МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. П. Г. ДЕМИДОВА

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Материалы 3-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Ярославль 2010

УДК 51.37
ББК Ч 486.24/29я43
П 71

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2010 года

Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете: материалы 3-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова / Отв. ред. М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль, 2010. – 174 с.

ISBN 978-5-8397-0725-3

Представлены материалы 3-й научно-методической конференции "Преподавние математики и компьютерных наук в классическом университете", состоявшейся в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова в феврале 2010 г.

Материалы конференции публикуются в авторской редакции.

УДК 51.37
ББК Ч 486.24/29я43

ISBN 978-5-8397-0725-3

Содержание

Предисловие

Готовясь к своим лекциям только в самых общих чертах, Гильберт, случалось, терпел фиаско. Иногда он не мог провести или неправильно проводил детали рассуждений. Тогда лекция прерывалась. И тем не менее, по общему мнению, в Гёттингене не было педагога, даже близко стоящего к Гильберту! Слушателям его лекций математика представлялась всё ещё в процессе создания, и большинство из них предпочитали их более совершенным, энциклопедическим и законченным лекциям Клейна.

Констанс Рид, "Гильберт"

And in the end, the love you take
Is equal to the love you make.

John Lennon, Paul McCartney, "The End"

Почему математическое образование сталкивается с серьёзными трудностями, особенно сегодня? На этот счёт имеются следующие принципиальные соображения.

Во-первых, наши науки всеобъемлющи: математика и её приложения отражают весь комплекс представлений человека об окружающем мире, а математическое моделирование является важнейшим средством познания.

Во-вторых, это отражение происходит в рамках специальных и весьма сложных информационных структур, называемых математическими структурами. На приобщение молодых исследователей к математическому и компьютерному творчеству сложность наших наук оказывает очень существенное влияние. Не каждый способен к напряжённой умственной работе и тем более не каждый склонен получать удовлетворение от мыслительной, логической деятельности. При изучении математических и компьютерных дисциплин у студента не получается "всё и сразу" , здесь требуются твёрдый характер, самодисциплина и повседневный труд.

Наконец, в-третьих, в современном обществе аналитический, доказательный подход, основанный на уважительном отношении к точному знанию, далеко не всегда приносит людям успех, а значит, не всегда представляется им приоритетным.

Сказанное, в частности, означает, что никакие образовательные реформы не в состоянии снять все трудности в обучении математике и тем более сделать математическое и компьютерное высшее образование массовым. Как представляется, наша основная беда состоит не столько в том, что мы не руководствуемся в преподавании передовыми методиками, сколько в том, что зачастую не можем реализовать полностью хотя бы какую-нибудь удовлетворительную методику.

Специфика содержания и устойчивость математических знаний во времени во многом объясняют, почему преподавание ведется, как правило, в традиционных, давно устоявшихся и проверенных формах (лекции, практические и лабораторные занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачёты, экзамены и др.), правда, вооружённых сегодня современными техническими средствами. Важным необходимым условием успешного изучения математики и компьютерных наук является самостоятельная работа студентов, выполнение ими индивидуальных заданий.

В Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова обучение будущих специалистов в области математики и прикладной математики осуществляется на математическом факультете и факультете информатики и вычислительной техники (ИВТ). Вниманию читателей предлагается сборник материалов научно-методической конференции преподавателей этих двух факультетов, состоявшейся в феврале 2010 года. Сборник содержит доклады 40 авторов, 23 из которых представляют математический факультет (22 доклада) и 17 — факультет ИВТ (12 докладов). Название конференции — "Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете" — отражает достаточно широкий спектр проблем, которые были на ней затронуты. Публикуемые доклады касаются как специальных, так и общих вопросов преподавания математических и компьютерных дисциплин (в том числе и для студентов, обучающихся на других факультетах университета).

Конференция 2010 года стала третьей в ряду аналогичных научно-методических конференций (первые две были проведены в 2005 и 2007 годах).

Доклады печатаются в авторской редакции, то есть сохраняют особенности (иногда своеобразного) авторского стиля и оформления. Компьютерный набор в системе LaTeX сделан самими авторами. Ответственным редактором был собран воедино весь материал, устранены замеченные им неточности в отдельных докладах, а также осуществлена необходимая подготовка сборника к печати.

К сожалению, в преподавании далеко не всегда "что посеешь, то и пожнёшь". Но на пустом месте уж точно ничего не вырастет.

М. Невский,
ответственный редактор

О курсе дифференциальной геометрии

В. Е. Балабаев, В. А. Краснов

Излагаются методические указания для преподавания дисциплины «Дифференциальная геометрия». В частности, приводится рабочая программа курса и примеры контрольных работ.

Библиография: 2 названия.

В настоящее время на основой курс «Дифференциальная геометрия» для специальности «Математика» отводится в неделю два часа лекций и один час практики в течение только одного семестра. Таким образом, современный стандарт отводит на данный курс времени в два раза меньше, чем в восьмидесятые годы прошлого столетия. С другой стороны, традиционное изложение этого курса (см., например, книгу П. К. Рашевского [1]) является явно устаревшим. В течение нескольких лет на математическом факультете ЯрГУ проводился эксперимент, целью которого было обновить стандартный курс дифференциальной геометрии, чтобы решить выше указанные проблемы. Чтобы показать особенности обновленного курса, мы приводим подробное введение, а также рабочую программу и примеры контрольных работ. В качестве руководства предлагаем частично использовать книгу [2].

Предмет и методы дифференциальной геометрии.

Что такое геометрия? На это вопрос нельзя дать однозначного и короткого ответа. Вообще, геометрия — это наука о «геометрических фигурах», а именно, о свойствах таких «фигур», а также о соотношениях между ними. Но понятие геометрической фигуры не было постоянным в истории науки. Геометрические фигуры в евклидовой геометрии являются идеальным слепками реальных фигур. Точки, прямые, плоскости, треугольники, окружности, конусы, сферы и т.д. имеют прототипы в реальном мире. Заметим, что Платон, наоборот, считал, что реальные окружности, сферы, конусы, ... являются искаженными слепками идеальной окружности, идеальной сферы, идеального конуса, ... Отметим, что такой подход противоречив. Согласно теории идей Платона имеется, например, только один идеальный стул, созданный Богом, а все реальные стулья являются его слепками. Но идеальный треугольник состоит из трех сторон, поэтому требуется иметь хотя бы три идеальных прямых.

Геометрические фигуры в евклидовой геометрии содержатся в евклидовом пространстве, являются его частью. Поэтому геометрия — это наука о пространстве и специальных подмножествах этого пространства, которые и называются геометрическими фигурами. Заметим, что понятие пространства является историческим. Сначала математическое пространство отождествлялось с физическим пространством. Но в 19 веке стало понятно, что такой подход очень неудобен, и математики пришли к убеждению о независимости математического пространства от физического. Этот взгляд привел к «созданию» различных математических пространств, мало похожих на физическое пространство. Тем не менее, теории о некоторых «созданных» пространствах стали применяться в физике.

Простейшим пространством современной математики является n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. Геометрические фигуры в пространстве $\mathbb{R}^n$, с точки зрения современной математики, это множества, заданные системами уравнений и неравенств

$$F_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,F_m(x_1,\ldots,x_n)=0,$$
$$G_1(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0,\ldots,G_k(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 0.$$

Далее мы будем рассматривать только множества, заданные системой уравнений

$$F_1(x_1,\ldots,x_n)=0,\ldots,F_m(x_1,\ldots,x_n)=0. \tag{1}$$

Исторически сначала рассматривался случай, когда $n=2$ или $n=3$. При $n=2$ и $m=1$ получаем уравнение $F(x,y)=0$. Если функция $F(x,y)$ «хорошая», то уравнение $F(x,y)=0$ задает кривую на плоскости $\mathbb{R}^2$. При $n=3$ и $m=1$ получаем уравнение $F(x,y,z)=0$. Если функция $F(x,y,z)$ «хорошая», то уравнение $F(x,y,z)=0$ задает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. При $n=2$ и $m=2$ получаем систему уравнений

$$F_1(x,y,z)=0,\ F_2(x,y,z)=0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что функции $F_1(x,y,z),F_2(x,y,z)$ «хорошие». Тогда каждое из уравнений $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ задает поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Поэтому множество, заданное системой уравнений (2), является пересечением двух поверхностей. Если эти поверхности пересекаются «трансверсально», то система уравнений (2) определяет кривую в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Если функции $F_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_m(x_1,\ldots,x_n)$, участвующие в системе (1), являются многочленами, то получаем множества, называемые *алгебраическими многообразиями*. Эти геометрические фигуры являются объектом изучения алгебраической геометрии. В случае, когда степени многочленов не превосходят 2, получаем многомерные аналоги фигур евклидовой геометрии. Традиционный курс, в котором изучают такие фигуры, называется «аналитической геометрией», но точнее называть его «линейной геометрией», так как в курсе аналитической геометрии рассматриваются фигуры, которые можно изучать с помощью линейной алгебры. Современная алгебра дает возможность изучать фигуры, определенные системой уравнений (1), где функции $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)$ являются многочленами произвольной степени. С другой стороны, имеются фигуры, которые рассматривали и в древней Греции, не являющиеся алгебраическими многообразиями. Например, спираль Архимеда на плоскости нельзя задать уравнением $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — многочлен (почему?).

В дифференциальной геометрии рассматриваются фигуры, заданные системой уравнений вида (1), где функции

$$F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)$$

являются дифференцируемыми функциями некоторого класса. Мы ограничимся случаем, когда все функции принадлежат классу C^∞, то есть для них определены все частные производные произвольного порядка. Такие функции обычно называют *бесконечно дифференцируемыми*, а мы будем называть просто *дифференцируемыми* или *гладкими* функциями. Здесь нужно заметить, что если не вводить дополнительных условий на систему уравнений (1), то множество M, заданное этой системой, может быть крайне сложным для его изучения. Например, любое замкнутое и ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ можно задать системой уравнений (1), где все функции $F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)$ гладкие. Предлагается вывести из этого непростого утверждения, что можно задать произвольное замкнутое и ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ одним уравнением $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ гладкая. Естественное ограничение, которое предлагает математический анализ, состоит в требовании на матрицу Якоби функций

$$F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n),$$

чтобы она имела максимальный ранг в точках из множества M. Полученные геометрические фигуры изучаются в дифференциальной геометрии. Математический анализ будет основным инструментом для изучения таких геометрических фигур дифференциальной геометрии. В классической дифференциальной геометрии, созданной в конце 18 века (Л. Эйлер, Г. Монж) и усовершенствованной в начале 19 века (К. Гаусс) рассматривается случай $n = 2$ или $n = 3$. Современное изложение курса математического анализа позволяет сразу считать размерность объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$ произвольной. В нашем изложении курса дифференциальной геометрии мы пойдем по этому пути, а случаи $n = 2$ или $n = 3$ будут только иллюстрировать общие понятия и теоремы.

Заметим наконец, что в современной дифференциальной геометрии рассматривают более общие пространства чем $\mathbb{R}^n$, они называются дифференцируемыми многообразиями. Эти многообразия сами являются сложными геометрическими фигурами. Про них речь пойдет в следующем семестре в курсе «Современная геометрия».

Далее приводится рабочая программа курса и примеры контрольных работ.

Программа курса «Дифференциальная геометрия»

Введение: предмет и методы дифференциальной геометрии.

I. Понятие вложенного многообразия.

1. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных (повторение: дифференциал функции, теорема об обратном отображении, теорема о неявной функции).
2. Определение и примеры вложенного многообразия.
3. Параметризация и координатизация многообразия.
4. Касательное пространство к многообразию.
5. Дифференциал функции на многообразии.
6. Первая квадратичная форма на многообразии и ее применения.
7. Изометрия многообразий. Понятие внутренней геометрии.

II. Геометрия вложенных кривых.

1. Соприкасающиеся пространства к кривой.
2. Ортогонализация системы векторов (повторение).
3. Сопровождающий базис кривой (базис Френе).
4. Формулы Френе.
5. Вычисление кривизн кривой.
6. Ориентированный базис Френе и старшая кривизна со знаком.
7. Геометрическая интерпретация кривизн плоских и пространственных кривых.

III. Геометрия гиперповерхностей.

1. Вторая квадратичная форма гиперповерхности.
2. Первая кривизна кривой на гиперповерхности. Формула Менье.
3. Нормальная кривизна и кривизна нормального сечения.
4. Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду.
5. Главные кривизны гиперповерхности.
6. Гауссова кривизна гиперповерхности.
7. Классификация точек поверхности.
8. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена.
9. Геодезические линии на гиперповерхности.
10. Параллельное перенесение векторов вдоль кривой на гиперповерхности.
11. О внутренней геометрии гиперповерхности.

Пример первой контрольной работы

1. Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^6$ задано системой уравнений

$$xy = 1,\ u^2 + z^2 = 1,\ w - v^3 = 0.$$

Показать, что множество M является трехмерным многообразием и параметризовать его.

2. Написать уравнения касательного пространства к многообразию M, заданному системой уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

в заданной точке $p = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Поверхность $M \subset \mathbb{R}^3$ задана параметрически:

$$x = u + v,\ y = u - v,\ z = u^2 - v^2.$$

Вычислить первую квадратичную форму поверхности, с помощью ее вычислить длину кривой $v = u^2$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ и площадь фигуры $|u| \leqslant 1,\ |v| \leqslant 1$. (Интегралы можно не вычислять.)

Пример второй контрольной работы

1. Написать уравнения соприкасающихся плоскостей к кривой Γ: $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ u = t^4$ в точке $t = 1$.

2. Найти базис Френе к кривой Γ:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos 2t,\ u = \sin 2t$$

в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Вычислить кривизны кривой Γ:

$$x = \operatorname{ch} t,\ y = \operatorname{sh} t,\ z = \operatorname{ch} 2t,\ u = \operatorname{sh} 2t$$

в точке $t = 0$.

Пример третьей контрольной работы

1. Вычислить Гауссову кривизну поверхности в заданной точке:

$$z = x^2 + 4y^2, \quad p(1; 1; 5).$$

2. Вычислить символы Кристоффеля по данной первой квадратичной форме

$$ds^2 = \frac{dx^2}{x} + \frac{dy^2}{y} + \frac{dz^2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

3. Пусть первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y} \quad (y > 0).$$

Показать, что полупрямая $x = 0$ является геодезической.

4. Показать, что цилиндр с выкинутой одной образующей изометричен полосе на плоскости.

Список литературы

[1] *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1967.

[2] *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: МГУ, 1980.

Об одном алгебраическом способе вывода явного выражения для чисел Фибоначчи

М. А. Башкин

Рассматривается один из способов вывода в курсе дискретной математики явного выражения для чисел Фибоначчи, который использует некоторые понятия линейной алгебры.

Библиография: 1 название.

В данной статье речь пойдет об “алгебраическом” способе получения явного выражения для чисел Фибоначчи (см. [1]). Подобная задача рассматривается при изучении темы «Производящие функции и рекуррентные соотношения» курса дискретной математики студентами специальности «Математика» в четвертом семестре. Целесообразность такого подхода обосновывается необходимостью использования междисциплинарных связей курса «Дискретная математика» с другими дисциплинами (в данном случае с линейной алгеброй, тема «Жорданова нормальная форма линейного оператора»).

Пусть везде далее $k = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим пару последовательных чисел Фибоначчи a_k, a_{k+1} как координаты вектора в двумерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда переход от вектора $\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$ к вектору $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix}$ осуществляется по правилу:

$$\Phi : \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k + a_{k+1} \end{pmatrix},$$

которое можно записать в матричном виде:

$$\Phi : \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу преобразования Φ той же буквой: $\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что переход от вектора $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix}$ к вектору $\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+3} \end{pmatrix}$ осуществляется путем повторного применения преобразования Φ, и т.д.

Явное выражение для чисел Фибоначчи можно получить, вычислив матрицу Φ^n для произвольного $n \in \mathbb{N}$. Для этого матрицу Φ нужно диагонализировать, представив ее в виде

$$\Phi = T^{-1} \tilde{\Phi} T,$$

где $\tilde{\Phi}$ — диагональная матрица, а матрица T невырождена.

Чтобы найти матрицу $\tilde{\Phi}$ составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\det(\Phi - \lambda I) = 0;$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Его корни $\quad \lambda_1 = \alpha_1, \quad \lambda_2 = \alpha_2, \qquad$ где $\alpha_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \ \alpha_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Тогда

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу T:

1. $\begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 \\ 1 & 1 - \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \bar{e} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} -\alpha_2 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \overline{f} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$

Тогда

$$T = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{и} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно имеем,

$$\Phi = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_2 & -1 \\ -\alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, воспользовавшись уравнением

$$\Phi^n = T^{-1} \tilde{\Phi}^n T,$$

получаем

$$\Phi^n = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_2 \alpha_1^n - \alpha_1 \alpha_2^n & \alpha_2 \alpha_1^n - \alpha_2^{n+1} \\ -\alpha_1^{n+1} + \alpha_1 \alpha_2^n & -\alpha_1^{n+1} + \alpha_2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \Phi^k \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \Phi^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то общий член последовательности Фибоначчи имеет вид:

$$a_{k+1} = \frac{\alpha_2^{k+1} - \alpha_1^{k+1}}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right].$$

Список литературы

[1] *Ландо С.К.* Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2004. 144 с.

Об исходных данных для задач на построение жорданова базиса

Л. Ю. Белова, Ю. А. Белов

Предлагаются определённые меры для упрощения вычислительных задач на построение канонической формы матрицы оператора. Обсуждаются получающиеся при этом вопросы подготовки исходных данных.

Библиография: 3 названия.

Практическое изучение со студентами указанной темы так или иначе сталкивается с некоторыми объективными трудностями различного характера. В заметке предлагаются некоторые меры (дискуссионного характера), которые по мнению авторов могли бы несколько сгладить эти затруднения.

Действительно, задача построения жорданова базиса обычно является завершающей при изучении линейных операторов, и для её решения необходимы разнообразные и достаточно громоздкие вычислительные процедуры, которые сложно минимизировать. При этом данная тема является важной для приложений в других разделах математики, а также для мотивировки вычислительных методов линейной алгебры, то есть вопрос её приемлемого изучения является достаточно актуальным.

Прежде всего можно отметить, что имеется несколько различных теоретических подходов в изложении этой темы: индуктивный, использующий теорию модулей над кольцом главных идеалов (он приводит к методу λ-матриц) и непосредственный геометрический метод. Рассмотрение пространства как периодического модуля над кольцом многочленов является, с общеалгебраической и логической точки зрения, самым предпочтительным, однако более сложным при первоначальном изучении.

В задачниках [1–3] в основном рассматривается прямой геометрический метод, а также вопросы, возникающие при этом подходе.

В отмеченных задачниках даются примеры в основном только в трёхмерном или четырёхмерном пространстве. При этом в силу малой размерности многие содержательные трудности просто не возникают. Большие размерности практически невозможно рассмотреть из-за растущего объёма вычислений. Отметим также, что суммарное количество вычислительных задач по данной теме во всех трёх (наиболее уважаемых!) задачниках — около двадцати. Задачи из [1] через 30 лет повторяются в задачнике [2], что даже несколько неприлично, но неудивительно при указанных ограничениях. Такое положение сильно затрудняет проведение стандартных учебных мероприятий, например, организацию контрольных работ.

Напомним основные этапы построения канонического базиса и дадим предложения по сглаживанию отмеченного противоречия.

Если оператор задан матрицей A в некотором базисе, то первое, что надо сделать — подсчитать характеристический многочлен и найти его корни. Эта часть работы не представляет никаких идейных трудностей, специфических для данной задачи.

Проблему определения корней многочлена мы сейчас не рассматриваем, так как это отдельная большая задача и потому предлагается *характеристический многочлен и его разложение на линейные множители задавать в качестве данных.* Вопрос о подготовке таких данных будет обсуждён далее.

Следующий этап — определение корневых подпространств. Для этого надо взять матрицу $A - \lambda E$ в соответствующей степени и найти фундаментальную систему решений для однородной системы уравнений с этой матрицей. Это будет начальным базисом корневого подпространства, соответствующего данному λ. Это тоже стандартная задача. Для её облегчения можно было бы задавать заранее вычисленные степени указанных матриц, оставляя студентам только нахождение фундаментальной системы (т. е. фактически метод Гаусса). Далее работа идет внутри одного корневого подпространства. При этом можно считать, что построена матрица ограничения исходного оператора на данном корневом подпространстве. Здесь происходит основная работа — разложение корневого подпространства в прямую сумму циклических (в "жордановы клетки").

Напомним, для этого требуется построить возрастающую последовательность подпространств векторов высоты не более k, для k от 1 до кратности данного корня в характеристическом (в действительности в минимальном) многочлене оператора. При этом базисы меньшей высоты входят как часть базиса следующего подпространства, а затем проводится процесс проецирования базисных векторов большей высоты на предыдущее подпространство и дополнение их до нового базиса. Это главная часть работы по построению канонического базиса, являющегося объединением базисов циклических подпространств. Здесь для облегчения вычислений предлагается, как и ранее, давать студентам заранее вычисленные степени матрицы. Возможно, такой подход позволит при тех же затратах времени на практических занятиях рассматривать гораздо более содержательные примеры.

Подготовка данных может быть реализована с помощью компьютерной программы, главной частью которой должна быть процедура, генерирующая квадратные целочисленные матрицы C с определителем, равным 1 и такие, что элементы как исходной матрицы C, так и обратной C^{-1} находятся в заранее заданных границах. Заметим, что в наших условиях матрица C^{-1} автоматически является целочисленной.

Построенная матрица C далее используется как матрица перехода от исходного базиса к жорданову. Действительно, если матрица C построена, можно взять желаемую жорданову форму G с малыми целыми собственными значениями и получить матрицу оператора в исходном базисе: $A = CGC^{-1}$. Характеристический многочлен матрицы при этом, понятно, определяется по жордановой форме.

Заметим, что в этих условиях все данные и все выходные результаты целочисленны, и потому снимается вопрос о точности вычислений. Весь промежуточный счёт ткже может быть проведён в целых числах. Кроме того, для счёта «вручную», конечно, надо подбирать матрицы не более чем, например, седьмого порядка с коэффициентами, не превышающми по модулю 10–15 или даже 9. Здесь многое зависит от состава студентов, от имеющегося времени и других практических условий.

Вопрос о генерации подходящих целочисленных матриц является в некоторой степени творческим. Действительно, можно применять несколько различных методов генерации подходящих матриц, но все они являются адаптивными эвристиками. Например, можно генерировать верхние и нижние унитреугольные целочисленные матрицы, они автоматически имеют определитель, равный 1, и перемножая их, получать уже произвольные матрицы. Проблема ограниченности элементов исходной матрицы и обратной, конечно, теоретически не решается, приходится просто проводить отбор из многих примеров.

Можно генерировать $n-1$ строку матрицы, заботясь только о взаимной простоте элементов строки и соблюдая ограничения на величину элементов, а последнюю, n-ую строку получать как решение диофантова уравнения, чтобы обеспечить равенство определителя 1. И снова ограниченность получающихся элементов матрицы C и C^{-1} ничем не гарантируется. Тем не менее (как показывают проведённые небольшие численные эксперименты) можно получить вполне подходящий запас задач по теме, если поработать с указанной программой.

