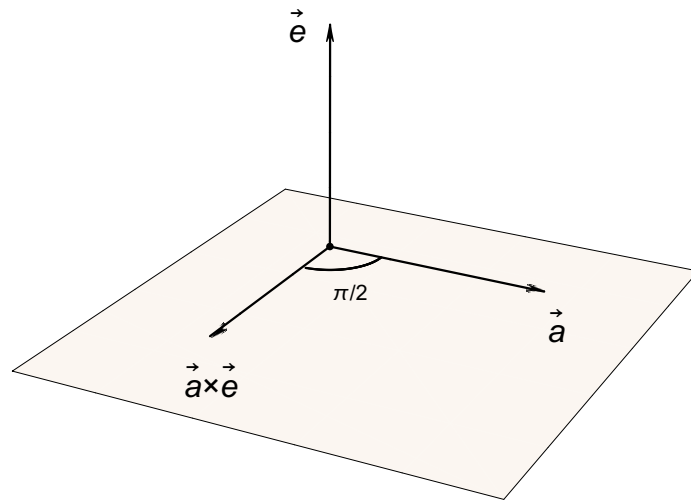


Рис. 1.16

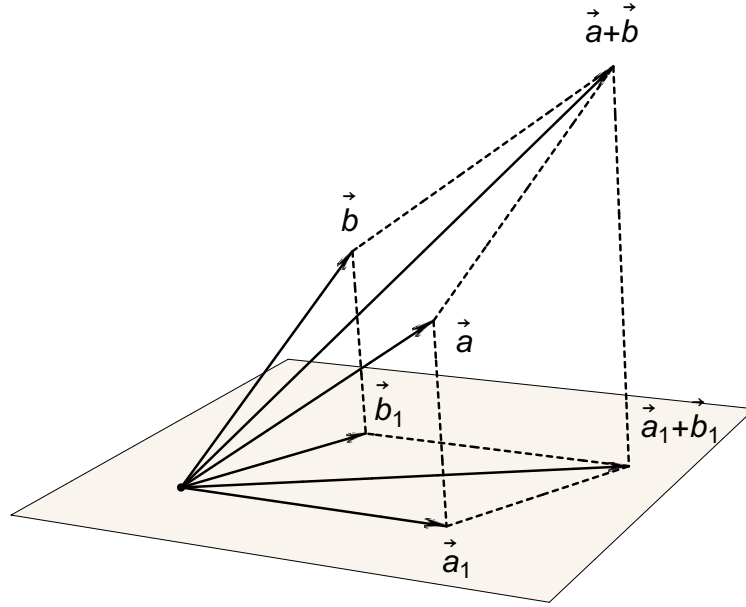


Рис. 1.17

Теорема. Справедливо равенство

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}. \quad (1.12)$$

Доказательство. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то это равенство очевидно. Считаем $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Сначала докажем (1.12) в случае $\vec{c} = \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$. Обозначим через H плоскость, такую что $\vec{e} \perp H$. Пусть \vec{a}_1 и \vec{b}_1 — проекции на H векторов \vec{a} и \vec{b} соответственно. Тогда $\vec{a}_1 + \vec{b}_1$ есть проекция на эту плоскость вектора $\vec{a} + \vec{b}$, поскольку при ортогональном проектировании на плоскость параллелограмм переходит в параллелограмм (см. рис. 1.17). Поэтому лемма 1 даёт

$$\vec{a} \times \vec{e} = \vec{a}_1 \times \vec{e}, \quad \vec{b} \times \vec{e} = \vec{b}_1 \times \vec{e}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e} = (\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \times \vec{e}.$$

Из леммы 2 следует равенство $(\vec{a}_1 + \vec{b}_1) \times \vec{e} = \vec{a}_1 \times \vec{e} + \vec{b}_1 \times \vec{e}$, так как при повороте в своей плоскости параллелограмм переходит в параллелограмм. Из отмеченных соотношений заключаем, что

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e} = \vec{a} \times \vec{e} + \vec{b} \times \vec{e}.$$

Пусть теперь \vec{c} — произвольный ненулевой вектор. Положим $\vec{e} := \frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c}$ и применим к единичному вектору \vec{e} последнее равенство:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \left(\frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c} \right) = \vec{a} \times \left(\frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c} \right) + \vec{b} \times \left(\frac{1}{|\vec{c}|} \vec{c} \right).$$

Для получения (1.12) остаётся умножить это равенство на $|\vec{c}|$ и воспользоваться однородностью векторного произведения. Теорема доказана. \square

1.6 Смешанное произведение и его свойства

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} := (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}). \quad (1.13)$$

Первые два вектора \vec{a}, \vec{b} (именно в таком порядке) перемножаются векторно, а затем результат, т.е. вектор $\vec{a} \times \vec{b}$, умножается на вектор \vec{c} скалярно. Заметим, что в записи $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ не отмечается, какая пара соседних векторов перемножается векторно. Как мы увидим далее, верно равенство $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$ (см. замечание после следствия 2).

Из свойств векторного и скалярного произведений следует, что смешанное произведение однородно и аддитивно по любому из трёх сомножителей, например, по второму:

$$\vec{a}(\lambda \vec{b})\vec{c} = \lambda \vec{a}\vec{b}\vec{c}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad \vec{a}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)\vec{c} = \vec{a}\vec{b}_1\vec{c} + \vec{a}\vec{b}_2\vec{c}.$$

В качестве простого упражнения докажите эти равенства и их аналоги для первого и третьего сомножителей.

Операция (1.13) является важной, поскольку имеет эффективные приложения в решении ряда вычислительных задач. Прежде всего мы отметим утверждение, описывающее геометрический смысл смешанного произведения.

Обозначим через $V = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ объём параллелепипеда Π , построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ как на рёбрах. *Ориентированный объём* этого параллелепипеда определяется равенством

$$V' = V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \begin{cases} V, & \text{тройка } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ правая,} \\ -V, & \text{тройка } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ левая,} \\ 0, & \text{векторы } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$

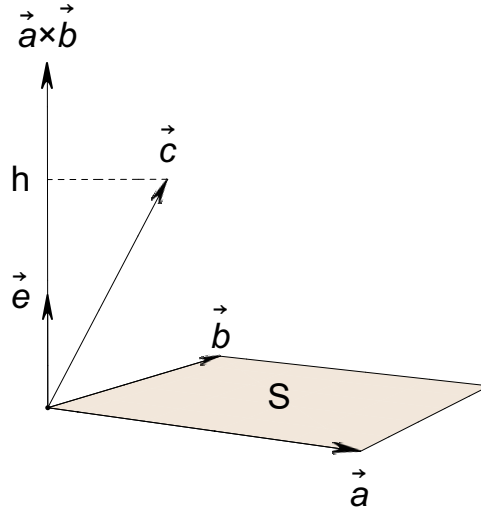
Теорема 1. *Выполняется равенство*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \quad (1.14)$$

Доказательство. Пусть сначала векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. Обозначим через H их общую плоскость. Тогда $\vec{a} \times \vec{b} \perp H$, $\vec{c} \in H$, поэтому $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Так как в этом случае и $V' = 0$, то равенство (1.14) верно.

Предположим теперь, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарны. Тогда \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, поэтому $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Пусть $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Это число равно площади параллелограмма, построенного на \vec{a} и \vec{b} . Введём в рассмотрение вектор

$$\vec{e} := \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{S} \vec{a} \times \vec{b}.$$

Рис. 1.18. $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \pm Sh$

Это вектор длины 1, сонаправленный с векторами \vec{a} и \vec{b} (см. рис. 1.18). Поскольку $\vec{a} \times \vec{b} = S\vec{e}$, запишем следующую цепочку равенств:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (S\vec{e}, \vec{c}) = S(\vec{e}, \vec{c}) = S|\vec{e}| \operatorname{pr}_{\vec{e}} \vec{c} = S \operatorname{pr}_{\vec{e}} \vec{c} = \pm Sh.$$

Здесь h есть высота параллелепипеда Π , опущенная на плоскость векторов \vec{a} и \vec{b} . Знак плюс берётся в том случае, когда вектор \vec{c} направлен в то же полупространство, в которое направлен вектор \vec{e} , а знак минус — в противном случае. Это означает, что знак плюс соответствует правой тройке векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а минус — левой. Очевидно, что $Sh = V$ есть объём параллелепипеда Π , поэтому $\pm Sh = V'$ есть его ориентированный объём.

Равенство (1.14) доказано. \square

Следствие 1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \iff$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Доказательство. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \iff V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны. \square

Следствие 2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке сомножителей и меняет знак на противоположный при перестановке двух из трёх сомножителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Доказательство. Заметим, что аналогичным свойством обладает $V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$:

$$V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V'(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = V'(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -V'(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -V'(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -V'(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}).$$

Действительно, объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах, не меняется при любой перестановке этих векторов. В то же время, как отмечалось

выше, циклическая перестановка векторов не меняет их ориентации, но перестановка двух из трёх векторов меняет ориентацию тройки на противоположную. Остаётся привлечь теорему 1. \square

Поэтому $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$.

Укажем простую, но очень важную формулу для вычисления смешанного произведения в декартовых координатах.

Теорема 2. Пусть в ортонормированном базисе $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Тогда

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Доказательство. Как мы отмечали (см. равенство (1.11))

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Кроме того, $\vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$. Применяя формулу для вычисления скалярного произведения в декартовых координатах, получим

$$\begin{aligned} \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3 = \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Формула (1.15) доказана. \square

Следствие 3. В обозначениях теоремы 1 имеем:

$$V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \Delta := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\Delta|,$$

векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\iff \Delta = 0$,

тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая $\iff \Delta > 0$,

тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая $\iff \Delta < 0$.

Введём понятие *ориентированной площади* $S'(\vec{u}, \vec{v})$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}_2$. По определению,

$$S' = S'(\vec{u}, \vec{v}) := \begin{cases} S, & \text{пара } \vec{u}, \vec{v} \text{ правая,} \\ -S, & \text{пара } \vec{u}, \vec{v} \text{ левая,} \\ 0, & \text{векторы } \vec{u}, \vec{v} \text{ коллинеарны.} \end{cases}$$

Здесь $S = S(\vec{u}, \vec{v})$ — обычная площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{u} и \vec{v} .

Следствие 4. Пусть в ортонормированном базисе \mathbb{V}_2 векторы \vec{u} и \vec{v} имеют вид $\vec{u} = \{x_1, y_1\}$, $\vec{v} = \{x_2, y_2\}$. Тогда

$$S'(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (1.16)$$

Доказательство. Рассмотрим трёхмерные векторы $\vec{a} = \{x_1, y_1, 0\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, 0\}$, $\vec{c} = \{0, 0, 1\}$, координаты которых заданы в ортонормированном базисе \mathbb{V}_3 . Нетрудно убедиться, что справедливы равенства

$$S'(\vec{u}, \vec{v}) = V'(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

□

Обратим внимание на то, что формула для плоскости (1.16) выводится здесь из пространственной формулы (1.15).

Следствие 5. В обозначениях предыдущего следствия имеем:

$$S(\vec{u}, \vec{v}) = |\delta|, \quad \delta := \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

$$\text{векторы } \vec{u}, \vec{v} \text{ коллинеарны} \iff \delta = 0,$$

$$\text{пара } \vec{u}, \vec{v} \text{ правая} \iff \delta > 0,$$

$$\text{пара } \vec{u}, \vec{v} \text{ левая} \iff \delta < 0.$$

Отметим чисто алгебраическое следствие геометрических результатов.

Следствие 6. Справедливы следующие свойства определителя третьего порядка.

1°. Определитель аддитивен и однороден по любой строке.

2°. При перестановке двух строк определитель меняет знак, т. е. умножается на -1 .

3°. Определитель равен нулю \iff его строки образуют линейно зависимую систему в \mathbb{R}^3 .

Эти утверждения сразу следуют из свойств смешанного произведения и его связи с определителями.

В заключение отметим, что координатный подход позволяет доказать формулу для объёма $V = V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ через определитель Грама системы векторов

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}_3$, которую мы упоминали в п. 1.3:

$$V^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}.$$

Для доказательства предлагается перейти к координатам векторов в ортонормированном базисе, воспользоваться формулой для ориентированного объёма параллелепипеда, правилом вычисления скалярного произведения в декартовых координатах и свойствами определителя $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$. Читателю предлагается самостоятельно исследовать эту задачу.

Глава 2

Преобразования координат. Уравнения линий и поверхностей

2.1 Преобразования аффинных координат на прямой, на плоскости и в пространстве

Пусть на прямой, на плоскости или в пространстве заданы две аффинные системы координат, условно называемые *старая* (Ox, Oxy или $Oxyz$) и *новая* ($O'x', O'x'y'$ или $O'x'y'z'$). Тогда координаты одной и той же точки в этих двух системах связаны равенствами

$$x = a + c_{11}x', \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

(соответственно для прямой, для плоскости и для пространства). В числовом равенстве (2.1) $c_{11} \neq 0$; в матричных соотношениях (2.2) и (2.3) $\mathbf{C} = (c_{ij})$ — невырожденная матрица второго и третьего порядка. Ниже мы установим плоский вариант (2.2). Равенства для преобразований аффинных координат на прямой и в пространстве получаются из тех же соображений; их вывод предоставляется читателю в качестве полезного упражнения.

Соотношения (2.1)–(2.3) означают, что *аффинные координаты одной и той же точки в двух различных системах связаны уравнениями первой степени*.

Дадим сначала важное определение, пригодное сразу для любого $n = 1, 2, 3$. Матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ пространства \mathbb{V}_n на-

зывается матрица \mathbf{C} порядка n , k -й столбец которой содержит координаты вектора \vec{f}_k в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

$$\vec{f}_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \vec{e}_i, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Из линейной независимости базисных векторов \vec{f}_k следует линейная независимость в \mathbb{R}^n наборов их координат в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, иначе говоря, столбцов \mathbf{C} . Это означает, что матрица \mathbf{C} является невырожденной, т. е. $|\mathbf{C}| \neq 0$.

Перейдём теперь к плоскому случаю ($n = 2$). Пусть старая система координат Oxy соответствует началу в т. O и базису \vec{e}_1, \vec{e}_2 , а новая система $O'x'y'$ — началу в т. O' и базису \vec{f}_1, \vec{f}_2 . Предположим, что в старой системе координат т. $M = M(x, y)$, а в новой системе координат т. $M = M(x', y')$.

Теорема. Пусть $\overrightarrow{OO'} = \{a, b\}$ в базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 , \mathbf{C} — матрица перехода от базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 к базису \vec{f}_1, \vec{f}_2 . Тогда имеет место равенство (2.2).

Доказательство. Очевидно, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Имеем $\overrightarrow{OO'} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. По определению аффинных координат, $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{f}_1 + y'\vec{f}_2$. Выразим \vec{f}_1 и \vec{f}_2 через \vec{e}_1 и \vec{e}_2 с помощью матрицы перехода. Равенства (2.4) в рассматриваемом варианте имеют вид

$$\vec{f}_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2, \quad \vec{f}_2 = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2.$$

Поэтому $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ влечёт

$$\begin{aligned} x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 &= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + x'\vec{f}_1 + y'\vec{f}_2 = \\ &= a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + x'(c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2) + y'(c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2) = \\ &= (a + c_{11}x' + c_{12}y')\vec{e}_1 + (b + c_{21}x' + c_{22}y')\vec{e}_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаются сразу два скалярных равенства. Единственность разложения вектора по базису означает, что в начальном и конечном выражениях коэффициенты перед \vec{e}_1 и \vec{e}_2 совпадают:

$$x = a + c_{11}x' + c_{12}y',$$

$$y = b + c_{21}x' + c_{22}y'.$$

Система этих равенств эквивалентна (2.2). Теорема доказана. \square

Поскольку $|\mathbf{C}| \neq 0$, существует обратная матрица \mathbf{C}^{-1} и из равенства

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

следует

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

2.2 Преобразование декартовых координат на плоскости. Сдвиг и поворот

Отдельно рассмотрим случай, когда на плоскости обе системы координат — старая и новая — являются декартовыми. В этой ситуации равенство (2.2) может быть уточнено.

Пусть \vec{i}, \vec{j} — ортонормированный базис, соответствующий старой декартовой системе координат Oxy , \vec{i}', \vec{j}' — ортонормированный базис, соответствующий новой декартовой системе координат $O'x'y'$. Обозначим через φ угол между первыми ортами \vec{i} и \vec{i}' , измеряемый в направлении кратчайшего поворота от \vec{i} к \vec{j} . Пусть $\mathbf{C} = (c_{st})$ есть матрица перехода от старого базиса к новому. По определению этой матрицы (см. предыдущий пункт),

$$\vec{i}' = c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j}, \quad \vec{j}' = c_{12}\vec{i} + c_{22}\vec{j}. \quad (2.5)$$

Заметим, что число c_{st} равно косинусу угла между s -м вектором старого базиса и t -м вектором нового базиса, т. е.

$$c_{11} = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}'}, \quad c_{21} = \cos \widehat{\vec{j}, \vec{i}'}, \quad c_{12} = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{j}'}, \quad c_{22} = \cos \widehat{\vec{j}, \vec{j}'}. \quad (2.6)$$

Для доказательства каждого из равенств (2.6) достаточно выбрать в (2.5) то соотношение, в которое входит соответствующее число c_{st} , и скалярно умножить это соотношение на s -й вектор старого базиса (т. е. на вектор, при котором стоит этот множитель).

Для примера покажем, что $c_{11} = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}'}$. Число c_{11} входит в первое соотношение из (2.5) и стоит в нём перед вектором \vec{i} . Умножим это равенство скалярно на \vec{i} , записав этот вектор первым:

$$(\vec{i}, \vec{i}') = (\vec{i}, c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j}) = c_{11}(\vec{i}, \vec{i}) + c_{21}(\vec{i}, \vec{j}) = c_{11},$$

так как \vec{i}, \vec{j} — ортонормированный базис. Остаётся учесть, что в силу равенств $|\vec{i}| = |\vec{i}'| = 1$ верно $(\vec{i}, \vec{i}') = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}'}$. Получаем $c_{11} = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}'}$.

Углы в (2.6) выражаются через угол $\varphi = \widehat{\vec{i}, \vec{i}'}$, но по-разному в зависимости от того, сохраняется ли ориентация базиса или меняется на противоположную. Пусть старый базис \vec{i}, \vec{j} является правым. Рассмотрим две ситуации, когда новый базис \vec{i}', \vec{j}' остаётся правым или становится левым.

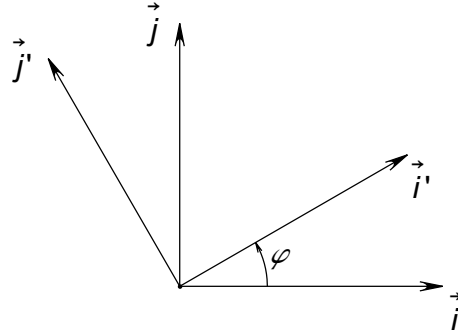


Рис. 2.1

1°. Пусть сначала базис \vec{i}', \vec{j}' также является правым (см. рис. 2.1). Тогда

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}'} = \cos \varphi, \\ c_{21} &= \cos \widehat{\vec{j}, \vec{i}'} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi, \\ c_{12} &= \cos \widehat{\vec{i}, \vec{j}'} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\sin \varphi, \\ c_{22} &= \cos \widehat{\vec{j}, \vec{j}'} = \cos \varphi. \end{aligned}$$

Это означает, что матрица перехода имеет вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Поэтому в рассматриваемой ситуации соотношение (2.2) эквивалентно

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

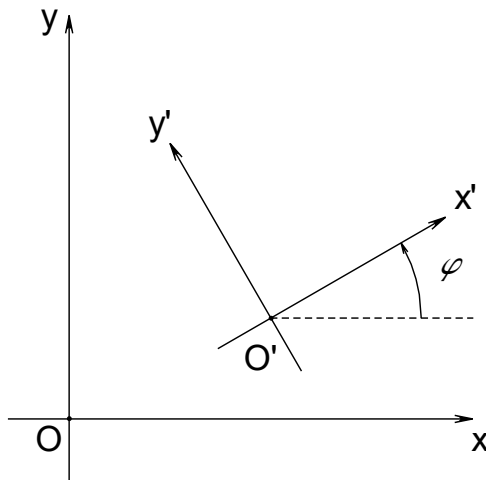


Рис. 2.2

В случае когда каждая из декартовых систем координат Oxy и $O'x'y'$ является правой, новая система может быть получена из старой после последовательных поворота против часовой стрелки на угол φ и параллельного переноса (или сдвига) на вектор $\overrightarrow{OO'} = \{a, b\}$ (см. рис. 2.2). Оба этих преобразования содержатся в равенстве (2.8). Для лучшей иллюстрации рассмотрим так называемые чистый поворот и чистый перенос.

Чистый поворот соответствует $a = b = 0$, т.е. $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$. В этом случае начало новой системы координат совпадает с началом старой. Новая система $Ox'y'$ получается из старой системы Oxy после выполнения поворота вокруг т. O против часовой стрелки на угол φ . Связь старых и новых координат при таком повороте имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Чистый перенос соответствует $\varphi = 0$. Как нетрудно видеть, в этом случае $\mathbf{C} = \mathbf{E}$. Умножение на единичную матрицу не меняет вектор-столбца, поэтому преобразование координат при параллельном переносе имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Новая система $O'x'y'$ получается из старой системы Oxy после такого параллельного переноса, при котором начало координат перемещается в т. $O' = O'(a, b)$ (в старых координатах).

Матрица (2.7) называется *матрицей поворота на угол φ* . Пусть в одной и той же декартовой системе координат заданы два радиус-вектора $\vec{u} = \{x, y\}$ и $\vec{v} = \{x', y'\}$. Равенство (2.9) эквивалентно тому, что \vec{u} получается из \vec{v} поворотом на угол φ против часовой стрелки. Убедитесь в этом, сравнив рис. 2.3–2.4.

Интересно заметить, что $|\mathbf{C}| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$,

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \mathbf{C}^T.$$

В том, что $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{E}$, нетрудно убедиться непосредственно, однако более элегантным является геометрическое обоснование. Если вторая система координат получается из первой поворотом на угол φ , то первая получается из второй поворотом на угол $-\varphi$. Так как (2.9) эквивалентно

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

то \mathbf{C}^{-1} получается из \mathbf{C} заменой φ на $-\varphi$.