Отметим, что попутно подобная программа пополняет запас удобных задач по смежным темам: построение обратной матрицы, нахождение собственных векторов и собственных значений.

Список литературы

[1] *Проскуряков И. В.* Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1978.

[2] Сборник задач по алгебре / Под ред. Кострикина А. И. М.: Физматлит, 2001.

[3] *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

О содержании дисциплины "Математика" на экономическом факультете для специальности 060500 "Бухгалтерский учет, анализ и аудит"

Л. П. Бестужева

Рассматриваются некоторые проблемы отбора содержания дисциплины "Математика" в рамках ГОС 2000 года и проекта ФГОС СПО, реализующего компетентностный подход.

Библиография: 6 названий.

Дисциплина "Математика" на экономическом факультете относится к циклу ЕН (естественнонаучных дисциплин) и ее содержание определяется ГОС 2000 года, называемых стандартами второго поколения. На дисциплину в целом отведено 142 часа лекций, 114 часов практических занятий на три семестра. Чтобы обозначить проблемы, возникающие при преподавании этой дисциплины, приведем текст ГОС в полном объеме [1].

Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: операции над векторами и матрицами; системы линейных алгебраических уравнений; определители и их свойства; собственные значения матриц; комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве; выпуклые множества и их свойства; математический анализ и дифференциальные уравнения: предел последовательности и его свойства; предел и непрерывность функции; экстремумы функций нескольких переменных; неопределенный и определенный интегралы; числовые и степенные ряды; дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Теория вероятностей и математическая статистика: случайные события; частота и вероятность; основные формулы для вычисления вероятностей; случайные величины; числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин; нормальный закон распределения; генеральная совокупность и выборка; оценки параметров; корреляция и регрессия. Экономико-математические методы: линейное и целочисленное программирование; графический метод и симплекс-метод решения задач линейного программирования; динамическое программирование; математическая теория оптимального управления; матричные игры; кооперативные игры; игры с природой; плоские графы; эйлеровы графы; гамильтоновы графы; орграфы; сетевые графики; сети Петри; марковские процессы; задачи анализа замкнутых и разомкнутых систем массового обслуживания. Экономико-математические модели: функции полезности; кривые безразличия; функции спроса; уравнение Слуцкого; кривые "доход-потребление"; кривые "цены-потребление"; коэффициенты эластичности; материальные балансы; функции выпуска продукции; производственные функции затрат ресурсов; модели поведения фирмы в условиях совершенной и несовершенной конкуренции; модели общего экономического равновесия; модель Эрроу-Гурвица; статистическая и динамическая модели межотраслевого баланса; общие модели развития экономики; модель Солоу.

Мы видим широкий спектр разделов, каждый из которых является самостоятельной дисциплиной на математическом факультете. Перечислим основные разделы дисциплины, которые упоминаются в требованиях к знаниям студентов и которые задают ее структуру. В результате изучения дисциплины студенты должны знать и уметь использовать

— основы математического анализа,

— основы алгебры, геометрии и дискретной математики;

— основы теории дифференциальных уравнений;

— основы теории вероятностей и математической статистики;

— экономико-математические методы;

— экономико-математические модели.

Не всегда математика на экономическом факультете была представлена одной дисциплиной. До введения ГОС 2000 года было три самостоятельные дисциплины: "Высшая математика", "Теория вероятностей и математическая статистика" и "Линейное программирование", каждая из которых завершалась экзаменом. Высшая математика включала в себя разделы: математический анализ, аналитическая геометрия и линейная алгебра. ГОС 2000 года охватывают значительно более широкий материал, включающий разделы дискретной математики, дифференциальных уравнений и систем массового обслуживания. Кроме того, сюда же отнесены и экономико-математические модели.

Такой большой объем материала и его разнообразие порождают две основные проблемы. Первая проблема связана с отбором конкретного содержания каждого раздела дисциплины и его распределением на уровни усвоения: от “иметь представление” до “знать и уметь использовать для решения задач”. При этом надо учитывать, что отбор должен обеспечивать целостное восприятие раздела, а не быть набором плохо связанных между собой математических фактов. Кроме того, должен быть выделен и отобран тот материал раздела, который необходим для изучения другого раздела дисциплины, т. е. должны быть отслежены внутридисциплинарные связи. Не менее важен междисциплинарный анализ с целью обеспечения математическим аппаратом других дисциплин, таких как информатика, эконометрика, статистика, микро- и макроэкономика. И наконец, отбор материала должен обеспечивать профессиональную направленность дисциплины, что означает использование на занятиях по математике экономических интерпретаций изучаемых математических понятий, постановку и решение профессионально-ориентированных задач, т. е. задач, имеющих экономическое содержание. Вторая проблема связана с выбором строгости изложения математических фактов: от приведения готовых “рецептов” до полного и глубокого обоснования в виде доказательств. Впрочем, существует и еще одна проблема, от которой в большой степени зависит решение первых двух. Это уровень математической подготовки абитуриентов в настоящее время и их возможности для усвоения математического материала такого объема и сложности за сравнительно короткое время (три семестра).

Свои коррективы вносит и интернет-экзамен, способствуя созданию единого образовательного пространства, т. к., чего греха таить, реальное содержание дисциплины при таком многообразии ее разделов часто определялось в какой-то степени личными пристрастиями преподавателя. С другой стороны, если объективно оценивать объем материала, заявленный в ГОС, то становится очевидным, что того количества часов, которые отведены на дисциплину, явно недостаточно для полноценного его усвоения так, как это принято в математике, т. е. не на уровне “иметь представление”, а на уровне “уметь решать задачи”.

Свое влияние на отбор содержания дисциплины в рамках ГОС оказывает и учебная литература. Следует отметить, что за последние 10-15 лет было издано большое количество учебников по математике для экономических специальностей, в той или иной степени соответствующих ГОСам. Как правило, они имеют ярко выраженную профессиональную направленность. С обзором такой литературы можно познакомиться в статье [2].

Рассмотрим, как решаются эти проблемы на примере темы “Графический метод и симплекс-метод решения задач линейного программирования (ЗЛП)” одного из разделов ГОСов “Экономико-математические методы". ЗЛП рассматривается как частный случай общей постановки задачи математического программирования. Как уже было сказано выше, "Линейное программирование" в свое время было отдельной дисциплиной на экономическом факультете, чем объясняется достаточно подробное ее изучение, включающее не только формулировку, но и доказательство теорем, составляющих теоретическое обоснование симплекс-метода решения ЗЛП. Рассматривалась также специальная ЗЛП — транспортная задача и метод потенциалов ее решения. Излагалась теория двойственности и ее экономическая интерпретация. ГОС, действующий в настоящее время, не регламентирует глубину изучения и строгость изложения этой темы. В условиях необходимости изучения большого объема материала, дефицита учебного времени и реальных возможностей большинства студентов оптимальное содержание этой темы сейчас выглядит следующим образом.

1. Задача планирования производства.

2. Постановка ЗЛП. Допустимый план, допустимое множество, целевая функция, оптимальный план. Типы ЗЛП.

3. Графический метод решения ЗЛП в пространстве R^2. Гипотезы о решении ЗЛП в пространстве R^n.

4. Геометрическая интерпретация допустимого множества в пространстве R^n.

5. Теоретическое обоснование симплекс-метода решения ЗЛП: теорема об угловой точке допустимого множества и алгебраическая характеристика угловой точки допустимого множества (без доказательства).

6. Пример решения ЗЛП симплекс-методом с графической иллюстрацией.

7. Критерий оптимальности опорного плана.

8. Особые случаи симплекс-метода (вырожденность, неразрешимость), с графической иллюстрацией.

9. Постановка транспортной задачи, основные определения.

Это минимум содержания рассматриваемой темы для обязательного усвоения всеми студентами. Таким образом, "за бортом" остается ряд вопросов: методы решения транспортной задачи, теория двойственности, а также целочисленное программирование. В то же время есть студенты, интеллектуальный потенциал которых позволяет расширить содержание темы за счет самостоятельного изучения ряда вопросов с последующим написанием рефератов с кратким изложением теории и, самое главное, с решением задач. Приведем список названий рефератов, ориентирующих студентов на более глубокое изучение темы.

1. Экономико-математический анализ оптимального решения ЗЛП (анализ на чувствительность).

2. Теория двойственности. Правила построения двойственной задачи. Экономическая интерпретация двойственности. Теоремы двойствен-

ности и их использование для решения ЗЛП.

3. Транспортная задача. Методы построения первоначального распределения поставок. Распределительный метод. Метод потенциалов.

4. Транспортная задача с ограничениями на пропускную способность.

5. Транспортная задача по критерию времени.

6. Целочисленная ЗЛП. Метод Гомори.

7. Л. В. Канторович и линейное программирование.

8. Решение ЗЛП на компьютере.

9. Решение транспортной задачи на компьютере.

Все рефераты сопровождаются списками литературы с соответствующей теорией и текстами задач для решения. Реферат оценивается по результатам собеседования, наиболее интересные рефераты докладываются на специальном занятии или на студенческой научной конференции. Чтобы исключить прямое заимствование из интернета, к зачету принимаются только решения задач из предложенной литературы в рукописном виде.

С темой "Линейное программирование" тесно связаны многие темы раздела "Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии". Хотя в ГОСах идет некоторая расшифровка содержания этого раздела, представляется целесообразным при отборе содержания сделать акцент на темах, которые многократно используются как внутри самого раздела, так и в разделе "Экономико-математические методы". Одной из таких тем является "Метод Жордана – Гаусса решения систем линейных уравнений", который лежит в основе симплекс-метода решения ЗЛП. Подробное описание содержания этой темы через постановку диагностируемых целей соответствующего практического занятия, представленных в форме требований к уровню усвоения учебного материала студентами, сделано в работе [3].

В настоящее время разрабатываются стандарты нового поколения, так называемые ФГОС ВПО (федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования), реализующие компетентностный подход.

В существующем проекте этого стандарта [4], разработанном ведущими российскими вузами, определены требования к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата по направлению подготовки 61 б - "Экономика" с квалификацией (степенью) "бакалавр" . Согласно этому проекту выпускник должен обладать следующими компетенциями: общекультурными (ОК), профессиональными (ПК), которые достаточно подробно конкретизированы и закодированы: ОК-1 – ОК-16 и ПК-1 – ПК-15, т. е. перечислены шестнадцать общекультурных компетенций и пятнадцать профессиональных. Далее следует перечень учебных циклов, изучение которых предусмотрено основной образовательной программой бакалавриата по направлению "Экономика". Нас будет интересовать математический цикл, который, как и остальные циклы имеет базовую (обязательную часть) и вариативную (профильную), устанавливаемую вузом. Общая трудоемкость математического цикла составляет 40-50 зачетных единиц, в том числе базовая часть — 20-24 зачетные единицы. В перечень дисциплин для разработки примерных программ, учебников и учебных пособий математического цикла включены математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика и одна из дисциплин по выбору вуза: методы оптимальных решений или теория игр. Содержание каждой дисциплины не расшифровывается. Как говорится, все возвращается на круги своя на новом витке развития экономического образования. Новым является перечень кодов формируемых компетенций, которые ставятся в соответствие дисциплинам.

В результате изучения базовой части цикла обучающийся должен:
знать основы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, необходимые для решения экономических задач;
уметь применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования для решения экономических задач;
владеть навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач, методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Возвращаясь к содержанию математического цикла, еще раз отметим, что полностью отсутствует его конкретизация, перечислены лишь дисциплины, что делает актуальным отбор их содержания. Определим принципы выбора содержания дисциплин математического цикла.

Принцип фундаментальности, состоящий в выделении математических знаний, обладающих научной и методологической ценностью и многократно использующихся в математической деятельности.

Принцип целостности дисциплины.

Принцип профессиональной направленности.

Принцип дифференциации глубины и строгости изложения отдельных вопросов в зависимости от их методологической и профессиональной значимости.

Принцип междисциплинарных связей, обеспечивающий математическим аппаратом смежные дисциплины.

Принцип соответствия объема содержания дисциплины времени, отведенному на его изучение.

Принцип избыточности, позволяющий распределить содержание на уровни усвоения и тем самым обеспечить индивидуализацию обучения.

Принцип соответствия содержания дисциплины особенностям студенческой аудитории.

Принцип профессиональной целесообразности, обеспечивающий перспективы применения полученных знаний в процессе дальнейшего образования, самообразования и профессиональной деятельности.

Эти принципы не являются чем-то новым, связанным с появлением концепции компетентностного подхода в образовании и новыми ФГОС ВПО. Они выработались в результате работы с ГОС 2000 года в условиях очевидной избыточности содержания этого стандарта и возникшим в результате этого проблемам. Принципы окончательно утвердились при знакомстве с проектом нового стандарта, который дает предельно краткое содержание математического цикла и, следовательно, свободу в его конкретизацию. Тем самым обеспечивается преемственность при переходе от старого стандарта к новому, позволяющая сохранить положительный опыт работы с содержанием дисциплины и обогатить его. Для этого необходимо сделать акцент на развитие профессионально значимых качеств личности студента средствами математики.

Отметим учебник "Математика для экономического бакалавриата", авторы М. С. Красс и Б. П. Чупрынов [5]. Как следует из названия, содержание учебника призвано обеспечить базовую совокупность знаний, необходимых бакалавру экономики. В учебнике рассматриваются элементы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и линейного программирования, т. е. дисциплины, которые заявлены в проекте ФГОС ВПО для направления "Экономика". Основные математические понятия иллюстрируются применением в экономике. Тем самым студент четко сориентирован, для чего и когда ему полезно знание математики при изучении дисциплин профессионального цикла, вследствие чего повышается мотивация учебной деятельности и познавательные потребности.

Остановимся на списке компетенций, заявленных в проекте нового стандарта. Заметим, что обсуждение их состава и конкретизация для дисциплин математического цикла - тема отдельной статьи. Здесь же хочется отметить, что авторы проекта явно недооценивают возможности математики для формирования общекультурных компетенций. Например, в перечень компетенций, формируемых математикой, не включены ОК-6: способен логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь; ОК-7: готов к кооперации с коллегами, работе в коллективе; ОК-9: способен к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; ОК-10: способен критически оценивать свои достоинства и недостатки, наметить пути и выбрать средства развития достоинств и устранения недостатков. Математика и раньше, до компетентностного подхода, делала значительный вклад в развитие эвристических способностей, алгоритмического и логического мышления, необходимых в любой профессиональной деятельности. Компетентностный подход позволяет сделать процесс развития мышления и личностных качеств, необходимых в профессиональной деятельности экономиста, средствами дисциплин математического цикла более целенаправленным и явным. Для этого необходимо скорректировать знаниецентрированную направленность математического цикла в сторону усиления таких компонентов образования, как личностно-ценностный, операционально-деятельностный, информационно-коммуникативный. Этому способствует увеличение доли самостоятельной работы при должной ее организации, практика небольших творческих заданий, использование активных методов обучения, в частности учебных игр, проведение олимпиад-соревнований между группами и т. д. Опыт создания и проведения учебной игры по одной из тем дисциплины “Математика” на экономическом факультете описан в статье [6].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского гуманитарного научного фонда (№ 08-06-00302)

Список литературы

[1] ГОС ВПО, специальность – 060500 Бухгалтерский учет, анализ и аудит, квалификация: экономист. www.edu.ru/db/spe/archiv.htm

[2] *Бестужева Л. П., Майорова Н. Л.* Обзор учебной литературы по математике для экономических специальностей / Проблемы повышения эффективности образовательного процесса в высших учебных заведениях: Сб. науч.-метод. статей. Ярослав. гос.ун-т. Ярославль, 2009.

[3] *Бестужева Л. П.* Проектирование диагностируемых целей при обучении математике на экономическом факультете / Методические аспекты совершенствования образовательного процесса в вузе по экономическим специальностям: материалы международной научно-методической конференции. Ярославль: ЯрГУ, 2009.

[4] ФГОС ВПО (проект) по направлению 61б – "Экономика" с квалификацией (степенью) "бакалавр" .
http://mon.gov.ru/pro/fgos/vpo/pr_fgos_2009_pv_61b.pdf

[5] *Красс М. С., Чупрынов Б. П.* Математика для экономического бакалавриата: учебник для вузов. М.: Дело, 2005.

[6] *Бестужева Л. П., Медведева Л. Б.* Решение задачи линейного программирования графическим способом / Ярославский педагогический вестник. 1998. №1(54).

Промежуточная аттестация по курсу "Теория вероятностей и математическая статистика"

Ю. В. Богомолов

Предлагается описание системы промежуточной аттестации по одному из курсов.

Семестровая аттестация (зачеты, экзамены) по включенному в программу учебному курсу является крайне важным компонентом системы освоения соответствующего предмета. Безусловно, аттестация по курсу, являясь в первую очередь лишь формой контроля, не должна подменять собой содержательную сторону предмета (собственно процесс передачи знаний), оставаясь при этом на вторых ролях и имея лишь второстепенную функцию. Однако как студенты, так и преподаватели вполне отдают себе отчет в том, что еще живо представление об учебном процессе как наборе семестровых аттестационных мероприятий, преодолеваемых в режиме максимальной концентрации, и длительных промежутков между ними, проходящих весьма спокойно и беззаботно, без приложения каких-либо усилий. При этом студенты порой пытаются подтвердить, укрепить данное представление, а преподаватели стараются такого рода ситуацию сдвинуть с мертвой точки.

Формат промежуточной (или семестровой) аттестации очевидно накладывает определенный отпечаток на то, в каком режиме будет осуществляться работа в течение семестра. В том случае, если интенсивность прикладываемых усилий или успешность продвижения по курсу (возможно, выражаемая в результатах, полученных в ходе промежуточной аттестации) не оказывает большого влияния на характер прохождения итоговых испытаний, в качестве побочного эффекта это способствует низкой посещаемости занятий, слабой задействованности студентов в работе в аудитории или в ходе самостоятельной работы, оставляющей желать лучшего мотивации на достижение по возможности максимального результата. Примерно та же картина будет и в том случае, если студент не осознает степени влияния текущих результатов на итоговую аттестацию: здесь срабатывает вполне объяснимое желание в ходе освоения предмета прикладывать усилия, соразмерные с предъявляемыми требованиями, а в ситуации отсутствия определенности в формулировке предъявляемых требований, да еще и отложенных до конца семестра, о мотивации на плодотворную текущую работу говорить не приходится.

С другой стороны, явным образом оговоренный формат итоговых испытаний с достаточно четко прописанным характером учета текущих результатов при проведении текущей аттестации по ходу семестра (посещаемости, работы на практических семинарских занятиях, результатов контрольных и самостоятельных работ, самостоятельной работы вне аудитории, активности работы на лекциях) может способствовать увеличению интенсивности работы по ходу семестра, стимулированию самостоятельной работы и активности на аудиторных занятиях, что в итоге выражается в повышении уровня освоения материала курса и, как следствие, повышению успеваемости.

Остановимся ненадолго на самом экзамене (зачете) как элементе учебного процесса (или, более глобально, системы образования). При этом постараемся выделить основные функции, присущие экзамену и которые приходится явным или неявным образом постоянно держать в голове, определяя структуру курса в целом и аттестации по нему в частности. Во-первых (скорее даже первая не по важности, а лишь из тех соображений, что лежит на поверхности), в их число входит уже отмеченная выше контролирующая функция и функция аттестации (здесь и попытка перевести субъективно воспринятый уровень освоения курса в некоторый числовой показатель — оценку, и отсев тех, чей уровень вряд ли делает возможным адекватное освоение программы по другим курсам, сюда же можно отнести и выделение тех, кто в ходе освоения курса продвинулся наиболее сильно). Во-вторых, экзамен несет очевидную функцию обратной связи, когда студент может, используя внешнюю оценку (не обязательно выраженную числом), самостоятельно сделать выводы о собственной результативности, эффективности предпринимаемых для освоения предмета (и в целом для своего образования) усилий, а преподаватель выделяет проблемные места в курсе (например, плохо воспринятые и, соответственно, усвоенные темы), корректирует структуру курса на будущее, модифицирует форму изложения материала. В-третьих, выделим отдельно такую важную функцию экзамена как возможность систематизировать, обобщить накопленные в ходе курса знания, составить целостный образ предмета и именно в этом целостном виде включить его в собственную систему представлений об окружающем мире или, в частности, о математической составляющей науки.

Вполне естественным является желание не нагружать отмеченными функциями лишь итоговый экзамен по предмету, а распределить их по ходу всего семестра (курса). Весьма эффективным средством в этом отношении является активно обсуждаемая и внедряемая в последнее время рейтинговая система оценивания, основанная на непрерывном накоплении текущих баллов, полученных за широкий спектр видов учебной работы по ходу семестра (посещение занятий, прохождение текущей аттестации, выполнение домашних заданий, лабораторных и практических работ, и т. д.). Безусловно признавая достоинства рейтинговой системы с точки зрения более равномерного распределения упомянутых выше положительных функций экзаменов, а также в повышении уровня мотивации студентов к плодотворной текущей работе, повышении степени предсказуемости итогового результата (в зависимости от текущих усилий и результатов) и снижении уровня «сессионного стресса», стоит отметить, что реализации такого рода форм работы и аттестации сопряжено с рядом существенных трудностей. Здесь можно упомянуть как организационные затруднения (например, потребность в достаточно жесткой регламентации структуры курса, необходимость изначальной фиксации критериев в баллах), так и возможные искажения решаемых задач (к примеру, вместо мотивации на лучшее освоение курса получаем «работу ради цифры» (только уже не на итоговом экзамене, а в течение всего семестра), а вместо уверенности в итоговой оценке — ощущение невозможности исправить текущие пробелы и недоработки).

В связи с этим при разработке системы аттестации по курсу возможно выдвинуть следующий ожидаемый результат: не производя полного внедрения рейтинговой системы в структуру курса, сохранить большинство положительных особенностей данной системы и по возможности нивелировать отрицательные. Данные соображения были учтены при разработке формы текущей и промежуточной аттестации, используемой в дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» (III курс, факультет информатики и вычислительной техники, специальность «Прикладная математика и информатика», 5-6 семестры).

Упрощенно используемую мной систему семестрового экзамена по курсу можно описать следующим образом: студент получает комплект из нескольких заданий, а по итогам подготовки и устного ответа балл выставляется по своеобразной субтрактивной системе — из 5 баллов (соответствующих отличной оценке) вычитается количество заданий, с которыми справиться не удалось. Ключевым моментом здесь является предъявление на экзамене различных (по количеству включенных задач) комплектов заданий различным студентам в зависимости от их текущей работы по ходу семестра с сохранением общего принципа оценивания. Изначально предполагается, что на экзамене «средний» студент получает билет с четырьмя заданиями — два теоретического характера и две задачи (условно можно это называть «базовым комплектом»). Количество предлагаемых задач изменяется исходя из следующих критериев.

- Минус 1 задача (т. е. вынесение на экзамен двух теоретических вопросов и одной задачи вместо двух): средний балл за текущие контрольные мероприятия (контрольные и самостоятельные работы) не ниже 4, регулярная продуктивная работа на практических занятиях. В некоторых случаях (особо высокие результаты контрольных мероприятий, активная работа на занятиях, выполнение предложенных дополнительных заданий повышенной сложности) студент может быть вовсе избавлен от практической части экзамена.

- «Базовый комплект»: средний балл по практике около 3, нет грубых нарушений учебной дисциплины.
- Плюс 1 задача: средний балл с практики около 2, низкая активность на занятиях.
- Плюс 2 задачи: низкие результаты по итогам текущих контрольных мероприятий.
- Плюс 3 задачи: крайне низкие результаты контрольных мероприятий, систематическое нарушение учебной дисциплины (регулярные пропуски занятий, пропуски контрольных и самостоятельных работ).

Таким образом, активная продуктивная работа в течение семестра несколько облегчает прохождение итоговой аттестации: большинство студентов, избавленных от одной задачи (в предлагаемом на экзамене комплекте заданий), демонстрируют на экзамене уровень знаний, достойный как минимум хорошей оценки. Соответственно, те студенты, кто своим жизненным стилем избрал принцип «от сессии до сессии живут студенты весело», для успешного прохождения экзаменационного испытания вынуждены прикладывать больше усилий, а их шансы на получение положительного результата экзамена значительно снижены (при должном усердии и ликвидации по ходу подготовки к экзамену пробелов в знании курса они вполне могут претендовать в том числе и на достаточно высокую оценку, однако практика показала, что такого рода случаи крайне редки).

Стоит отметить, что формат итоговой аттестации, характер учета текущих результатов, а также критерии оценки секретом не являются, абсолютно открыты и прозрачны, и предварительно доносятся до сведения студентов. Это позволяет поддерживать определенный уровень дисциплины и систематическую работу в течение всего семестра, а также повысить «предсказуемость» итоговой оценки, что в какой-то степени стимулирует студентов к ее достижению, мотивирует к освоению курса и положительно влияет на уровень получаемых знаний.

О дополнительном математическом образовании школьников

Ю. В. Богомолов

Обсуждаются некоторые компоненты системы дополнительного математического образования школьников в Ярославской области.

Библиография: 2 названия.

В последнее время на снижение уровня математической подготовки студентов не жалуется (по личным впечатлениям автора) разве что ленивый. Преподаватели отмечают, что год от года студенты имеют все более слабую подготовку по программе средней школы, сетуют на слабый уровень общей математической культуры вчерашних абитуриентов, а также с сожалением констатируют факт, что все чаще, особенно на младших курсах, приходится переключаться от освоения университетской программы на ликвидацию пробелов, доставшихся по наследству от школы. К сожалению, все эти претензии на поверку оказываются вовсе не беспочвенными. Причины, объясняющие факт снижения математического уровня абитуриентов, широко обсуждаются (можно отметить общую демографическую ситуацию, непонятную ситуацию с новыми образовательными стандартами, снижение уровня квалификации педагогических кадров, обусловленное уходом из школы опытных педагогов и отсутствием должной смены, введение единого государственного экзамена, побудившее некоторых учителей переключиться от обучения математике на натаскивание к экзамену, и многие другие причины), однако это тема для отдельного разговора.

Однако наряду с отмечающимся снижением уровня, следует обратить внимание еще на один достаточно важный момент: содержание школьного образования и адекватность его требованиям вуза. От вчерашних школьников, пусть даже и достаточно подготовленных с точки зрения требований единого экзамена, ожидаются знания основ теории чисел (данная тема изучается сразу после начальных классов, однако в дальнейшем к ней так и не возвращаются), понимания некоторых основных комбинаторных законов и правил, пусть и на бытовом уровне, начальных навыков использования некоторых общематематических понятий (необходимость и достаточность, частный и общий случай, следствие, и так далее) и принципов доказательства утверждений (принцип

Дирихле, принцип крайнего, дискретная непрерывность, инвариант), да и в целом осознания необходимости той самой «доказательности» для математических утверждений (по большей части сохранившейся лишь в школьном курсе геометрии), не говоря уже о желании видеть хотя бы некоторые проявления гибкого, нестандартного мышления, умения работать не по алгоритму. Тем не менее, в средней школе, особенно в старших классах, внимание уделяется чуть ли не противоположным аспектам математического образования. Как отметил Ю. А. Неретин [1], во многом это сопряжено с возникновением особой отрасли человеческого знания — «абитуриентской математики» (математики вступительных экзаменов), предназначенной лишь для обеспечения функционирования системы вступительных экзаменов, вытеснившей в какой-то момент «обычную» математику из образования старшеклассников.

Решению описанных проблем может в определенной степени поспособствовать развитие системы дополнительного образования школьников. Естественная дифференциация школьников по склонности к различного типа мышлению предполагает создание условий для развития одаренных в области математики школьников. Развитие математических способностей одаренных школьников, их специфических логических и алгоритмических навыков, умственной (в том числе, математической) культуры будет наиболее эффективным при соответствующей поддержке, которую школьник получает в системе дополнительного образования. Такого рода работа требует рассмотрения не в отрыве от системы общего образования, но как естественное продолжение и дополнение, позволяющее более полно раскрыться интересующимся математикой школьникам, привлечь их к систематической работе, а в конечном итоге повысить уровень общей математической грамотности абитуриентов, готовых к дальнейшему математическому образованию. Ниже будут описаны некоторые компоненты данной системы, реализуемые в последние несколько лет в Ярославле и Ярославской области при непосредственном участии преподавателей Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова (факультета информатики и вычислительной техники и математического факультета). Здесь требуется небольшая ремарка: здесь будут рассматриваться лишь те направления работы, к которым автор имеет отношение (в Ярославле и области развиваются также и другие, крайне важные компоненты системы дополнительного образования школьников (например, научно-исследовательская работа), которые более адекватно смогут описать и прокомментировать преподаватели, более продуктивно работающие в соответствующем направлении).

1. Очные занятия по математике (математические кружки)

Кружковая работа является ключевым звеном в системе дополнительного математического образования, позволяя выявлять и планомерно работать с начинающими математиками, поддерживать их интерес к математике, готовить к дальнейшей научно-исследовательской деятельности, прививая навыки исследовательской работы и научной дискуссии. При этом особое внимание следует обратить на своевременное развитие упомянутых навыков, что эффективно реализуется при работе математических кружков для школьников младшего среднего возраста.

За последние несколько лет в Ярославле увеличилось как количество очных математических занятий со школьниками-математиками, так и диапазон охваченных возрастных категорий, что позволяет привлечь к дополнительным занятиям математикой более широкий круг школьников. Здесь можно упомянуть очные математические кружки Центра образования школьников «Олимп» для учащихся 5–11 классов, а также развитую систему дополнительных математических занятий (кружков, факультативов) на базе школ. Увеличение количества привлеченных школьников потребовало модифицировать структуру системы математических кружков: помимо городского математического кружка, два года назад занятия аналогичных математических кружков начались по районам Ярославля (Ленинский, Дзержинский, Заволжский). Занятия проводят преподаватели, аспиранты и студенты математического факультета и факультета ИВТ ЯрГУ.

2. Математические бои

Областной турнир математических боев проводится с 1994 года и ежегодно привлекает сотни школьников из различных школ Ярославля и Ярославской области (в последних турнирах стабильно принимают участие 30-40 команд, в состав которых в целом привлекаются порядка 300 школьников). Непосредственно сам математический бой представляет собой командное математическое соревнование, в основу которого положено коллективное решение предложенных заданий с последующим устным обсуждением в ходе особым образом организованной дискуссии. Математический бой включает в себя групповую работу над решением интересных нестандартных задач, устное изложение решения, поиск ошибок и недочетов в предложенном решении (оппонирование), оценку трудности задач (с целью выбора правильной игровой стратегии). В процессе обсуждения задач во время подготовительной части боя члены команды, приобретают навыки четкого изложения собственных идей, решений, выявления позитивных моментов и устранения имеющихся недостатков (в том числе, в чужих решениях), что способствует формированию навыков групповой научной работы. В ходе рассмотренной формы математического состязания формируются первичные навыки творческой научной деятельности и ведения научной дискуссии.

Участников игры нередко захватывает сам процесс совместного поиска решения новых задач, выдвижения своей точки зрения, поиска ошибок и путей их исправления, при этом сам результат имеет второстепенное значение.

Стоит отметить крайне важное стимулирующее воздействие турнира математических боев: участие в турнире порой инициирует возникновение математических кружков и факультативов в школах, активизирует включение школьников в систему дополнительных занятий, чем способствует реализации основных задач — популяризации научного знания и привлечения способных школьников к систематическим занятиям математикой.

3. Выездные математические школы (математические лагеря)

Важным звеном в системе дополнительного математического образования являются зимние и летние выездные предметные школы (образовательные математические лагеря). Работа в рамках образовательного лагеря позволяет планомерно работать с выявленными в течение года начинающими математиками, поддерживать их интерес к математике, готовить к дальнейшей профессиональной научно-исследовательской деятельности. Система предметных занятий в образовательном лагере способствует привлечению школьников к дальнейшим систематическим занятиям математикой в рамках системы дополнительного образования в течение учебного года (на кружках и факультативах). В ходе лагерной смены школьники оказываются погруженными в информационно насыщенную математическую среду, вовлекаются во взаимодействие как с преподавателями-математиками, так и со школьниками со схожими интересами и потребностями, попутно в некоторой степени изолируясь от воздействия ряда отвлекающих факторов, что делает работу в ходе образовательного лагеря наиболее продуктивной.

4. Устная математическая олимпиада

В текущем учебном году в Ярославле была проведена традиционная, уже четвертая по счету, устная математическая олимпиада для 5–7 классов. Формат олимпиады предполагает, что участники не сдают письменно оформленные решения задач для проверки, а рассказывают их членам жюри. Таким образом, у организаторов имеется возможность напрямую пообщаться с участниками, проследить ход мыслей, отмечая возможные нестандартные ходы и в целом прослеживая развитие общих математических навыков даже в ситуации, когда «техническая» сторона математической подготовки школьника оставляет желать лучшего.

Основной задачей олимпиады является не определение победителей, а выявление и поддержка способных школьников (это не обязательно призеры олимпиады), привлечение их к углубленному занятию математикой, развитие интереса к интеллектуальной математической деятельности. Ежегодно в устной олимпиаде принимают участие более 300 учащихся 5–7 классов, среди которых регулярно удается выявить достаточно большое количество способных школьников и привлечь их к систематической работе в уже упоминаемой системе городских и районных математических кружков. Организация устной математической олимпиады требует привлечения большого количества (при этом большего, нежели для организации олимпиады в традиционной форме) квалифицированных членов жюри. По большей части жюри олимпиады формируется из студентов, аспирантов и преподавателей ЯрГУ им. П. Г. Демидова (факультета ИВТ и математического факультета).

Безусловно, в кратком обзоре вряд ли возможно охватить все разнообразие форм работы, используемых в системе дополнительного математического образования, равно как и дать полное описание мероприятий, направленных на работу со школьниками-математиками. Также стоит признать, что рассматривать существующую систему дополнительного образования как панацею от упомянутых в самом начале доклада проблем было бы достаточно опрометчиво. Однако отмеченное несомненно положительное влияние проводимых мероприятий в рамках системы дополнительного математического образования внушает определенный оптимизм и позволяет уверенно говорить о продолжении работы в данном направлении, возможном расширении спектра форм работы со школьниками и вовлечении в работу новых активных преподавателей, способных привлечь школьников к систематической профессиональной работе и содействовать таким образом повышению общего уровня математической подготовки абитуриентов.

Список литературы

[1] *Неретин Ю. А.* О будущей эволюции и влиянии ЕГЭ [Электронный ресурс]: Москва – Vienna, 21.10.2007 / Ю. А. Неретин. Режим доступа: http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=neretin. Дата обращения: 15.10.2009.

[2] *Богомолов Ю. В.* Об организации турнира математических боев / Ю. В. Богомолов. Проблемы повышения эффективности образовательного процесса в высших учебных заведениях: Сб. науч.-метод. ст. / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2004. С.13–25.

Различные подходы к понятию вектора в школьном курсе математики при изучении дисциплины НОШКМ

Ю. И. Большаков

Излагаются 6 различных определений понятия вектора как элемента двумерного векторного пространства в рамках читаемого автором курса "Научные основы школьного курса математики (геометрия)"(НОШКМ (геометрия)). Доказывается эквивалентность этих определений.

Библиография: 9 названий.

Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий, с помощью которых строится всё задание школьной геометрии. Для понимания этой части курса специальных знаний не требуется, необходимо лишь определенное умение оперировать с основными алгебраическими и геометрическими понятиями, которое приобретается на первых курсах университета. Содержательно эта часть курса изложена в книге [1], однако, и что вполне естественно, она адаптирована к соответствующему разделу изучаемого курса НОШКМ. Сам же курс является частью образовательной программы студентов-математиков, изъявивших желание получить дополнительно к специальности "математик" ещё и специальность преподавателя средней или высшей школы.

В современных курсах вузовской математики вектор, как правило, трактуется как элемент абстрактного множества V. При этом на V определены 2 операции: сложение элементов — внутренняя операция, и внешняя операция — умножение вектора на число. Эти операции удовлетворяют 8-ми аксиомам: 4-м аксиомам абелевой группы и 4-м аксиомам внешнего умножения на элементы λ поля действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$1)\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y;\quad 2)(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x;$$

$$3)\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x;\quad 4)1\cdot x=x.$$

Здесь $\lambda,\ \mu$ — произвольные действительные числа, $x,\ y$ — произвольные векторы, т. е. элементы множества V. На протяжении всего курса предполагается, что размерность пространства V равна 2, что позволяет адаптировать изучаемые здесь понятия к школьному курсу геометрии.

Важно отметить, что излагаемые в курсе НОШКМ определения понятия вектора являются эквивалентными, а соответствующие векторные пространства служат различными (изоморфными друг другу) моделями двумерного векторного пространства, на базе которого строятся аффинная и евклидова плоскости — предмет изучения школьной планиметрии. Однако в школьных учебниках по геометрии реализованы только первые 3 модели, оставшиеся 3 встречаются либо в вузовских учебниках, либо в научной литературе. Так, например, в [2, с. 299–300] вектор трактуется как направленный отрезок с условием равенства с точностью до переноса на некоторый направленный отрезок. Существование естественной биекции между векторами в выше понимаемом смысле и параллельными переносами точек плоскости мы находим в [3, с. 323–325]. В работе [4, с. 168] вектор $\vec{x}$ отождествляется с элементом $x \in \mathbb{R}^2$ с помощью фиксации базиса на плоскости. Как тензор вектор рассматривается, например, в книге [5, с. 25–27], как дифференцирование — в книге [6, с. 74–75], как класс касающихся кривых — в книге [7, с. 14–17]. Рассмотрим каждое из вышеприведенных определений по отдельности и установим их эквивалентность.

1. Вектор как элемент пространства $\mathbb{R}^2$ и как элемент пространства $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/\sim$

Определение 1.1. Двумерным векторным пространством называется множество $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} / x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2 \right\}$. *Вектор — элемент из* $\mathbb{R}^2$.

Операция сложения векторов и умножение вектора на число определена традиционно: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix},\ \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$. Легко убедиться в том, что все 8 аксиом векторного пространства имеют место, ибо компоненты $(x_1,\ x_2)$ вектора $\vec{x}$ суть элементы $\mathbb{R}$. Размерность 2 устанавливается мгновенно, достаточно указать стандартный базис: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Координаты вектора $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ в этом базисе суть его компоненты. Заметим, что пара векторов $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ — базис $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Таким образом, существует естественная биекция между всеми базисами в $\mathbb{R}^2$ и невырожденными матрицами из $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Определение 1.2. Элемент множества $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2/\sim$ называется вектором. Здесь $(X,\ Y) \sim (X',\ Y') \Leftrightarrow Y - X = Y' - X'$.

Очевидно, что $\sim$ действительно есть отношение эквивалентности: а) $(x,\ x) \sim (x, x) \Leftrightarrow x - x = x - x$; б) если $(x,\ y) \sim (z, t)$, то $(z,\ t) \sim$

(x, y), ибо отношение равенства в $\mathbb{R}^2$ симметрично; в) если $(x,\ y) \sim (z, t)$, $(z,\ t) \sim (p,\ q)$, то $(x,\ y) \sim (p,\ q)$, т. к. отношение равенства в $\mathbb{R}^2$ транзитивно. Вектор есть класс эквивалентности $[x, y]$.

Операции сложения элементов из V и умножение векторов на число определяется покомпонентно: $[x,\ y] + [z,\ t] := [x + z;\ y + t], \lambda \cdot [x,\ y] := = [\lambda x,\ \lambda y],\ x, y \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Корректность операции сложения векторов следует из определений: если $[x,\ y] = [x',\ y'],\ [z,\ t] = [z',\ t']$, то $[x + z,\ y + t] = [x' + z', y' + t']$. В самом деле, последнее соотношение равносильно равенству векторов в $\mathbb{R}^2:\ (y + t) - (x + z) = (y' + t') - (x' - z')$, которое следует из двух соотношений: $y - x = y' - x',\ t - z = t' - z'$. Аналогично проверяется корректность определения операции умножения вектора на число. Каждая из аксиом 1 – 8 имеет место по той причине, что каждая компонента пары $[x,\ y]$ лежит в $\mathbb{R}^2$. Роль нуля играет вектор $0 = [0, 0] = [x,\ x],\ x \in \mathbb{R}^2$. Убедимся в том, что $dim\ V = 2$. С этой целью установим изоморфизм $\varphi : \mathbb{R}^2 \to V$ следующим образом: $\varphi(x) = [0,\ x]$. Линейность φ устанавливается так: $\varphi(x + y) = [0,\ x + + y] = [0,\ x] + [0,\ y] = \varphi(x) + \varphi(y),\ \varphi(\lambda x) = [0,\ \lambda x] = \lambda[0,\ x] = \lambda\varphi(x)$. Для проверки биективности отображения φ достаточно убедиться в выполнении двух следующих равенств: а) $\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow\ x = x'$, б) для $\forall\, v = [x,\ y]$ существует $z \in \mathbb{R}^2$ такой, что $\varphi(z) = [x,\ y]$. Соотношение а) следует из определений, в соотношении б) достаточно положить $z = y - - x$, тогда $[0,\ y - x] = [x,\ y]$. Геометрический смысл: вектор $v = [x,\ y]$ есть свободный вектор с началом в точке x и концом в точке y.

2. Вектор как элемент образа отображения $F :\ {\mathbb{R}_+}^2 \to Is(\mathbb{R}^2)$

Определение 2.1. Назовём вектором элемент образа отображения $F :\ {\mathbb{R}_+}^2 \to Is(\mathbb{R}^2)$*, заданного соотношением:* $F(\xi)(x) := \xi + x;\ \xi,\ x \in \mathbb{R}^2$. Здесь множество всех биекций $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$ обозначено символом $Is(\mathbb{R}^2)$, абелева группа по сложению элементов $\mathbb{R}^2$ — символом $\mathbb{R}^2_+$.

Убедимся в том, что $Im\, F \subset Is(\mathbb{R}^2)$. Если $F(\xi)(x) = F(\xi)(y)$, то $\xi + + x = \xi + y\ \ \Rightarrow x = y$. Сюръективность $F(\xi)$: для $\forall y \in \mathbb{R}^2;\ \exists x \in \mathbb{R}^2$ такой, что $F(\xi)(x) = y \Leftrightarrow \xi + x = y \Leftrightarrow x = y - \xi$. Операции сложения векторов и умножения вектора на число определим так: $F(\xi) + F(\eta) := = F(\xi + \eta),\ \lambda \cdot F(\xi) := F(\lambda\xi)$. При таких определениях операций множество $V = Im\, F$ — двумерное векторное пространство, ибо векторы $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}^2$. Роль нуля в V играет $F(0) = id_{\mathbb{R}^2}$. Вектор $- v = -F(\xi) = = F(-\xi) = (F(\xi))^{-1}$. Установим двумерность $V\ :\ \ v_1 = F(e_1),\ v_2 = = F(e_2)$. Если $v \in Im\, F$, то $v = F(\xi)$ для некоторого $\xi \in \mathbb{R}^2$, поэтому $F(\xi) = F(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \xi_1 F(e_1) + \xi_2 F(e_2) = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$. С другой стороны, если $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$, то $\lambda F(e_1) + \mu F(e_2) = F(0) \Rightarrow F(\lambda e_1 + \mu e_2) = F(0)$, тогда $\forall x \in \mathbb{R}^2\ \lambda e_1 + \mu e_2 + x = 0 + x \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

Для дальнейшего нам потребуется следующее наблюдение. Отображение F задает транзитивное и эффективное действие группы $\mathbb{R}^2_+$ на множестве $M = \mathbb{R}^2$, т.е. F — гомоморфизм из группы ${\mathbb{R}_+}^2$ в группу $Is\,(\mathbb{R}^2):\ F(\xi+\eta) = F(\xi)\cdot F(\eta)$. В самом деле, $F(\xi+\eta)x = (\xi+\eta) + x$; $F(\xi)\circ F(\eta)(x) = F(\xi)(\eta+x) = \xi+(\eta+x) = (\xi+\eta)(x)$. Действие, определяемое с помощью F, транзитивно: $\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ \exists \xi \in \mathbb{R}^2$ такой, что $F(\xi)(x) = y \Leftrightarrow \xi + x = y \Leftrightarrow \xi = y - x$. Поскольку ξ единственен, то это действие просто транзитивно. Эффективность действия означает, что F — инъективно. Если $F(\xi) = F(\eta)$, то $\forall x \in \mathbb{R}^2\ F(\xi)(x) = F(\eta)(x) \Leftrightarrow \xi + x = \eta + x \Leftrightarrow \xi = \eta$. Оказывается, что всякое транзитивное и эффективное действие группы G на $\mathbb{R}^2$ определяет на последнем структуру аффинного пространства. Геометрический смысл вектора $v = F(\xi)$ — параллельный перенос $\mathbb{R}^2$ на вектор ξ. Этот подход к понятию вектора в школьной геометрии был популярен в 70-е годы прошлого столетия.

3. Вектор как дифференцирование $d:\ A \to \mathbb{R}$

Пусть A — алгебра всех бесконечно дифференцируемых функций в окрестности точки $O = (0,\ 0)^t \in \mathbb{R}^2$.

Определение 3.1 Вектором называется отображение $d:\ A \to \mathbb{R}$, *обладающее следующими тремя свойствам:* 1)$d(f+g) = d(f) + d(g)$, 2)$d(\lambda f) = \lambda d(f)$, 3)$d(fg) = d(f)\cdot g(0) + f(0)\cdot d(g)$; $f, g\ \in A, \lambda \in \mathbb{R}$.

Пример 3.2. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^2$. Положим $d_\xi : A \to \mathbb{R}$ по формуле: $d_\xi(f) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t\xi) - f(0)}{t}$. Легко проверить, что $d_\xi(f) = gradf(0)\cdot\xi$ — скалярное произведение. Поэтому если $|\xi| = 1$, то d_ξ — производная по направлению вектора ξ. Свойства 1), 2) и 3) для d_ξ проверяются непосредственно.