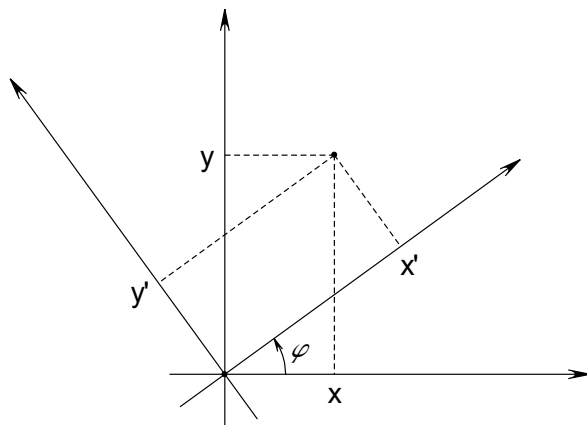


Рис. 2.3

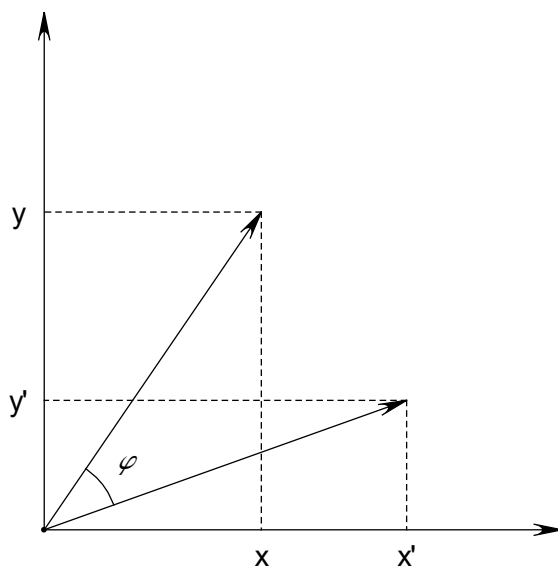


Рис. 2.4

2°. Более сжато рассмотрим ситуацию, когда новый базис \vec{i}', \vec{j}' является левым (см. рис. 2.5). Имеем:

$$c_{11} = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{i}'} = \cos \varphi,$$

$$c_{21} = \cos \widehat{\vec{j}, \vec{i}'} = \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \varphi,$$

$$c_{12} = \cos \widehat{\vec{i}, \vec{j}'} = \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \varphi,$$

$$c_{22} = \cos \widehat{\vec{j}, \vec{j}'} = \cos(\pi - \varphi).$$

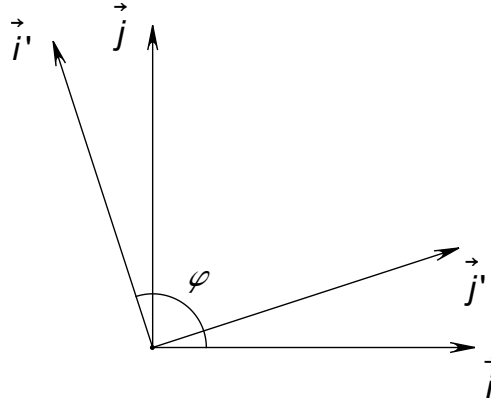


Рис. 2.5

Матрица перехода принимает вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Связь координат в двух системах описывается равенством

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Однако теперь новая система координат не может быть получена из старой поворотом и переносом, поскольку Oxy — правая, а $O'x'y'$ — левая.

Если $a = b = 0$, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

В качестве упражнения попробуйте обнаружить геометрический смысл преобразования векторов плоскости, задаваемый равенством (2.11).

2.3 Уравнения линии на плоскости.

Алгебраические и трансцендентные линии

Пусть на плоскости с аффинной системой координат Oxy имеется линия L . В этом разделе мы не даём точного определения понятия *линия*, ограничиваясь лишь интуитивным представлением. Фактически под линией мы будем понимать некоторое множество точек плоскости. Для того чтобы отличать точку M с координатами x и y от функции F этих же переменных, будем писать т. $M(x, y)$ для точки и $F(x, y)$ для функции.

Пусть функция $F(x, y)$ задана на всём пространстве \mathbb{R}^2 или его непустом подмножестве, например прямоугольнике. В первом случае $x, y \in \mathbb{R}$, во втором примере x и y принадлежат отрезкам прямой. Уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (2.12)$$

называется *уравнением линии L в аффинных координатах x, y* , если условия т. $M(x, y) \in L$ и $F(x, y) = 0$ эквивалентны.

Это определение означает следующее. С одной стороны, координаты любой точки линии L удовлетворяют уравнению (2.12). С другой стороны, если числа x и y таковы, что выполнено равенство (2.12), то т. $M(x, y) \in L$.

Заметим, что соответствие «линия» — «уравнение линии» не является взаимно-однозначным. Одна и та же линия может быть задана различными уравнениями. Например, уравнения

$$F(x, y) = 0, \quad 2F(x, y) = 0, \quad |F(x, y)| = 0, \quad [F(x, y)]^2 = 0$$

задают одно и то же множество точек. При некотором выборе функции $F(x, y)$ задаваемое множество может состоять из одной точки (пример: $F(x, y) = x^2 + y^2$) или быть пустым (пример: $F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$). В этих ситуациях говорят о *вырожденных случаях*. Если $F(x, y) = y - f(x)$, где $f(x)$ — функция одного переменного, то уравнение (2.12) можно записать в виде $y = f(x)$.

Функция $F(x, y)$ называется *алгебраическим многочленом* от переменных x, y с действительными коэффициентами, если эта функция имеет вид

$$F(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Сумма в (2.13) — конечная, по некоторым целым неотрицательным i, j . *Степенью многочлена $F(x, y)$* называется число

$$\deg F := \max\{i + j : a_{ij} \neq 0\}.$$

Алгебраическим уравнением называется уравнение $F(x, y) = 0$, в котором $F(x, y)$ — алгебраический многочлен положительной степени. Линия L называется *алгебраической*, если существует аффинная система координат Oxy , в которой L задаётся алгебраическим уравнением. *Порядком алгебраической линии* называется степень соответствующего многочлена. Линия L называется *неалгебраической*, или *трансцендентной*, если эта линия не является алгебраической, т. е. не существует аффинной системы координат, в которой L задаётся алгебраическим уравнением.

Корректность этих определений связана со следующим утверждением.

Теорема. Пусть в некоторой аффинной системе координат линия L задаётся алгебраическим уравнением степени n . Тогда и в любой другой аффинной

системе координат линия L может быть задана алгебраическим уравнением степени n .

Доказательство. Короткое обоснование состоит в том, что аффинные координаты точки в двух различных системах связаны уравнениями первой степени.

Более подробно. Пусть в аффинной системе координат Oxy линия L задаётся алгебраическим уравнением $F(x, y) = 0$, причём $\deg F(x, y) = n$. Возьмём любую другую аффинную систему $O'x'y'$. Координаты точки в этих системах связаны равенствами (2.3). В обозначениях п. 2.1

$$x = a + c_{11}x' + c_{12}y',$$

$$y = b + c_{21}x' + c_{22}y'.$$

Значит, в координатах x', y' линия L задаётся уравнением $\Phi(x', y') = 0$, где

$$\Phi(x', y') := F(x, y) = F(a + c_{11}x' + c_{12}y', b + c_{21}x' + c_{22}y').$$

Очевидно, $\Phi(x', y')$ есть алгебраический многочлен от x', y' . Так как

$$\deg(a + c_{11}x' + c_{12}y')^i(b + c_{21}x' + c_{22}y')^j \leq i + j,$$

то каждый моном $x^i y^j$, который входит в $F(x, y)$ с ненулевым коэффициентом, при указанной замене даёт многочлен от x', y' степени $\leq i + j$. Значит, $\deg \Phi(x', y') \leq \deg F(x, y)$. При обратной замене x', y' через x, y многочлен $\Phi(x', y')$ переходит в многочлен $F(x, y)$. (Этот факт требует более детального обоснования, на котором мы здесь не останавливаемся.) Поэтому из тех же соображений $\deg F(x, y) \leq \deg \Phi(x', y')$. Тем самым $\deg \Phi(x', y') = \deg F(x, y) = n$. \square

Кроме уравнений вида (2.12), линия на плоскости может быть задана в аффинных координатах так называемыми параметрическими уравнениями. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — функции одного переменного (параметра t), заданные на непустом множестве $T \subset \mathbb{R}$. Наиболее употребимые ситуации — $T = \mathbb{R}$ или $T = [t_0, t_1]$. Уравнения

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (2.14)$$

называются *параметрическими уравнениями* линии L в аффинной системе координат Oxy , если выполняются следующие условия:

- 1) для любого $t \in T$ точка $M(x, y)$, где x, y удовлетворяют (2.14), принадлежит линии L ;
- 2) для любой точки $M(x, y)$ линии L существует $t \in T$, такое что верны равенства (2.14).

Разумеется, плоская линия может задаваться и уравнениями в других системах координат, например полярной. По этому поводу см., например, [4].

2.4 Уравнения поверхности и линии в пространстве. Алгебраические и трансцендентные поверхности и линии

Пусть в пространстве имеются некоторая поверхность H и аффинная система координат $Oxyz$. Предположим, что функция трёх переменных $F(x, y, z)$ задана на всём пространстве \mathbb{R}^3 или его непустом подмножестве, например параллелепипеде. В первом случае $x, y, z \in \mathbb{R}$, во втором примере x, y и z принадлежат отрезкам прямой.

Уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2.15)$$

называется *уравнением поверхности H в аффинных координатах x, y, z* , если условия т. $M(x, y, z) \in H$ и $F(x, y, z) = 0$ эквивалентны.

Определение означает следующее. С одной стороны, координаты любой точки поверхности H удовлетворяют (2.15). С другой стороны, если x, y и z таковы, что выполнено равенство (2.15), то т. $M(x, y, z) \in H$.

Соответствие «поверхность» — «уравнение поверхности» не является взаимно однозначным. Именно, одна и та же поверхность может быть задана различными уравнениями. Например, уравнения

$$F(x, y, z) = 0, \quad 5F(x, y, z) = 0, \quad |F(x, y, z)| = 0, \quad [F(x, y, z)]^3 = 0$$

задают одно и то же множество точек. При некотором выборе функции задаваемое множество может состоять из единственной точки (пример: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4$) или быть пустым (пример: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^4 + 1$). Эти случаи относятся к *вырожденным*. Если $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, где $f(x, y)$ — функция двух переменных, то уравнение (2.15) можно записать в виде $z = f(x, y)$.

Функция $F(x, y, z)$ называется *алгебраическим многочленом* от переменных x, y, z с действительными коэффициентами, если эта функция имеет вид

$$F(x, y, z) = \sum_{i,j,k} a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad a_{ijk} \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Сумма в (2.16) — конечная, по некоторым целым неотрицательным i, j, k . *Степенью многочлена $F(x, y, z)$* называется число

$$\deg F := \max\{i + j + k : a_{ijk} \neq 0\}.$$

Уравнение $F(x, y, z) = 0$, в котором $F(x, y, z)$ — алгебраический многочлен положительной степени, называется *алгебраическим*. Поверхность H называется *алгебраической*, если существует аффинная система координат $Oxyz$, в которой H задаётся алгебраическим уравнением. *Порядком алгебраической поверхности* называется степень стоящего в уравнении многочлена. Поверхность называется

неалгебраической, или трансцендентной, если эта поверхность не является алгебраической, т. е. не существует аффинной системы координат, в которой эта поверхность задаётся алгебраическим уравнением.

Теорема. Пусть в некоторой аффинной системе координат поверхность H задаётся алгебраическим уравнением степени n . Тогда и в любой другой аффинной системе координат поверхность H может быть задана алгебраическим уравнением степени n .

Действительно, согласно (2.3), координаты точки пространства в двух аффинных системах связаны уравнениями первой степени. Более подробное рассуждение по схеме доказательства теоремы из предыдущего пункта предоставляется читателю в качестве упражнения.

Опишем ещё так называемые параметрические уравнения поверхности в пространстве. Пусть $f(s, t)$, $g(s, t)$ и $h(s, t)$ — функции параметров s и t , заданные на всём пространстве \mathbb{R}^2 или его непустом подмножестве D . Уравнения

$$\begin{cases} x = f(s, t), \\ y = g(s, t), \\ z = h(s, t), \end{cases} \quad (s, t) \in D, \quad (2.17)$$

называются *параметрическими уравнениями* поверхности H в системе координат $Oxyz$, если выполняются условия:

- 1) если $(s, t) \in D$ и x, y, z удовлетворяют (2.17), то т. $M(x, y, z) \in H$;
- 2) если т. $M(x, y, z) \in H$, то существует пара $(s, t) \in D$, для которой верны равенства (2.17).

Пространственная линия L часто может быть задана как пересечение двух поверхностей H_1 и H_2 . Если $L = H_1 \cap H_2$, причём поверхность H_1 задаётся в аффинной системе координат $Oxyz$ уравнением $F_1(x, y, z) = 0$, а поверхность H_2 — уравнением $F_2(x, y, z) = 0$, то линия L задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Эта линия называется *алгебраической*, если каждая из поверхностей H_1 и H_2 является алгебраической; в противном случае линия называется *трансцендентной*.

Параметрические уравнения пространственной линии имеют вид

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \\ z = h(t), \end{cases} \quad t \in T. \quad (2.19)$$

Здесь $f(t)$, $g(t)$ и $h(t)$ — функции одного переменного, $T \subset \mathbb{R}$ — множество значений параметра t . Уравнения (2.19) определяются аналогично параметрическим уравнениям линии на плоскости.

Глава 3

Плоскость и прямая в пространстве

3.1 Различные виды уравнений плоскости

Пусть в пространстве \mathbb{V}_3 имеются два вектора $\vec{u} = \{a_1, b_1, c_1\}$, $\vec{v} = \{a_2, b_2, c_2\}$, заданные своими координатами в произвольном (не обязательно ортонормированном) базисе. Положим

$$A := \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B := - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Лемма. $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff A = B = C = 0$.

Доказательство. Пусть сначала базис, в котором даны координаты векторов, является ортонормированным. Тогда по свойствам векторного произведения имеем:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \vec{u} \times \vec{v} = \{A, B, C\} = \vec{0} \iff A = B = C = 0.$$

Пусть теперь координаты векторов \vec{u} и \vec{v} даны в произвольном базисе \mathbb{V}_3 . Рассмотрим другие два вектора \vec{u}' и \vec{v}' с теми же координатами соответственно, но в некотором ортонормированном базисе. Так как коллинеарность векторов эквивалентна пропорциональности наборов их координат, то коллинеарность \vec{u} и \vec{v} равносильна коллинеарности \vec{u}' и \vec{v}' . Остаётся применить к векторам \vec{u}' и \vec{v}' первую часть рассуждения. \square

Ниже векторы \vec{u} и \vec{v} будут выбираться, наоборот, неколлинеарными. Для таких векторов в соответствии с приведённой леммой хотя бы одно из чисел A, B, C обязательно отлично от нуля, что эквивалентно записи $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Перейдём теперь к выводу основных уравнений плоскости. Пусть в пространстве даны плоскость H и аффинная система координат $Oxyz$. Зафиксируем следующие объекты. Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка плоскости H , $\vec{u} = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\vec{v} = \{a_2, b_2, c_2\}$ — пара *неколлинеарных* векторов, параллельных

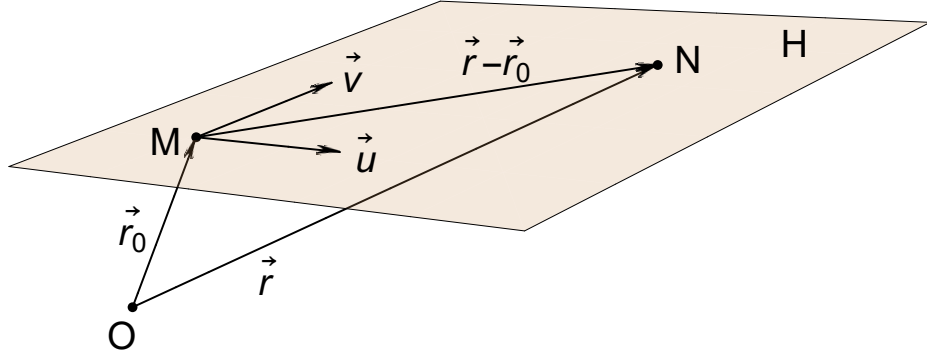


Рис. 3.1

плоскости H (или лежащих в H). Координаты всех векторов даются в базисе, соответствующем системе координат $Oxyz$. Обозначим через $N(x, y, z)$ текущую точку пространства. Введём в рассмотрение радиус-векторы точек M и N :

$$\vec{r}_0 := \overrightarrow{OM} = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{r} := \overrightarrow{ON} = \{x, y, z\}.$$

Тогда $\overrightarrow{MN} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Для иллюстрации см. рис. 3.1.

Очевидно, имеет место следующая эквивалентность:

$$\text{т. } N \in H \iff \text{векторы } \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}, \vec{v} \text{ компланарны.} \quad (3.2)$$

Компланарность векторов можно записать по-разному, что мы и сделаем. Векторы $\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}$ и \vec{v} компланарны, т. е. лежат в общей плоскости H , тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}; \quad (3.3)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}; \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1s + a_2t, \\ y = y_0 + b_1s + b_2t, \\ z = z_0 + c_1s + c_2t; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0; \quad (3.6)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.7)$$

Коэффициенты A, B, C определяются равенствами (3.1):

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Неколлинеарность \vec{u} и \vec{v} означает, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Дадим некоторые пояснения и определения. В силу нашего выбора векторы \vec{u} и \vec{v} образуют базис для совокупности векторов, лежащих в плоскости H . Поэтому если вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ компланарен векторам \vec{u} и \vec{v} , и только в этом случае, то существуют $s, t \in \mathbb{R}$, такие что выполняются (3.3) и (3.4). При изменении s и t из уравнения (3.4) получаются радиус-векторы всех точек плоскости. Числа s, t называются *параметрами*, а уравнение (3.4) — *параметрическим уравнением плоскости в векторной форме*. При переходе к координатам получаются *параметрические уравнения плоскости в аффинных координатах* (3.5).

Далее, три вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы, что равносильно линейной зависимости в \mathbb{R}^3 наборов их координат. По свойствам определителя третьего порядка (равен нулю \iff его строки линейно зависимы) получаем, что компланарность векторов $\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{u}$ и \vec{v} эквивалентна условию (3.6). Наконец, раскладывая определитель по первой строке, мы получаем уравнение (3.7). Среди чисел A, B и C имеется хотя бы одно ненулевое, поэтому уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ является уравнением первой степени относительно x, y, z . Это уравнение называется *общим уравнением плоскости в аффинных координатах*.

Итак, точка $N(x, y, z)$ принадлежит плоскости H тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнениям (3.5)–(3.7), а радиус вектор \vec{r} — уравнению (3.4) (с некоторыми $s, t \in \mathbb{R}$). Фактически мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждая плоскость H в пространстве может быть задана уравнениями (3.3)–(3.7).*

Нетрудно показать, что, напротив, любая система параметрических уравнений (3.5) и любое из уравнений (3.6) и (3.7) с указанными ограничениями на коэффициенты задают в пространстве с аффинной системой координат некоторую плоскость.

Приведём уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Зафиксируем точку M_1 , а в качестве \vec{u} и \vec{v} возьмём пару неколлинеарных векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$. Применяя (3.6), запишем нужное уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Отдельно рассмотрим случай, когда система координат $Oxyz$ является декартовой, т. е. соответствующий базис является ортонормированным. Пусть плоскость H задаётся каким-либо уравнением общего вида:

$$H : Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Здесь A, B, C, D не несут предыдущей смысловой нагрузки, а лишь удовлетворяют указанному ограничению — хотя бы одно из первых трёх чисел $\neq 0$.

Теорема 2. Вектор $\vec{n} := \{A, B, C\}$ является нормальным вектором плоскости H , т. е. $\vec{n} \perp H$.

Доказательство. Зафиксируем т. $M(x_0, y_0, z_0) \in H$ и возьмём ещё произвольную т. $N(x, y, z) \in H$. Тогда

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Отсюда $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. По правилу вычисления скалярного произведения в декартовых координатах левая часть равна $(\vec{n}, \overrightarrow{MN})$. Значит, для любой т. $N \in H$ выполняется $(\vec{n}, \overrightarrow{MN}) = 0$. Следовательно, $\vec{n} \perp H$. \square

Уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0,$$

задаёт в декартовой системе координат плоскость H , проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$. Это уравнение также часто применяется при решении задач. Наконец, заметим, что если плоскость H содержит два неколлинеарных вектора $\vec{u} = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\vec{v} = \{a_2, b_2, c_2\}$, то в качестве нормального к ней можно взять вектор $\vec{n} := \vec{u} \times \vec{v} = \{A, B, C\}$, где A, B, C уже определяются посредством (3.1). Это следует из определения и свойств векторного произведения.

В заключение этого пункта приведём примеры, иллюстрирующие возможности перехода от одних уравнений плоскости к другим.

Пусть в аффинной системе координат задано общее уравнение плоскости

$$2x + y - z + 7 = 0.$$

Чтобы записать систему её параметрических уравнений, выразим какую-либо одну координату через две остальных. Это можно сделать, так как среди первых трёх коэффициентов имеется ненулевой. Например, $z = 2x + y + 7$. Полагая x и y параметрами, запишем

$$\begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = 7 + 2s + t \end{cases}$$

— параметрические уравнения плоскости, проходящей через т. $M(0, 0, 7)$ параллельно неколлинеарным векторам $\vec{u} = \{1, 0, 2\}$ и $\vec{v} = \{0, 1, 1\}$.

Предположим теперь, что в аффинных координатах заданы параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t, \\ y = -1 + s - t, \\ z = 2 + s + t. \end{cases}$$

Поскольку векторы $\vec{u} = \{2, 1, 1\}$ и $\vec{v} = \{1, -1, 1\}$ неколлинеарны, эта система задаёт плоскость, проходящую через т. $M(1, -1, 2)$ параллельно \vec{u} и \vec{v} . Как записать общее уравнение? Для этого достаточно воспользоваться (3.6):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После несложных преобразований получаем общее уравнение $2x - y - 3z - 3 = 0$. Заметим, что в декартовой системе координат в качестве нормали к плоскости можно взять вектор $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \{2, -1, -3\}$.

3.2 Неполные уравнения плоскости.

Уравнение в отрезках

По общему уравнению плоскости можно получить представление о её расположении относительно координатных осей. Пусть плоскость задана в аффинной системе координат $Oxyz$ общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) называется *полным*, если $A, B, C, D \neq 0$. Если же некоторые из этих коэффициентов равны нулю, уравнение называется *неполным*.

Сначала приведём схему анализа неполных уравнений. Мы остановимся лишь на части случаев, остальные получаются из соображений симметрии.

1°. $D = 0 \iff$ т. O принадлежит H .

2°. $A = 0, D \neq 0 \iff H$ параллельна оси Ox .

\implies . Пусть уравнение имеет вид $By + Cz + D = 0, D \neq 0$. Тогда т. $M(t, 0, 0) \notin H$ при любом $t \in \mathbb{R}$. Значит, $H \parallel Ox$.

\impliedby . Пусть $H \parallel Ox$. Тогда $D \neq 0$ (свойство 1°). Допустим, что $A \neq 0$. Уравнение можно переписать в виде

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z - \frac{D}{A}.$$

Мы видим, что т. $N(-\frac{D}{A}, 0, 0) \in H$, что противоречит условию. Значит, $A = 0$.

3°. $A = D = 0 \iff H$ содержит ось Ox .

\Rightarrow . Уравнение имеет вид $By + Cz = 0$, поэтому при любом t имеем т. $M(t, 0, 0) \in H$. Следовательно, H содержит ось Ox .

\Leftarrow . Пусть H содержит ось Ox . По свойству 1° $D = 0$. Предположим, что $A \neq 0$. Уравнение равносильно

$$x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z.$$

Если $y = z = 0$, то обязательно $x = 0$. В этом случае лишь одна точка оси Ox , а именно т. $O(0, 0, 0)$, принадлежит H . Это противоречие означает, что $A = 0$.