Возвратимся к общей ситуации. Множество всех дифференцировании d превращается в векторное пространство V с помощью введения двух операций:

$$(d_1 + d_2)(f) := d_1(f) + d_2(f);\ (\lambda d)(f) = \lambda(df);\ \forall f \in A,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Свойства 1) – 3) для вектора $d_1 + d_2$ легко проверяются. Проверим, например 3): $(d_1 + d_2)(fg) := d_1(fg) + d_2(fg) = d_1(f)g(0) + f(0)d_1(g) + d_2(f)g(0) + f(0)d_2(g) = (d_1(f) + d_2(f))g(0) + f(0)(d_1(g) + d_2(g)) = (d_1 + d_2)(f)g(0) + f(0)(d_1 + d_2)(g)$. Аксиомы векторного пространства выполняются, поскольку $d(f) \in \mathbb{R}$. Роль нуля играет нулевое отображение.

Остается установить двумерность V. С этой целью представим $f(\xi)$ в специальном виде: $f(\xi) - f(0) = \{g(t) := f(t\xi),\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^2\} = g(1) - g(0) = \int\limits_0^1 g'(t)dt = \int\limits_0^1 (f'_x(t\xi)\xi_1 + f'_y(t\xi)\xi_2)dt = \xi_1 f_1(\xi) + \xi_2 f_2(\xi)$, где $f_1(\xi) = \int\limits_0^1 f'_x(t\xi)dt,\ f_2(\xi) = \int\limits_0^1 f'_y(t\xi)dt$. Положим последовательно $\xi = (\xi_1, 0)^t, \xi = (0, \xi_2)^t$ и получим $f(\xi_1, 0) = f(0,0) + \xi_1 f_1(\xi_1, 0);\ \ f(0, \xi_2) = f(0,0) + \xi_2 f_2(0, \xi_2)$, откуда $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = f_1(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = f_2(0,0)$. В соотношении $f(\xi) = f(0) + \xi_1 f_1(\xi) + \xi_2 f_2(\xi)$ уберем символ ξ : $f = f(0)1_{\mathbb{R}^2} + p_1 f_1 + p_2 f_2$, где $p_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1,\ p_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2$. Вычислим $df = f(0)d(1) + p_1(0)df_1 + dp_1 f_1(0) + p_2(0)df_2 + dp_2 f_2(0) = f(0)d(1) + dp_1 f_1(0) + dp_2 f_2(0) = 0 + dp_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0) + dp_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0)$, ибо $d(1) = d(1\cdot 1) = 2d1 = 0$. Поэтому $d = dp_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}(0) + dp_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y}(0)$. Последняя формула показывает, что вектор d — линейная комбинация векторов $\frac{\partial}{\partial x}(0)$ и $\frac{\partial}{\partial y}(0)$ с коэффициентами dp_1 и dp_2 соответственно. Линейная независимость векторов $\frac{\partial}{\partial x}(0)$ и $\frac{\partial}{\partial y}(0)$ устанавливается последовательным действием их линейной комбинации ($= 0$) на функции $f = p_1$ и $f = p_2$: $\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}(0) + \beta \frac{\partial}{\partial y}(0) \right) p_1 = \alpha \cdot 1 = 0$; $\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}(0) + \beta \frac{\partial}{\partial y}(0) \right) p_2 = \beta \cdot 1 = 0$.

Замечание 3.3. Чтобы не возникало путаницы, отметим, что элементы $f \in A$ — функции одного векторного аргумента $\xi \in \mathbb{R}$ или 2–х скалярных $(\xi_1,\ \xi_2)$.

4. Вектор как класс эквивалентных кривых

Определение 4.1. Кривой назовем дифференцируемое отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Будем рассматривать только такие кривые, для которые $\gamma(0) = 0 \in \mathbb{R}^2$. На этом множестве введем отношение эквивалентности $\sim$: $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \dot\gamma(0) = \dot\gamma'(0)$. Легко проверяется, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий кривую γ, обозначим символом $[\gamma]$. Множество таких классов превратим в векторное пространство V, определив операции сложения элементов и умножения их на число $\lambda \in \mathbb{R}$ следующим образом: $[\gamma] + [\delta] := [\gamma + \delta],\ \lambda[\gamma] = [\lambda\gamma]$. Корректность определений проверяется достаточно тривиально: $(\gamma + \delta)(0) = \gamma(0) + \delta(0) = 0$; если $\gamma' \sim \gamma,\ \delta' \sim \delta$, то $\gamma' + \delta' \sim \gamma + \delta$, ибо из соотношений $\dot\gamma(0) = \dot\gamma'(0), \dot\delta(0) = \dot\delta'(0)$ следует равенство $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\gamma(t) + \delta(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\gamma'(t) + \delta'(t))$. Аналогично устанавливается корректность операции $\dot\lambda[\gamma]$. Выполнимость аксиом векторного пространства проверяется также легко: образ отображения γ лежит в $\mathbb{R}^2$. Роль нуля в V играет класс, содержащий $0 : t \to 0 \in \mathbb{R}^2$. Пример ненулевого элемента, лежащего в $[0] : (t^2;\ t^2(1-t))$. Установим изоморфизм $\varphi : \mathbb{R}^2 \to V$ следующим образом $\varphi(\xi) = [\gamma_\xi]$, где $\gamma_\xi(t) = t \cdot \xi,\ t \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^2$. Гомоморфность $\varphi : \varphi(\xi + \eta) = [\gamma_{\xi+\eta}] = [\gamma_\xi + \gamma_\eta] = [\gamma_\eta] + [\gamma_\eta] = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$, ибо $\gamma_{\xi+\eta}(t) = (\xi + \eta)(t) = \xi t + \eta t = \gamma_\xi(t) + \gamma_\eta(t)$. Аналогично проверяется соотношение: $\varphi(\lambda\xi) = \lambda\varphi(\xi)$. Инъективность φ : $\varphi(\xi) = \varphi(\eta) \Leftrightarrow [\gamma_\xi] = [\gamma_\eta] \Rightarrow t\xi = t\eta \Rightarrow \xi = \eta$. Сюръективность φ : для любого вектора $[\gamma] \in V$ определим вектор $\xi = \dot\gamma(0) \in \mathbb{R}$, который обладает нужным свойством: $\varphi(\xi) = [\gamma_\xi] = [\gamma]$, ибо $\dot\gamma_\xi(0) = \xi = \dot\gamma(0)$.

5. Вектор как тензор

Множество всех базисов в $\mathbb{R}^2$ обозначим символом $\mathbb{B}$; пусть $b_0 =$

$= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ — стандартный базис, $T_{b_0,\, b}$ — матрица перехода от b_0 к базису b.

Определение 5.1. Вектор — отображение $f : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^2$, определяемые на одном единственном элементе b_0, его значение на любом другом $b \in \mathbb{B}$ определяется из соотношения: $f(b) = T^{-1}_{b_0,b}\, f(b_0)$.

Пример 5.2. Пусть $f(b_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $b = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Тогда $T_{b_0,b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $T^{-1}_{b_0,b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, поэтому

$$f(b) = T^{-1}_{b_0,b} f(b_0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Легко понять, что пара $(1,\ 1)$ —координаты вектора $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ в новом базисе $\mathbb{B}$.

Превратим V в векторное пространство, определив на нем операции сложения и умножения элементов на действительные числа следующим образом: $(f + g)(b_0) := f(b_0) + g(b_0),\ (\lambda f)(b_0) := \lambda \cdot f(b_0)$. Тогда, как легко проверить, $(f + g)(b) = f(b) + g(b),\ (\lambda f)(b) = \lambda(f(b))$ для $\forall b \in \mathbb{B}$. Поскольку $f(b) \in \mathbb{R}^2$, то все аксиомы векторного пространства выполняются автоматически. Установим изоморфизм $\varphi : V \Rightarrow \mathbb{R}^2$ с помощью равенства: $\varphi(f) = f(b_0) \in \mathbb{R}^2$. Исходя из определения φ и того обстоятельства, что элемент $f(b_0)$ принадлежит $\mathbb{R}^2$, гомоморфность φ проверяется легко. Если $\varphi(f) = \varphi(g)$, то $f(b_0) = g(b_0)$ и $f(b) = g(b)$ для любого элемента $b \in \mathbb{B}$, поэтому $f = g$. Сюръективность φ : если $\xi \in \mathbb{R}^2$, то положим $f(b_0) = \xi$, и тогда $f(b) = T^{-1}(b_0,\ b)\xi$ для $\forall b \in \mathbb{B}$ и $\forall(f) = f(b_0) = \xi$.

Корректность определения вектора. Сделаем замену: $b_0 \mapsto b_1$. Тогда $f(b_2) = T^{-1}_{(b_0,b_2)} f(b_0) = T^{-1}_{(b_1,b_2)} f(b_1)$, ибо $T^{-1}_{(b_0,\, b_2)} = T_{(b_0,\, b_1)} T_{(b_1,b_2)}$, поэтому $T^{-1}_{(b_1 b_2)} f(b_1) = T^{-1}_{(b_0 b_2)} T_{(b_0,b_1)} T^{-1}_{(b_0,b_1)} f(b_0) = T^{-1}(b_0, b_2) f(b_0)$.

Список литературы

[1] *Любецкий В. А.* Основные понятия школьной математики / В. А. Любецкий. М.: Просвещение, 1987. 400 с.

[2] *Шарыгин И. Ф.* Геометрия 7 – 9 классы. Учебник для общеобразовательных учебных заведений / И. Ф. Шарыгин. М.: Издат. дом Дрофа, 1997. 352 с.

[3] *Александров А. Д.* Геометрия для 9 – 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики

/ А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. М.: Просвещенеие, 1984. 480 с.

[4] *Ашкинузе В. Г.* Векторы на плоскости и в пространстве / В. Г. Ашкинузе // О. А. Боковнев Линейная алгебра и геометрия. Сб. статей. М.: Просвещение, 1967. 368 с.

[5] *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства / Б. А. Розенфельд. М.: Наука, 1966. 648 с.

[6] *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы / Дж. Хамфри, пер. с англ. А. Е. Залесского под ред. В. А. Платонова. М.: Наука, 1980 400 с.

[7] *Громол Д.* Риманова геометрия в целом / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, пер. с немецкого Ю. Д. Бураго под ред. В. А. Топоногова. М.: Мир. 1971. 344 с.

О преподавании некоторых компьютерных спецдисциплин

В. В. Васильчиков

Рассматривается опыт преподавания спецкурсов, посвященных изучению высокоуровневых средств программирования и соответствующих библиотек.

Учебная нагрузка кафедры вычислительных и программных систем целиком состоит из дисциплин компьютерного блока, причем более половины из них составляют специальные дисциплины и курсы по выбору. Именно они посвящены изучению современных информационных технологий и связанных с ними научных направлений и потому представляют собой наиболее изменчивую часть этого блока.

Знания и практические навыки по этим вопросам обладают наибольшей востребованностью со стороны потенциальных работодателей, которым хотелось бы, чтобы выпускник сразу мог работать на высоком уровне, причем именно в их специфической сфере деятельности.

Конечно, все понимают, что эти требования нереальны, однако вуз должен постараться выстроить процесс обучения IT-специалиста так, чтобы максимально облегчить его включение в промышленный процесс на конкретном рабочем месте.

Как минимум выпускник должен представлять себе внутреннее устройство компьютера, устройство и принципы работы операционной системы, иметь достаточно развитое алгоритмическое мышление, знать несколько разных (по области использования) языков программирования, разбираться в структурах данных и иметь достаточную алгоритмическую базу. Все эти знания он должен получить в базовой части блока компьютерных дисциплин. В рамках изучения специальных дисциплин он должен узнать о различных шаблонах и парадигмах программирования, форматах хранения и передачи информации, организации баз данных, устройстве компьютерных сетей, современных программных средствах и технологиях программирования и многом-многом другом.

К сожалению, количество учебного времени, отводимого на изучение компьютерных дисциплин, техническая база и преподавательский ресурс не позволяют дать студентам знания абсолютно по всем вопросам, однако следует стремиться к наибольшему охвату за счет лучшего выстраивания структуры курсов и перехода на новые методы проведения занятий, позволяющие интенсифицировать учебный процесс.

На кафедре вычислительных и программных систем преподается более полутора десятков компьютерных спецдисциплин, охватывающих широкий спектр вопросов, однако автору здесь хотелось бы остановиться на обсуждении тех курсов, которые в течение последних лет читал он сам, поделиться опытом и обсудить проблемы, связанные с преподаванием данных курсов. Речь пойдет о курсе "Программирование в Windows и в сетях Windows" , а также о двух курсах, посвященных разработке .NET-приложений: "Программирование в .NET Framework на языке C#" и "Программирование в среде Visual Studio .NET".

Первый из перечисленных курсов фактически состоит из двух частей. Первая часть посвящена разработке Windows-приложений (и программных компонентов) с использованием библиотеки MFC в среде Visual Studio. В ней рассматриваются следующие основные вопросы.

- Устройство и возможности среды разработки Microsoft Visual Studio.

- Модель программирования в Windows с использованием графического интерфейса.

- Архитектура "документ-представление назначение и использование классов библиотеки MFC для ее реализации.

- Многопоточность, средства синхронизации, организация связи между процессами.

- Некоторые вопросы, связанные с использованием технологии COM: механизм OLE, создание и применение элементов ActiveX.

Вторая часть посвящена рассмотрению средств организации сетевого взаимодействия процессов. При ее изучении студенты получают знания по следующим вопросам.

- Организация связи с использованием интерфейса NetBIOS.

- Использование механизма перенаправления, почтовых ящиков, именованных каналов.

- Сетевые протоколы, семейства адресов и разрешение имен.

- Интерфейс сетевого программирования Winsock.

- Использование различных моделей ввода-вывода для организации неблокирующего взаимодействия.

В курсах, посвященные программированию в .NET Framework изучаются следующие четыре крупных блока вопросов.

- Язык программирования C#.

- Разработка программ, отдельных компонентов для работы в .NET Framework и организация их взаимодействия.

- Web-программирование: разработка Web-приложений и XML Web-служб.

- Разработка Windows-приложений для .NET Framework.

В ряде тем из двух последних блоков студенты также знакомятся с технологией ADO.NET для работы с базами данных.

Для изучения этих курсов, да и вообще курсов, предполагающих выработку практических навыков использования современных технологий программирования классическая схема "лекция – практическое занятие" , по-видимому, подходит плохо. Восприятие материала, подаваемого в такой форме, затруднено, а объем его весьма велик, причем изрядную часть этого объема составляет программный код. Последний момент представляет затруднение в том числе и для лектора.

Поэтому все занятия проводятся в большой компьютерной аудитории, оснащенной проектором. Они проводятся в форме тренинга, когда преподаватель излагает теоретический материал, разбирает примеры, а затем студентам предлагается выполнить практическое задание по данной теме. Для избавления слушателей от рутинной работы им сразу выдается заготовка проекта и детальные инструкции по добавлению в него изменений по теме занятия. Для контроля предоставляется также окончательный вариант проекта, так что при необходимости в него также можно подсмотреть. В результате резко возрастает интенсивность усвоения материала (при соответствующем отношении студентов, конечно). В случае, если по каким-то причинам студент не успевает выполнить задание в учебном классе, он может сделать это дома, поскольку весь набор необходимых материалов всегда под рукой. Разумеется, для этого ему придется установить и сконфигурировать на домашнем компьютере необходимое программное обеспечение, но ведь профессионал должен это уметь делать.

Письменный опрос студентов показывает, что абсолютно все считают такую форму проведения занятий существенно более наглядной, удобной и эффективной, чем традиционную. Некоторые, правда, отметили, что инструкции по выполнению заданий настолько детальны, что позволяют выполнять их путем бездумного использования комбинаций Ctrl-C/Ctrl-V. Автор и сам замечал, что часть студентов именно так и поступает, несмотря на настойчивые предложения преподавателя объяснить любой непонятный момент. Впрочем, по мнению автора, это как раз те студенты, которые при других обстоятельствах не делали бы и этого.

Кстати, в тех же опросах некоторые студенты сами предлагают ужесточить контроль над выполнением ими учебных заданий, поскольку ведут себя "как дети" (цитата). Вообще, как кажется автору по результатам этих опросов, восприятие учебного процесса и своего отношения к нему у большинства студентов вполне взрослое, вот только поведение слегка от этого восприятия отстает. Да и дополнительный контроль не представляется излишним, вот только не хотелось бы его осуществлять за счет учебного времени.

Изучение перечисленных курсов предъявляет определенные требования к предварительной подготовке студентов: как минимум, понимание объектно-ориентированного стиля программирования и приличное знание языка C++. Свою подготовку, судя по результатам опросов, они в большинстве своем оценивают как достаточную, и с этим, по-видимому, можно согласиться (по крайней мере, в отношении студентов, которые вообще умеют программировать).

В то же время многие темы, как отмечают студенты, вызывают серьезные затруднения при изучении. В основном это все, что связано с многопоточным программированием и использованием средств синхронизации. А именно на многопоточности основаны все нетривиальные примеры сетевых приложений. В теме "Модели ввода-вывода" рассматривается, как минимум, пять способов организации асинхронного обмена информацией, и все они предполагают использование многопоточности. Действительно, многопоточное программирование, можно сказать, предполагает добавление еще одного измерения в модели вычислительного процесса, что нелегко воспринимается даже теми, кто уверенно ориентируется в выстраивании процесса вычислений, управляемого событиями.

Впрочем, у ряда студентов затруднения вызывают и куда более простые понятия. Некоторые, например, признаются, что не понимают механизма наследования, хотя целый год изучали объектно-ориентированное программирование на языке C++, а кто-то высказывает пожелание сначала заняться повторением ранее пройденного. Зачем тогда, спрашивается, в учебном плане предусмотрены часы для самостоятельной подготовки?

Вместе с тем опыт показывает, что последовательность изучения языков программирования и программных средств выстроена достаточно удачно. Так, студенты отмечают, что при изучении языка C# и парадигмы программирования для .NET Framework у них практически не возникает проблем — на занятиях достаточно акцентировать внимание на отличиях от языка C++ и соответствующих отличиях в реализации тех или иных механизмов функционирования.

Нет в основном замечаний у студентов и к содержанию курсов, по крайней мере, ни одна из изучаемых тем не названа лишней. В качестве предлагаемых дополнительных тем чаще всего упоминается изучение PHP, однако в структуру нашей части курса по Web-программированию оно, очевидно, не вписывается. Из других пожеланий можно отметить более широкое изучение средств Win32 API, а также графических средств GDI. Автору кажется, что изучение низкоуровневых библиотек не слишком хорошо вписывается в учебный процесс, их детальное рассмотрение требует больших затрат времени. В конце концов, если возникает реальная необходимость использования функций Win32 API, необходимую информацию можно найти в справочной системе. Что касается GDI и GDI+, то большая часть их средств также не слишком сложна для самостоятельного изучения. А вот что в этом направлении хотелось бы добавить — так это изучение технологии Windows Presentation Foundation. В дальнейшем следует изыскать возможность включить в курс несколько лекций, посвященных хотя бы базовым моментам данной технологии.

О бифуркациях динамических систем

Д. В. Глазков

Излагается фрагмент курса лекций по теории нормальных форм, читаемого автором студентам четвертого курса специальности «Прикладная математика и информатика», проходящих специализацию «Математическое моделирование».

Библиография: 5 названий.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая является простейшим примером динамической системы с непрерывным временем. В отсутствие параметров она представима в виде

$$\dot{x} = F(x), \tag{1}$$

где $x{=}x(t){=}\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)^T$ — вектор-функция, действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$, $F(x){=}\big(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)\big)^T$ — векторное поле из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Наряду с системой (1) рассмотрим близкую к ней систему

$$\dot{x} = F(x) + f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ определяется аналогично $F(x)$. Обозначим $f'(x)$ матрицу Якоби векторного поля f.

По аналогии с [1–3] введем понятие грубой системы.

Определение 1.

Система (1) называется грубой (структурно устойчивой) в области $G{\subset}\mathbb{R}^n$, если найдется $\delta{>}0$ такое, что $\forall f$, удовлетворяющей условию $||f(x)||{+}||f'(x)||{<}\delta$ при любых x из области G, существует гомеоморфизм $\Pi : G{\to}\bar{G}$ такой, что $||\Pi{-}I||{\leqslant}\Delta(\delta)$, $\Delta(0){=}0$, переводящий фазовые траектории системы (1), целиком принадлежащие G, в фазовые траектории системы (2), целиком принадлежащие $\bar{G}$, того же типа.

Фраза «того же типа» означает, что особые траектории, например, состояния равновесия или предельные циклы отображаются снова в состояния равновесия или предельные циклы, причем свойство устойчивости (неустойчивости) при этом не меняется.

Данное определение позволяет говорить о том, что малое изменение грубой системы не приводит к качественному изменению ее поведения.

Именно такие свойства и наблюдаются, главным образом, в различных физических процессах.

Системы, которые не удовлетворяют определению 1, называются негрубыми, или структурно неустойчивыми.

Если G есть малая окрестность состояния равновесия системы (1), не содержащая других особых траекторий, то грубость системы в области G определяется грубостью состояния равновесия x_*. В случае $n{=}2$ [1–3] грубыми состояниями равновесия являются седло, фокус, узел. К негрубым относят центр, седлоузел, дикретический узел, для которых характеристические числа линеаризованной системы

$$\dot{u} = F'(x)\big|_{x=x_*} u$$

удовлетворяют одному из условий: $\exists j : Re\lambda_j{=}0$ или $\lambda_1{=}\lambda_2$.

В общем случае правая часть системы ОДУ зависит от параметров:

$$\dot{x} = F(x, \mu), \tag{3}$$

где x — по-прежнему вектор-функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$, $\mu{=}\big(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\big)^T$ — вектор из $\mathbb{R}^m$, состоящий из параметров задачи. Система (3) имеет фазовое пространство (пространство переменных) размерности n и пространство параметров размерности m.

Для систем вида (3) определение грубости оказывается наиболее востребованным в следующем смысле.

Определение 2.

Значение параметра $\mu{=}\mu^*$ называется грубым, если система (3) при $\mu{=}\mu^*$ является грубой.

В этом случае найдется такое $\delta{>}0$, что $\forall\mu{\in}O(\mu^*, \delta)$ система (3) также будет грубой. Множество грубых систем, таким образом, всюду плотно. Установлено, что при $n{=}2$ в пространстве параметров множество негрубых значений $\mu{=}\mu_*$ образует множество меры нуль. В общем случае это может и не выполняться — вопрос остается открытым.

Определение 3.

Значение параметра $\mu{=}\mu_*$ называется бифуркационным, если система (3) при $\mu{=}\mu_*$ является негрубой.

Иными словами, бифуркационным называют негрубое (критическое) значение параметров системы. Такие значения μ_* образуют границы областей μ^* в пространстве параметров, в которых система структурно устойчива.

Определение 4.

Бифуркацией называется изменение качественной структуры фазового портрета системы (3), связанное с переходом через критическое значение $\mu{=}\mu_*$.

Качественные изменения структуры фазового портрета означают изменение режима, в котором функционирует система. На практике это может оборачиваться далеко идущими последствиями, часть которых образует предмет теории катастроф.

Определение 5.

Коразмерность бифуркации — число k независимых условий негрубости.

В случае общего положения $k \leqslant m$, то есть коразмерность бифуркации не превосходит размерности пространства параметров. Наибольший интерес с прикладной точки зрения представляют бифуркации коразмерности 1, поскольку для них не требуется много условий, и они являются типичными и повсеместными. Неявно подразумевается, что k условий негрубости можно записать как k уравнений, которые задают в пространстве параметров многообразие размерности $m-k$. При $k=1$ они делят пространство параметров на области, внутри которых исследуемая система является структурно устойчивой.

Определение 6.

Бифуркационная диаграмма — график зависимости некоторой характеристики динамической системы от параметра.

В качестве возможной характеристики системы может выступать одна из фазовых переменных, полная энергия, амплитуда колебаний периодического решения, старший ляпуновский показатель, размерность аттрактора и так далее.

Перечислим типичные бифуркации коразмерности 1. Такие бифуркации могут наблюдаться в системах с одним скалярным параметром $m=1$. Условие негрубости, накладываемое на параметр, связано с наличием у состояния равновесия характеристического значения с нулевой вещественной частью, либо второго единичного по модулю мультипликатора у предельного цикла. Иллюстрации и бифуркационные диаграммы перечисляемых случаев приводятся в цитируемой литературе [1–5].

1. Бифуркация седло-узла (saddle-node). «Из воздуха» возникает пара состояний равновесия, одно из которых обязательно неустойчиво. Простейший пример — скалярное уравнение $\dot{x}=\mu-x^2$ $(n=1)$.

2. Обмен устойчивости (transcritical). Два состояния равновесия при критическом значении параметра сливаются в одно и снова разделяются, при этом меняются свойства устойчивости. Примером может служить уравнение $\dot{x}=\mu x-x^2$ $(n=1)$.

3. Бифуркация вилка (pitchfork). Устойчивое состояние равновесия теряет устойчивость, отдавая ее паре возникающих состояний равновесия. Классический пример — уравнение $\dot{x}=\mu x-x^3$ $(n=1)$.

4. Бифуркация Андронова–Хопфа (Poincare–Andronov–Hopf; Hopf). Устойчивое состояние равновесия теряет устойчивость, при этом возникает устойчивый предельный цикл, имеющий при появлении нулевую амплитуду. В качестве примера приведем комплексное уравнение $\dot{z}=(i+\mu)z-z|z|^2$ ($n=2$). Выполнив полярную замену $z=\rho e^{i\varphi}$, можем свести его к бифуркации типа вилка относительно амплитуды $\rho\geqslant 0$.

5. Бифуркация седло-узла для предельных циклов происходит аналогично случаю состояний равновесия. Пример — комплексное уравнение $\dot{z}=\mu\frac{z}{|z|}+2z-|z|z$ ($n=2$).

6. Бифуркация рождения предельного цикла из петли сепаратрисы. Происходит через образование негрубой гомоклинической траектории при критическом значении параметра, когда пересекаются устойчивое и неустойчивое многообразия седловой особой точки.

7. Бифуркация рождения предельного цикла из состояния равновесия типа седло-узел. Происходит вместе с обратной бифуркацией седлоузла, когда при исчезновении пары состояний равновесия возникает предельный цикл.

8. Бифуркация рождения предельного цикла из бесконечности. При возникновении цикл имеет бесконечно большую амплитуду. Можно трактовать как бифуркацию Андронова–Хопфа для бесконечно удаленной точки.

9. Бифуркация рождения предельного цикла из уплотнения фазовых траекторий при возмущении консервативной системы. Классический пример — уравнение Ван дер Поля $\ddot{x}+\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0$ ($n=2$).

10. Бифуркация удвоения периода предельного цикла. Хорошо описывается с помощью отображения последования на сечении Пуанкаре. Минимальное значение $n=3$.

11. Бифуркация рождения квазипериодического режима из предельного цикла. Если возможно сведение к уравнению для амплитуды цикла, то в обозначениях этого уравнения получится бифуркация Андронова–Хопфа. Периодические колебания амплитуды будут происходить на второй частоте, а в исходной системе получим двухчастотный режим. Минимальное значение $n=3$.

Проиллюстрируем условие негрубости из определения 5 на примере бифуркации Андронова–Хопфа. При критическом значении параметра

$\mu_*=0$ нулевое состояние равновесия имеет пару характеристических чисел на мнимой оси $\lambda_{1,2}=\pm i$. На первый взгляд может показаться, что два собственных значения линеаризованной задачи с нулевой вещественной частью должны давать два условия негрубости. Однако, поскольку $\lambda_1=\bar{\lambda}_2$, то есть $\lambda_1=\sigma+i\omega$ влечет $\lambda_2=\sigma-i\omega$, имеем одно независимое условие негрубости $\sigma=0$.

Список литературы

1. *Андронов А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. М.: Физматгиз, 1959. 926 с.

2. *Баутин, Н. Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. М.: Наука, 1990. 488 с.

3. *Горяченко,В. Д.* Элементы теории колебаний: учеб. пособие для вузов / В. Д. Горяченко. М.: Высш. шк., 2001. 395 с.

4. *Малинецкий, Г. Г.* Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов. М.: Едиториал УРСС, 2002. 360 с.

5. *Анищенко, В. С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах / В. С. Анищенко. М.: Либроком, 2009. 320 с.

Алгоритм метода нормальных форм

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

Обсуждается экономный метод построения нормальной формы динамической системы в окрестности бифуркационных точек.

Библиография: 8 названий.

В конце 19 – начале 20 вв. А. Пуанкаре поставил задачу качественного анализа дифференциальных уравнений. Успехи современных математических теорий, касающихся исследования поведения нелинейных динамических систем, так или иначе связаны с решением именно этой задачи. В ряду инструментов, разработанных для качественного анализа систем нелинейных дифференциальных уравнений, важное место занимает метод нормальных форм. Идея метода была высказана Пуанкаре в его диссертации и состояла в нахождении такого класса автономных динамических систем, которые можно было бы с помощью специальных замен свести к линейным. На этом пути было введено понятие резонансности собственных чисел матрицы линейной части системы и доказано, что в случае отсутствия таких резонансов сведение возможно. Позднее Дюлак выполнил обобщение этого результата на резонансный случай и показал, что в этой ситуации простейшим видом преобразованной системы является выражение, содержащее в правой части, наряду с линейными слагаемыми, еще и не уничтожаемые заменами резонансные члены. Такую систему называют нормальной формой, и ее построение позволяет успешно проанализировать локальную динамику изучаемой системы.

Однако по-настоящему действенным метод нормальных форм стал после работ, принадлежащих Н. М. Крылову, Н. Н. Боголюбову и Ю. А. Митропольскому [1–3], в которых разрабатывались асимптотические методы нелинейных колебаний. Нормализация динамической системы на устойчивом интегральном многообразии позволяет выделить систему малой размерности, отвечающую за локальные свойства исходной системы. В настоящее время методу нормальных форм посвящено большое число различных исследований, отметим здесь лишь [4–7].

Сказанное делает актуальным разработку по возможности более экономного алгоритма построения нормальной формы. Заметим, что наиболее интересные выводы о качественном поведении получаются при изменении параметров динамической системы в окрестности критических значений, в этом случае величина надкритичности служит естественным малым параметром, по которому удобно строить асимптотические формулы устойчивых решений изучаемой задачи. В то же время нормальная форма строится именно при критических значениях параметров, поэтому впоследствии возникает задача такого масштабирования возмущенной нормальной формы, чтобы полученная системы могла быть удобно проанализирована, например, численными методами. Нами предлагается алгоритм, в ходе выполнения которого укороченная нормальная форма возникает из условий разрешимости для одного из слагаемых нормирующей замены, при этом она уже оказывается подходящим образом масштабированной по входящим переменным.

Описание основного алгоритма

Перейдем к описанию основного алгоритма получения нормальной формы изучаемой системы (см., например, [8]). Уточним сначала постановку задачи и условия. Пусть задана система

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + F_2(x, x) + F_3(x, x, x) + \dots, \tag{1}$$

обыкновенных уравнений в $\mathbb{R}^n$ с малым параметром $\varepsilon > 0$, удовлетворяющая следующим стандартным бифуркационным ограничениям:

1) матрица A_0 имеет на мнимой оси m пар простых собственных значений $\pm\omega_s$, $\omega_s > 0$, $s = 1, \dots, m$ (остальные ее точки спектра предполагаем лежащими в комплексной полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda < 0\}$);

2) для частот ω_s выполняются условия нерезонансности

$$\omega_s \neq n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_m\omega_m, \quad s = 1, \dots, m, \tag{2}$$

где $(n_1, \dots, n_m)$ — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяющий неравенствам

$$2 \leqslant |n_1| + |n_2| + \dots + |n_m| \leqslant 3; \tag{3}$$

3) $F_2(x, x)$, $F_3(x, x, x), \dots$ — квадратичная, кубическая и т. д. формы.

При сделанных допущениях автоколебания системы (1), бифурцирующие из ее нулевого состояния равновесия при $\varepsilon > 0$, будем искать в виде формального ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$x = \sqrt{\varepsilon}x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}x_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \tag{4}$$

где

$$x_0 = \sum_{s=1}^{m} \left[\xi_s a_s \exp(i\omega_s t) + \bar{\xi}_s \bar{a}_s \exp(-i\omega_s t)\right]. \tag{5}$$

Здесь a_s, $s = 1, \dots, m$ — собственные векторы матрицы A_0, отвечающие ее собственным значениям $i\omega_s$ и нормированные условиями $(a_s, b_s) =$ $= 1$, $(\bar{a}_s, b_s) = 0$, $s = 1, \dots, m$, где $A_0^* b_s = -i\omega_s b_s$, а $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$; $\xi_s = \xi_s(\tau)$ — пока произвольные (подлежащие определению) комплексные амплитуды; все функции x_k, $k \geqslant 1$, — тригонометрические полиномы переменных $\omega_1 t, \dots, \omega_m t$.

Подставляя соотношения (4),(5) в уравнение (1) и приравнивая слева и справа коэффициенты при ε, для отыскания x_1 получаем линейную неоднородную систему

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} - A_0 x_1 = g_1(t,\tau), \tag{6}$$

где

$$g_1 = \sum_{s,k=1} m\Big[F_2(a_s,a_k)\xi_s\xi_k \exp(i(\omega_s+\omega_k)t) + F_2(a_s,\bar{a}_k)\xi_s\bar{\xi}_k \exp(i(\omega_s-\omega_k)t) +$$
$$+ F_2(\bar{a}_s,a_k)\bar{\xi}_s\bar{\xi}_k \exp(i(\omega_k-\omega_s)t) + F_2(\bar{a}_s,\bar{a}_k)\bar{\xi}_s\bar{\xi}_k \exp(-i(\omega_s+\omega_k)t)\Big],$$

а переменная τ рассматривается как параметр. Из уравнения (6) функция x_1 однозначно определяется в том же виде, что и неоднородность g_1, т. е. в виде суммы нулевых и вторых гармоник переменных $\omega_1 t, \dots, \omega_m t$. Подчеркнем, что возможность такого определения обеспечивает группа условий нерезонансности (2), отвечающая случаю $|n_1| + \dots + |n_m| = 2$.

Приравняем затем коэффициенты при степени $\varepsilon^{3/2}$. В результате для x_2 приходим к аналогичному (6) уравнению, но с неоднородностью g_2, являющейся суммой первых и третьих гармоник. В таком же виде ищем и $x_2(t,\tau)$. Однако здесь возникает новый момент: для амплитуд функции x_2 при первых гармониках получаются вырожденные линейные неоднородные алгебраические уравнения, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$\big(g_{2,s}(\tau), b_s\big) \equiv 0, \quad s = 1,\dots,m, \tag{7}$$

где $g_{2,s}$ — коэффициенты неоднородности g_2 при $\exp i\omega_s t$. Эти условия приводят, в свою очередь, к системе вида

$$\frac{d\xi_s}{d\tau} = \Big[(A_1 a_s, b_s) + \sum_{k=1}^{m} d_{sk}|\xi_k|^2\Big]\xi_s, \quad s = 1,\dots,m, \tag{8}$$

для нахождения неизвестных амплитуд ξ_s (при этом $\bar{\xi}_s$ удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям).

И наконец, остается добавить, что если в качестве фигурирующих в (5) функций $\xi_s = \xi_s(\tau)$, $s = 1,\dots,m$, выбрано произвольное решение системы (8), то полностью определятся все три выписанных в (4) слагаемых. Действительно, однозначную разрешимость линейных неоднородных алгебраических уравнений для коэффициентов функции x_2

при третьих гармониках обеспечивают оставшиеся условия нерезонансности из (2),(3), отвечающие случаю $|n_1| + \dots + |n_m| = 3$.

Несколько отступая от общепринятой терминологии, систему (8) назовем нормальной формой исходного уравнения (1). Подобное название оправдано тем, что именно она отвечает за бифуркации циклов и торов этого уравнения. Для того, чтобы сформулировать здесь строгий результат, перейдем от (8) к вспомогательной системе для $\eta_s = |\xi_s|^2$:

$$\frac{d\eta_s}{d\tau} = \Big[\alpha_s + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{sk}\eta_k\Big]\eta_s, \quad s = 1, \dots, m, \tag{9}$$

где $\alpha_s = 2\mathrm{Re}\,(A_1 a_s, b_s)$, $\alpha_{sk} = 2\mathrm{Re}\,d_{sk}$. Предположим, что система (9) имеет некоторое состояние равновесия

$$\eta_{s_j} = \rho_j > 0, \ j = 1, \dots, p; \quad \eta_s = 0 \text{ при } s \neq s_j, \tag{10}$$

где $p \leqslant m$, $1 \leqslant s_1 < s_2 < \dots < s_p \leqslant m$ — произвольно фиксированные натуральные числа. Тогда нормальная форма (8) имеет, очевидно, p-мерный автомодельный тор вида

$$\xi_{s_j}(\tau) = \sqrt{\rho_j}\exp(i\psi_j\tau), \ j = 1, \dots, p; \quad \xi_s = 0 \text{ при } s \neq s_j, \tag{11}$$

где

$$\psi_j = \mathrm{Im}\,(A_1 a_{s_j}, b_{s_j}) + \sum_{k=1}^{p} \rho_k \mathrm{Im}\,d_{s_j s_k}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Подставляя, далее, компоненты этого тора в первые три слагаемых ряда (4), получим приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) инвариантный тор исходной системы (1). Тем самым возникает вопрос о существовании и устойчивости соответствующего ему точного инвариантного тора. Ответ на него дает следующее утверждение (см. [8]).

Теорема. *Пусть система* (8) *имеет p-мерный автомодельный тор вида* (11)*, экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда по любому натуральному l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_l$ исходная система* (1) *имеет p-мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами*

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\varepsilon}\sum_{j=1}^{p}\sqrt{\rho_j}\big[a_{s_j}\exp(i\varphi_j) + \bar{a}_{s_j}\exp(-i\varphi_j)\big] + \varepsilon u_*(\varphi, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon\psi + \varepsilon^{3/2}\psi_*(\varphi, \varepsilon). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\psi = \mathrm{colon}(\psi_1, \dots, \psi_p)$, $\omega = \mathrm{colon}(\omega_{s_1}, \dots, \omega_{s_p})$, *а 2π-периодические по φ функции u_*, ψ_* и их всевозможные частные* *производные по φ до порядка l включительно ограничены равномерно по ε, φ в метрике $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$ соответственно.*

В дополнение к сформулированной теореме заметим, что проверка устойчивости автомодельного тора (11) сводится, очевидно, к исследованию устойчивости соответствующего ему состояния равновесия (10) в системе (8), поэтому количество и устойчивость инвариантных торов вида (12) у исходного уравнения (1) определяется по состояниям равновесия вспомогательной системы (9) в конусе векторов с неотрицательными координатами. Проделанные выше построения имеют прозрачный геометрический смысл. В самом деле, при сформулированных ограничениях у системы (1) в некоторой достаточно малой окрестности нуля существует $2m$-мерное экспоненциально орбитально устойчивое центральное многообразие, а система (8) в силу своего вывода является укороченной (с точностью до слагаемых порядка ε) нормальной формой на данном многообразии. Таким образом, теорема 1 — это стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной системы (1) и ее укороченной нормальной формы.

Список литературы

[1] *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Физматгиз, 1974.

[2] *Митропольский, Ю. А.* Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. М.: Наука, 1973.

[3] *Крылов, Н. М.* Новые методы нелинейной механики / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. М., Л.: ОНТИ, 1934.

[4] *Брюно, А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А. Д. Брюно. М.: Наука, 1979.

[5] *Wiggins, Stephen.* Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos / Stephen Wiggins. Springer-Verlag New York, Inc. 1990.

[6] *Шильников, Л. П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

[7] *Гукенхеймер, Д.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

[8] *Колесов, А. Ю.* Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений / А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. М., 2004.

О проекте нового государственного образовательного стандарта по специальности "Компьютерная безопасность"

В. Г. Дурнев

Рассматриваются вопросы, связанные с проектом нового государственного образовательного стандарта по указанной специальности.

В проект Постановления Правительства Российской Федерации, определяющего перечень специальностей, включены шесть специальностей в области информационной безопасности, из которых четыре могут быть реализованы в классических и технических университетах. В их число входит и специальность "Компьютерная безопасность" . Учебно-методическим объединением по образованию в области информационной безопасности подготовлен проект Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности "Компьютерная безопасность" (ФГОС), в разработке которого мне довелось принимать участие. В этой заметке мне хотелось бы остановиться на некоторых особенностях этого ФГОС.

ФГОС начинается со вступительной части, занимающей разделы с первого по третий. Так как эти разделы носят достаточно общий характер, то на их содержании мы не будем останавливаться, а сразу перейдем к четвертому разделу, посвященному характеристике профессиональной деятельности специалистов. Процитируем основные подразделы этого раздела.

"4.1 Область профессиональной деятельности специалистов

Область профессиональной деятельности выпускников включает:

сферы науки, техники и технологии, охватывающие совокупность проблем, связанных с разработкой и эксплуатацией средств и систем защиты информации компьютерных систем, *доказательным анализом* (выделено нами) и обеспечением защищенности компьютерных систем от вредоносных программно-технических и информационных воздействий в условиях угроз в информационной сфере."

Обратим внимание на выделенное нами положение о *доказательном анализе.* В данном случае речь идет о построении соответствующих математических моделей, их анализе, формулировке и доказательстве теорем о надежности систем защиты, трудности их "взлома" и т. д. При этом упор делается именно *на доказательность* в математическом смысле.

"4.2 Объекты профессиональной деятельности специалистов

Объектами профессиональной деятельности специалистов являются:

— защищаемые компьютерные системы и входящие в них средства обработки, хранения и передачи информации;

— системы управления информационной безопасностью компьютерных систем;

— методы и реализующие их средства защиты информации в компьютерных системах;

— математические модели процессов, возникающих при защите информации, обрабатываемой в компьютерных системах;

— методы и реализующие их средства контроля эффективности защиты информации в компьютерных системах;

— процессы (технологии) создания программного обеспечения средств и систем защиты информации, обрабатываемой в компьютерных системах;

4.3. Виды профессиональной деятельности специалистов

Выпускник специальности "Компьютерная безопасность" в соответствии с полученной фундаментальной и специальной подготовкой может выполнять следующие виды профессиональной деятельности:

научно-исследовательская;

проектная;

контрольно-аналитическая;

организационно-управленческая;

эксплуатационная.

Конкретные виды профессиональной деятельности, к которым в основном готовится выпускник, должны определять содержание его образовательной программы, разрабатываемой высшим учебным заведением совместно с заинтересованными работодателями."

Таким образом, вузу предоставляется право совместно с работодателями формировать содержание образовательной программы в соответствии с потребностями работодателей и имеющимися у вуза техническими, кадровыми и финансовыми возможностями. При этом "негосударственные" работодатели, внося те или иные предложения и требования к образовательной программе, должны будут принять участие в формировании условий для их выполнения. Это относится прежде всего с созданию современной лабораторной базы, техническому оснащению вуза, проведению переподготовки преподавательского состава, стимулирования его деятельности и т. д.

4.4. Задачи профессиональной деятельности специалистов

В этом подразделе по каждому из указанных выше видов профессиональной деятельности специалистов указаны конкретные виды работ, относящихся к научно-исследовательской, проектной, контрольно-аналитической, организационно-управленческой и эксплуатационной деятельности.

В пятом разделе ФГОС сформулированы требования к результатам освоения основной образовательной программы подготовки специалистов по специальности "Компьютерная безопасность". Приведем некоторые выдержки из этого раздела.

В начале раздела указывается, какими *общекультурными компетенциями (ОК)* должен обладать выпускник по специальности "Компьютерная безопасность". Начинается перечень со следующей компетенции:

выпускник "способен действовать в соответствии с Конституцией Российской Федерации, исполнять свой гражданский и профессиональный долг, руководствуясь принципами законности и патриотизма".

Последующие компетенции носят более общий характер и не совсем ясно, как проверить, обладает ли выпускник соответствующей компетенцией. Например, это относится к компетенциям:

"способен анализировать социально значимые явления и процессы, в том числе политического и экономического характера, мировоззренческие и философские проблемы, применять основные положения и методы гуманитарных, социальных и экономических наук при решении социальных и профессиональных задач (ОК-3);

способен понимать движущие силы и закономерности исторического процесса, роль личности в истории, политической организации общества, способен уважительно и бережно относиться к историческому наследию и культурным традициям, толерантно воспринимать социальные и культурные различия (ОК-4)".

Раздел, посвященный *профессиональным компетенциям (ПК)* разбит на два подраздела, первый из которых содержит перечень общепрофессиональных компетенций, среди которых есть как слишком общие, так и достаточно конкретные, проверяемые. К первым, на наш взгляд относятся компетенции:

"способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и применять соответствующий физико-математический аппарат для их формализации, анализа и выработки решения (ПК-1);

способен применять методологии научно-исследовательской и практической деятельности (ПК-5)";

а ко вторым — компетенции:

"способен применять математический аппарат, в том числе с использованием вычислительной техники, для решения профессиональных задач (ПК-2);

способен использовать языки, системы и инструментальные средства программирования в профессиональной деятельности (ПК-3);

способен находить научно-техническую информацию в электронных библиотеках, реферативных журналах, сети Интернет и т.д., анализировать её и контекстно обрабатывать (ПК-9);

способен работать с программными средствами прикладного, системного и специального назначения (ПК-10);

способен использовать языки и системы программирования, инструментальные средства для решения различных профессиональных, исследовательских и прикладных задач (ПК-11);

способен передавать результат проведенных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления (ПК-12);

способен самостоятельного построения алгоритма, проведения его анализа и реализации в современных программных комплексах (ПК-14);

способен организовать защиту информации при работе с компьютерными системами техническими и программными средствами, включая приемы антивирусной защиты (ПК-15)".

Вопрос о том, у какого процента выпускников возможна выработка следующей компетенции, для нас открыт:

"способен разрабатывать формальные модели политик безопасности, политик управления доступом и информационными потоками в компьютерных системах (ПК-13)".

Затем перечисляются компетенции по видам деятельности: *научно-исследовательская, проектная, контрольно-аналитическая, организационно-управленческая и эксплуатационная.*

Некоторые из этих компетенций являются, на наш взгляд, слишком общими, однако большая часть достаточно конкретна и проверяема.