4°. $A = B = 0, C, D \neq 0 \iff H$ параллельна плоскости Oxy .

Следует из 2°: $A = B = 0, C, D \neq 0 \iff H \parallel Ox, Oy \iff H \parallel Oxy$.

5°. $A = B = D = 0, C \neq 0 \iff H$ совпадает с плоскостью Oxy .

Следует из 3°: $A = B = D = 0 \iff H$ содержит оси Ox и $Oy \iff H$ совпадает с плоскостью Oxy .

Теперь рассмотрим случай, когда уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ является полным — все его коэффициенты A, B, C, D отличны от нуля. Из предыдущего следует, что плоскость H пересекает каждую из осей координат и не проходит через т. O . Иначе говоря, на координатных осях эта плоскость отсекает невырожденные отрезки. Для того чтобы определить величины этих отрезков, запишем последовательно

$$Ax + By + Cz = -D,$$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Полагая

$$a := -\frac{D}{A}, \quad b := -\frac{D}{B}, \quad c := -\frac{D}{C},$$

приходим к следующему уравнению плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.10)$$

Указанные преобразования возможны, поскольку $A, B, C, D \neq 0$.

Из (3.10) следует, что точки $P(a, 0, 0)$, $Q(0, b, 0)$ и $R(0, 0, c)$ принадлежат плоскости H , поэтому a, b, c представляют собой величины отрезков (со знаком), которые плоскость отсекает на координатных осях. Сочетание знаков a, b, c даёт информацию о том октанте пространства, в котором располагается высекаемый плоскостью координатный тетраэдр. На рис. 3.2 изображена ситуация, когда $Oxyz$ — декартова и $a, b, c > 0$.

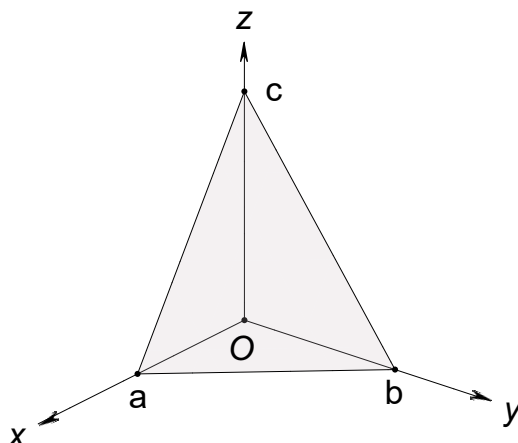


Рис. 3.2

3.3 Нормальное уравнение плоскости. Отклонение и расстояние

Рассмотрим случай, когда система координат $Oxyz$ является декартовой. Для плоскости H введём в рассмотрение *нормаль* \vec{n} — вектор единичной длины, направленный из начала координат в сторону плоскости. Если H проходит через т. O , то направление \vec{n} произвольно. Поскольку $|\vec{n}| = 1$, то в координатном виде $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, где α, β, γ — углы, которые вектор \vec{n} образует с осями координат (см. п. 1.2, следствие 1). Обозначим через P ортогональную проекцию т. O на плоскость H . Пусть $p := |\vec{OP}|$ есть расстояние от начала координат до плоскости. См. рис. 3.3.

Так как вектор \vec{n} сонаправлен с \vec{OP} , то справедлива эквивалентность

$$\text{т. } N(x, y, z) \in H \iff \text{pr}_{\vec{n}} \vec{ON} = p.$$

Заметим, что $\text{pr}_{\vec{n}} \vec{ON} = |\vec{n}| \cdot \text{pr}_{\vec{n}} \vec{ON} = (\vec{ON}, \vec{n}) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$. Таким образом, точка $N(x, y, z)$ принадлежит H тогда и только тогда, когда

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (3.11)$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением плоскости*. Заметим, что оно представляет собой специальный вид общего уравнения плоскости.

Уравнение (3.11) эффективно применяется для вычисления отклонений точек от плоскости. Для произвольной точки M пространства обозначим через $d(M; H)$ её расстояние до плоскости H . *Отклонением* $\delta(M; H)$ *точки M от плоскости H* называется величина, определяемая следующим образом.

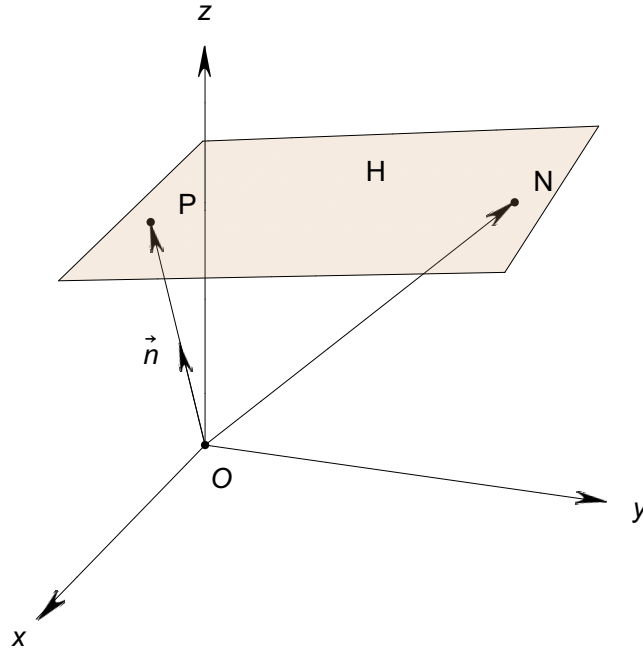


Рис. 3.3

Если т. $O \notin H$, то

$$\delta(M; H) := \begin{cases} d(M; H), & \text{т. } M \text{ и т. } O \text{ лежат по разные стороны от } H, \\ -d(M; H), & \text{т. } M \text{ и т. } O \text{ лежат по одну сторону от } H, \\ 0, & \text{т. } M \in H. \end{cases}$$

Пусть т. $O \in H$, тогда $\delta(M; H)$ равно $d(M; H)$, если точка M принадлежит тому полупространству, в которое направлен вектор \vec{n} , и равно $-d(M; H)$ в противном случае.

Теорема. Пусть (3.11) — нормальное уравнение плоскости H . Тогда для произвольной точки $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\delta(M; H) = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p. \quad (3.12)$$

Доказательство. Рассмотрим ситуацию, когда т. $O \notin H$. Более простой случай, когда плоскость проходит через начало координат, предоставляется читателю. Для краткости обозначим $d = d(M; H)$, $\delta = \delta(M; H)$.

Поскольку $|\vec{n}| = 1$, имеем $\text{pr}_{\vec{n}} \vec{OM} = (\vec{OM}, \vec{n}) = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma$, поэтому равенство (3.12) эквивалентно $\delta = \text{pr}_{\vec{n}} \vec{OM} - p$. Убедимся, что последнее соотношение выполняется при любом расположении точки M относительно плоскости и начала координат. Положим $\vec{OQ} = \text{pr}_{\vec{n}} \vec{OM}$.

Если т. M и т. O лежат по разные стороны от H , то \overrightarrow{OQ} сонаправлен с \vec{n} , поэтому

$$\delta = d = |\overrightarrow{OQ}| - p = \text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} - p.$$

Если т. $M \in H$, то одновременно $\delta = 0$ и $\text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} = p$.

Если т. M и т. O лежат по одну сторону от H и \overrightarrow{OQ} сонаправлен с \vec{n} , то

$$\delta = -d = -[p - |\overrightarrow{OQ}|] = |\overrightarrow{OQ}| - p = \text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} - p.$$

Наконец, если т. M и т. O лежат по одну сторону от H , но \overrightarrow{OQ} направлен противоположно \vec{n} , то

$$\delta = -d = -[p + |\overrightarrow{OQ}|] = -|\overrightarrow{OQ}| - p = \text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} - p.$$

Итак, всегда $\delta = \text{pr}_{\vec{n}} \overrightarrow{OM} - p$. Теорема доказана. \square

Следствие 1. $d(M; H) = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|$.

Достаточно учесть, что $d(M; H) = |\delta(M; H)|$.

Для того чтобы привести общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ к нормальной форме $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, его нужно умножить на некоторый ненулевой множитель t . Тогда будут выполняться равенства

$$tA = \cos \alpha, \quad tB = \cos \beta, \quad tC = \cos \gamma, \quad tD = -p \leq 0,$$

поэтому

$$t^2(A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = |\vec{n}|^2 = 1,$$

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Знак t выбирается противоположным знаку D . При $D = 0$ знак t может быть любым. Эти соображения позволяют вычислять расстояние от точки до плоскости сразу по её общему уравнению, минуя приведение к нормальной форме.

Следствие 2. В предыдущих обозначениях

$$d(M; H) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Для введённого выше множителя t

$$\begin{aligned} d(M; H) &= |\delta(M; H)| = |(tA)x_0 + (tB)y_0 + (tC)z_0 + tD| = \\ &= |t| \cdot |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

\square

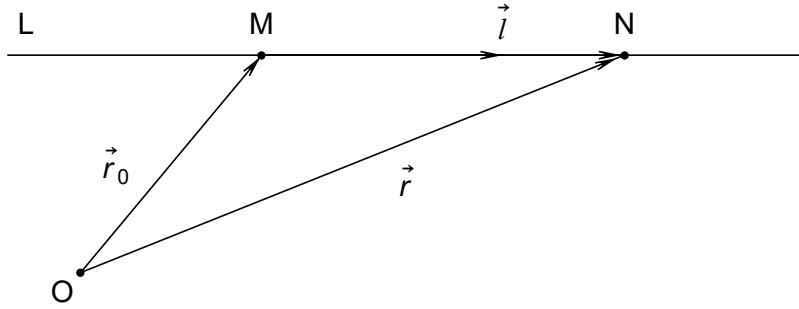


Рис. 3.4

3.4 Уравнения прямой в пространстве

Пусть в пространстве с аффинной системой координат имеется прямая L . Основные уравнения прямой L получаются, если зафиксировать произвольную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{l} = \{a, b, c\}$ этой прямой. Напомним, что направляющим вектором прямой называется ненулевой вектор, параллельный этой прямой (или лежащий на этой прямой). Координаты векторов даются в базисе, соответствующем системе координат $Oxyz$. Через $N(x, y, z)$ обозначим текущую точку пространства. Радиус-векторы точек M и N имеют вид

$$\vec{r}_0 := \overrightarrow{OM} = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \vec{r} := \overrightarrow{ON} = \{x, y, z\}.$$

Тогда $\overrightarrow{MN} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Для иллюстрации см. рис. 3.4.

Справедлива эквивалентность

$$\text{т. } N \in L \iff \vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{l}. \quad (3.14)$$

Коллинеарность $\vec{r} - \vec{r}_0$ и \vec{l} может быть записана в различных видах. Векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и \vec{l} коллинеарны, т.е. лежат на одной прямой L , тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий:

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{l}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (3.15)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}; \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct; \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \quad (3.18)$$

Поясним эти соотношения. Так как $\vec{l} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и \vec{l} коллинеарны тогда и только тогда, когда существует $t \in \mathbb{R}$, для которого выполняются

(3.15) и (3.16). При изменении t из уравнения (3.16) получаются радиус-векторы всех точек прямой. Число t называется *параметром*, а уравнение (3.16) — *параметрическим уравнением прямой в векторной форме*. Из него получаются *параметрические уравнения прямой в аффинных координатах* (3.17).

Коллинеарность векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$ и \vec{l} равносильна пропорциональности их координат. Это записано в виде соотношения (3.18), которое называется *каноническим уравнением прямой*.

Хотя $\vec{l} \neq \vec{0}$, некоторые из координат этого вектора могут обращаться в 0. Поэтому пропорция (3.18) понимается в следующем обобщённом смысле: если равен нулю знаменатель, то равен нулю и числитель. В этих случаях двойная пропорция разрывается и прямая задаётся в виде пересечения двух плоскостей (этот способ задания прямой описан ниже). Например,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2} &\iff \begin{cases} x-1=0, \\ \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}, \end{cases} \\ \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{2} &\iff \begin{cases} x-1=0, \\ y+2=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, точка $N(x, y, z)$ принадлежит прямой L тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнениям (3.17) и (3.18), а радиус вектор \vec{r} — соотношению (3.16) (с некоторым $t \in \mathbb{R}$). Тем самым справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Каждая прямая L может быть задана уравнениями (3.15)–(3.18).*

Напротив, любая система параметрических уравнений (3.17) и любое соотношение (3.18) с указанными ограничениями на коэффициенты задают в пространстве с аффинной системой координат некоторую прямую.

Отметим еще один важный способ задания прямой в пространстве — в виде пересечения двух плоскостей. Предварительно опишем соотношения на коэффициенты уравнений плоскостей, которые соответствуют различным вариантам их расположения в пространстве.

Пусть в аффинной системе координат плоскости H_1 и H_2 заданы своими общими уравнениями:

$$\begin{aligned} H_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, & A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 &\neq 0, \\ H_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, & A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Их взаимное расположение (совпадают, параллельны или пересекаются по прямой) соответствует различной структуре множества их общих точек. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Плоскости H_1 и H_2 совпадают \iff множество точек (3.19) представляет собой плоскость, т.е. является двупараметрическим семейством. При решении системы по методу Гаусса получается строка $(0\ 0\ 0\ |\ 0)$. Это соответствует случаю, когда все коэффициенты уравнений пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

(здесь и далее пропорции понимаются в обобщённом смысле).

Плоскости H_1 и H_2 параллельны \iff множество их общих точек является пустым. Система (3.19) является несовместной, при её решении получается строка $(0\ 0\ 0\ |\ 1)$. Это возможно лишь в ситуации

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Наконец, H_1 и H_2 пересекаются по прямой \iff множество их общих точек (3.19) представляет собой прямую, т.е. является однопараметрическим семейством. Этот случай логически дополняет два предыдущих. Поэтому в данной ситуации первые три коэффициента непропорциональны, иначе говоря, *соотношение*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

не имеет места. Можно сказать и так: векторы $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ неколлинеарны. Ситуация заметно проясняется, если система координат $Oxyz$ — декартова. В этом случае \vec{n}_1 и \vec{n}_2 суть нормали к плоскостям. Ясно, что H_1 и H_2 пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда их нормали неколлинеарны.

Итак, в случае когда первые три коэффициента общих уравнений H_1 и H_2 непропорциональны, система (3.19) задаёт прямую $L = H_1 \cap H_2$. В случае, когда $Oxyz$ — декартова, в качестве направляющего вектора прямой можно взять $\vec{l} := \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, так как $\vec{l} \perp \vec{n}_1, \vec{n}_2$.

Чтобы перейти от (3.19) к параметрическим уравнениям (3.17), достаточно записать решение системы (3.19) в параметрическом виде — это и будут параметрические уравнения прямой. Для примера рассмотрим прямую

$$\begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0, \\ x - y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Решим систему по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow \dots \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & -\frac{5}{3} \end{array} \right),$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z, \\ y = -\frac{5}{3} + \frac{7}{3}z, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t, \\ y = -\frac{5}{3} + \frac{7}{3}t, \\ z = t. \end{cases}$$

Получились параметрические уравнения прямой, которая проходит через точку $M\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0\right)$ и имеет направляющий вектор $\vec{l} = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 1\right\}$.

3.5 Примеры задач

В этом пункте мы опишем решения задач следующей тематики:

- взаимное расположение двух прямых,
- проекция точки на плоскость,
- проекция точки на прямую,
- расстояние от точки до прямой,
- расстояние между скрещивающимися прямыми,
- общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.

Будем предполагать, что система координат $Oxyz$ в примере 1 является аффинной, а в остальных примерах — декартовой.

Пример 1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Пусть прямые L_1 и L_2 заданы в аффинной системе координат своими каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}, \quad L_2: \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}.$$

Из них видно, что L_1 проходит через т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{l}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$, а L_2 проходит через т. $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{l}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$. Две прямые в пространстве могут лежать в одной плоскости или скрещиваться, т.е. не лежать в одной плоскости. Прямые, лежащие в одной плоскости, могут быть параллельными, пересекаться или совпадать. Чтобы распознать эти ситуации по коэффициентам уравнений, достаточно проанализировать взаимное расположение векторов \vec{l}_1, \vec{l}_2 и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Вычислим определитель

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Справедливы эквивалентности:

- прямые лежат в одной плоскости $\iff \vec{l}_1, \vec{l}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны $\iff \Delta = 0$;
- прямые скрещиваются $\iff \vec{l}_1, \vec{l}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ некомпланарны $\iff \Delta \neq 0$;
- прямые параллельны $\iff \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2$, но $\overrightarrow{M_1M_2}$ неколлинеарен \vec{l}_1, \vec{l}_2 ;
- прямые совпадают $\iff \vec{l}_1, \vec{l}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны;
- прямые пересекаются в точке $\iff \Delta = 0, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ неколлинеарны.

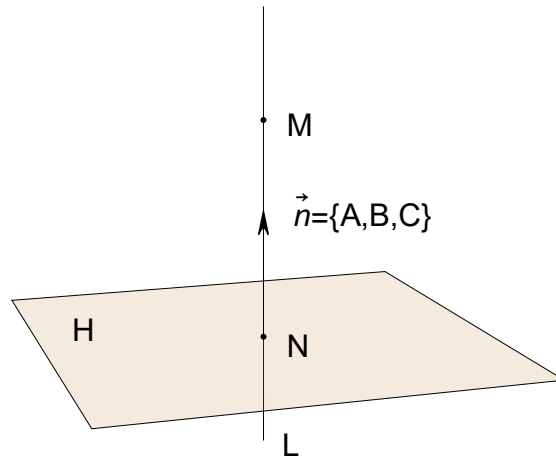


Рис. 3.5. Проекция точки на плоскость

Коллинеарность векторов равносильна пропорциональности их координат.

Пример 2. Проекция точки на плоскость. Пусть требуется найти ортогональную проекцию т. $M(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость H , заданную общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Эту проекцию — обозначим её через N — проще всего искать как точку пересечения плоскости H и прямой L , проходящей через т. M перпендикулярно H . Мы предполагаем, что $Oxyz$ — декартова, поэтому $\vec{n} = \{A, B, C\}$ является нормальным вектором плоскости. Значит, \vec{n} есть направляющий вектор указанной прямой (см. рис. 3.5). На этом пути т. $N(x, y, z)$ находится из системы уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \\ z = z_0 + Ct, \end{cases}$$

из которых три последние — параметрические уравнения прямой L .

Пример 3. Проекция точки на прямую в пространстве. Пусть требуется найти ортогональную проекцию т. $M(x_0, y_0, z_0)$ на прямую L с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct. \end{cases}$$

Искомая проекция N ищется как точка пересечения прямой L и плоскости H , проходящей через т. M и перпендикулярной прямой (см. рис. 3.6). В качестве нормального вектора плоскости H можно взять направляющий вектор прямой

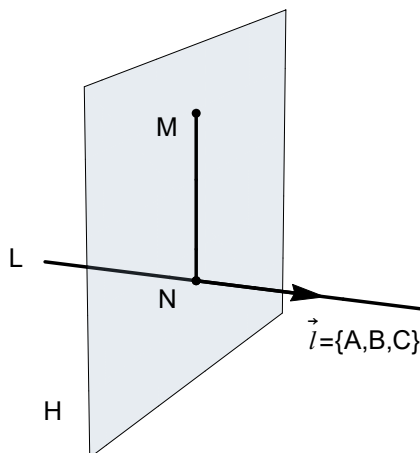


Рис. 3.6. Проекция точки на прямую

$\vec{l} = \{a, b, c\}$. Получается следующая система уравнений, первое из которых есть уравнение плоскости H :

$$\begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \\ x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим искомую проекцию $N(x, y, z)$.

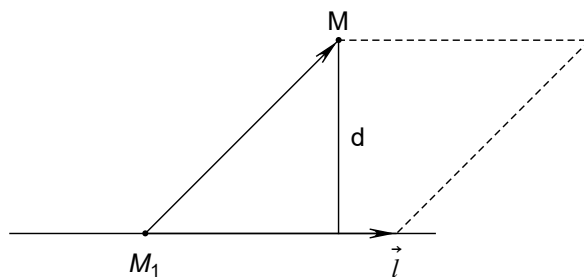


Рис. 3.7. Расстояние от точки до прямой

Пример 4. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Для того чтобы найти расстояние d от т. $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой L с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt, \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

можно, как в предыдущем примере, найти ортогональную проекцию N точки M на L ; тогда $d = |\overrightarrow{MN}|$. Однако есть и другой путь. Прямая L проходит через т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{l} = \{a, b, c\}$. Искомое расстояние d равно высоте параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M}$ и \vec{l} , опущенной из вершины M на прямую L (см. рис. 3.7). Площадь параллелограмма равна длине вектора $\overrightarrow{M_1M} \times \vec{l}$, а основание — длине вектора \vec{l} . Значит,

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M} \times \vec{l}|}{|\vec{l}|}.$$

Читателю рекомендуется привести эту формулу к окончательному виду.

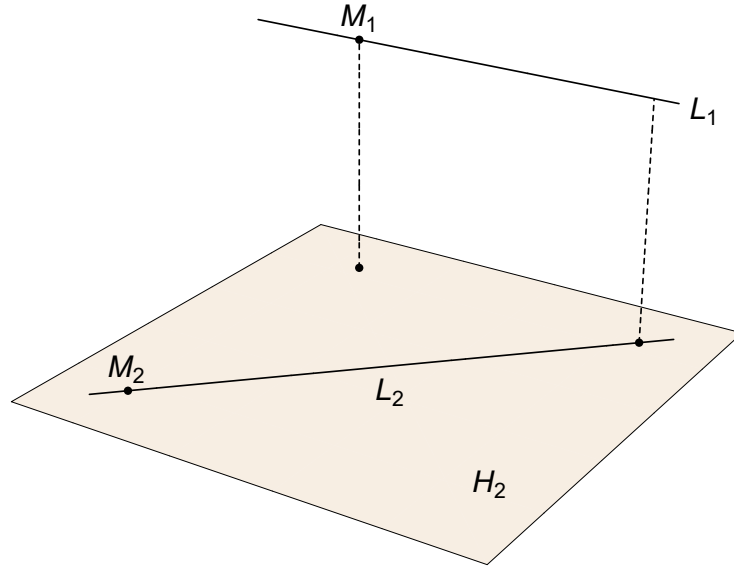


Рис. 3.8. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пример 5. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые L_1 и L_2 :

$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}. \quad (3.20)$$

По поводу распознавания этого типа взаимного расположения прямых см. пример 1. Проведём через прямую L_2 плоскость H_2 , параллельную прямой L_1 .

Мы имеем в своём распоряжении т. $M_2(x_2, y_2, z_2) \in H_2$ и пару неколлинеарных векторов $\vec{l}_1 = \{a_1, b_1, c_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{a_2, b_2, c_2\}$, параллельных H_2 . Согласно (3.6), уравнение H_2 можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.21)$$

Очевидно, расстояние d между прямыми L_1 и L_2 равно расстоянию между точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, принадлежащей L_1 , и плоскостью H_2 (см. рис. 3.8). Последнее расстояние можно найти по формуле (3.13) после приведения (3.21) к общему виду.