В шестом разделе сформулированы требования к структуре основной образовательной программы подготовки специалиста. Приведем некоторые основные положения этого раздела.

"Основная образовательная программа (ООП) подготовки специалистов предусматривает изучение следующих учебных циклов:

— гуманитарный, социальный и экономический цикл;

— математический и естественнонаучный цикл;

— профессиональный цикл

и разделов:

— физическая культура;

— практика и научно-исследовательская работа;

— итоговая государственная аттестация.

Каждый учебный цикл имеет базовую (обязательную) часть и вариативную (профильную), устанавливаемую вузом. Вариативная (профильная) часть дает возможность расширения или углубления знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых дисциплин, позволяет студенту получить углубленные знания и навыки для успешной профессиональной деятельности.

Базовая (обязательная) часть цикла С.1 *"Гуманитарный, социальный и экономический цикл"* должна предусматривать изучение следующих обязательных дисциплин: "История" , "Философия" , "Иностранный язык". Этот цикл не претерпел существенных изменений по сравнению с предыдущим ГОС по этой специальности.

Базовая (обязательная) часть профессионального цикла должна предусматривать изучение дисциплины "Безопасность жизнедеятельности".

В приводимой в ФГОС таблице собраны сведения о структуре ООП специалиста. В ней указаны учебные циклы и проектируемые результаты их освоения, приведен "Перечень дисциплин для разработки примерных программ, учебников и учебных пособий" , указаны коды формируемых компетенций. Для включения в базовую часть *"Гуманитарного, социального и экономического цикла"* предложены традиционные дисциплины "Философия" , "История России" , "Иностранный язык" , "Экономика" , "Правоведение" , "Основы управленческой деятельности". Указано, что в результате изучения базовой части этого цикла студент должен *знать, уметь* и какими *навыками владеть.*

Остановимся на некоторых особенностях следующего цикла С.2 *"Математический и естественнонаучный цикл".* В его базовую часть включены традиционные математические дисциплины "Математический анализ" , "Геометрия" , "Теория вероятностей и математическая статистика" , "Алгебра" , "Математическая логика и теория алгоритмов" , а также "Физика" и "Информатика" , указано какими знаниями, умениями и навыками должен владеть специалист, в результате изучения дисциплин этого цикла. Эти знания, умения и навыки можно отнести к традиционным, на выработку которых отечественная высшая школа была ориентирована, по крайней мере, последние 50-60 лет.

В вариативную часть этого цикла С.2 рекомендовано включить следующие математические дисциплины "Дифференциальные уравнения" , "Дискретная математика" , "Теория информации и кодирования" . На наш взгляд, включение этих дисциплин является безусловно необходимым. В целях усиления математической подготовки, можно обсудить вопрос о включении в вариативную часть цикла дисциплины "Элементы функционального анализа", конечно, не в таком объеме, как для специальности "Математика".

Цикл С.3 *"Профессиональный цикл"* по сравнению с предыдущим стандартом несколько модернизирован. Он, как и в предыдущем стандарте, включает дисциплины "Языки программирования", "Методы программирования", "Аппаратные средства вычислительной техники", "Операционные системы", "Вычислительные сети", "Системы управления базами данных", "Основы информационной безопасности", "Организационно-правовое обеспечение информационной безопасности", "Электроника и схемотехника", "Системы и сети передачи информации", "Техническая защита информации", "Криптографические методы защиты информации", "Криптографические протоколы", "Теоретико-числовые методы в криптографии". В тоже время дисциплина "Программно-аппаратные средства защиты информации" разбита на две дисциплины — "Основы построения защищенных операционных систем, вычислительных сетей, СУБД" и "Защита программ и данных" с сохранением содержания. Дисциплина "Теоретические основы защиты информации" заменена на дисциплину "Модели безопасности компьютерных систем", что способствует конкретизации ее содержания.

Неотъемлемой частью блока С.3 в соответствии с макетом ФГОС ВПО по специальности является специализация. Требования к результатам освоения и структуре ООП подготовки специалистов в части специализаций должны быть включены в стандарт, в настоящее время они находятся в стадии разработки. *Специализация* — часть основной образовательной программы подготовки специалиста, целью которой является формирование знаний, умений, навыков и компетенций для конкретных видов профессиональной деятельности в соответствующей области профессиональной деятельности.

Вузы разрабатывают *"Паспорт специализации"*, который включает в себя *1) объекты профессиональной деятельности; 2) виды профессиональной деятельности* (они должны определять содержание образовательной программы, разрабатываемой высшим учебным заведением совместно с заинтересованными работодателями); *3) требования к результатам освоения основных образовательных программ подготовки специалистов.* В последнем разделе указывается, какими профессионально-специализированными компетенциями должен обладать выпускник по данной специализации.

Цикл С.3 содержит вариативную часть. Научно-методический совет по специальности "Компьютерная безопасность" (сопредседатели В. П. Лось и А. В. Черемушкин) рекомендует включить в этот раздел дисциплины, усиливающие, углубляющие и расширяющие подготовку по дисциплинам этого цикла. В частности, рекомендуется включить небольшой курс "Избранные вопросы теории автоматов", в котором изучались бы различные автоматные модели вычислительных процесссов, протоколов, рассматривались вопросы минимизации, распознавания и тестирования автоматов. Рекомендуется ввести дисциплину "Алгоритмы кодирования и сжатия информации", в которой изучается класс алгоритмов, широко применяемых в современных архиваторах для сжатия разнообразных видов информации, а также обсуждаются особенности кодирования и сжатия текстовой, аудио, графической и видео информации. Рекомендовано включить в вариативную часть следующие разделы математики, которые в меньшей степени используются в криптографии и больше связаны с проблемами компьютерной безопасности: алгоритмы комбинаторные, на графах, деревьях, поиска и сортировки, генерации, обработки строк и последовательностей, сжатия данных, структуры и решетки; алгебра отношений (реляционная алгебра), теоретико-графовые модели; автоматы и языки: моделирование поведения дискретных систем, описание протоколов взаимодействия, моделирование выполнения программ, дискретные преобразования, и др.

Эти разделы уже нашли свое место в действующем учебном плане по рассматриваемой специальности, требуется лишь их некоторое усиление.

По мнению Научно-методического совета по специальности "Компьютерная безопасность" следующие разделы математических дисциплин начали активно применяться в последнее время в связи с проблемами верификации и проверки свойств безопасности, а также проблемами автоматизации такой проверки, поэтому целесообразно их включение в вариативную часть.

"Математическая логика": реляционные алгебры, проблема выполнимости (SAT), двоичные решающие диаграммы (BDD, OBDD);

"Теория автоматов": древовидные автоматы (TA), сети Петри.

На этой базе рекомендуется поставить одну или несколько дисциплин, например:

"Формальные методы" (в действующем ФГОС такая дисциплина отсутствует): системы переписывания термов (TRS), системы переходов и конкурирующие системы, автоматическое доказательство теорем, логики доверия, формальная семантика и правила вывода; темпоральные (временные) логики: логика деревьев вычислений CTL, линейная логика LTL, понятие справедливост, темпоральная логика действий TLA, определение системы переходов в логике TLA, предикаты состояния и перехода; термы: дерево подтермов, подстановки, системы переписывания термов, контекст, система мульти-множественного переписывания термов, результирующий вывод, операция композиции, проблема достижимости;

"Верификация и проверка моделей": проверка моделей (model checking), символическая проверка моделей (symbolic model checking), редукция частичных порядков и "редукция на лету" ("on-the-fly") и др.:

"Современные методы искусственного интеллекта": методы решения проблемы выполнимости (SAT), солверы (solvers), системы составления планов, многоагентные системы, нечеткая логика, нейросетевые алгоритмы, генетические алгоритмы.

Рекомендуется ввести дисциплину "Методы верификации", ориентированную не столько на верификацию логических схем, сколько на верификацию программ и протоколов.

В. П. Лось и А. В. Черемушкин отмечают в качестве открытой проблемы вопрос об объеме и содержании криптографической подготовки, необходимой для специалиста по компьютерной безопасности. По их мнению, в зависимости от роли, выполняемой на работе таким специалистом, ему необходимо:

на уровне пользователя — знать основные виды и назначение криптографических систем, а также основные особенности их эксплуатации, позволяющие исключить ошибки, критическим образом влияющие на безопасность компьютерной системы;

на уровне администратора безопасности — знать особенности криптографических систем, в том числе правила их установки, обслуживания ключевых систем, в зависимости от их назначения (при подключении к глобальным сетям, организации VPN, почтовых служб, файловых систем, и т. п.);

на уровне разработчика или эксперта — знать особенности реализации криптографических систем, в том числе для различных уровней их расположения и различных требований к доверенности окружения, знать основные протоколы обеспечения безопасности взаимодействия в компьютерных системах и т. д.

Они считают, что базовые дисциплины действующего ФГОС обеспечивают подготовку, приблизительно соответствующую второму уровню, позволяющему выступать в роли администратора безопасности. По их мнению, имея хороший математический базис, студенты не получают необходимой информации для выполнения обязанностей третьего уровня. Для исправления ситуации они предлагают либо увеличить часы на криптографические дисциплины, либо ввести соответствующие дисциплины по выбору. Все это можно сделать за счет вариативной части.

В. П. Лось и А. В. Черемушкин рекомендуют усилить подготовку по следующим темам:

"Межсетевые экраны",

"Виртуальные частные сети" ,
"Средства сетевого аудита и обнаружение проникновений" ,
"Управления рисками" ,
"Восстановление систем после вторжений" ,
"Администрирование сетевых маршрутизаторов и коммутаторов" ,
"Настройка аппаратных межсетевых экранов" ,
"Беспроводные и мобильные сети и их безопасность" ,
"Мониторинг информационных атак" ,
"Экспертиза компьютерных преступлений" ,
"Биометрическая аутентификация" ,
"Системы электронного документооборота" ,
"Электромагнитное оружие" .

Особое место в ФГОС занимает седьмой раздел **"Требования к условиям реализации основных образовательных программ подготовки специалистов"** . Рассмотрим его по подразделам.

7.1. Общие требования к условиям реализации основных образовательных программ

Приведем некоторые выдержки из этого подраздела, позволяющие судить в целом о предъявляемых ФГОС требованиях.

Пункт 7.1.1 начинается со следующего положения. "Перед началом разработки ООП вуз должен определить главную цель (миссию) программы, цели основной образовательной программы, как в области воспитания, так и в области обучения, учитывающую ее специфику, особенности научной школы, потребности рынка труда".

Обратим внимание на следующую часть пункта 7.1.4. "Общая трудоемкость дисциплины не может быть менее 2 зачетных единиц. По дисциплинам, трудоемкость которых составляет более 3 зачетных единиц, должна выставляться оценка ("отлично" , "хорошо" , "удовлетворительно")" .

Пункт 7.1.6 содержит переходящее из стандарта в стандарт требование: "Максимальный объем учебной нагрузки обучающихся не может составлять более 54 академических часов в неделю, включая все виды аудиторной и внеаудиторной."

Принципиально новым по сравнению с предыдущими ФГОС является пункт 7.1.7: "Объем аудиторных учебных занятий в неделю при освоении основной образовательной программы в очной форме обучения составляет не менее 27 и не более 36 академических часов." Впервые за последние годы сделан акцент на недопустимости сокращения аудиторных занятий, до этого доминировала тенденция сокращения часов, отводимых на аудиторные занятии, что по мнению многих специалистов неизбежно вело к снижению качества подготовки выпускников.

Остановимся на требованиях к лабораторному обеспечению.

"7.1.12. Программа подготовки специалистов вуза должна включать лабораторные практикумы и практические занятия по следующим дисциплинам (модулям) базовой части, формирующим у обучающихся умения и навыки по дисциплинам "Физика" , "Электроника и схемотехника" , "Аппаратные средства вычислительной техники" , "Системы и сети передачи информации , а также по дисциплинам специализации и вариативной части, рабочие программы которых предусматривают цели формирования у обучающихся соответствующих умений и навыков."

Раздел **7.2 Требования к организации практик и научно-исследовательской работы** содержит два подраздела.

"7.2.1 Требования к организации практик обучающихся

Практика является обязательным разделом основной образовательной программы подготовки специалистов. Она представляет собой форму организации учебного процесса, непосредственно ориентированную на профессионально-практическую подготовку обучающихся. При реализации ООП подготовки специалистов по данной специальности предусматриваются следующие виды практик: учебная, производственная, преддипломная.

Конкретные виды практик определяются ООП вуза. Цели и задачи, программы и формы отчетности определяются вузом по каждому виду практики.

Практики могут проводиться в сторонних организациях (предприятиях, структурных подразделениях федеральных органов исполнительной власти и органов субъектов Российской Федерации, научно-исследовательских и проектных организациях, фирмах), основная деятельность которых предопределяет наличие объектов и видов профессиональной деятельности выпускников по данной специальности (специализации) или на кафедрах и в лабораториях вуза, обладающих необходимым кадровым и научно-техническим потенциалом".

Заметим, что с учетом реалий сегодняшнего дня этот пункт предоставляет вузу широкие возможности для проведения практики на достаточно высоком уровне.

Следующий подраздел ФГОС закрепляет роль научно-исследовательской работы в процессе подготовки специалистов.

"7.2.2 Требования к научно-исследовательской работе обучающихся

Научно-исследовательская работа является обязательным разделом основной образовательной программы подготовки специалистов, направлена на комплексное формирование общекультурных, профессиональных и профессионально-специализированных компетенций в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта." Далее перечисляются требования к вузу с точки зрения организации научно-исследовательской работы студентов.

Следующий раздел ФГОС посвящен требованиям к кадрам, осуществляющим учебный процесс.

"7.3 Требования к кадровому обеспечение учебного процесса

Реализация основной образовательной программы подготовки специалиста должна обеспечиваться научно-педагогическими кадрами, имеющими базовое образование, соответствующее профилю преподаваемой дисциплины, и ученую степень или опыт деятельности в соответствующей профессиональной сфере и систематически занимающимися научной и/или научно-методической деятельностью.

Доля преподавателей, имеющих ученую степень и/или ученое звание, в общем числе преподавателей, обеспечивающих образовательный процесс по основной образовательной программе подготовки специалиста, должна быть не менее 65%, ученую степень доктора наук и/или ученое звание профессора должны иметь не менее 9% преподавателей.

Не менее 70% преподавателей (в приведенных к целочисленным значениям ставок), обеспечивающих учебный процесс по профессиональному циклу, должны иметь ученые степени и ученые звания, из них не менее 30% должны иметь ученые степени по научным специальностям, связанным с проблемами в области информационной безопасности, при этом ученые степени доктора наук или ученое звание профессора должны иметь не менее 11% преподавателей.

До 10% от общего числа преподавателей, имеющих ученую степень и/или ученое звание может быть заменено преподавателями, имеющими стаж практической работы в области обеспечения информационной безопасности на должностях руководителей или ведущих специалистов более 10 последних лет.

В структуре вуза, реализующего данную основную образовательную программу подготовки специалиста, должна быть отдельная выпускающая кафедра по специальности "Компьютерная безопасность".

Общее руководство содержанием теоретической и практической подготовки по специализации должно осуществляться штатным научно-педагогическим работником вуза, имеющим ученую степень доктора или кандидата наук и (или) ученое звание профессора или доцента, стаж работы в образовательных учреждениях высшего профессионального образования не менее 3 лет. К общему руководству содержанием теоретической и практической подготовки по специализации может быть привлечен высококвалифицированный специалист в соответствующей сфере профессиональной деятельности."

Раздел **7.4. Требования к учебно-методическому и информационному обеспечению учебного процесса** содержит стандартные требования по обеспечению дисциплин учебно-методической документацией и материалами. Принципиально новым по сравнению с предыдущими стандартами является требование "Содержание каждой из таких учебных дисциплин (курсов, модулей) должно быть представлено в сети Интернет или локальной сети образовательного учреждения с выполнением установленных требований по защите информации". В этот раздел включены достаточно стандартные требования к библиотечному фонду. Выделим следующую часть: "Во время самостоятельной подготовки обучающиеся должны быть обеспечены доступом к сети Интернет".

Новым является требование: "Каждому обучающемуся должен быть обеспечен доступ к комплектам библиотечного фонда, состоящего не менее чем из 5 наименований отечественных и не менее 4 наименований зарубежных журналов" из приводимого в стандарте перечня.

Следующее требование носит, на наш взгляд, слишком общий характер. "Для обучающихся должна быть обеспечена возможность оперативного обмена информацией с отечественными и зарубежными вузами, предприятиями и организациями (с выполнением установленных требований по защите информации), обеспечен доступ к современным профессиональным базам данных, информационным справочным и поисковым системам по тематике информационной безопасности (базы данных правовых, нормативных и методических документов по информационной безопасности, включая базу данных нормативных методических документов ФСТЭК России)".

Особый интерес, на наш взгляд, представляет следующий раздел, который впервые включается в ФГОС.

"7.5. Финансовое обеспечение учебного процесса

Ученый совет высшего учебного заведения при введении основных образовательных программ по специальности утверждает бизнес-план реализации соответствующих основных образовательных программ.

Финансирование реализации основных образовательных программ должно осуществляться в объеме не ниже установленных нормативов подушевого финансирования."

Особую роль в ФГОС играет подраздел **7.6. Требования к материально-техническому обеспечению учебного процесса**.

Приведем некоторые выдержки из него.

"Высшее учебное заведение, реализующее основные образовательные программы подготовки специалистов, должно располагать материально-технической базой, включая приборы, оборудование и программно-аппаратные средства специального назначения, обеспечивающей проведение всех видов лабораторной, дисциплинарной и междисциплинарной подготовки, практической и научно-исследовательской работы обучающихся, предусмотренных учебным планом вуза и соответствующей действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам.

Минимально необходимый для реализации образовательной программы подготовки специалистов перечень материально-технического обеспечения включает в себя:

Лаборатории в области: физики; информатики; электроники и схемотехники; сетей и систем передачи информации; технической защиты информации; программно-аппаратных средств обеспечения информационной безопасности.

В условиях конкретного вуза возможно объединение по блокам, или, напротив, комплексирование практикума на базе различных лабораторий с учетом профиля подготовки.

Специально оборудованные кабинеты и аудитории в области: иностранного языка; информатики; компьютерных технологий; методов программирования; языков программирования.

Лаборатории высшего учебного заведения должны быть оснащены современным оборудованием, стендами, приборами, позволяющими изучать и исследовать аппаратуру и процессы в соответствии с реализуемым вузом направлением.

Компьютерные классы должны быть оборудованы современной вычислительной техникой для занятий по дисциплинам из расчета одно рабочее место на 2-х обучаемых при проведении занятий в данных классах.

При использовании электронных изданий и проведении самостоятельной подготовки вуз должен обеспечить обучающихся возможностью выхода в Интернет из расчета не менее одного рабочего места в компьютерном классе на 10 обучающихся по данной ООП.

Вуз должен быть обеспечен необходимым комплектом лицензионного программного обеспечения и сертифицированными программными и аппаратными средствами защиты информации."

Восьмой заключительный раздел ФГОС — **"Требования к оценке качества освоения основных образовательных программ"**.

"8.1. Высшее учебное заведение обязано обеспечивать гарантию качества подготовки специалистов". Далее приводятся возможные пути достижения этой цели: разработка стратегии по обеспечению качества подготовки выпускников с привлечением представителей работодателей; разработка объективных процедур оценки уровня знаний и умений обучающихся, компетенций выпускников; обеспечение компетентности преподавательского состава; регулярное проведение самообследований по согласованным критериям для оценки своей деятельности (стратегии) и сопоставления с другими образовательными учреждениями с привлечением представителей работодателей.

"8.2. Оценка качества освоения основных образовательных программ подготовки специалистов должна включать текущий контроль успеваемости, промежуточную аттестацию обучающихся и итоговую государственную аттестацию выпускников.

8.3. Конкретные формы и процедуры текущего и промежуточного контроля знаний по каждой дисциплине разрабатываются вузом самостоятельно и доводятся до сведения обучающихся в течение первого месяца от начала обучения.

8.4. Для аттестации обучающихся на соответствие их персональных достижений поэтапным требованиям соответствующей ООП (текущая и промежуточная аттестация) создаются фонды оценочных средств, включающие типовые задания, контрольные работы, тесты и методы контроля, позволяющие оценить знания, умения и уровень сформированности компетенций. Фонды оценочных средств разрабатываются и утверждаются вузом.

Фонды оценочных средств должны быть полными и адекватными отображениями требований ФГОС ВПО по данной специальности, соответствовать целям и задачам конкретной программы подготовки специалиста и её учебному плану. Они призваны обеспечивать оценку качества общекультурных и профессиональных компетенций, приобретаемых выпускником в соответствии с этими требованиями.

При разработке оценочных средств для контроля качества изучения модулей, дисциплин, практик должны учитываться все виды связей между включенными в них знаниями, умениями, навыками, позволяющие установить качество сформированных у обучающихся компетенций по видам деятельности и степень общей готовности выпускников к профессиональной деятельности.

При проектировании оценочных средств необходимо предусматривать оценку способности обучающихся к творческой деятельности, их готовности вести поиск решения новых задач, связанных с недостаточностью конкретных специальных знаний и отсутствием общепринятых алгоритмов профессионального поведения)

Вузом должны быть созданы условия для максимального приближения системы оценивания и контроля компетенций специалистов к условиям их будущей профессиональной деятельности. С этой целью кроме преподавателей конкретной дисциплины в качестве внешних экспертов должны активно использоваться работодатели (представители заинтересованных предприятий, НИИ, фирм), преподаватели, читающие смежные дисциплины и т. п.

8.5. Обучающимся должна быть предоставлена возможность оценивания содержания, организации и качества учебного процесса в целом, а также работы отдельных преподавателей.

8.6. Итоговая государственная аттестация направлена на установление соответствия уровня профессиональной подготовки выпускников требованиям федерального государственного образовательного стандарта.

8.7. Итоговая государственная аттестация включает защиту выпускной квалификационной работы. Государственный экзамен вводится по усмотрению вуза."

Обратим внимание на последний пункт. Он может служить свидетельством того, что разработчики ФГОС понимают, что заложили в него возможно завышенные требования. А именно Государственный экзамен и позволяет проверить, насколько эти требования выполнены. Ряд вузов последние годы настойчиво проводили мысль о нецелесообразности проведения Итогового государственного экзамена, предлагали ограничиться лишь текущей и промежуточной аттестацией. Ярославский госуниверситет в это число не входил, мы всегда выступали за проведение Итогового междисциплинарного государственного экзамена.

"Требования к содержанию, объему и структуре выпускной квалификационной работы (проекта) определяются высшим учебным заведением на основании действующего Положения об итоговой государственной аттестации выпускников высших учебных заведений, утвержденого федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в сфере образования, а также данного ФГОС ВПО в части требований к результатам освоения основной образовательной программы подготовки специалиста".

"При выполнении выпускной квалификационной работы обучающийся должен показать свою способность и умение, опираясь на полученные углубленные знания, умения и сформированные общекультурные и профессиональные компетенции, самостоятельно решать на современном уровне задачи своей профессиональной деятельности, профессионально излагать специальную информацию, научно аргументировать и защищать свою точку зрения."

"8.8. Программа государственного экзамена разрабатывается вузами самостоятельно. Для объективной оценки компетенций выпускника экзаменационные вопросы и задания должны быть комплексными и соответствовать избранным разделам из различных учебных циклов, формирующих конкретные компетенции."

Проведенный анализ дает нам возможность утверждать, что предлагаемый проект нового государственного образовательного стандарта по специальности "Компьютерная безопасность" продолжает и развивает традиции, заложенные двумя предыдущими стандартами по этой специальности, делая основной упор в подготовке специалистов на фундаментальность образования и усиливая практическую составляющую.

О преподавании курса "Функциональный анализ и интегральные уравнения"

И. П. Иродова

Приводится набор задач, рекомендуемых для изучения темы "Метрические пространства" .

Библиография: 2 названия.

Функциональный анализ наряду с абстрактной алгеброй и теоретико-множественной топологией играет важную роль. Его методы с успехом используются во многих разделах современной теоретической и прикладной математики. Более того, развитие таких дисциплин как дифференциальные уравнения, теория управления, методы вычисления и другие вряд ли были бы успешными, если бы при этом не использовался функциональный анализ. Поэтому функциональный анализ стал необходимым элементом серьезного математического образования.

Курс "Функциональный анализ и интегральные уравнения", который читается студентам III курса математического факультета, достаточно сложен. Это объясняется высокой степенью абстракции вводимых понятий. Неслучайно данная дисциплина читается на третьем курсе. Попытки передвинуть чтение курса на год раньше (а это было бы целесообразно для дисциплин, где используется язык и результаты функционального анализа) были признаны неудачными. Студенты были еще не готовы воспринимать сложные математические определения.

Именно поэтому при чтении курса, особенно на первых занятиях, следует приводить как можно больше примеров и опираться, где это возможно, на конечномерный анализ.

Приведем пример того, как можно организовать практическое занятие, посвященное метрическим пространствам.

Напомним, что множество X называется **метрическим пространством**, если каждой паре $x, y \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\rho(x, y)$, называемое метрикой (или расстоянием), так, что выполняются следующие три аксиомы:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$ для любого $z \in X$ (неравенство треугольника).

Задача 1. *Проверить, что на плоскости можно ввести расстояние по формулам:*

$$1)\ \rho(x,y) = \max\left(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right) \ \textit{(чебышевская метрика);}$$
$$2)\ \rho(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|. \qquad (1)$$

Первое метрическое пространство обозначим l^2_∞, второе — l^2_1.

Как обычно, замкнутый шар с центром в точке x^* радиуса r — это множество точек, расстояние от которых до точки x^* не превышает r, то есть

$$B[x^*, r] = \{x \in X : \rho(x, x^*) \leqslant r\}\,.$$

Задача 2. *Нарисовать шар в пространствах l^2_∞ и l^2_1.*

Эта задача может удивить, а значит, привлечь внимание студентов. Ведь для кого-то это первое знакомство с неевклидовой геометрией. Действительно, все вроде бы обычно: свойства метрики, определение шара, а результат совсем не совпадает с тем, что мы привыкли называть шаром. В первом случае граница шара — это квадрат с центром в точке x^*, со сторонами параллельными осям координат, длина ребра которого равна $2r$, а во втором — тот же квадрат, но повернутый на 90 градусов.

Следующая задача вызывает еще большее удивление.

Задача 3. *([1]) Придумать метрическое пространство так, чтобы чтобы в нем существовал шар бо́льшего радиуса, вложенный в шар меньшего радиуса.*

Можно сначала поэкспериментировать с пространством из двух точек. Пусть $X = \{x, y\}$, $\rho(x,y) = 3$. Тогда $B[x,4] = B[y,5] = \{x,y\}$. Пока задача еще не решена, но мы уже нашли два совпадающих шара разных радиусов.

Теперь нужно перейти к пространству, состоящему из трех точек $X = \{x, y, z\}$. Остается задать расстояние между точками так, чтобы выполнялись все три свойства метрики и условие задачи. Решение может быть, например, таким: $\rho(x,y) = 3$; $\rho(y,z) = 6$; $\rho(x,z) = 4$. Тогда $B[x,4] = \{x,y,z\}$, $B[y,5] = \{y,x\}$, а значит, $B[y,5] \subset B[x,4]$.

Возникает вопрос. Для каких $r_1 < r_2$ вложение $B[x,r_1] \supset\ B[y,r_2]$ возможно? Ответ на этот вопрос содержится в следующей задаче.

Задача 4. *([1]) Доказать, что если шар радиуса 7 содержится в шаре радиуса 3, то они совпадают.*

Теперь обобщим определение расстояния, данное в задаче 1.

Задача 5. *Доказать, что на плоскости можно ввести расстояние по формуле*

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant 1$.

Это пространство обозначим l_p^2. Заметим, что при $p = 2$ получаем обычное евклидово пространство.

Задача 6. *Нарисовать шар в пространстве* l_p^2.

Отметим, что шары радиуса r с одним и тем же центром, построенные по метрике пространств l_p^2, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, вложены друг в друга. Самый большой шар — из пространства l_∞^2, самый маленький — из l_1^2.

По аналогии с пространствами l_p^2 вводятся пространства l_p^n.

Следующая серия задач может касаться треугольников. Например, требуется в пространствах l_1^2, l_∞^2 найти равнобедренные, равносторонние треугольники. Или требуется привести пример метрического пространства, где все треугольники равносторонние.

Теперь, когда студенты привыкли к определению метрики, можно перейти к нахождению расстояния от точки до прямой.

Напомним, что расстояние от точки x^* до множества A вычисляется по формуле

$$\rho(x^*, A) = \inf_{a \in A} \rho(x^*, a).$$

Все привыкли считать, что кратчайшее расстояние от точки до прямой можно найти, построив перпендикуляр. Сейчас, в отличие от евклидова пространства, с помощью перпендикуляра решить эту задачу нельзя.

Воспользуемся тем, что мы уже умеем рисовать шар. Построим шар с центром в точке x^* так, чтобы он коснулся заданной прямой. Заметим, что касание может произойти в одной точке (если шар, например, круглый), а может коснуться целой гранью. Радиус этого шара — это и есть расстояние от точки x^* до прямой. Мы описали алгоритм решения задачи. А как ее решить в конкретных случаях?

Задача 7. *Пусть* $A = \{x : x_1 = t; x_2 = 2t; x_3 = -t; t \in R\}$, $x^* = (1, 2, 4)$. *Найти* $\rho(x^*, A)$ *для пространств* $l_p^3, p = 1, 2, \infty$.

Задача 8. *Написать программу вычисления* $\rho(x^*, A)$ *для пространств* $l_p^n, p = 1, 2, \infty$, *где* $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$, $A = \{x : x_1 = a_1 t, ..., x_n = a_n t\}$.

В завершение этой серии задач можно остановиться на вопросе: насколько оправдано введение формул (1) для подсчета расстояний?

Для этого рассмотрим такой пример. Пусть проводится серия из n опытов. Есть идеальная модель (x) и реальная (y). Как оценить, насколько реальная модель отличается от идеальной? Для этого нужно вычислить расстояние от x до y. Все зависит от конкретной ситуации. Если важно́ каждое испытание (например, проводится обследование пациента), то лучше считать расстояние по метрике пространства l_∞^n. Если же нужна некоторая средняя характеристика, то лучше работать с метрикой пространства l_1^n. Если же проводимые опыты не равнозначны, то можно ввести "вес" каждого испытания и расстояние вычислять по формуле:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |x_i - y_i|,$$

где числа $\alpha_i > 0$.

Мы привели набор задач, которые можно рекомендовать для изучения темы "Метрические пространства". Конечно, на этом список пространств не исчерпывается. Но наша цель заключается в том, чтобы продемонстрировать, как на простейших примерах можно понять свойства метрики.

В заключение рассмотрим задачу вычисления расстояния от точки до гиперподпространства и покажем, что для ее понимания вновь можно привлечь пример из конечномерного пространства.

Пусть L — линейное нормированное пространство. Напомним, что подпространство $L_0 \subset L$ называется гиперподпространством, если найдется $x_0 \overline{\in} L_0$, что $lin(x_0, L_0) = L$. Известно (см., например, [2]), что любое гиперподпространство описывается с помощью линейного непрерывного функционала, который определяется с точностью до константы.

Таким образом, $L_0 = ker f = \{x : f(x) = 0\}$ и

$$\rho(x^*, ker f) = \frac{|f(x^*)|}{\|f\|}. \tag{2}$$

Эту формулу легко можно доказать, используя, например, одно из следствий теоремы Хана–Банаха.

Пусть теперь $L = l_2^3$, тогда (2) задает формулу, которая ранее была доказана в курсе аналитической геометрии. Чтобы ее получить, нужно вспомнить, что любой линейный функционал, определенный на пространстве l_p^n, имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

и норму функционала можно вычислить по формуле

$$\|f\|_{l_p^n} = \|a\|_{l_q^n},$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Тогда

$$\rho(x^*, kerf) = \frac{|a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + a_3 x_3^*|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

и мы получили формулу расстояния от точки до плоскости.

Задача 9. *Найти расстояние от* $x^* = (1, 2, 3)$ *до* $kerf$ *в пространстве* l_p^3, $p \geqslant 1$, *где* $f(x) = 3x_1 + 4x_2 - 5x_3$.

Задача 10. *Найти расстояние от* x^* *до гиперплоскости* $A = \{x : f(x) = c\}$ *в пространстве* l_p^r, $p \geqslant 1$. *Здесь* f *— линейный непрерывный функционал.*

Список литературы

[1] *Антоневич А. Б., Князев П. Н., Радыно Я. В.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. Минск: Вышейшая школа, 1978.

[2] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976.

Параметрический вариант леммы Римана

В. С. Климов

Обсуждается методика изложения темы "Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье" в курсе математического анализа. Приводится доказательство теоремы Липшица, опирающееся на параметрический вариант леммы Римана.

Библиография: 4 названия.

Тема "Сходимость тригонометрических рядов Фурье" обсуждается во всех университетских учебниках по математическому анализу. По сложившейся традиции изучение данных вопросов начинается с исследования сходимости ряда Фурье в фиксированной точке, а лишь затем приводятся условия равномерной сходимости [1–3]. Иногда идут ещё дальше: проблема равномерной сходимости в основном тексте не рассматривается, а предлагается в качестве самостоятельного упражнения [4]. Такого рода положение вещей не устраивает смежников, например, специалистов по математической физике, которых преимущественно интересует равномерная сходимость соответствующих рядов.

В своём курсе математического анализа я в первую очередь излагаю достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. На их основе выводятся аппроксимационные теоремы Вейерштрасса, полнота системы тригометрических и алгебраических полиномов и сходимость в среднем квадратичном рядов Фурье по ортонормированным системам. Существенно в меньшей степени затрагивается вопрос о поточечной сходимости рядов. Подобная расстановка акцентов также не всем нравится, однако я нахожу в ней больше достоинств, чем недостатков.

Основу предлагаемого подхода составляет следующее утверждение.

Лемма (параметрический вариант леммы Римана). *Пусть функция* $g\colon [a,b]\times(0,T]\to\mathbb{R}$ *непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет оценке*

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{K}{t^{\beta}}\,, \tag{1}$$

где $0<K<\infty,\ 0\leqslant\beta<1,\ x\in[a,b]\ (-\infty<a<b<\infty),\ t\in(0,T]$. *Тогда интеграл*

$$I_p(x) \overset{def}{=} \int\limits_0^T g(x,t)\sin pt\,dt \tag{2}$$

равномерно относительно x *из отрезка* $[a,b]$ *стремится к 0 при* $p\to\infty$, *т. е. для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое число* p_0, *что при* $p\geqslant p_0$ *справедлива оценка*

$$|I_p(x)|<\varepsilon \quad \textit{для всех } x \quad \textit{из отрезка } [a,b]\,.$$

◀ Фиксируем положительное число τ. Подберём число $t_0>0$ так, что

$$\int\limits_0^{t_0}\frac{K}{t^{\beta}}\,dt<\tau\,. \tag{3}$$

Функция $g(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных на прямоугольнике $[a,b]\times[t_0,T]$. Поэтому существует такое $\delta>0$, что из условий $t_0\leqslant t'\leqslant t''\leqslant T$, $|t'-t''|<\delta$ следует неравенство $|g(x,t')-g(x,t'')|<\tau$ для всех x из отрезка $[a,b]$. Фиксируем разбиение $t_0,t_1,\ldots,t_N$ отрезка $[t_0,T]$, для которого $t_i-t_{i-1}<\delta$ $(i=1,\ldots,N)$. Справедливы равенства

$$I_p(x) = \int\limits_0^{t_0} g(x,t)\sin pt\,dt + \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[g(x,t)-g(x,t_k)]\sin pt\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} g(x,t_k)\sin pt\,dt = J_1(x)+J_2(x)+J_3(x)\,.$$

Оценим величину каждого из слагаемых $J_1(x), J_2(x), J_3(x)$. Имеем

$$|J_1(x)| = \left|\int\limits_0^{t_0} g(x,t)\sin pt\,dt\right| \leqslant \int\limits_0^{t_0}\frac{K}{t^\beta}\,dt < \tau \tag{4}$$

для любого x из отрезка $[a,b]$ и произвольного p. Оценка (4) вытекает из (1), (3). Поскольку $0 < t_k - t_{k-1} < \delta$ $(k = 1,\ldots,N)$, то

$$|J_2(x)| \ \leqslant \left|\sum_{k=1}^{N}\ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[g(x,t)-g(x,t_k)]\sin pt\,dt\right| \ \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|g(x,t)-g(x,t_k)|\,dt \ < \ \tau(T-t_0) < \tau T \tag{5}$$

для всех x из $[a,b]$ и произвольных действительных p. Третье слагаемое можно вычислить в явном виде:

$$J_3(x) \ = \ \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} g(x,t_k)\sin pt\,dt = \sum_{k=1}^{N} g(x,t_k)\frac{\cos pt_{k-1}-\cos pt_k}{p}\,.$$

Следовательно,

$$|J_3(x)| \ \leqslant \ \frac{2N}{p}\ \max\{|g(x,t)|,\ x\in[a,b],\ t\in[t_0,T\}\,.$$

При достаточно больших p $(p \geqslant p_0)$ последняя оценка влечёт за собой неравенство

$$|J_3(x)| < \tau \quad \text{для всех} \quad x \quad \text{из отрезка} \quad [a,b]\,. \tag{6}$$

Объединяя оценки (4) – (6), получаем

$$|I_p(x)| \leqslant |J_1(x)|+|J_2(x)|+|J_3(x)| < \tau+\tau T+\tau = \tau(2+T)\,.$$

Если $\tau(2+T) < \varepsilon$, то $|I_p(x)| < \varepsilon$ при $p \geqslant p_0$ и всех x из отрезка $[a,b]$. ►

Тригометрическим рядом Фурье, соответствующим интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции f, называют ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \tag{7}$$

где коэффициенты a_k, b_k находятся по формулам Эйлера–Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,, b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,.$$

Справедливо равенство (формула Дирихле)

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)]\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}}\,dt\,, \tag{8}$$

в которой $s_n(x)$ — частная сумма ряда (7), функция f продолжена на всю прямую по 2π-периодическому закону.

Функция $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Гёльдера порядка* α, если $|\varphi(t) - \varphi(s)| \leqslant L|t-s|^{\alpha}$ для всех t,s из $[a,b]$. Класс функций $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию Гёльдера порядка α, обозначают символом $H^{\alpha}[a,b]$.

Теорема (Признак Липшица). *Пусть функция f принадлежит классу $H^{\alpha}[-\pi,\pi]$ при некотором α из $(0,1]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд (7) сходится к f равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$.*

◄ Продолжим функцию f по 2π-периодическому закону на всю действительную прямую. Введём в рассмотрение функцию

$$g(x,t) = \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{2\pi\sin\dfrac{t}{2}}\,.$$

Из формулы (8) вытекает равенство

$$s_n(x) - f(x) = \int\limits_0^{\pi} g(x,t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\,,$$

поэтому достаточно показать, что определяемая таким образом функция $g(x,t)$ удовлетворяет на $[-\pi,\pi]\times(0,\pi]$ условиям леммы. Так как $f \in H^{\alpha}[-\pi,\pi]$, то

$$|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)| \leqslant |f(x+t)-f(x)|+|f(x)-f(x-t)| \leqslant 2Lt^{\alpha},$$

где L – коэффициент Гёльдера функции f. Для чисел φ, принадлежащих отрезку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, верно вытекающее из вогнутости синуса на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оценка $\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$, поэтому $2\pi\sin\frac{t}{2} \geqslant 2\pi\frac{2}{\pi}\frac{t}{2} = 2t$. Объединяя установленные оценки, получаем $|g(x,t)| \leqslant \frac{2Lt^{\alpha}}{2t} = Lt^{\alpha-1}$. Очевидно, что $1-\alpha \in [0,1)$. Выполнение других условий леммы проверяется без труда.▶

В порядке обсуждения условия Гёльдера студентам предлагаются следующие задания.

Упражнение 1. *Доказать, что функция* $f(x) = x^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1$ *на отрезке* $[0,1]$ *удовлетворяет условию Гёльдера порядка* α.

Упражнение 2. *Установить включение* $H^{\beta}[a,b] \subset H^{\alpha}[a,b]$, *если* $\beta > \alpha$.

Упражнение 3.*Доказать, что функция*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \textit{для } x = 0, \\ \dfrac{1}{\ln 4 - \ln|x|}, & \textit{если } 0 < |x| \leqslant \pi, \end{cases}$$

непрерывна и чётна на отрезке $[-\pi,\pi]$, *однако не удовлетворяет условию Гёльдера (ни при каком значении параметра* $\alpha > 0$*).*

Рассматриваются примеры разложения в равномерно сходящиеся тригонометрические ряды функций $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \cos tx$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi, |t| < 1)$. Отмечается, что хотя функция h не удовлетворяет предположениям теоремы Липшица, соответствующий ей ряд равномерно сходится (признак Дирихле–Жордана). Анализируются и другие возможности ослабления условия Гёльдера.

Список литературы

[1] *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

[3] *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1990.

[4] *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1990.

О дифференцировании по параметру кратных интегралов

В. С. Климов, В. В. Литвинов

Приводится доказательство правила дифференцирования кратных интегралов по переменной области интегрирования.

Библиография: 3 названия.

Известны аналоги правила Лейбница для кратных интегралов по переменной области интегрирования. Остановимся лишь на одном варианте этого правила.

Пусть U – открытое множество в пространстве $\mathbf{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 > 0$,

$$v(x,t) = (v_1(x,t), \ldots, v_n(x,t))^T$$

— векторная функция, определённая и непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных на $U \times (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$. Обозначим через $\psi(t;\xi)$ решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} \;=\; v(x,t), \qquad x(t_0) = \xi\,. \tag{1}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \psi(t;\xi)}{\partial t} = v(\psi(t;\xi),t), \qquad \psi(t_0;\xi) = \xi\,.$$

Вектор-функции $v(x,t) = (v_1(x,t), \ldots, v_n(x,t))^T$ сопоставим скалярную функцию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x,t)\,,$$

называемую *дивергенцией* v и обозначаемую символом $div\ v$. Очевидно, что функция $div\ v(x,t)$ определена и непрерывна по совокупности переменных на $U \times (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$.

Лемма. *Пусть M – компактное подмножество области U. Тогда*

1° *найдётся такое $\delta > 0$ и такая окрестность W множества M, что $W \subset U$ и при любом ξ из W задача Коши (1) имеет решение $x = \psi(t;\xi)$, определённое на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$;*

2° *для каждого t из $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ отображение $\xi \to \psi(t;\xi)$ есть диффеоморфизм W на $\psi(t; W)$;*

3° *якобиан $J(t,\xi)$ отображения $\xi \to \psi(t;\xi)$ удовлетворяет соотношениям*

$$J(t_0,\xi) = 1, \qquad \frac{\partial J}{\partial t}(t,\xi) = a(t,\xi)J(t,\xi)\,, \tag{2}$$

где

$$a(t,\xi) \;=\; div\; v(\psi(t;\xi),t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\psi(t;\xi))\,;$$

4° *если E — кубируемый компакт и $E \subset M$, то и множество*

$$E(t) = \psi(t,E) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta)$$

также кубируемый компакт.

◀ Утверждения $1^\circ - 3^\circ$ вытекают из стандартных результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]). Соотношения (2) эквивалентны равенству

$$J(t,\xi) \;=\; exp\left(\int\limits_{t_o}^{t} a(s,\xi)\,ds\right),$$

называемому формулой Лиувилля. Четвёртое утверждение леммы хорошо известно (см., например, [2]).▶

Пусть $f\colon\ U \times [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \to \mathbb{R}$ — скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных. Ниже

$$\frac{df}{dt}(x,t) := \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} v_i(x,t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t) \tag{3}$$

— производная функции f в силу системы дифференциальных уравнений (1). Из леммы вытекает, что для любого кубируемого компакта $E \subset U$ найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех t из $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$ множество $\psi(t,E) = E(t)$ есть кубируемый компакт. В частности, имеет смысл интеграл

$$I(t) \;=\; \int\limits_{E(t)} f(x,t)\,dx\,. \tag{4}$$

Равенство (4) определяет некоторую функцию $I(t)$ — интеграл, зависящий от параметра t из $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. В указанных выше относительно функций f, v предположениях справедлива

Теорема (Вариант правила Лейбница). *Функция $I(t)$ дифференцируема по t и*

$$\frac{dI}{dt}(t) \; = \int\limits_{E(t)} \left(\frac{df}{dt}(x,t) + f(x,t)\; div\; v(x,t) \right) dx\,. \tag{5}$$

◀ Замена переменных в (4) приводит к следующему равенству:

$$I(t) \; = \int\limits_{E} f[\psi(t;\xi),t] J(t,\xi)\, d\xi\,. \tag{6}$$

К интегралу (6) (по постоянному множеству E) применимо стандартное правило Лейбница [2]. Поэтому функция $I(t)$ дифференцируема на отрезке $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ и

$$\frac{dI}{dt}(t) \; = \int\limits_{E} \frac{\partial}{\partial t} \left(f[\psi(t;\xi),t] J(t,\xi) \right) d\xi\,. \tag{7}$$

Вычислим теперь частную производную по t, фигурирующую в равенстве (7). Имеем последовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(f[\psi(t;\xi),t] J(t,\xi) \right) = J(t,\xi) \frac{\partial}{\partial t} f[\psi(t;\xi),t] + f[\psi(t;\xi),t] \frac{\partial J}{\partial t}(t,\xi)\,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f[\psi(t;\xi),t] = \frac{df}{dt}(x,t)\,; \tag{9}$$

функция $\dfrac{df}{dt}$ определена равенством (3), $x = \psi(t;\xi)$. Объединяя (8), (9) с (2), приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}(f[\psi(t;\xi),t] J(t,\xi)) = \frac{df}{dt}(x,t) + f(x,t)\; div\; v(x,t), \tag{10}$$

в котором $x = \psi(t;\xi)$. Подставим в (7) вместо $\dfrac{\partial}{\partial t}(f([\psi(t;\xi),t]J(t,\xi))$ его выражение согласно (10). Возвращаясь к старому переменному x, получаем равенство (5), представляющее искомое правило дифференцирования интеграла (4) по параметру t.▶

Следствие 1. *Если скалярная функция f и векторная функция v таковы, что*

$$\frac{df}{dt} + f div\; v \equiv 0 \tag{11}$$

в $U \times [t_0-\delta, t_0+\delta]$, то интеграл $I(t)$ постоянен: $I(t) = I(t_0)$.