Укажем явную формулу для расстояния d . Рассмотрим параллелепипед, построенный на векторах \vec{l}_1, \vec{l}_2 и $\overrightarrow{M_1M_2}$ как на рёбрах. Объём параллелепипеда равен модулю смешанного произведения этих векторов; площадь параллелограмма, построенного на \vec{l}_1 и \vec{l}_2 , есть $|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|$. Поэтому

$$d = \frac{|\vec{l}_1 \vec{l}_2 \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|}.$$

Остаётся провести вычисления в декартовых координатах.

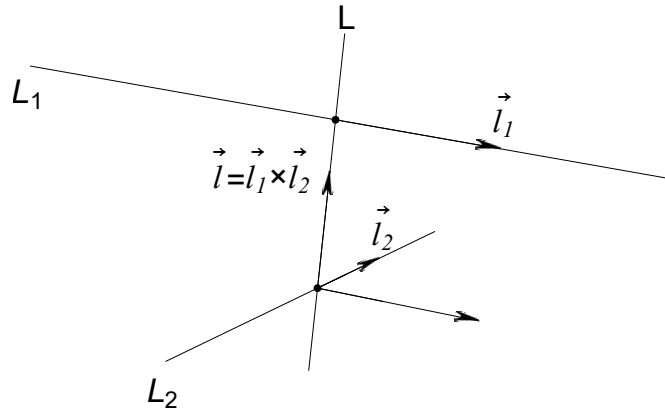


Рис. 3.9. Общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым

Пример 6. Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым. Будем пользоваться обозначениями предыдущего примера. Направляющий вектор общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым L_1 и L_2 , заданными уравнениями (3.20), можно взять в виде $\vec{l} = \vec{l}_1 \times \vec{l}_2$. Пусть $\vec{l} = \{a, b, c\}$. Обозначим через H_1 плоскость, содержащую прямую L_1 и параллельную \vec{l} , а через H_2 — плоскость, содержащую прямую L_2 и также параллельную \vec{l} . Уравнения плоскостей имеют вид

$$H_1 : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \quad H_2 : \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Искомый общий перпендикуляр L есть пересечение этих плоскостей: $L = H_1 \cap H_2$, поэтому L задаётся системой уравнений (3.22) (см. рис. 3.9).

Глава 4

Линии второго порядка

4.1 Общее уравнение линии второго порядка

Линией второго порядка называется линия на плоскости, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (4.1)$$

Предполагается, что хотя бы один из коэффициентов $a_{11}, a_{12}, a_{22} \neq 0$. Это означает, что так называемая *матрица квадратичной формы* уравнения

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

является ненулевой симметричной матрицей второго порядка.

Анализ типов линий, описываемых уравнением (4.1), связан с преобразованием исходной декартовой системы координат Oxy при помощи подходящих поворота и переноса. При повороте переходят к новым осям координат, направления которых задаются *собственными векторами* матрицы \mathbf{A} . Этот процесс называют *приведением к главным осям*, потому что для невырожденной линии новые оси (обе или хотя бы одна) являются осями её симметрии. Затем производится некоторый перенос начала координат, если возможно — в центр симметрии линии. Так получается наиболее удобная для этой линии система координат $O'uv$. После подстановки в (4.1) вместо x, y конечных координат u, v уравнение существенно упрощается и приобретает наиболее простой вид. Геометрическая иллюстрация нужных поворота и переноса для эллипса дана на рис. 4.1.

Можно показать (см., например, [4], [6]), что общее уравнение (4.1) может задавать вместе с вырожденными вариантами одну из следующих линий: эллипс, точку, мнимый эллипс (линии эллиптического типа), гиперболу, пару пересекающихся прямых (линии гиперболического типа), параболу, пару параллельных,

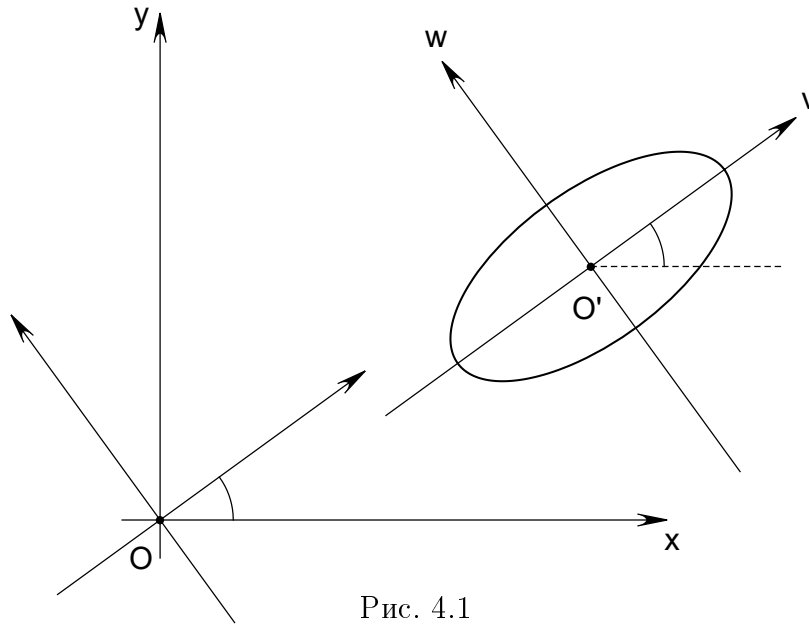


Рис. 4.1

сливающихся в одну или мнимых параллельных прямых (линии параболического типа). Мы не будем останавливаться на преобразовании уравнения (4.1), а рассмотрим лишь основные свойства невырожденных линий второго порядка — эллипса, гиперболы и параболы. После геометрического определения отмечается, как связана с линией та система координат, в которой её уравнение выглядит наиболее просто. Эта система координат называется *канонической*, а соответствующее уравнение — *каноническим уравнением*. После вывода канонического уравнения мы получим из него основные свойства линии.

4.2 Определение и каноническое уравнение эллипса

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1, F_2 этой плоскости (фокусов) есть величина постоянная.

Слово *эллипс* в переводе с греческого означает *недостаток*. Происхождение этого названия поясняется в п. 4.8. Слово *фокус* (лат.) означает *очаг*. Далее $d(A; B)$ обозначает расстояние между точками A, B .

Чтобы задать эллипс в соответствии с приведённым определением, требуется зафиксировать его фокусы F_1 и F_2 и константу $a \geq 0$. Пусть $d(F_1; F_2) = 2c$. Число $c \geq 0$ называется *полуфокусным расстоянием* эллипса. Точка M плоскости принадлежит эллипсу тогда и только тогда, когда

$$d(M; F_1) + d(M; F_2) = 2a. \quad (4.2)$$

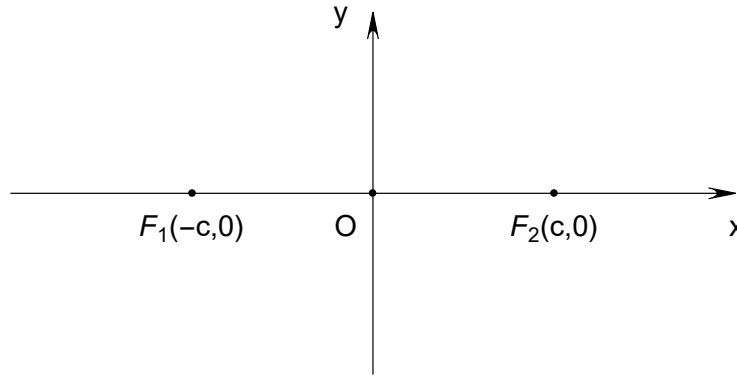


Рис. 4.2

Из неравенства треугольника следует, что $a \geq c$. Если $a = c$, то эллипс вырождается в отрезок F_1F_2 . В дальнейшем считаем $a > c \geq 0$, тогда эллипс является невырожденным. Заметим, что случай $c = 0$ (т. е. $F_1 = F_2$) не исключается — тогда эллипс является окружностью радиуса a .

Обозначим через b положительное число, для которого $b^2 = a^2 - c^2$. Очевидно, $a \geq b > 0$. Число a называется *большой полуосью* эллипса, а b — его *малой полуосью*. *Эксцентриситет эллипса* определяется равенством $e := \frac{c}{a}$. Так как $a > c \geq 0$, то $0 \leq e < 1$. Случай $e = 0$ эквивалентен $c = 0$, когда эллипс является окружностью. Если же $c > 0$, то $0 < e < 1$. Поскольку для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Каноническая система координат Oxy жёстко связана с эллипсом. Она выбирается так, чтобы в этой системе координат фокусы имели вид $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Иначе говоря, ось Ox проходит через фокусы в направлении от F_1 к F_2 , а начало координат совпадает с центром отрезка F_1F_2 . Как обычно, Oxy является правой (см. рис. 4.2). Фокус F_1 коротко называем левым, а F_2 — правым. Из определения видно, что оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало канонической системы координат — центром симметрии. Это следует и из уравнения эллипса (см. п. 4.3).

Теорема. В указанной системе координат уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называется *каноническим уравнением эллипса*.

Доказательство. Пусть L — эллипс по исходному определению. Требуется установить, что т. $M(x, y) \in L \iff$ числа x, y удовлетворяют (4.3).

\Rightarrow . Пусть точка $M(x, y) \in L$, т. е. для неё выполняется (4.2). Имеем:

$$\begin{aligned} d(M; F_1) &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad d(M; F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Умножая это равенство на разность радикалов, получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2 \frac{c}{a} x. \quad (4.5)$$

Сложение (4.4) и (4.5) даёт

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a} x,$$

откуда

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2 + 2cx &= x^2 + 2cx + c^2 + y^2, \\ a^2 - c^2 &= \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) x^2 + y^2, \quad 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Последнее равенство эквивалентно (4.3), так как $a^2 - c^2 = b^2$.

\Leftarrow . Пусть теперь числа x, y таковы, что выполняется (4.3). Покажем, что т. $M(x, y) \in L$, т. е. $d(M; F_1) + d(M; F_2) = 2a$. Равенство (4.3) эквивалентно (4.6), значит,

$$y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2} x^2 - x^2 - c^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d(M; F_1) &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a} x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a} x\right|, \\ d(M; F_2) &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2} x^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a} x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a} x\right|. \end{aligned}$$

Из (4.3) следует, что $|x| \leq a$. Кроме того, $c < a$. Поэтому

$$\left|\frac{c}{a} x\right| \leq a.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d(M; F_1) &= \left|a + \frac{c}{a} x\right| = a + \frac{c}{a} x, \quad d(M; F_2) = \left|a - \frac{c}{a} x\right| = a - \frac{c}{a} x, \\ d(M; F_1) + d(M; F_2) &= 2a. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

4.3 Свойства эллипса

Исследуем эллипс L по его каноническому уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.7)$$

Здесь $a \geq b > 0$. Фокусы эллипса имеют вид $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, где $c^2 = a^2 - b^2$.

1°. Ограниченность. Непустое множество G точек плоскости называется *ограниченным*, если существует конечный прямоугольник R , такой что $G \subset R$. Из (4.7) следует, что если т. $M(x, y) \in L$, то $|x| \leq a, |y| \leq b$. Поэтому L целиком содержится в прямоугольнике

$$R := \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq b\}.$$

Тем самым L — ограниченная линия. Заметим, что эллипс — единственная ограниченная линия второго порядка.

2°. Симметрия. Координаты x, y входят в уравнение (4.7) в чётных степенях. Значит, если $(x, y) \in L$, то с любым сочетанием знаков $(\pm x, \pm y) \in L$. Поэтому эллипс симметричен относительно координатных осей и начала координат. Запишем это более подробно:

$$\begin{aligned} \text{симметрия относительно оси } Ox : \quad & (x, y) \in L \implies (x, -y) \in L, \\ \text{симметрия относительно оси } Oy : \quad & (x, y) \in L \implies (-x, y) \in L, \\ \text{симметрия относительно т. } O : \quad & (x, y) \in L \implies (-x, -y) \in L. \end{aligned}$$

Оси симметрии эллипса, т. е. оси канонической системы координат, называются *главными осями эллипса*, а центр симметрии, т. е. начало канонической системы координат, — *центром эллипса*.

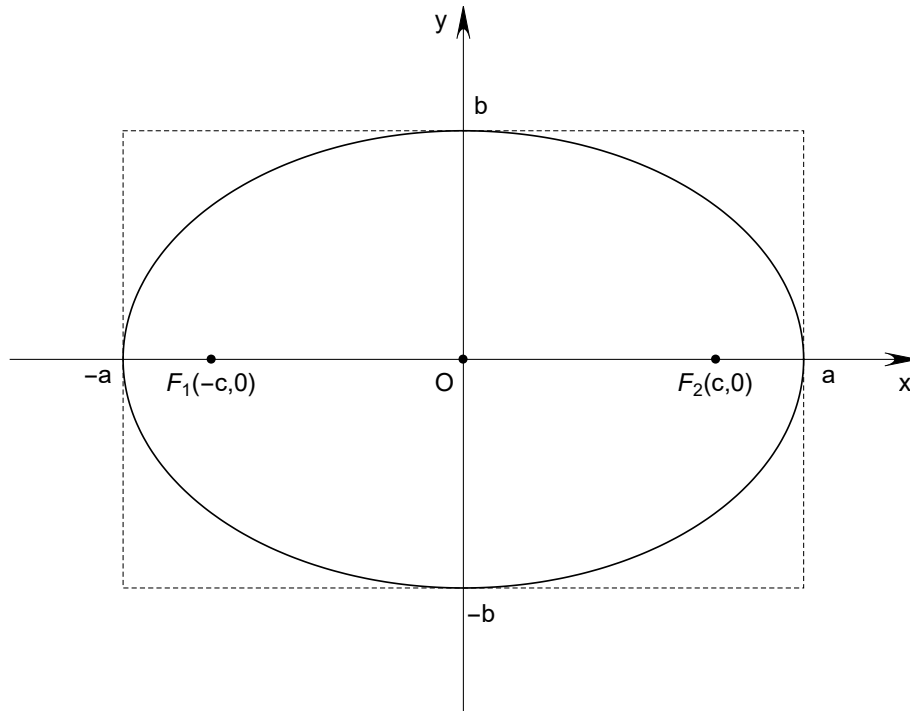
3°. Вершины. *Вершинами* линии называются точки её пересечения с осями координат. Нетрудно видеть, что у эллипса четыре вершины, по две на каждой координатной оси — это точки $(\pm a, 0), (0, \pm b)$.

4°. Эскиз. На части плоскости, задаваемой неравенствами $x, y \geq 0$, эллипс совпадает с графиком функции

$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Очевидно, $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывна, убывает, $f(0) = b, f(a) = 0$. Если $0 \leq x < a$, то существует неположительная производная

$$f'(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Рис. 4.3. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Значит, в каждой точке $x \in [0, a)$ к графику f существует единственная касательная. Заметим, что

$$f'(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f'(x) = -\infty.$$

Это означает, что график f в точке $x = 0$ касается горизонтальной прямой, а в точке $x = a$ — вертикальной прямой. Наконец, при $0 \leq x < a$

$$f''(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

Из неравенства $f''(x) < 0$ следует, что функция f является вогнутой или, иначе, выпуклой вверх.

Указанные свойства позволяют нарисовать график функции $y = f(x)$. Пользуясь симметрией линии, этот график можно отразить относительно координатных осей. Так получается эскиз эллипса (см. рис. 4.3). Проще всего сначала нарисовать прямоугольник $|x| \leq a, |y| \leq b$, а затем «вписать» в него эллипс.

5°. Другие свойства. Эллипс и окружность. В случае $b = a$ эллипс представляет собой окружность с уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. В общем случае эллипс есть результат сжатия окружности. Действительно, рассмотрим в системе координат $Ox'y'$ уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1. \quad (4.8)$$

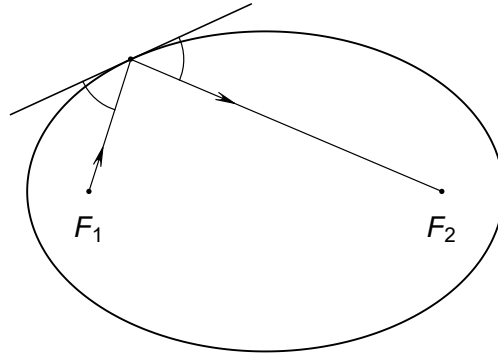


Рис. 4.4

Заменим координаты в соответствии с равенствами $x = x'$, $y = \frac{b}{a}y'$, тогда окружность (4.8) перейдет в эллипс (4.7). Поскольку $b \leq a$, указанное преобразование системы координат $Ox'y'$ есть сжатие с коэффициентом $k = \frac{b}{a} \leq 1$ вдоль оси Oy' в направлении начала координат.

Оптическое свойство эллипса состоит в том, что луч света, испущенный из одного фокуса, после отражения от эллипса по правилу «угол падения равен углу отражения» пройдет через другой фокус (см. рис. 4.4). Доказательство содержится, например, в [4, гл. 6, § 4].

Уравнение эллипса в комплексном виде. Для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ величина $|z_1 - z_2|$ представляет собой длину отрезка, соединяющего точки z_1, z_2 комплексной плоскости. Пусть $2c = |z_1 - z_2| < 2a$. Тогда уравнение эллипса с фокусами в точках z_1, z_2 и большой полуосью a можно записать в виде

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

Очевидно, это уравнение есть комплексная форма равенства (4.2).

Параметрические уравнения эллипса L имеют вид

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (4.9)$$

С одной стороны, при любом $t \in [0, 2\pi]$ точка, координаты которой удовлетворяют (4.9), принадлежит эллипсу (4.7). С другой стороны, если т. $M(x, y) \in L$, то т. $N\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ лежит на единичной окружности с центром в начале координат. Обозначим через t угол, который образует вектор \overrightarrow{ON} с осью абсцисс. Очевидно, что с таким t для x и y выполняются равенства (4.22). Поскольку радиус окружности равен 1, одновременно имеем $t = 2S$, где S — площадь кругового сектора с центральным углом t (см. рис. 4.5).

Площадь и длина эллипса. Площадь внутренней части эллипса (4.7) равна πab . Однако его длина l в общем случае вычисляется не так просто, как длина

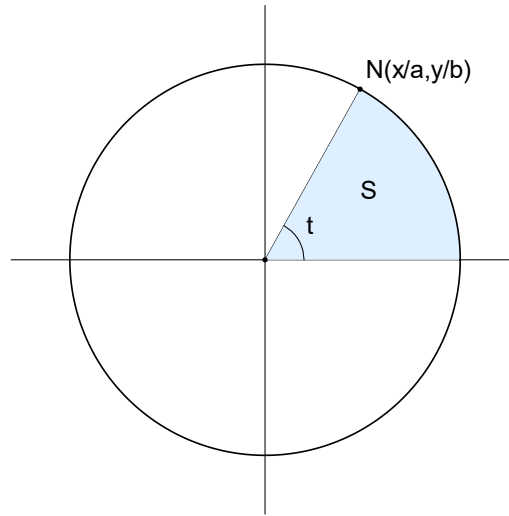


Рис. 4.5

окружности. Справедливо равенство

$$l = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt, \quad (4.10)$$

где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Интеграл, стоящий в правой части (4.10), называется *полным эллиптическим интегралом* (см. [11, гл. 10]). Если эллипс является окружностью радиуса a , то $e = 0$, что приводит к известной формуле $l = 2\pi a$.

4.4 Определение и каноническое уравнение гиперболы

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1, F_2 этой плоскости (фокусов) есть величина постоянная.

Слово *гипербола* (гр.) означает *избыток, преувеличение*. Происхождение этого названия поясняется в п. 4.8.

Чтобы задать гиперболу в соответствии с этим определением, требуется зафиксировать фокусы F_1, F_2 и константу $a \geq 0$. Пусть $d(F_1; F_2) = 2c$. Число $c \geq 0$ называется *полуфокусным расстоянием* гиперболы. Точка M плоскости принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда

$$|d(M; F_1) - d(M; F_2)| = 2a. \quad (4.11)$$

Из неравенства треугольника следует, что $c \geq a$. Сначала опишем вырожденные случаи. Если $c = a = 0$, то указанное множество представляет собой всю плоскость. Если $c = a > 0$, то гипербола вырождается в две полупрямые, которые получаются после удаления из прямой, проходящей через F_1 и F_2 , отрезка F_1F_2 . Наконец, при $c > a = 0$ гипербола представляет собой прямую — серединный перпендикуляр к отрезку F_1F_2 .

В дальнейшем считаем $c > a > 0$, тогда гипербола является невырожденной. Обозначим через b положительное число, для которого $b^2 = c^2 - a^2$. Числа a и b называются *действительной и мнимой полуосями гиперболы* соответственно. *Эксцентриситет гиперболы* определяется равенством $e := \frac{c}{a}$. Так как $c > a$, всегда $e > 1$. Поскольку для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$, имеем

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Каноническая система координат Oxy строится для гиперболы так же, как для эллипса — в этой системе координат фокусы имеют вид $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Иначе говоря, ось Ox проходит через фокусы в направлении от F_1 к F_2 , а начало координат совпадает с центром отрезка F_1F_2 (см. рис. 4.2). Из определения следует, что оси канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало канонической системы координат — центром симметрии. Это следует и из уравнения гиперболы (см. п. 4.5).

Теорема. В указанной системе координат уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Доказательство. Пусть L — гипербола по исходному определению. Требуется установить, что т. $M(x, y) \in L \iff$ числа x, y удовлетворяют (4.12).

\implies . Пусть точка $M(x, y) \in L$, т. е. для неё выполняется (4.11). Имеем:

$$\begin{aligned} d(M; F_1) &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad d(M; F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| &= 2a, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь \pm означает «+ или —». Умножим последнее равенство на сумму радикалов, поменяем левую и правую части местами и разделим на $2a$:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2 \frac{c}{a} x. \quad (4.14)$$

Сложение (4.13) и (4.14) даёт

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm \left(a + \frac{c}{a}x\right).$$

Возведём это равенство в квадрат и поменяем его части местами:

$$a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx = x^2 + 2cx + c^2 + y^2, \quad (4.15)$$

откуда

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Последнее соотношение эквивалентно (4.12), так как $c^2 - a^2 = b^2$.

\Leftarrow . Пусть теперь x, y таковы, что выполняется (4.12). Покажем, что $M(x, y) \in L$, т. е. $|\mathrm{d}(M; F_1) - \mathrm{d}(M; F_2)| = 2a$. Равенство (4.12) эквивалентно (4.15), значит,

$$y^2 = a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 - c^2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{d}(M; F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|,$$

$$\mathrm{d}(M; F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Из (4.12) вытекает, что $|x| \geq a$. Кроме того, $c > a$. Поэтому $\left|\frac{c}{a}x\right| \geq a$. Таким образом, выполняются равенства

$$\mathrm{d}(M; F_1) = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \begin{cases} a + \frac{c}{a}x, & x \geq a, \\ -a - \frac{c}{a}x, & x \leq -a, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}(M; F_2) = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = \begin{cases} -a + \frac{c}{a}x, & x \geq a, \\ a - \frac{c}{a}x, & x \leq -a. \end{cases}$$

Отсюда

$$\mathrm{d}(M; F_1) - \mathrm{d}(M; F_2) = \begin{cases} 2a, & x \geq a, \\ -2a, & x \leq -a, \end{cases}$$

и независимо от знака x имеем $|\mathrm{d}(M; F_1) - \mathrm{d}(M; F_2)| = 2a$.

Теорема доказана. \square

4.5 Свойства гиперболы

Исследуем гиперболу L по её каноническому уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.16)$$

Полуоси a и b положительны, но соотношение между ними может быть любым. Фокусы гиперболы имеют вид $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2$.

1°. Неограниченность. Для любого $C > 0$ существуют $x, y > C$, удовлетворяющие (4.16). Поэтому L не содержится ни в каком прямоугольнике. Тем самым гипербола — неограниченное множество.

2°. Симметрия. Координаты x, y входят в уравнение (4.16) в чётных степенях. Если $(x, y) \in L$, то с любым сочетанием знаков $(\pm x, \pm y) \in L$. Поэтому гипербола симметрична относительно осей и относительно начала канонической системы координат. Оси симметрии называются *главными осями гиперболы*, а центр симметрии — *центром гиперболы*.

3°. Вершины и ветви гиперболы. Гипербола имеет две вершины $(\pm a, 0)$, расположенные на оси Ox . Точек пересечения с осью Oy нет. Более того, из (4.16) следует, что если $(x, y) \in L$, то

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1, \quad |x| \geq a.$$

Это свойство мы уже отмечали при доказательстве теоремы предыдущего пункта. Значит, открытая полоса $G = \{(x, y) : |x| < a\}$ не содержит точек L . Гипербола распадается на две части, симметричные относительно оси Oy : одна часть располагается левее G (в полуплоскости $x \leq -a$), а другая — правее G (в полуплоскости $x \geq a$). Эти части называются соответственно *левой и правой ветвями гиперболы*.

4°. Эскиз. На части плоскости $x, y \geq 0$ гипербола совпадает с графиком функции

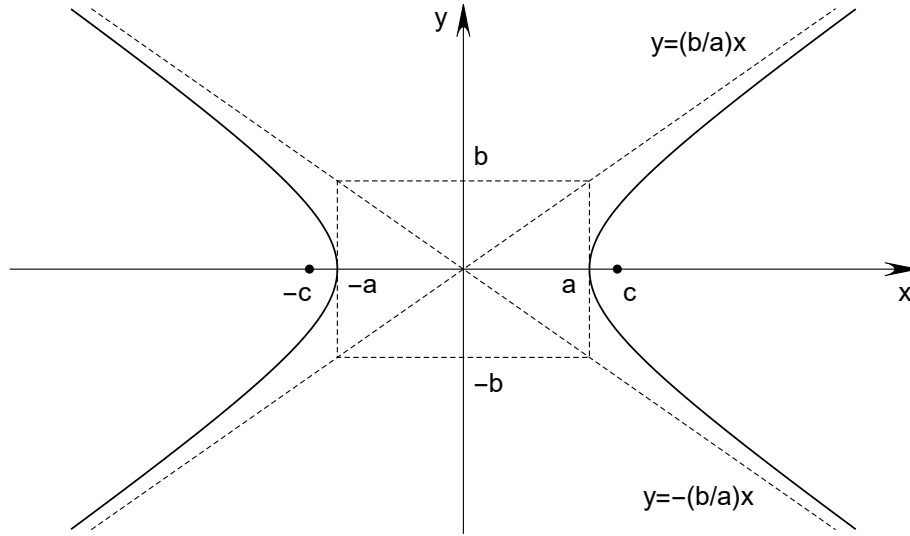
$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Очевидно, $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывна, возрастает, $f(a) = 0$. Если $x > a$, то существует положительная производная

$$f'(x) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Значит, в каждой точке $x > a$ к графику f существует единственная касательная. Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = +\infty.$$

Рис. 4.6. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Следовательно, в точке $x = a$ график f касается вертикальной прямой. При $x > a$

$$f''(x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x^2 - a^2} = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

Это неравенство означает, что функция f является вогнутой (выпуклой вверх).

Наряду с f рассмотрим функцию $f_1(x) := \frac{b}{a}x$, графиком которой является прямая, проходящая через начало координат и точку (a, b) . При любом $x \geq a$ верно неравенство $f(x) < f_1(x)$. В то же время

$$f_1(x) - f(x) = \frac{b}{a} \left(x - \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

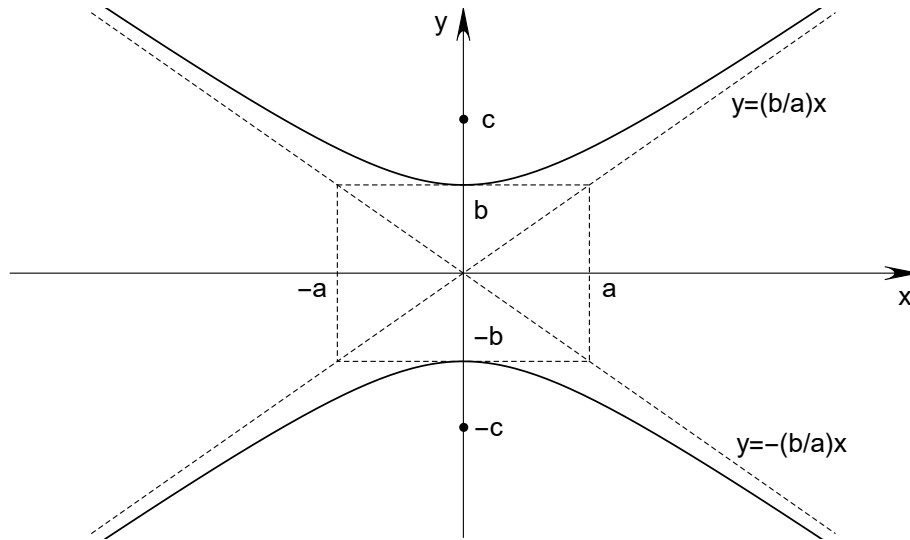
Таким образом, прямая $y = \frac{b}{a}x$ является асимптотой для графика f .

Нарисуем график функции $y = f(x)$ и отразим его относительно координатных осей. Так получается эскиз гиперболы (см. рис. 4.6). Прямые

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad (4.17)$$

называются *асимптотами гиперболы*. Эти две прямые проходят через противоположные вершины прямоугольника $|x| \leq a, |y| \leq b$. Для изображения гиперболы проще всего сначала нарисовать асимптоты (4.17) и затем «вписать» между ними фрагменты левой и правой ветвей.

5°. **Другие свойства.** *Равнобочная гипербола* соответствует случаю $b = a$. Её уравнение можно записать в виде $x^2 - y^2 = a^2$. (4.16) Асимптотами такой

Рис. 4.7. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$

гиперболы являются прямые $y = \pm x$. Поскольку $c^2 = 2a^2$, то для равнобочной гиперболы $c = \sqrt{2}a$ и эксцентриситет $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Сопряжённая гипербола. Наряду с уравнением гиперболы L рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (4.18)$$

отличающееся от (4.16) знаком правой части. Его также можно записать в виде

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

По сравнению с (4.16) поменялись местами x и y , а также a и b . Это уравнение задаёт гиперболу L' , фокусы которой располагаются на оси Oy и ветви которой ориентированы вдоль этой оси. Однако L' имеет те же асимптоты, что и исходная гипербола L . Действительно, асимптоты L' имеют уравнения $x = \pm \frac{a}{b} y$, равносильные уравнениям $y = \pm \frac{b}{a} x$ (см. рис. 4.7). Гипербола (4.18) называется *сопряжённой* к исходной гиперболе (4.16).

Оптическое свойство гиперболы состоит в том, что луч света, испущенный из одного фокуса, после отражения от гиперболы пройдёт по прямой, соединяющей точку отражения с другим фокусом (см. рис. 4.8). Это свойство приводится, например, в [4, гл. 6, § 4].

Уравнение гиперболы в комплексном виде. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ таковы, что $2c = |z_1 - z_2| > 2a > 0$. Уравнение гиперболы с фокусами в точках z_1, z_2 и действительной полуосью a можно записать в виде

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a.$$

Это уравнение представляет собой комплексную форму равенства (4.11).

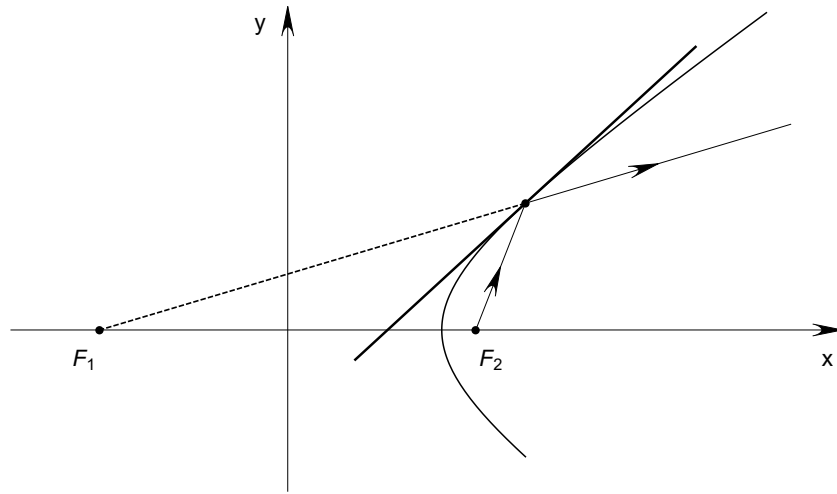


Рис. 4.8. Оптическое свойство гиперболы

Параметрические уравнения гиперболы L имеют вид

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Здесь $\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t$ — гиперболические косинус и синус, определяемые равенствами

$$\operatorname{ch} t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Знак плюс в первом равенстве соответствует правой ветви, а минус — левой. Покажем, что соотношения (4.19) действительно являются параметрическими уравнениями гиперболы (4.16).

Справедливо равенство $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, представляющее собой аналог основного тригонометрического тождества. Из него следует, что при любом $t \in \mathbb{R}$ точка, координаты которой удовлетворяют (4.19), принадлежит гиперболе (4.16).

Напротив, пусть т. $M(x, y) \in L$, тогда т. $N\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ лежит на единичной равнобочной гиперболе $x'^2 - y'^2 = 1$. Пусть $t = \pm 2S$, где S есть площадь криволинейного гиперболического сектора OAN , заключённого между осью Ox и отрезком ON (см. рис. 4.9). Знак плюс или минус выбирается в соответствии со знаком y . Именно при таком выборе t будут выполняться равенства (4.19).

Действительно, пусть сначала $x \geq a, y \geq 0$, т. е. точка M принадлежит верхней половине правой ветви гиперболы. Как показано в [11, п. 339; с. 196], площадь гиперболического сектора линии $x'^2 - y'^2 = 1$ с вершиной (x', y') при условии $x' \geq 1, y' > 0$ вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} \ln(x' + y')$. В нашем случае

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad S = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

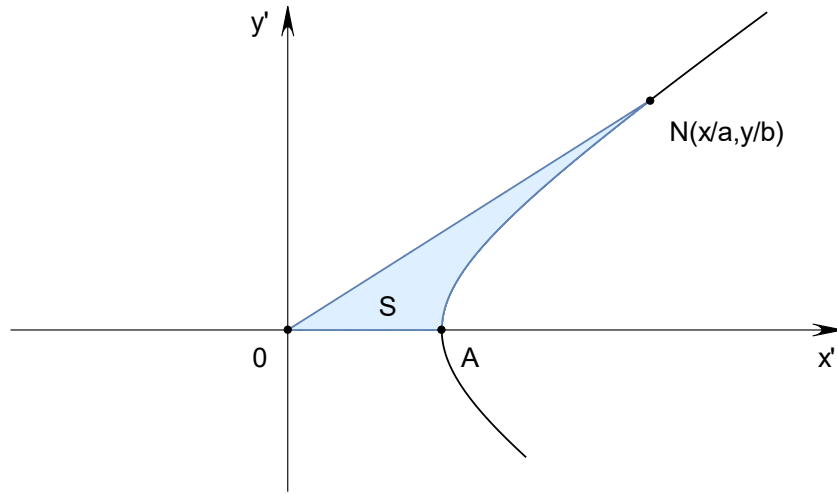


Рис. 4.9

Если положить $t = 2S$, то получим

$$t = \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right), \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^t.$$

Поскольку справедливо (4.16), будет верно и равенство

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = e^{-t}.$$

Достаточно записать (4.16) в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) = 1.$$

Из полученных соотношений имеем:

$$\frac{x}{a} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch}(t), \quad \frac{y}{b} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh}(t).$$

Поэтому с указанным t верны равенства $x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t$.

Итак, верхняя часть правой ветви гиперболы описывается уравнениями

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \geq 0.$$

Вершине $(a, 0)$ соответствует $t = 0$. В силу симметрии гиперболы, чётности $\operatorname{ch} t$ и нечётности $\operatorname{sh} t$ нижняя часть правой ветви задаётся той же системой, но при $t < 0$. Правая же ветвь может быть задана системой (4.19) со знаком минус в первом уравнении.

Интересно заметить, что геометрический смысл параметра t для гиперболы аналогичен геометрическому смыслу параметра t для эллипса.

Последний фрагмент проливает свет на название *гиперболические функции*.

4.6 Определение, каноническое уравнение и свойства параболы

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки F и данной прямой D этой плоскости. Точка F называется фокусом параболы, а прямая D — её директрисой.

Слово *парабола* в переводе с греческого означает *приложение*.

Чтобы задать параболу в соответствии с определением, требуется зафиксировать фокус и директрису. Пусть $p := d(F; D)$. Точка M принадлежит параболе тогда и только тогда, когда

$$d(M; F) = d(M; D). \quad (4.20)$$

Как и ранее, $d(M; F)$ есть расстояние между точками M и F , а в правой части стоит расстояние от точки M до прямой D .

Ясно, что $p \geq 0$. Равенство $p = 0$ означает, что т. $F \in D$. В этом вырожденном случае множество (4.20) представляет собой прямую, проходящую через т. F перпендикулярно D . В дальнейшем считаем $p > 0$, т. е. т. $F \notin D$. Положительное число p называется *параметром параболы*. Параболу будем обозначать буквой L .

Построим *каноническую систему координат Oxy* , связанную с параболой. Она выбирается так, чтобы фокус имел вид $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса задавалась уравнением $x = -\frac{p}{2}$. Иначе говоря, ось Ox проходит через фокус перпендикулярно директрисе в направлении от D к F , а начало координат совпадает с серединой перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису. Из определения параболы видно, что ось Ox канонической системы координат является осью симметрии параболы. Это следует и из выводимого ниже уравнения.

Теорема. *В указанной системе координат уравнение параболы имеет вид*

$$y^2 = 2px. \quad (4.21)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением параболы*.

Доказательство. Покажем, что т. $M(x, y) \in L \iff x, y$ связаны равенством (4.21).

\implies . Пусть точка $M(x, y) \in L$, т. е. для неё выполняется (4.20). Очевидно,

$$d(M; F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d(M; D) = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Эти величины совпадают:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Возведём это равенство в квадрат:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Получилось соотношение, эквивалентное (4.21).

\Leftarrow . Пусть теперь x, y таковы, что выполняется (4.21). Тогда

$$\begin{aligned} d(M; F) &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = d(M; D). \end{aligned}$$

Равенство $d(M; F) = d(M; D)$ означает, что т. $M(x, y) \in L$. □

Исследуем параболу L по её каноническому уравнению (4.21).

1°. **Неограниченность.** Для любого $C > 0$ существуют $x, y > C$, удовлетворяющие (4.21). Поэтому L не содержится ни в каком прямоугольнике. Значит, парабола — неограниченная линия.

2°. **Область расположения и симметрия.** Область расположения параболы — полуплоскость $x \geq 0$. Координата y входит в уравнение (4.21) в чётной степени. Значит, если $(x, y) \in L$, то $(x, -y) \in L$. Поэтому парабола симметрична относительно оси Ox . Ось симметрии называется *осью параболы*.

3°. **Вершины.** Из (4.21) следует, что если $x = 0$, то $y = 0$, и наоборот. Поэтому парабола имеет единственную вершину, совпадающую с началом координат.

4°. **Эскиз.** В положительном квадранте $x, y \geq 0$ парабола совпадает с графиком функции

$$y = f(x) = \sqrt{2px}.$$

Очевидно, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывна, возрастает, $f(0) = 0$. Если $x > 0$, то существует положительная производная

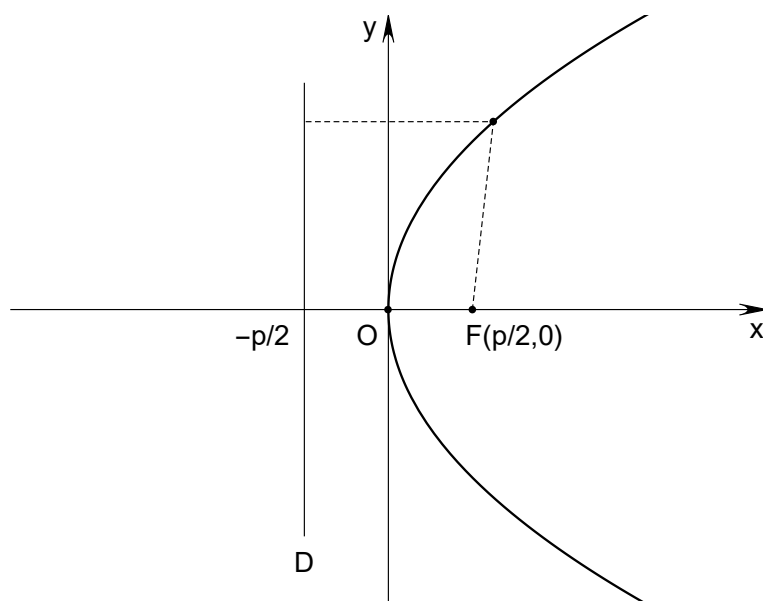
$$f'(x) = \sqrt{\frac{p}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Значит, в каждой точке $x > 0$ к графику f существует единственная касательная. Заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ график f касается оси Oy . При $x > 0$ существует конечная вторая производная:

$$f''(x) = -\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}}.$$

Рис. 4.10. Парабола $y^2 = 2px$

Так как $f''(x) < 0$, то функция f является вогнутой (выпуклой вверх).

Указанные свойства позволяют нарисовать график функции. Пользуясь симметрией параболы, его следует отразить относительно оси Ox (см. рис. 4.10).

5°. Другие свойства. *Оптическое свойство параболы* состоит в том, что луч света, испущенный из фокуса, после отражения от параболы проходит параллельно её оси (см. рис. 4.11). Это свойство параболы весьма эффективно применяется на практике.

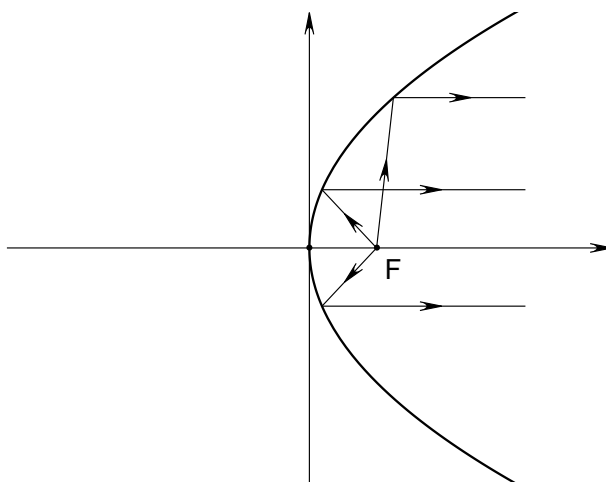


Рис. 4.11. Оптическое свойство параболы

Параметрические уравнения параболы можно записать в виде

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p}t^2, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

4.7 Директрисы линий второго порядка

Пусть отличный от окружности эллипс и гипербола заданы в декартовой системе координат Oxy своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 - b^2 > 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2. \quad (4.24)$$

Фокусы этих линий имеют вид $F_1(-c, 0)$ (левый фокус) и $F_2(c, 0)$ (правый фокус). Для эллипса, отличного от окружности, $c \neq 0$, что эквивалентно $F_1 \neq F_2$.

Директрисами каждой из линий (4.23)–(4.24) называются две прямые D_1 и D_2 , уравнения которых имеют вид

$$D_1: x = -\frac{a}{e}, \quad D_2: x = \frac{a}{e}.$$

Здесь $e = \frac{c}{a}$ есть эксцентриситет линии. Будем считать, что директриса D_1 соответствует фокусу F_1 , а директриса D_2 — фокусу F_2 .

Для эллипса, отличного от окружности, верно $0 < e < 1$, поэтому $\frac{a}{e} > a$. Для гиперболы имеем $e > 1$, поэтому $\frac{a}{e} < a$. Директрисы эллипса и гиперболы изображены на рис. 4.12–4.13.

Приведём свойство фокуса и соответствующей директрисы для эллипса и гиперболы. Пусть L — любая из линий (4.23)–(4.24).

Теорема 1. Для каждой точки M линии L выполняются соотношения

$$\frac{d(M; F_1)}{d(M; D_1)} = \frac{d(M; F_2)}{d(M; D_2)} = e. \quad (4.25)$$

Доказательство. Как мы показали выше, для т. $M(x, y) \in L$

$$d(M; F_1) = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = |a + ex|, \quad d(M; F_2) = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = |a - ex|$$

(см. доказательства теорем из пунктов 4.2, 4.4). Так как уравнения директрис имеют вид $x \pm \frac{a}{e} = 0$, то

$$d(M; D_1) = \left| x + \frac{a}{e} \right|, \quad d(M; D_2) = \left| x - \frac{a}{e} \right|.$$

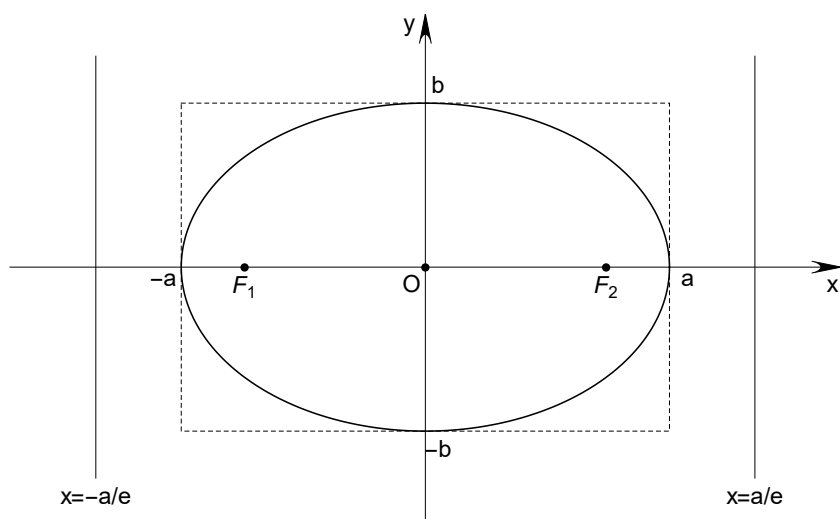


Рис. 4.12. Директрисы эллипса

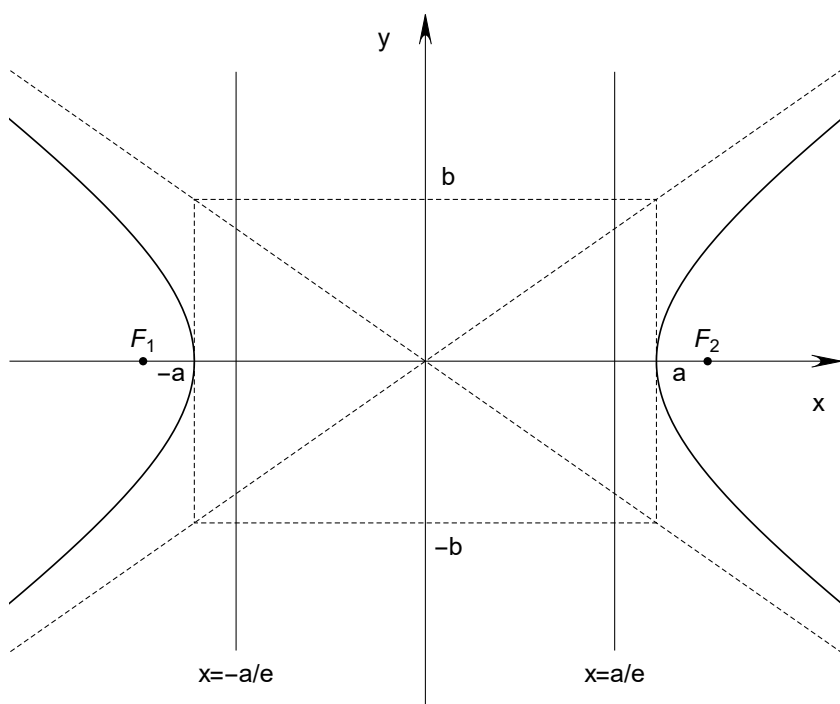


Рис. 4.13. Директрисы гиперболы

Следовательно,

$$\frac{d(M; F_1)}{d(M; D_1)} = \frac{|a + ex|}{|x + \frac{a}{e}|} = \frac{e|\frac{a}{e} + x|}{|x + \frac{a}{e}|} = e,$$

$$\frac{d(M; F_2)}{d(M; D_2)} = \frac{|a - ex|}{|x - \frac{a}{e}|} = \frac{e|\frac{a}{e} - x|}{|x - \frac{a}{e}|} = e,$$

Равенства (4.25) установлены. \square

Оказывается, для невырожденных линий второго порядка свойство фокуса и директрисы является характеристическим.

Теорема 2. Пусть на плоскости заданы точка F , не проходящая через эту точку прямая D , а также дано число $e > 0$. Геометрическое место точек M , для которых выполняется равенство

$$\frac{d(M; F)}{d(M; D)} = e, \quad (4.26)$$

является при $e < 1$ эллипсом, при $e = 1$ — параболой и при $e > 1$ — гиперболой.

Доказательство. По условию, $p := d(F; D) > 0$. Введём на плоскости декартову систему координат Oxy , в которой прямая D задаётся уравнением $x = 0$, а точка имеет вид $F(p, 0)$. Для произвольной точки плоскости $M(x, y)$

$$d(M; D) = |x|, \quad d(M; F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}.$$

Если т. $M(x, y)$ удовлетворяет (4.26), то для неё

$$\frac{\sqrt{(x - p)^2 + y^2}}{|x|} = e.$$

После возведения в квадрат и простых преобразований получим

$$(1 - e^2)x^2 - 2px + y^2 + p^2 = 0. \quad (4.27)$$

Пусть сначала $e = 1$. Равенство (4.27) эквивалентно

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

Положим $x' := x - \frac{p}{2}$, $y' := y$. Новая система координат $O'x'y'$ получается переносом системы Oxy так, что начало смещается в т. $O'(\frac{p}{2}, 0)$ (в старых координатах). Получается соотношение $y'^2 = 2px'$, представляющее собой уравнение параболы. В координатах x', y' точка F и прямая D приобретают вид

$$F = F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \quad D: x' = -\frac{p}{2}.$$

Это обычные фокус и директриса параболы $y'^2 = 2px'$.

Пусть теперь $e \neq 1$. Дополним в (4.27) члены с x до полного квадрата:

$$\begin{aligned} (1 - e^2) \left[x^2 - \frac{2p}{1 - e^2}x + \frac{p^2}{(1 - e^2)^2} \right] - \frac{p^2}{1 - e^2} + y^2 + p^2 &= 0, \\ (1 - e^2) \left(x - \frac{p}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 &= \frac{p^2 e^2}{1 - e^2}, \\ \frac{x'^2}{\frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{p^2 e^2}{1 - e^2}} &= 1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Мы ввели новые координаты

$$x' := x - \frac{p}{1 - e^2}, \quad y' := y.$$

Исследуем соотношение (4.28) отдельно для $e < 1$ и для $e > 1$.

В случае $e < 1$ выполняется $0 < 1 - e^2 < 1$. Положим

$$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b^2 = \frac{p^2 e^2}{1 - e^2},$$

тогда $a^2 > b^2$. Поэтому (4.28) представляет собой каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Для этого эллипса F есть левый фокус, а D — левая директриса. Действительно, первая координата точки F в системе $O'x'y'$ равна

$$p - \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{pe^2}{1 - e^2} = -\frac{pe}{1 - e^2} \cdot e = -ae = -c,$$

где c — полуфокусное расстояние. Директриса D имеет уравнение

$$x' = -\frac{p}{1 - e^2}, \quad \text{т. е.} \quad x' = -\frac{a}{e}.$$

В случае $e > 1$ имеем $e^2 - 1 > 0$. Положим

$$a^2 = \frac{p^2 e^2}{(e^2 - 1)^2}, \quad b^2 = \frac{p^2 e^2}{e^2 - 1}.$$

В этих обозначениях (4.28) есть каноническое уравнение гиперболы с действительной полуосью a и мнимой полуосью b :

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

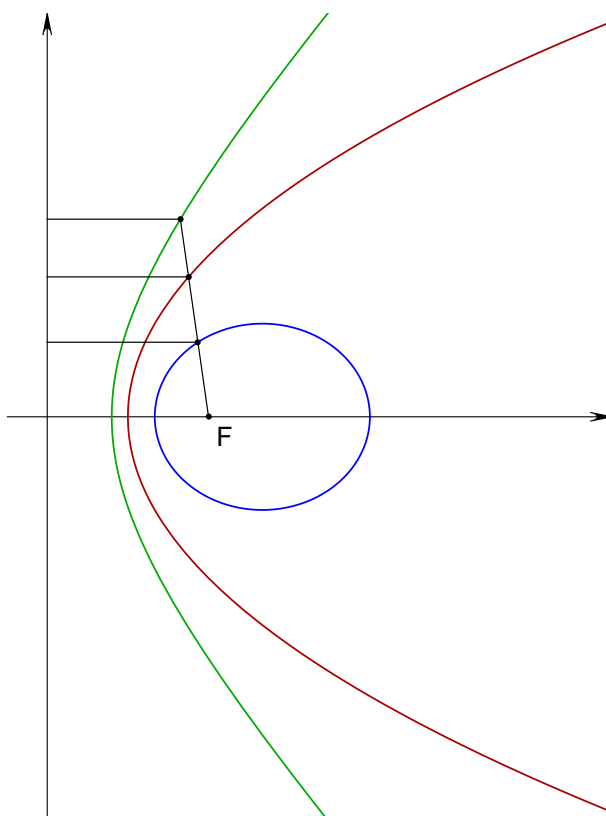


Рис. 4.14

Для этой гиперболы F есть правый фокус, поскольку первая координата этой точки равна

$$p - \frac{p}{1 - e^2} = p + \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{pe^2}{e^2 - 1} = \frac{pe}{e^2 - 1} \cdot e = ae = c,$$

c — полуфокусное расстояние. Прямая D является правой директрисой, так как имеет уравнение

$$x' = -\frac{p}{1 - e^2}, \quad \text{т. е.} \quad x' = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad \text{или} \quad x' = \frac{a}{e}.$$

Итак, мы показали, что точка плоскости, удовлетворяющая (4.26), в случае $e = 1$ лежит на параболе, в случае $e < 1$ — на эллипсе и в случае $e > 1$ — на гиперболе. Других же точек, т. е. не удовлетворяющих (4.26), на этих линиях нет. Действительно, точка F и прямая D для каждой из линий являются соответствующими фокусом и директрисой. Поэтому в силу теоремы 1 любая точка каждой линии обладает свойством (4.26).

Теорема полностью доказана. \square

Линии из условия теоремы 2 изображены на рис. 4.14.

4.8 Касательные к линиям второго порядка

Уравнения касательных в точке (x_0, y_0) к эллипсу, гиперболе и параболе имеют вид:

$$\text{для эллипса} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad (4.29)$$

$$\text{для гиперболы} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 : \quad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \quad (4.30)$$

$$\text{для параболы} \quad y^2 = 2px : \quad yy_0 = p(x + x_0). \quad (4.31)$$

Воспользуемся тем, что уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0) записывается в виде $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Для эллипса запишем:

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0, y=y_0} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Поэтому уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) есть

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) + y_0, \quad a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2,$$

откуда

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

и мы приходим к (4.29).

Аналогично выводится (4.30). Для гиперболы

$$\frac{2x dx}{a^2} - \frac{2y dy}{b^2} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

и уравнение касательной

$$y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) + y_0, \quad b^2 x x_0 - a^2 y y_0 = b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2,$$

откуда

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Наконец, из уравнения параболы получаем

$$2y dy = 2p dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \frac{p}{y_0}.$$

Касательная к параболе имеет уравнение

$$y = \frac{p}{y_0} (x - x_0) + y_0, \quad yy_0 = px - px_0 + y_0^2,$$

что в силу равенства $y_0^2 = 2px_0$ равносильно (4.31).

Указанный метод связан с переходом от уравнений линий к равенствам для дифференциалов. Те же результаты можно получить несколько иначе, считая в уравнениях линий y функциями x . Например, дифференцируя уравнение эллипса, имеем:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0,$$

$$\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y(x_0)y'(x_0)}{b^2} = 0, \quad \frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0y'(x_0)}{b^2} = 0.$$

Отсюда

$$y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0},$$

что также ведёт к (4.29).

4.9 Некоторые исторические сведения

Линии второго порядка в латинской терминологии называются красивым словом *квадрики*, поскольку они являются геометрическими образами уравнений второй степени:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

Однако чаще они именуются словом *коники*, имеющим греческое происхождение. Под кониками понимаются *конические сечения*, или, более полно, *конические сечения Аполлония*.

Аполлоний Пергский (262 до н. э. – 190 до н. э.) — древнегреческий математик, один из трёх (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, живших в III веке до н. э. Аполлоний написал о конических сечениях трактат из восьми книг («О кониках»). Семь книг сохранились, но три из них — только в арабском переводе (см., например, [10, с. 73]). Это трактат об эллипсе, параболе и гиперболе, определяемых как сечения кругового конуса. Если секущая плоскость пересекает образующие одной полости конуса, то в сечении получается эллипс. Если секущая плоскость параллельна какой-то образующей конуса, то сечение представляет собой параболу. Наконец, при пересечении обеих полостей конуса в сечении получается линия, состоящая из двух частей — гипербола (см. рис. 4.15–4.16). Мы ограничиваемся лишь невырожденными случаями.

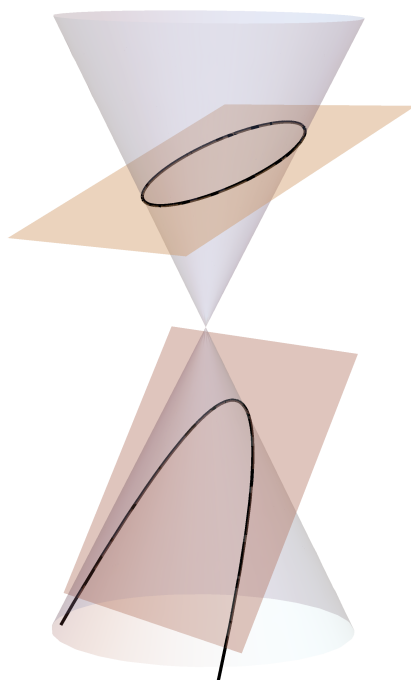


Рис. 4.15. Конические сечения: эллипс и парабола

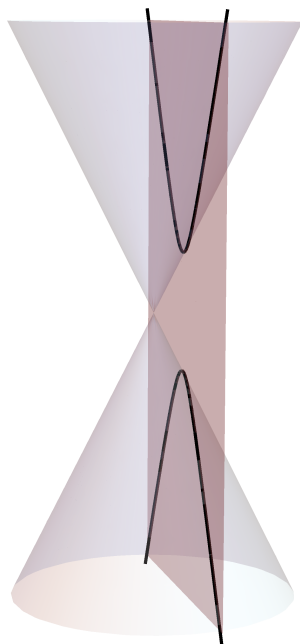


Рис. 4.16. Конические сечения: гипербола

Мы и называем эти кривые, следуя Аполлонию. Названия выражают одно из их свойств, связанное с площадями, и выражаемое в наших обозначениях уравнениями

$$y^2 = px, \quad y^2 = px \pm \frac{p}{d}x^2.$$

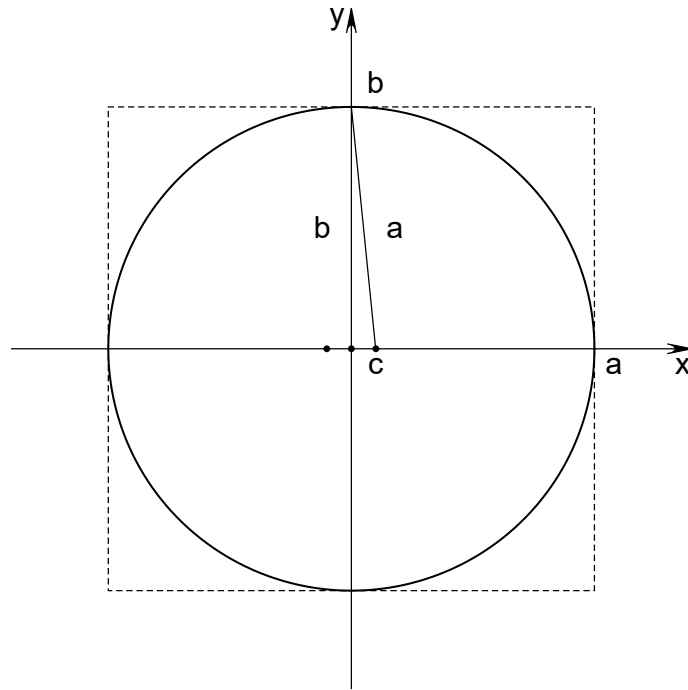
У Аполлония p и d — отрезки, знак «+» даёт гиперболу, знак «−» даёт эллипс. Парабола здесь означает *приложение*, эллипс — *приложение с недостатком*, гипербола — *приложение с избытком*. Термины *эллипс (недостаток)* и *гипербола (избыток, преувеличение)* используются и совсем в других областях. Например, эллиптические конструкции в языке — такие, в которых выпускаются некоторые члены предложения (например: «Ты домой?» или «Сдал на пять»). Другой пример — гипербола (преувеличение) как художественный приём, часто применяемый в литературе и искусстве.

Дальнейшая судьба теории Аполлония свидетельствует о единстве «чистой» и «прикладной» математики. Эта история — один из сюжетов лекции выдающегося российского математика В. И. Арнольда «Для чего мы изучаем математику?», опубликованной в виде статьи в журнале «Квант» [2].

Математическая модель, пишет Арнольд, не всегда даёт немедленную практическую отдачу. Бывает, что она оказывается полезной только через две тысячи лет. Теория конических сечений Аполлония понадобилась Иоганну Кеплеру (Johannes Kepler, 1571–1630) лишь в XVII веке. Обработывая очень точные измерения положений планет Солнечной системы, сделанные его учителем и другом Тихо Браге (Tycho Brahe, 1546–1601), Кеплер пришёл к выводу, что траектория движения Марса — не окружность, а эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце. Своё открытие эллиптичности орбит Кеплер изложил в 1609 г. в книге «Новая астрономия». Сегодня это положение известно как *первый закон Кеплера*. Анализ привёл и ко *второму закону*: радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Это означало, что чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется. Осторожности ради, Кеплер относил эти законы только к Марсу.

Сначала Кеплер думал, что орбита Марса — окружность. Но Солнце оказалось не в центре, а сдвинутым примерно на одну десятую радиуса от центра. Кеплер знал теорию конических сечений и понимал, что эллипс с малым эксцентриситетом очень похож на окружность. Пользуясь исключительно точными результатами измерений, сделанных Браге, Кеплер проверил как ведёт себя небольшое отклонение орбиты от окружности. Орбита Марса оказалась слегка сплюснутой в направлении, перпендикулярном диаметру, на котором лежит Солнце — примерно на полпроцента (!). Так Кеплер пришёл к мысли об эллиптических орбитах планет.

Приведём комментарии, сделанные в упоминавшейся статье. Для орбиты Марса эксцентриситет равен приблизительно $\frac{1}{10}$. Для эллипса с эксцентрисите-

Рис. 4.17. Эллипс с эксцентриситетом $e = 0.1$

том $e = \frac{1}{10}$, большой полуосью a и малой полуосью b

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{0.99} = 0.994987 \dots$$

Хорошее приближение при малых e даёт формула

$$\sqrt{1 - e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2}.$$

В нашем случае получаем

$$\frac{b}{a} \approx 1 - \frac{e^2}{2} = 0.995.$$

Скажем, если $a = 1$, то $b \approx 0.995$, а полуфокусное расстояние $c = ae = \frac{1}{10}$. Видно, что полуоси эллипса практически неотличимы, но его полуфокусное расстояние заметно превышает 0 (см. рис. 4.17).

Для эллипса выполняется $a^2 = b^2 + c^2$, поэтому b и c представляют собой величины катетов прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна a . Указанный эффект заключается в том, что для малых углов больший катет практически неотличим от гипотенузы, хотя малый катет может быть и значительным. В. И. Арнольд иллюстрирует этот факт следующим шуточным вопросом (лекция была прочитана в Институте повышения квалификации работников образования и предназначалась взрослым слушателям):

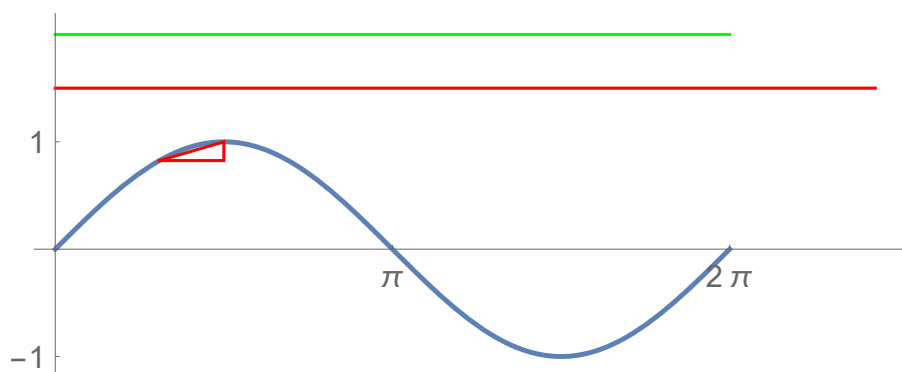


Рис. 4.18. Насколько синусоида длиннее прямой?

«Предположим, что вы возвращаетесь домой по синусоиде. Насколько ваш путь длиннее, чем если бы вы шли прямо? Первое впечатление (что вдвое), конечно преувеличивает длину. Всё же кажется, что путь по синусоиде длиннее раза в полтора. На самом деле всего примерно на 20 %. Причина в том, что большая часть синусоиды слабо наклонена к оси, поэтому соответствующие гипотенузы практически не длиннее катетов» [2].

Указанное обстоятельство не соответствует «обыденному» представлению о синусоиде. Для иллюстрации мы помещаем здесь рис. 4.18. На нём верхний горизонтальный отрезок (зелёный) имеет длину 2π , а длина нижнего отрезка (красного) совпадает с длиной d синусоиды на периоде (эта линия изображена синим цветом). Заметим, что

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx = 7.640395\dots$$

и точное значение отношения $\frac{d}{2\pi}$ равно 1.216006... В.И. Арнольд совершенно прав — синусоида длиннее прямолинейного отрезка лишь на 21.6 %.

Кеплер открыл закон движения планет, но тот факт, что они движутся по эллипсам, строго доказал Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1642–1727) в своей книге «Математические начала натуральной философии» (1687). Он получил эллиптичность планетарных орбит как следствие закона всемирного тяготения. Хорошо знавший древнюю теорию конических сечений, Ньютон справился с этой задачей при помощи хитроумных геометрических построений.

Если бы теория конических сечений не была разработана заранее, то фундаментальные законы природы не были бы своевременно открыты и пути развития цивилизации были бы иными.

Глава 5

Поверхности второго порядка

5.1 Общее уравнение поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность в пространстве, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (5.1)$$

Предполагается, что хотя бы одно из чисел $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ отлично от нуля. Это означает, что *матрица квадратичной формы* уравнения

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

является ненулевой симметричной матрицей.

Анализ типов линий, описываемых уравнением (5.1), связан с подходящим преобразованием исходной декартовой системы координат $Oxyz$. Направления новых осей координат задаются собственными векторами матрицы \mathbf{A} . Этот процесс называют *приведением к главным осям*, потому что для невырожденной поверхности некоторые новые оси являются осями её симметрии. Затем производится некоторый перенос начала координат, если возможно — в центр симметрии поверхности. Так получается наиболее удобная для этой поверхности система координат $O'uvw$. После подстановки в (5.1) вместо x, y, z конечных координат u, v, w уравнение существенно упрощается и приобретает наиболее простой вид.

Оказывается (см., например, [6]), что общее уравнение (5.1) может задавать вместе с вырожденными вариантами одну из поверхностей 17 простейших видов. Мы не будем останавливаться на преобразовании уравнения (5.1),

а рассмотрим лишь основные свойства невырожденных поверхностей второго порядка — эллипсоида, однополостного гиперболоида, двуполостного гиперболоида, эллиптического параболоида, гиперболического параболоида, конуса и цилиндров второго порядка. Эти поверхности мы определим через их *канонические уравнения*, после чего и рассмотрим их свойства. Всюду далее система координат $Oxyz$ предполагается декартовой.

Некоторые из канонических уравнений имеют вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0. \quad (5.2)$$

Если поверхность H задаётся уравнением (5.2), то из условия $(x, y, z) \in H$ следует $(\pm x, \pm y, \pm z) \in H$ с любым сочетанием знаков. Значит, H симметрична относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Приведём примеры:

симметрия относительно оси Ox : $(x, y, z) \in H \implies (x, -y, -z) \in H$,

симметрия относительно пл. Oxy : $(x, y, z) \in H \implies (x, y, -z) \in H$,

симметрия относительно т. O : $(x, y, z) \in H \implies (-x, -y, -z) \in H$.

Если дополнительно $A, B, C \neq 0$, то центр симметрии поверхности является единственным. Такая поверхность называется *центральной*.

5.2 Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq b \geq c > 0. \quad (5.3)$$

Числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида*.

Слово *эллипсоид* (гр.) означает *такой, как эллипс, имеющий вид эллипса*. Аналогичный смысл имеют и термины *гиперболоид*, *параболоид*.

Исследуем эллипсоид H по его каноническому уравнению (5.3).

1°. Ограниченность. Непустое множество G точек пространства называется *ограниченным*, если существует конечный параллелепипед P , такой что $G \subset P$. Из (5.3) следует, что если т. $M(x, y, z) \in H$, то $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$. Поэтому H целиком содержится в параллелепипеде

$$P := \{(x, y, z) : |x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}.$$

Тем самым H — ограниченная поверхность. Заметим, что эллипсоид — единственная ограниченная поверхность второго порядка.

2°. **Симметрия.** Координаты x, y, z входят в уравнение (5.3) в чётных степенях. Поэтому поверхность H симметрична относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Более того, эллипсоид — центральная поверхность (см. предыдущий пункт). Оси симметрии, т. е. оси Ox , Oy и Oz , называются *главными осями*, а центр симметрии, т. е. начало координат, называется *центром эллипсоида*.

3°. **Вершины.** *Вершинами* поверхности называются точки её пересечения с осями координат. Эллипсоид имеет шесть вершин, по две на каждой координатной оси, — это точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$.

4°. **Сечения плоскостями $x, y, z = h$.** Для анализа трёхмерной поверхности можно применить *метод сечений*, который состоит в исследовании динамики сечений поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Для эллипсоида такие сечения ведут себя однотипно, поэтому остановимся лишь на сечениях плоскостями $z = h$ при $h \in \mathbb{R}$.

Обозначим через L_h пространственную линию, которая получается в сечении эллипсоида плоскостью $z = h$, а через L_h^* — её проекцию на плоскость Oxy оставшихся координат:

$$L_h : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$L_h^* : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \quad (5.5)$$

Как отмечалось, для точек эллипсоида $|z| \leq c$, поэтому плоскость $z = h$ при $|h| > c$ не имеет с эллипсоидом общих точек. При таких h каждое из множеств (5.4)–(5.5) является пустым. Кроме того, сечения симметричны относительно плоскости $z = 0$, поэтому достаточно ограничиться интервалом $0 \leq h \leq c$. Изображая в плоскости Oxy линию L_h^* при различных h , мы получим *карту сечений* эллипсоида плоскостями $z = h$ (см. рис. 5.1).

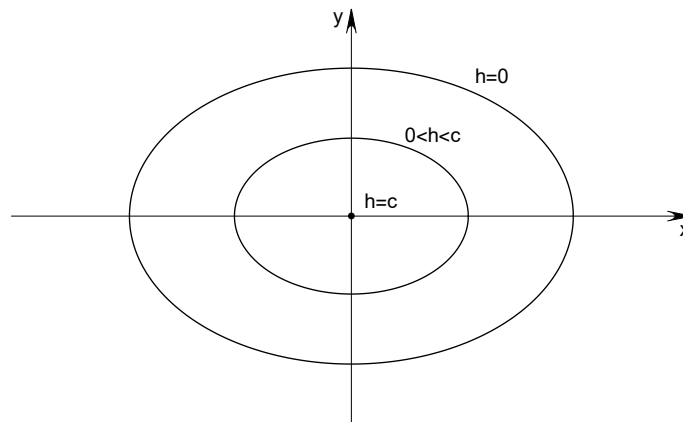


Рис. 5.1

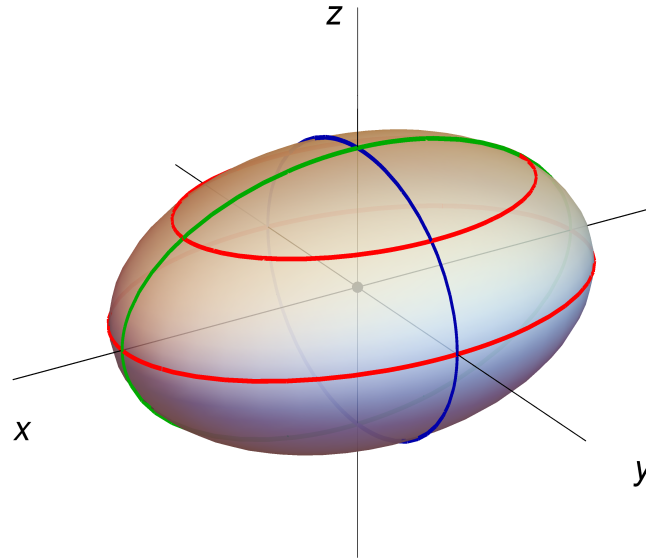


Рис. 5.2. Эллипсоид

При $h = c$ линия L_h^* вырождается в точку с координатами $x = y = 0$. Если $0 \leq h < c$, то L_h^* представляет собой эллипс с полуосями

$$a_h = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_h = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

(достаточно разделить (5.5) на правую часть). Хотя полуоси a_h и b_h уменьшаются с ростом h , их отношение остаётся одинаковым. Поэтому получающиеся эллипсы имеют одинаковый эксцентриситет.

Подобным образом ведут себя и сечения плоскостями $y = h$, $z = h$. Эти наблюдения позволяют изобразить эллипсоид на рис. 5.2.

5°. Другие свойства. Эллипсоид и сфера. В случае $b = c = a$ эллипсоид представляет собой сферу с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. В общем случае эллипсоид есть результат сжатия сферы в двух ортогональных направлениях, что также даёт представление о его форме. Действительно, рассмотрим в системе координат $Ox'y'z'$ уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{a^2} = 1. \quad (5.6)$$

Заменим координаты в соответствии с равенствами $x = x'$, $y = \frac{b}{a}y'$, $z = \frac{c}{a}z'$, тогда сфера (5.6) перейдёт в эллипсоид (5.3). Поскольку $b, c \leq a$, указанное

преобразование системы координат $Ox'y'z'$ есть результат двух сжатий вдоль осей Oy' и Oz' в направлении начала координат.

Любое невырожденное сечение эллипсоида плоскостью есть эллипс. Приведём обоснование этого факта, использующее лишь ограниченность эллипсоида и эллипса. Выберем в пространстве новую декартову систему координат $Ox'y'z'$, в которой уравнение секущей плоскости будет иметь вид $z' = 0$. В новых координатах эллипсоид будет задаваться по-прежнему уравнением второй степени. Подстановка в это уравнение $z' = 0$ приведёт к выводу, что в сечении получится линия второго порядка. Поскольку эллипсоид — поверхность ограниченная, то и эта линия будет ограниченной. А единственная ограниченная линия второго порядка есть эллипс.

Эллипсоид вращения. Пусть в плоскости Oxy задан эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0.$$

Рассмотрим трёхмерную поверхность H , образованную вращением этого эллипса вокруг оси Ox . Если направить ось Oz ортогонально осям Ox и Oy , то в системе координат $Oxyz$ поверхность H будет задаваться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Такая поверхность называется *эллипсоидом вращения*. Сечения H плоскостями $x = h$ при $|h| < a$ представляют собой окружности. Пусть $c^2 = a^2 - b^2$. Рассмотрим точки $F_1(-c, 0, 0)$, $F_2(c, 0, 0)$. Если в одну из них поместить источник света, то после отражения от поверхности каждый луч света пройдёт через вторую точку. Это красивое свойство имеет практические применения.

5.3 Однополостный гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0. \quad (5.7)$$

Исследуем однополостный гиперболоид H по его каноническому уравнению (5.7).

1°. Неограниченность. Для любого $C > 0$ существуют $x, y, z > C$, удовлетворяющие (5.7). Поэтому H не содержится ни в каком параллелепипеде. Тем самым однополостный гиперболоид — неограниченная поверхность. Другой способ обоснования состоит в том, что некоторые сечения H плоскостями представляют собой неограниченные линии — гиперболы.

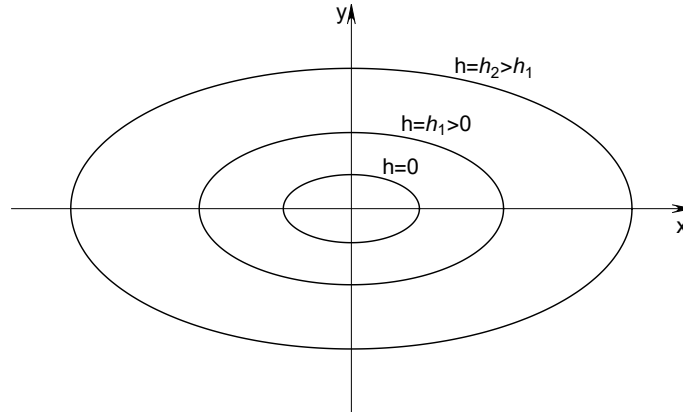


Рис. 5.3

2°. **Симметрия.** Координаты x, y, z входят в уравнение (5.7) в чётных степенях. Поэтому поверхность H симметрична относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Более того, H — центральная поверхность. Оси симметрии называются *главными осями*, а центр симметрии — *центром однополостного гиперболоида*.

3°. **Вершины.** Вершинами H являются четыре точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$. Точек пересечения с осью Oz однополостный гиперболоид не имеет.

4°. **Сечения плоскостями** $x, y, z = h$. Сечение плоскостью $z = h$ при любом h представляет из себя эллипс. Проекция L_h^* этой линии на плоскость Oxy описывается уравнением

$$L_h^* : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}. \quad (5.8)$$

Полуоси эллипса (5.8) равны

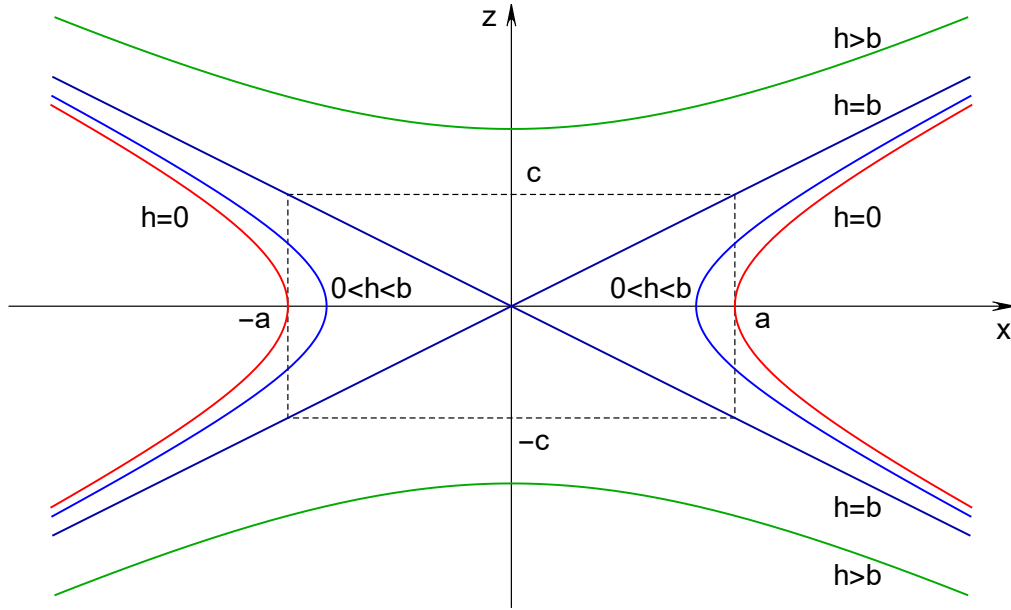
$$a_h = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_h = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}.$$

Минимальные значения a_h и b_h достигаются при $h = 0$. Эллипс, получающийся в сечении H плоскостью $z = 0$, называется *горловым*. Карта сечений плоскостями $z = h$ представлена на рис. 5.3.

Рассмотрим сечения плоскостями $y = h$. На этот раз через L_h^* обозначим проекцию сечения на плоскость Oxz :

$$L_h^* : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}. \quad (5.9)$$

Динамика плоских линий L_h^* весьма интересна. Ограничимся в силу симметрии случаем $h \geq 0$ (см. рис. 5.4).

Рис. 5.4. Линии L_h^* для сечений плоскостями $y = h$

При $0 \leq h < b$ правая часть (5.9) положительна. Поэтому L_h^* представляет собой гиперболу, ветви которой ориентированы вдоль оси Ox , а асимптотами являются прямые

$$z = \pm \frac{c}{a}x. \quad (5.10)$$

Если $h \rightarrow b - 0$, то полуоси этих гипербол стремятся к нулю.

При $h = b$ правая часть (5.9) обращается в 0. Запишем уравнение в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0.$$

В данном случае L_h^* представляет собой пару прямых (5.10).

Наконец, если $h > b$, то правая часть (5.9) отрицательна. Значит, L_h^* представляет собой гиперболу, ветви которой ориентированы вдоль оси Oz . Однако асимптоты гиперболы остаются теми же — это прямые (5.10). При $h \rightarrow +\infty$ полуоси гипербол неограниченно возрастают.

Сечения плоскостями $x = h$ ведут себя аналогичным образом. Однополостный гиперболоид изображён на рис. 5.5.

5°. Прямолинейные образующие. Как мы уже видели, на однополостном гиперболоиде целиком располагаются некоторые прямые. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* поверхности. Оказывается, что через каждую точку H проходят две такие прямые. Чтобы записать их уравнения, представим уравнение H в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right). \quad (5.11)$$

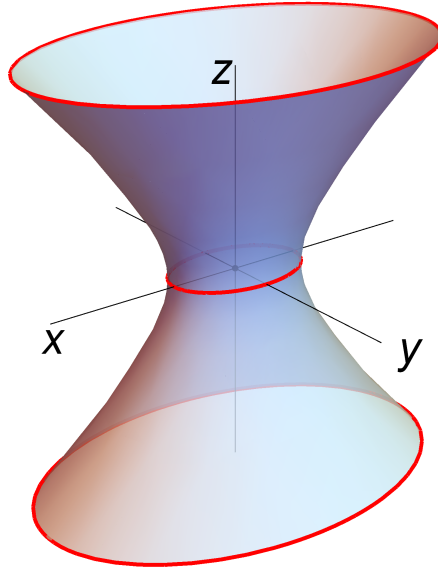


Рис. 5.5. Однополостный гиперболоид

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\Gamma_{\alpha\beta} : \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \beta \left(1 - \frac{y}{b} \right), \\ \beta \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \alpha \left(1 + \frac{y}{b} \right), \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\Gamma'_{\alpha\beta} : \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) = \beta \left(1 + \frac{y}{b} \right), \\ \beta \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \alpha \left(1 - \frac{y}{b} \right). \end{cases} \quad (5.13)$$

Если $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma'_{\alpha\beta}$ представляют собой прямые, лежащие на H .

Убедимся, например, что $\Gamma_{\alpha\beta} \subset H$. Пусть сначала $\alpha\beta \neq 0$. Из (5.12) следует равенство

$$\alpha\beta \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \right) = \alpha\beta \left(1 - \frac{y}{b} \right) \left(1 + \frac{y}{b} \right),$$

которое после деления на $\alpha\beta$ даёт (5.11). Поэтому каждая точка прямой $\Gamma_{\alpha\beta}$ принадлежит H . Если же, например, $\alpha = 0, \beta \neq 0$, то (5.12) принимает вид

$$\begin{cases} 1 - \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \end{cases}$$

и опять имеем $\Gamma_{\alpha\beta} \subset H$.

Можно показать, что семейства прямых $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma'_{\alpha\beta}$ не пересекаются. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно одна прямая из первого семейства и ровно одна прямая из второго. Пусть $(x_0, y_0, z_0) \in H$. Выберем α и β так, чтобы при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ выполнялось первое равенство в (5.12); тогда будет выполнено и второе — иначе с такими x, y, z нарушится и равенство в (5.11). Таким способом для данной точки поверхности будут найдены α, β , для которых $\Gamma_{\alpha\beta} \subset H$.

5.4 Двуполостный гиперболоид

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a, b, c > 0. \quad (5.14)$$

Обозначим эту поверхность через H и исследуем её по каноническому уравнению (5.14).

1°. Неограниченность. Двуполостный гиперболоид — неограниченная поверхность. Действительно, некоторые сечения H плоскостями представляют собой неограниченные линии — гиперболы.

2°. Симметрия. Поверхность H симметрична относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Кроме того, H — центральная поверхность, т. е. имеет единственный центр симметрии. Оси симметрии называются *главными осями*, а центр симметрии — *центром двуполостного гиперболоида*.

Заметим, что свойства 1°, 2° в точности совпадают со свойствами однополостного гиперболоида.

3°. Вершины и полости. Поверхность имеет две вершины $(0, 0, \pm c)$, принадлежащие оси Oz . Точек пересечения с осями Ox и Oy двуполостный гиперболоид не имеет.

Рассмотрим трёхмерную полосу или, иначе, трёхмерный слой

$$S := \{(x, y, z) : |z| < c\}.$$

Это множество состоит из точек пространства, расположенных строго между плоскостями $z = -c$ и $z = c$. Полоса S не содержит точек поверхности H . Действительно, из (5.14) следует, что если $(x, y, z) \in H$, то

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1,$$

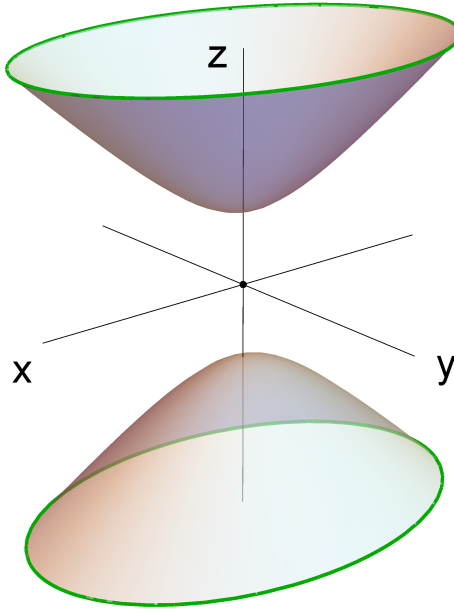


Рис. 5.6. Двуполостный гиперboloид

откуда $|z| \geq c$. Поэтому H распадается на две симметричные части, одна из которых располагается выше, а вторая — ниже S . Эти части и называются *полостями* поверхности, что соответствует её названию *двуполостный гиперboloид*.

4°. **Сечения плоскостями $x, y, z = h$.** В силу симметрии ограничимся случаем $h \geq 0$. Плоскость $z = h$ пересекает H лишь при $h \geq c$. Уравнение проекции сечения на плоскость Oxy имеет вид

$$L_h^* : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1. \quad (5.15)$$

При $h = c$ имеем $x = y = 0$, поэтому пересечение H с плоскостью $z = c$ состоит из единственной точки $(0, 0, c)$. Если $h > c$, то линия (5.15) есть эллипс с полуосями

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

При $h \rightarrow +\infty$ полуоси неограниченно возрастают, но их отношение остаётся равным $\frac{a}{b}$. Поэтому эллипсы (5.15) имеют один и тот же эксцентриситет.

Рассмотрим сечения H плоскостями $y = h$. Через L_h^* теперь обозначим проекцию сечения на плоскость Oxz :

$$L_h^* : \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2} + 1. \quad (5.16)$$

При любом $h > 0$ линия (5.16) представляет собой гиперболу с полуосями

$$c\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}, \quad a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1},$$

ветви которой ориентированы вдоль оси Oz .

Сечения плоскостями $x = h$ ведут себя аналогичным образом. Двуполостный гиперболоид изображён на рис. 5.6.

5°. Гиперболоиды вращения. Пусть в плоскости Oxy задана гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Рассмотрим поверхности H_1 и H_2 , образованные вращением этой гиперболы вокруг осей Oy и Ox соответственно. Направим ось Oz ортогонально осям Ox и Oy . В системе координат $Oxyz$ поверхность H_1 будет задаваться уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Она называется *однополостным гиперболоидом вращения*. Сечения H_1 плоскостями $y = h$ представляют собой окружности. Поверхность H_2 будет задаваться уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1.$$

Эта поверхность называется *двуполостным гиперболоидом вращения*. Окружности получаются при пересечении H_2 с плоскостями $x = h$ при $|h| > a$. Обоснование предоставляется читателю в качестве упражнения.

5.5 Эллиптический параболоид

Есть замечательная возможность получить представление о форме параболоидов. Пусть имеются две параболы P_1 и P_2 . Расположим их в пространстве таким образом, чтобы вершины и оси этих парабол совпадали, а плоскости, в которых лежат параболы, были перпендикулярны. При этом ветви парабол могут быть ориентированы в одну или разные стороны от общей вершины (см. рис. 5.7а–5.7б). Параболу P_1 зафиксируем, а параболу P_2 будем перемещать параллельно себе, так чтобы её вершина принадлежала P_1 . В первом случае параболы, конгруэнтные P_2 , будут образовывать эллиптический гиперболоид, а во втором — гиперболический параболоид. Интересно, что если, наоборот, зафиксировать P_2 , а перемещать P_1 , то в каждом случае получится та же поверхность.

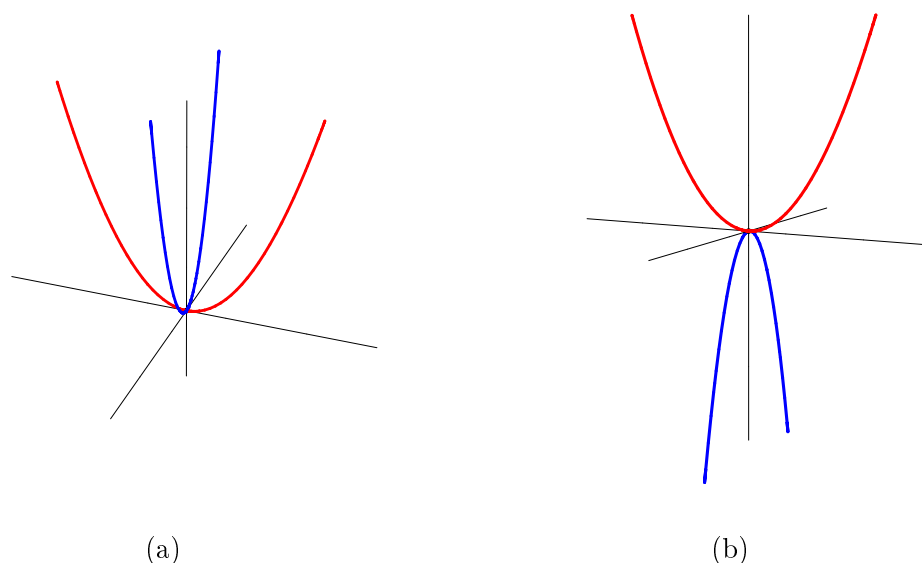


Рис. 5.7

Эллиптическим параболоидом называется поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \quad a, b > 0. \quad (5.17)$$

Исследуем эллиптический параболоид H по уравнению (5.17).

1°. **Неограниченность.** Для любого $C > 0$ существуют $x, y, z > C$, удовлетворяющие (5.17). Поэтому H не содержится ни в каком параллелепипеде. Тем самым эллиптический параболоид — неограниченная поверхность. Другой способ обоснования состоит в том, что некоторые сечения H плоскостями являются неограниченными линиями — парабололами.

2°. **Симметрия.** Координаты x, y входят в уравнение (5.17) в чётных степенях. Таким образом, если $(x, y, z) \in H$, то $(\pm x, \pm y, z) \in H$ с любым сочетанием знаков. Поэтому поверхность H симметрична относительно координатных плоскостей Oxz , Oyz и их пересечения — оси Oz . Ось симметрии, т. е. ось Oz , называется *осью эллиптического параболоида*.

3°. **Вершина и область расположения.** Из (5.17) следует, что эллиптический параболоид имеет единственную вершину — т. $O(0, 0, 0)$ и эта поверхность целиком лежит в полупространстве $z \geq 0$.

4°. **Сечения плоскостями $x, y, z = h$.** Плоскость $z = h$ имеет общие точки с H при $h \geq 0$. Проекция L_h^* сечения на плоскость Oxy описывается уравнением

$$L_h^* : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h. \quad (5.18)$$

При $h = 0$ имеем $x = y = 0$, поэтому пересечение H с плоскостью $z = 0$ состоит из единственной точки $O(0, 0, 0)$. Если $h > 0$, то линия (5.18) есть эллипс с полуосями $a\sqrt{h}$, $b\sqrt{h}$. При $h \rightarrow +\infty$ полуоси неограниченно возрастают, но их отношение остаётся равным $\frac{a}{b}$. Поэтому эллипсы (5.18) имеют один и тот же эксцентриситет.

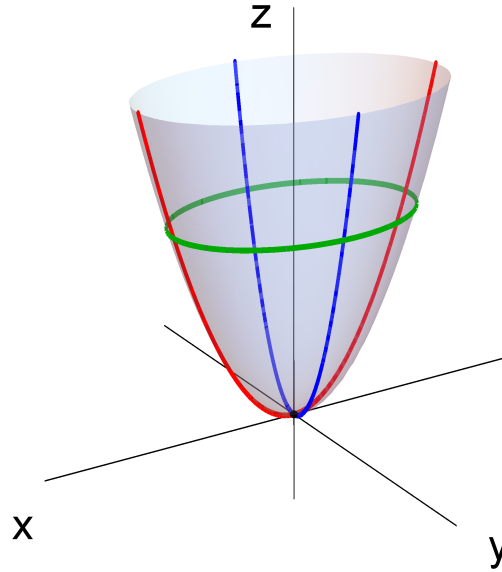


Рис. 5.8. Эллиптический параболоид

Сечения плоскостями $x = h$ и $y = h$ при любом h представляют собой параболы. Сначала рассмотрим параболы P_1 и P_2 , которые получаются при пересечении H с плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ соответственно:

$$P_1 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \\ x = 0, \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \\ y = 0. \end{cases}$$

Теперь запишем систему уравнений, задающих параболу P , получающуюся в сечении H плоскостью $y = h$:

$$P : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z, \\ y = h. \end{cases}$$

Парабола P есть результат параллельного переноса параболы P_2 . В этом нетрудно убедиться, если записать уравнения проекций рассматриваемых пространственных линий на плоскость Oxz :

$$P_2^* : z = \frac{x^2}{a^2}, \quad P^* : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2}.$$

Вершина параболы P находится в точке $M\left(0, h, \frac{h^2}{b^2}\right)$. Теперь заметим, что т. $M \in P_1$. Именно это свойство мы отмечали в начале пункта. Изображение эллиптического параболоида представлено на рис. 5.8.

5°. Эллиптический параболоид вращения. Пусть в плоскости Oxy задана парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$. Рассмотрим трёхмерную поверхность H , образованную вращением этой параболы вокруг оси Ox . Если направить ось Oz ортогонально осям Ox и Oy , то в системе координат $Oxyz$ поверхность H будет задаваться уравнением

$$y^2 + z^2 = 2px.$$

С точностью до обозначений координат и коэффициентов это уравнение имеет вид (5.17). Такая поверхность называется *эллиптическим параболоидом вращения*. Сечения H плоскостями $x = h$ при $h > 0$ представляют собой окружности. Осью параболоида является ось Ox . Рассмотрим точку $F\left(\frac{p}{2}, 0, 0\right)$. Если в т. F поместить источник света, то после отражения от поверхности каждый луч света пройдёт параллельно оси Ox . Это важное свойство эллиптического параболоида вращения широко применяется на практике.

5.6 Гиперболический параболоид

Представление о форме гиперболического параболоида даётся в начале предыдущего пункта.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность второго порядка, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \quad a, b > 0. \quad (5.19)$$

Исследуем гиперболический параболоид H по его каноническому уравнению. Первые свойства совершенно аналогичны свойствам эллиптического параболоида.

1°. Неограниченность. Гиперболический параболоид — неограниченная поверхность. Достаточно заметить, что некоторые его плоские сечения являются неограниченными линиями — гиперболами.

2°. Симметрия. Поверхность H симметрична относительно координатных плоскостей Oxz , Oyz и их пересечения — оси Oz . Ось симметрии, т. е. ось Oz , называется *осью гиперболического параболоида*.

3°. Вершина. Гиперболический параболоид имеет единственную вершину $O(0, 0, 0)$.

4°. **Сечения плоскостями** $x, y, z = h$. Плоскость $z = h$ имеет общие точки с H при любом h . Проекция L_h^* сечения на плоскость Oxy описывается уравнением

$$L_h^* : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h. \quad (5.20)$$

Динамика линий L_h^* при изменении h весьма интересна. Будем менять h от положительных значений к отрицательным.

При $h > 0$ правая часть (5.20) положительна. Поэтому L_h^* представляет собой гиперболу, ветви которой ориентированы вдоль оси Ox , а асимптотами являются прямые

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (5.21)$$

При $h \rightarrow +0$ полуоси этих гипербол стремятся к нулю.

Если $h = 0$, то уравнение (5.20) можно переписать в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

В данном случае L_h^* представляет собой пару прямых (5.21). Итак, на гиперболическом параболоиде целиком располагаются некоторые прямые.

Наконец, если $h < 0$, то правая часть (5.20) отрицательна. Значит, L_h^* представляет собой гиперболу, ветви которой ориентированы вдоль оси Oy . Однако асимптоты гиперболы остаются теми же — это прямые (5.21). При $h \rightarrow -\infty$ полуоси гипербол неограниченно возрастают. Некоторые случаи представлены на рис. 5.9.

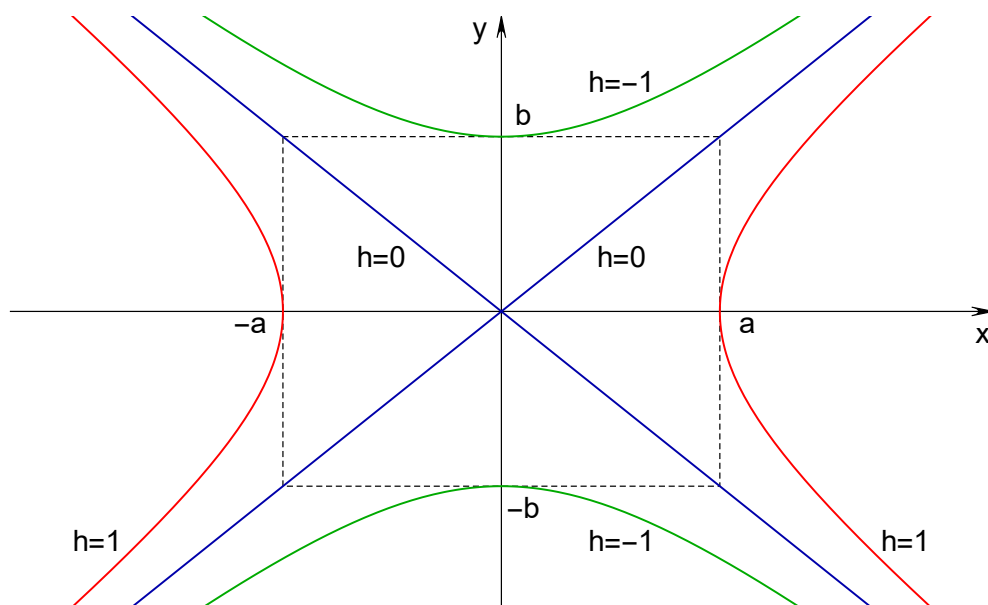


Рис. 5.9. Линии L_h^* для сечений плоскостями $z = h$

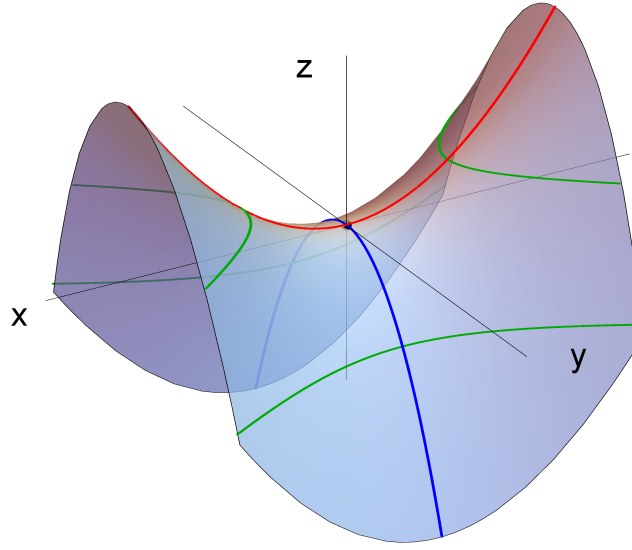


Рис. 5.10. Гиперболический параболоид

Сечения плоскостями $x = h$ и $y = h$ при любом h представляют собой параболы. Обозначим через P_1 и P_2 параболы, которые получаются при пересечении H с плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ соответственно:

$$P_1 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \\ x = 0, \end{cases} \quad P_2 : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \\ y = 0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим параболу P , получающуюся в сечении H плоскостью $y = h$:

$$P : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z, \\ y = h. \end{cases}$$

Парабола P представляет собой результат параллельного переноса параболы P_2 . Достаточно записать уравнения проекций этих пространственных линий на плоскость Oxz :

$$P_2^* : z = \frac{x^2}{a^2}, \quad P^* : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2}.$$

Заметим, что вершина параболы P находится в точке $N \left(0, h, -\frac{h^2}{b^2} \right)$. Значит, эта вершина лежит на параболе P_1 . Это свойство мы отмечали в п. 5.4. Гиперболический параболоид изображён на рис. 5.10.

5°. Прямолинейные образующие. Мы уже отмечали, что на гиперболическом параболоиде целиком располагаются некоторые прямые. Оказывается,

что через каждую точку этой поверхности проходят две прямолинейные образующие. Представим уравнение H в виде

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \cdot z. \quad (5.22)$$

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\Gamma_{\alpha\beta} : \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \beta \cdot 1, \\ \beta \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \alpha \cdot z, \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\Gamma'_{\alpha\beta} : \begin{cases} \alpha \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \beta \cdot z, \\ \beta \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \alpha \cdot 1. \end{cases} \quad (5.24)$$

Если $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma'_{\alpha\beta}$ представляют собой прямые, лежащие на H . В справедливости включений $\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma'_{\alpha\beta} \subset H$ читателю предлагается убедиться самостоятельно. В определении $\Gamma_{\alpha\beta}$ надо взять $\alpha \neq 0$ (иначе $\beta = 0$), а в определении $\Gamma'_{\alpha\beta}$ — $\beta \neq 0$ (иначе $\alpha = 0$).

Можно показать, что семейства прямых $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma'_{\alpha\beta}$ не пересекаются. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходит ровно одна прямая из первого семейства и ровно одна прямая из второго. Покажем, например, как для данной точки поверхности найти α и β , для которых $\Gamma_{\alpha\beta} \subset H$. Пусть $(x_0, y_0, z_0) \in H$. Выберем α и β так, чтобы при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ выполнялось первое равенство в (5.23). Тогда будет выполнено и второе равенство — иначе с этими x, y, z нарушится равенство в (5.22).

6°. Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Приведём одну интересную задачу, в которой появляются эти замечательные поверхности. Пусть в пространстве даны две скрещивающиеся прямые L_1, L_2 и число $k > 0$. Геометрическое место точек M , для которых выполняется равенство

$$\frac{d(M; L_1)}{d(M; L_2)} = k,$$

является в случае $k \neq 1$ однополостным гиперболоидом, а в случае $k = 1$ — гиперболическим параболоидом.

5.7 Конус второго порядка

Конусом второго порядка называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0. \quad (5.25)$$

Название *конус* происходит от др.-греч. *конос*, что означает *сосновая шишка*. Исследуем конус H по его каноническому уравнению (5.25).

1°. **Неограниченность.** Для любого $C > 0$ существуют $x, y, z > C$, удовлетворяющие (5.25). Следовательно, конус — неограниченная поверхность. Это свойство следует и из того, что на конусе целиком располагаются некоторые неограниченные линии (например, гиперболы и прямые, что обосновывается ниже).

2°. **Симметрия.** Координаты x, y, z входят в уравнение (5.25) в чётных степенях. Поэтому конус симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Более того, H — центральная поверхность.

3°. **Вершины.** У конуса единственная вершина, совпадающая с началом координат.

4°. **Сечения плоскостями $x, y, z = h$.** Эти плоскости пересекают конус при любом h . Проекция сечения плоскостью $z = h$ на плоскость Oxy описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}. \quad (5.26)$$

Если $h = 0$, то $x = y = 0$. Поэтому плоскость $z = 0$ имеет с H одну общую точку, а именно т. $O(0, 0, 0)$. Если $h \neq 0$, то (5.26) есть эллипс с полуосями $\frac{a}{c}|h|$, $\frac{b}{c}|h|$. При $|h| \rightarrow \infty$ полуоси эллипсов неограниченно возрастают.

Рассмотрим сечения плоскостями $y = h$. Пусть L_h^* есть проекция сечения на плоскость Oxz :

$$L_h^* : \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}. \quad (5.27)$$

При $h \neq 0$ L_h^* представляет собой гиперболу, ветви которой ориентированы вдоль оси Oz , а асимптотами являются прямые

$$z = \pm \frac{c}{a}x. \quad (5.28)$$

Если $|h| \rightarrow \infty$, то полуоси этих гипербол неограниченно возрастают. При $h = 0$ множество L_h^* представляет собой пару прямых (5.28). В частности, мы видим, что на конусе целиком располагаются некоторые прямые.

Сечения плоскостями $x = h$ ведут себя аналогичным образом.

5°. **Прямолинейные образующие.** Главное свойство конуса состоит в следующем. Для любой точки M конуса, отличной от начала координат, вся прямая OM лежит на конусе (см. рис. 5.11).

Действительно, для т. $M(x_0, y_0, z_0)$ параметрические уравнения прямой OM имеют вид $x = x_0 t$, $y = y_0 t$, $z = z_0 t$. Если т. $M \in H$, то

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0.$$

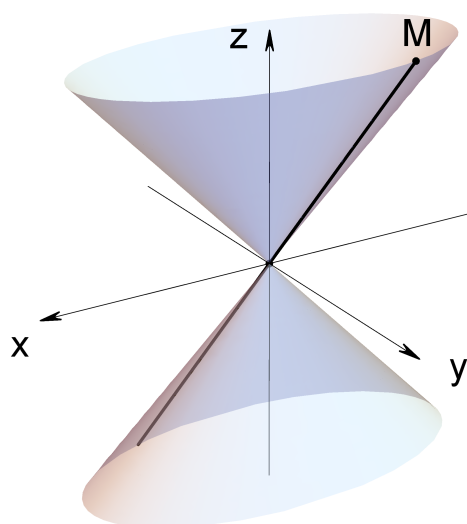


Рис. 5.11. Конус

Тогда и для любого $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{(tx_0)^2}{a^2} + \frac{(ty_0)^2}{b^2} - \frac{(tz_0)^2}{c^2} = 0.$$

Следовательно, каждая точка прямой OM принадлежит H .

Таким образом, конус образован прямыми, соединяющими его точки с началом координат. Достаточно зафиксировать $h \neq 0$ и рассмотреть точки эллипса, который получается в сечении плоскостью $z = h$. Если провести прямые, соединяющие каждую такую точку с началом координат, то объединение этих прямых и будет представлять собой данный конус.

5.8 Цилиндры второго порядка

Цилиндрами второго порядка называются поверхности, канонические уравнения которых имеют вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0 \quad - \quad \text{эллиптический цилиндр}, \quad (5.29)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0 \quad - \quad \text{гиперболический цилиндр}, \quad (5.30)$$

$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \quad - \quad \text{параболический цилиндр}. \quad (5.31)$$

Название *цилиндр* происходит от др.-греч. *валик, каток*.
Исследуем цилиндры по их каноническим уравнениям (5.25).

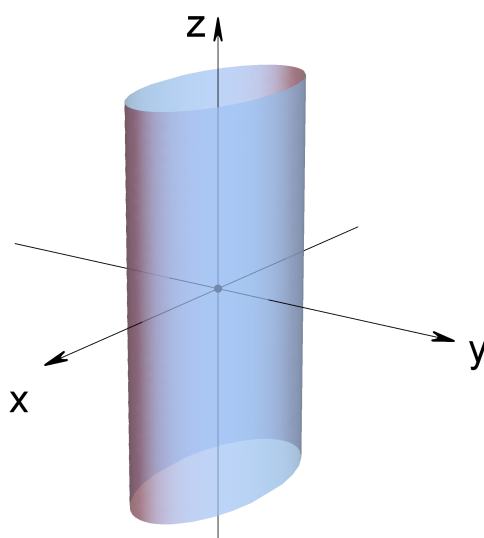


Рис. 5.12. Эллиптический цилиндр

1°. Неограниченность. Уравнения (5.29)–(5.31) не содержат z , значит, каждый цилиндр содержит точки с любыми координатами z . Поэтому каждый цилиндр — поверхность неограниченная.

2°. Симметрия. Уравнения эллиптического и гиперболического цилиндров содержат чётные степени x, y . Поэтому эти поверхности симметричны относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Более того, они симметричны и относительно любой точки $M(0, 0, z_0)$ оси Oz . Действительно, если перенести начало координат в эту точку, положив $z' := z - z_0$, то уравнения (5.29)–(5.30) не изменятся. По предыдущему рассуждению это даёт симметрию относительно нового начала координат — т. $M(0, 0, z_0)$. Ровно так же получается и симметрия относительно плоскости $z = z_0$ при любом z_0 .

Параболический цилиндр (5.31) обладает свойством:

$$(x, y, z) \in H \iff (x, \pm y, \pm z) \in H.$$

Это даёт симметрию относительно плоскостей Oxy , Oxz и оси Ox . Как и выше, симметрия относительно Oxy , т.е. плоскости $z = 0$, приводит к симметрии относительно любой плоскости $z = z_0$.

3°. Вершины. Эллиптический цилиндр имеет четыре вершины $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$. У гиперболического цилиндра их две — $(\pm a, 0, 0)$. А вот параболиче-

ский цилиндр имеет бесконечно много вершин, так как он содержит целиком всю ось Oz . Его вершиной является любая точка $(0, 0, z_0)$.

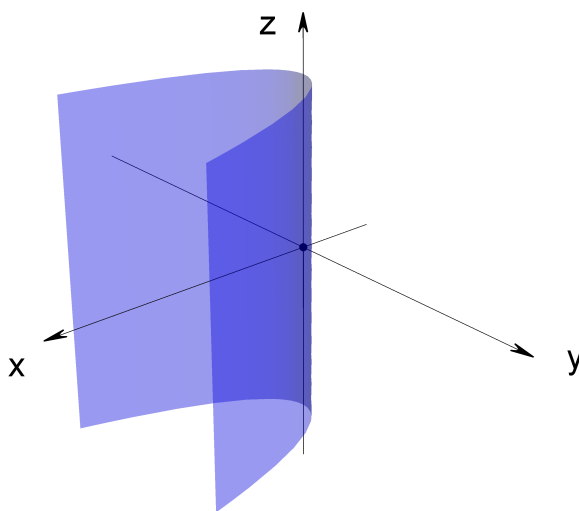


Рис. 5.13. Параболический цилиндр

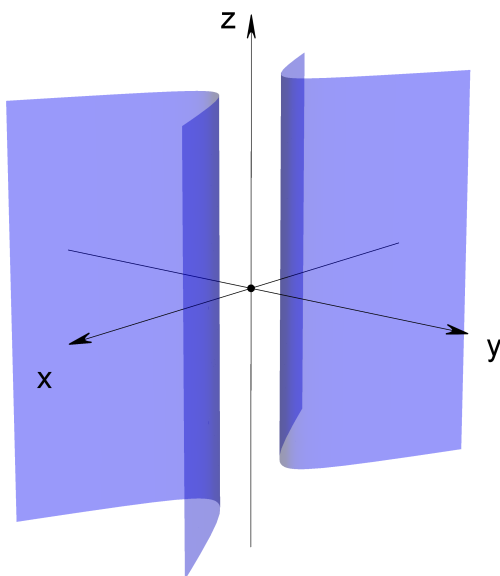


Рис. 5.14. Гиперболический цилиндр

4°. **Сечения плоскостями $x, y, z = h$.** Для каждого цилиндра проекции сечений плоскостями $z = h$ на плоскость Oxy не меняются при изменении h . Уравнения этих проекций в координатах x, y имеют тот же вид (5.29)–(5.31). Значит, каждый из цилиндров получается параллельным перемещением сечения плоскостью $z = 0$ вдоль оси Oz . Это даёт представление и о форме цилиндров, и о тех свойствах, которые мы отметили выше. Сечения плоскостями $x = h$ и $y = h$ читателю предлагается рассмотреть самостоятельно. Цилиндры второго порядка изображены на рис. 5.12–5.14.

Литература

- [1] *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. СПб.: Лань, 2009. 512 с.
- [2] *Арнольд В. И.* Для чего мы изучаем математику? // Квант. 1993. № 1–2. С. 5–15. URL: <http://kvant.mccme.ru/1993/01/index.htm>
- [3] *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2005. 240 с.
- [4] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
- [5] *Климов В. С., Ухалов А. Ю.* Решение задач математического анализа с использованием систем компьютерной математики: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2014. 96 с.
- [6] *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия. М.: Изд-во Московского университета, 1967. 699 с.
- [7] *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1976. 384 с.
- [8] *Невский М. В.* Лекции по алгебре: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2002. 265 с.
- [9] *Невский М. В.* Материалы по дисциплине «Алгебра и геометрия»: учебно-методическое пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2019. 52 с.
- [10] *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики: пер. с нем. М.: Наука, 1984. 285 с.
- [11] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 2. 800 с.
- [12] *Цубербильер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. СПб.: Лань, 2003. 336 с.
- [13] *Wolfram S.* Essentials of programming in Mathematica. Cambridge University Press, 2016. 422 p.

Учебное издание

Невский Михаил Викторович
Ухалов Алексей Юрьевич

Элементы аналитической геометрии

Учебное пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка М. В. Невский, А. Ю. Ухалов
Подписано в печать 10.02.2021. Формат 60 х 84/8.
Усл. печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 9,0.
Тираж 24 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.