Следствие 2. *Пусть вектор-функция v не зависит от t и*

$$div\ v(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x) \equiv 0\,. \tag{12}$$

Тогда отображение $\xi \to \psi(t,\xi)$ сохраняет объём: $V(E_t) = V(E_{t_0})$.

Несложно показать, что соотношения (11), (12) не только достаточны, но и необходимы для постоянства функций $I(t)$ и $V(E_t)$ соответственно. Формула (11) влечет за собой известное в механике сплошных сред уравнение неразрывности. Именно, пусть $\rho(x,y,z,t)$ – плотность среды. Масса M этой среды, заключенной в переменной области $E(t)$, равна

$$M = \iiint\limits_{E(t)} \rho(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Если масса внутри области $E(t)$ постоянна, то

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{E(t)} \rho(x,y,z,t)\,dx\,dy\,dz = 0\,.$$

Ввиду произвола в выборе области $E(t)$ отсюда вытекает соотношение

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\ v \equiv 0\,,$$

называемое (см., например, [3]) *уравнением неразрывности.* Следует отметить, что доказательство равенства (5), излагаемое в учебнике [3], опирается на формулу Гаусса–Остроградского. Молчаливо предполагается, что эта формула применима к переменной области $E(t)$; в частности, граница $\partial E(t)$ области $E(t)$ должна быть достаточно гладкой. Приведенное выше доказательство применимо для произвольного кубируемого компакта E. Оно основано лишь на правиле замены переменных для кратных интегралов и понятно читателю, еще не знакомому с поверхностными интегралами.

Список литературы

[1] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1980.

[3] *Будак Б. М., Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965.

О методике преподавания теории систем и системного анализа в классическом университете

Е. В. Коновалов

Излагаются некоторые методологические особенности преподавания теории систем и системного анализа.

Библиография: 4 названия.

Понятие системы было введено в середине 20-го века в исследованиях Людвига фон Берталанфи [1] и выступало поначалу преимущественно как абстрактная теоретическая идея. В настоящее время оно не ограничивается теоретической сферой, а становится центральным в определенных областях прикладной науки. Системотехника, системное исследование, системный анализ и им подобные категории сейчас стали рабочими терминами. Многие промышленные предприятия и государственные службы имеют соответствующие департаменты, комитеты или по крайней мере особых специалистов по этим проблемам, а многие университеты предлагают программы и курсы для изучения системных идей. При этом многие аспекты преподавания таких курсов как "теория систем" или "системный анализ" не отражают современного положения дел в данной области. Зачастую методология преподавания ориентируется на советские научные источники по теории систем, датированные 70–80-ми годами прошлого столетия. Многие из них, например, прямо декларируют ущербность рыночных хозяйственных систем по сравнению с социалистическими системами. Также слабо проработаны механизмы прикладного системного анализа отдельных предприятий и объектов.

Безусловно, лучшие из советских исследований по теории систем ([2], [3] и др.) необходимо учитывать при разработке концепции лекционных курсов и практических занятий. При этом следует опираться и на современные западные исследования по системному анализу, в том числе на реально действующие стандарты формального описания и последующего анализа систем. Так, например, в США уже десятилетия успешно используется стандарт IDEF функционального описания систем. Данный стандарт представляет собой методологию моделирования и сопутствующую графическую нотацию, предназначенные для формализации и описания бизнес-процессов. Разработаны программные комплексы, поддерживающие этот стандарт. С развитием мелкого и среднего бизнеса в современной России резко возрастает важность таких прикладных технологий. Поэтому изложение основных принципов работы с семейством стандартов IDEF (в частности, IDEF0 как наиболее востребованного из них) целесообразно включать в лекционный курс "Теория систем и системный анализ". Это вооружит студентов не только практическими навыками работы с уже существующими экономическими системами, но и умением строить новые системы, в том числе собственного бизнеса.

Рассматриваемый лекционный курс одновременно предназначен для специальностей "Прикладная математика в экономике" и "Прикладная математика в химии". Поэтому предствляется естественным максимально обобщить принципы моделирования систем и их анализа на различные области знания. Традиционно основные примеры изучаемых систем относят к экономической сфере. Тогда как принципы системного подхода целесообразно излагать с привлечением не только макро- и микроэкономических, но и биологических, химических (типа систем "реакция-диффузия"), физических (например, звёздных или галактических систем), эволюционных, социальных систем. Кроме этого, системы, представляемые математическими моделями, едва ли не лучше всего подходят для изложения на их примере принципов моделирования систем в целом. Примерами таких моделей могут служить, в частности, модели искусственных нейронных сетей, модели, задействующие аппарат нечеткой логики, и т. п. Это позволит, с одной стороны, заинтересовать студентов широтой практического применения знаний, полученных в рамках курса, пробудить интерес к самостоятельному научному мышлению. С другой стороны, при таком подходе четко прослеживается связь теории систем с математическими методами построения и анализа систем.

Изложение основ синергетики также является важным компонентом курса. Многие современные системы, как социально-экономические, так и естественно-научные, обладают принципиальной сложностью, что затрудняет их изучение в рамках классической методологии теории систем [4]. Синергетика — междисциплинарное направление, изучающее свойства и поведение сложных систем. Исследуются принципы их изучения, развития, способность к прогрессу или регрессу. Устанавливаются наиболее общие закономерности, методы целенаправленного воздействия на такие системы. В качестве примеров сложных систем можно рассматривать как макроэкономические системы (отрасль промышленности, экономика субъекта Российской Федерации, государство в целом и др.), так и биологические (система человеческой эволюции или эволюции жизни в целом) Кроме того, многие математические модели проявляют характерные свойства сложных систем. Речь идет в первую очередь о взаимосвязи порядка и хаоса, наличии точек бифуркации, характеристике энтропии системы и др. Изучение сложных систем и важных их свойств поможет выработать у студентов способность привлекать разнородные знания для решения научных и практических задач, овладеть математическими методами синергетики.

Список литературы

[1] *Bertalanffy L.* General System Theory — A Critical Review // General Systems. 1962. V. VII. Pp. 1–20.

[2] *Голубков Е. П.* Методы системного анализа при принятии управленческих решений. М.: Знание. 1973. 47 с.

[3] *Черняк Ю. И.* Системный анализ в управлении экономикой. М.: Экономика. 1975. 191 с.

[4] *Анфилатов В. С., Емельянов А. А., Кукушкин А. А.* Системный анализ в управлении: учебное пособие. М.: Финансы и статистика. 2002. 368 с.

Отбор материала для дисциплины "Теория игр и исследование операций"

А. А. Короткин

Рассматриваются принципы отбора материала для дисциплины «Теория игр и исследование операций».

Основная проблема, с которой сталкивается каждый преподаватель, приступая к разработке учебного курса — отбор материала для чтения лекций и проведения практических занятий. Государственный образовательный стандарт дает, как правило, краткое описание основных тем, изложение которых является обязательным. При этом содержательное наполнение этих тем с учетом выделенных часов целиком ложится на плечи преподавателя. Именно здесь и возникает конфликт ограниченности ресурсов с составом и полнотой изложения вопросов той или иной темы. Характерный пример такой конфликтной ситуации дает дисциплина «Теория игр и исследование операций», которая читается на факультете ИВТ и математическом факультете для студентов 4 курса специальности 010200 Прикладная математика и информатика. Государственный образовательный стандарт 2000 г. определяет содержание этой дисциплины следующим образом [1].

ОПД.Ф.10 Теория игр и исследование операций:

принятие решений, элементы теории игр, линейные модели; сетевые модели; вероятностные модели, имитационное моделирование (34 часов лекций + 17 часов практических занятий).

Каждая из указанных тем в настоящее время представляет собой отдельное бурно развивающееся научное направление в области исследования операций. Даже в наиболее полном из существующих учебников по исследованию операций, содержащем 912 страниц (!), приводятся лишь основные математические модели и алгоритмы по рекомендуемым темам [2].

Как известно, преподаватель творчески подходит к интерпретации предлагаемых Госстандартом разделов дисциплины. Рассматривая рабочие программы дисциплины «Теория игр и исследование операций», разработанные в различных университетах страны, можно сделать заключение, что почти каждая из них в значительной мере основана на личных вкусах и пристрастиях автора. Так, например, программа факультета ВМК МГУ интерпретирует исследование операций по сути дела как теорию игр. В других программах основной упор делается на линейные модели, т. е. на теорию и методы линейного программирования и т. д.

В [3] приведены девять основных принципов, которыми можно руководствоваться при отборе материала для преподаваемой дисциплины. При составлении рабочей программы автор данного доклада использовал лишь следующие два:

— принцип соответствия объема содержания дисциплины времени, отведенному на его изучение (Козьма Прутков: «нельзя объять необъятное»);

— принцип профессиональной целесообразности, обеспечивающий перспективы применения полученных знаний в процессе дальнейшего образования, самообразования и профессиональной деятельности.

Содержание разделов дисциплины, включенных в программу, приводится ниже.

1. Математические модели исследования операций.

   Примеры практических задач исследования операций. Построение математической модели. Виды моделей. Многокритериальные модели. Оптимум Парето. Свертка критериев. Учет неопределенности исходных данных. Принципы Вальда и Сэвиджа.

2. Сетевые модели.

   Основные понятия теории графов. Задачи проектирования сетей. Построение минимального связующего дерева. Алгоритм Прима. Задачи кратчайшего пути. Алгоритм Дейкстры и оценка его трудоемкости. Построение матрицы кратчайших путей алгоритмом Флойда. Задача коммивояжера (ЗК) примеры практических задач, сводящихся к ЗК. Метод ветвей и границ решения ЗК. Приближенные методы. Задача о максимальном потоке в сети. Теорема и алгоритм Форда–Фалкерсона. Задача о потоке минимальной стоимости. Решение задачи алгоритмом циркуляции. Транспортные задачи в сетевой постановке.

3. Модели оптимального распределения ограниченного ресурса.

   Постановка задач оптимального распределения ограниченного ресурса. Непрерывные и дискретные модели. Анализ моделей. Метод динамического программирования в дискретной задаче оптимального распределения.

4. Модели массового обслуживания (обзор основных моделей)

   Системы массового обслуживания (СМО) — примеры, основные понятия (потоки событий в СМО, показатели эффективности работы СМО). Формула Литтла. Расчет простейших СМО. Пример имитационной модели СМО.

5. Моделирование конфликтных ситуации играми.

   Игра как математическая модель конфликта. Задание игры. Бескоалиционные игры. Основные принципы оптимального выбора решения игры — оптимальность по Парето и равновесие по Нэшу. Антагонистические игры. Принцип минимакса (максимина). Теорема эквивалентности: $maxmin = minmax \Leftrightarrow$ существует ситуация равновесия. Смешанные стратегии. Теорема существования решения в смешанных стратегиях. Графическое решения игр $2 \times n, \quad m \times 2$. Сведение нахождения решения игры к паре двойственных задач линейного программирования. Позиционные игры. Дерево игры. Теорема о существовании решения в игре с полной информацией. Кооперативные игры с побочными платежами. Примеры кооперативных игр. Задание игры характеристической функцией. (0-1)-редуцированная форма игры. Дележи. Понятие ядра множества дележей и его нахождение. Вектор Шепли как решение кооперативной игры.

По количеству лекционных часов приоритет отдан разделу 2 (сетевые модели). Это объясняется широким распространением практических задач исследования операций, допускающих формализацию в виде экстремальных задач на графах. Кроме того, в программе отсутствует тема «Линейные модели», указанная в ГОС. Основы теории и методов линейного программирования излагаются в курсе «Методы оптимизации», читаемом студентам ранее на 3-м курсе.

Интересно отметить, что в Рекомендациях по преподаванию информатики (Computing Curricula 2001: Computer Science) [4], разработанных специальными комитетами по образованию профессиональных обществ ACM (Association for Computing Machinery) и IEEE Computer Society для американских университетов, теория исследования операций включает ряд разделов, которые излагаются в российских университетах обычно на факультативных курсах. К этим разделам относятся сети Петри, управление рисками и ряд других. Кроме того, в Рекомендациях теорию игр предлагается преподавать в рамках курсов, связанных с искусственным интеллектом («Искусственный интеллект», «Управление информацией и знаниями», «Искусственный интеллект и информация»).

В заключение отметим, что опубликованные автором учебные пособия [5–6] полностью содержат изложение разделов указанной выше программы.

Список литературы

[1] Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 010200 — Прикладная математика и информатика. Квалификация — математик, системный программист. М.: Министерство образования РФ. 2000.

[2] *Таха Х. А.* Введение в исследование операций / М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.

[3] *Бестужева Л. П.* О содержании дисциплины “математика” на экономическом факультете для специальности 060500 “Бухгалтерский учет, анализ и аудит”/ Настоящий сборник.

[4] Computing Curricula 2001: Computer Science // Association for Computing Machinery and Computer Society IEEE (перевод по электронному адресу http://se.math.spbu.ru/SE/cc2001r.pdf)

[5] *Короткин А. А.* Модели и алгоритмы исследования операций. Уч. пособие / А. А. Короткин, В. Г. Фокин; Яросл. гос. ун-т. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 76 с.

[6] *Короткин А. А.* Дополнительные главы по курсу «Теория игр и исследование операций»: текст лекций / А. А. Короткин, Л. П. Бестужева; Яросл. гос. ун-т. Ярославль: ЯрГУ, 2007. 64 с.

Использование отладочного интерфейса в лабораторном практикуме на ЭВМ

И. В. Лаврентьев, В. А. Никулин, Н. Б. Чаплыгина

Приводится обзор отладочных средств интегрированной среды Microsoft Visual C++, с которыми необходимо познакомить студентов младших курсов на учебных занятиях по лабораторному практикуму на ЭВМ.

Библиография: 2 названия.

Осваивая программирование на языках высокого уровня, многие студенты далеко не сразу понимают основные конструкции языка. Особые трудности возникают при использовании вложенных операторов цикла. Чтобы понять принципы работы таких конструкций, необходимо уметь "прокручивать" программу. Безусловно, полезно делать это вручную. Но в случае, когда студент не понимает алгоритм работы конструкции языка, ручная "прокрутка" не принесет пользы. Среда Microsoft Visual C++ предоставляет возможность автоматической "прокрутки" программы, которая продемонстрирует последовательные шаги выполнения. Ее использование позволяет студенту почувствовать логику выполнения операторов на начальных стадиях изучения языка и самостоятельно находить логические ошибки в программе во время выполнения лабораторных работ.

Для использования механизма отладочных средств при выполнении программы из ниспадающего меню пункта Debug нужно выбрать строку Start (F5). При этом запускается безостановочный отладочный режим (при условии отсутствия точек останова). Слева от листинга программы появляется отладочной курсор, а в в нижней части главного окна — фреймы содержимого памяти, системного стека и т. п.

Дадим описание некоторых возможностей режима отладки с "быстрыми" клавишами:

Start Debugging	F5	Запуск приложения на исполнение в режиме неявной отладки.
Stop Debugging	Shift+F5	Выход из процесса выполнения программы. Выгрузка отлаживаемого приложения из RAM, чистка мусора в памяти, переход в режим редактирования кода. Можно использовать в момент, когда выполнен очередной оператор и программа находится в состоянии приостановки, которую организовал отладочный режим. (Чтобы прервать работу во время выполнения оператора, нужно воспользоваться сочетанием клавиш Ctrl+Break или Ctrl+C в случае ввода данных.)
Restart Debugging	Ctrl+ +Shift+F5	Завершение текущей отладочной сессии и начало новой.
Step Over	F10	Выполнение очередной команды под отладоч - ным курсором. Если это вызов сторонней функции, то выполняется ее тело без захода в него. Таблицы трассировки обновляют свое содержимое.
Step In	F11	Выполняется очередная команда под курсором. Если это вызов сторонней функции, то происходит заход в её тело. Таблицы трассировки обновляют свое содержимое в соответствии с локальными переменными.
Step Out	Shift+F11	Выполнение подпрограммы с текущей позиции до завершения без остановки и возврат на точку вызова надпрограммы.
Quick Watch	Ctrl+ +Alt+Q	Запуск окна просмотрщика для просмотра значений интересующих переменных.
Toggle Breakpoint	F9	Установка/снятие точки останова в заданной курсором строке.

Пошаговая отладка

Войти в режим пошагового исполнения можно при помощи клавиши F10. Среда программирования найдет в программе первую активную инструкцию и напротив нее установит отладочный курсор. С помощью клавиши F10 можно выполнять последовательно операторы программы, имея возможность анализа ситуации во время приостановки, организуемой средой после каждого шага выполнения. При этом оператор вызова функции будет выполнен за один шаг. Чтобы осуществить пошаговое выполнение вызываемой функции, нужно воспользоваться клавишей F11 для выполнения вызова функции. При этом произойдет переход отладочного курсора на текст функции, по которому можно продолжать шагать с помощью клавиши F10. В окне локальных переменных можно увидеть значения передаваемых в функцию аргументов. Если во время выполнения подпрограммы все неточности уже выявлены, то можно "перепрыгнуть" в вызвавшую ее программу, выполнив оставшуюся ее часть за один шаг с помощью клавишей Shift+F11.

Пошаговая отладка является эффективным методом при анализе небольших и не слишком структурированных проектов, но не совсем удобна при просмотре вложенных циклов с большим числом итераций. В этом случае удобнее применять контрольные точки (точки останова).

Использование контрольных точек

При выполнении программы контрольная точка (Breakpoint) при ее достижении во время выполнения организует остановку выполнения программы. Для установки или снятия точки останова используется клавиша F9 или щелчок левой кнопкой мыши слева от желаемой строки. Соответствующая строка автоматически помечается маркером в виде кружочка красного цвета. Устанавливать и снимать точки останова можно не только до выполнения программы, но и во время выполнения ее в отладочном режиме, как в главной функции программы, так и в любых вспомогательных, причем определенных в одном исходном файле с главной функцией или в другом. Проанализировав информацию в точке останова, можно с помощью F5 продолжить выполнение программы до следующей точки останова или до конца программы, если точек останова дальше не встретится.

Существует возможность создания условных контрольных точек, приостанавливающих ход выполнения программы при определенном условии. Для их установки сначала формируется обычная контрольная точка, а затем с помощью контекстного меню определяется условие, по которому она будет вызывать приостановку программы.

При просмотре больших циклов бывает полезно увеличить шаг просмотра и производить остановку не на каждой итерации цикла, а через определенное число итераций. Это позволит достаточно быстро локализовать значения переменной цикла, при которых происходит сбой. Для этого используется команда Hit Count (Счетчик повторов) из того же контекстного меню точки останова.

С помощью точки-счетчика можно остановить программу, когда будет выполнено определенное условие:

1) значение повторов прохождения по точке останова в точности равно заданному числу (пункт Break when the hit count is equal to ... выпадающего меню);

2) значение повторов прохождения по точке останова кратно заданному числу (пункт Break when the hit count is multiply to ...) ;

3) значение повторов прохождения по точке останова больше или равно заданному числу (пункт Break when the hit count is greater then

or equal to ...).

Вариант Break always выбора функциональности точки-счетчика фактически превращает ее в безусловную. Точки останова со счетчиком удобно использовать для подсчета итераций циклов с неявным заданием количества повторов, например, циклов с заголовками while(){} или do{}while().

В заключение разговора о точках останова следует обратить внимание на удобную возможность снятия сразу всех расставленных в программе точек останова с помощью пункта Clear All Breakpoints меню Debug или сочетанием клавиш Ctrl+Shift+F9.

Окно быстрого просмотра переменных (Quick Watch)

Окно Quick Watch вызывается при помощи сочетания клавиш Ctrl+Alt+Q во время выполнения отладки или с помощью выбора одноименного пункта меню Debug. Данная возможность отладки используется для того, чтобы все интересующие программиста переменные были в поле зрения для исследования их текущих значений. Окно служит менеджером добавления переменных в дополнительное окно просмотра, расположенное там же, где и окно локальных переменных, но на другой вкладке, а именно вкладке Watch N. Чтобы добавить переменную в указанное окно просмотра, достаточно в окне менеджера добавки переменных указать её имя и нажать кнопку Add Watch.

Работа с переменными в этом окне Watch N может быть организована точно также как и в окне Locals локальных переменных: можно наблюдать за изменением их значений и, если нужно, вручную производить изменения значений, вводя новое значение в колонке Value в ходе выполнения программы. Это окно будет оставаться активным на экране, и в него будут выводиться значения переменных, выбранных для наблюдения при отладочном режиме выполнения программы.

Однако применение автоматических средств нужно рассматривать как вспомогательное при поиске ошибки, их использование не освобождает от тщательного анализа конкретных ситуаций, возникающих в ходе выполнения программы.

Список литературы

[1] www.msdn.com

[2] *Секунов Н.* Самоучитель Visual C++ . NET. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.

Рейтинговая оценка знаний по дисциплинам с небольшой аудиторной нагрузкой

О. Б. Лавровская

Приводится пример рейтинговой оценки знаний студентов по дисциплине с аудиторной нагрузкой 36 часов.

Любая оценка знаний является субъективной. Для повышения объективности оценивания знаний преподаватели используют различные средства и методы.

Одним из таких средств, причем достаточно эффективным, является использование рейтинговой системы оценки знаний студентов. Эта система позволяет заставить изучать предмет в течении всего семестра, а не только в период сессии, а также облегчает оценку знаний по дисциплинам с небольшой аудиторной нагрузкой.

В вузовской практике рейтинг — это некоторая числовая величина, выраженная, как правило, по многобалльной шкале (например, 20-балльной или 100-балльной) и интегрально характеризующая успеваемость и знания студента по одному или нескольким предметам в течение определенного периода обучения (семестр, год и т. д.)

В своей совокупности рейтинг подразделяется на различные виды, регулирующие порядок изучения учебной дисциплины и отметку ее усвоения. В их числе:

- рейтинг по дисциплине, учитывающий текущую работу студента и его результаты на экзамене (зачете);
- совокупный семестровый рейтинг, отражающий успеваемость студента по всем предметам, изучаемым в данном семестре;
- заключительный рейтинг за цикл родственных дисциплин, изучаемых в течение определенного периода;
- интегральный рейтинг за определенный период обучения, отражающий успеваемость студента в целом в течение какого-то периода обучения.

Цель рейтингового обучения состоит в том, чтобы создать условия для мотивации самостоятельности учащихся средствами своевременной и систематической оценки результатов их работы в соответствии с реальными достижениями.

В основе рейтинговой системы контроля знаний лежит комплекс мотивационных стимулов, среди которых — своевременная и систематическая отметка результатов в точном соответствии с реальными достижениями учащихся, система поощрения хорошо успевающих учащихся.

Рейтинговая система контроля знаний не требует какой-либо существенной перестройки учебного процесса, хорошо сочетается с занятиями в режиме технологий личностно-ориентированного обучения.

Рейтинговая технология предполагает внедрение новых организационных форм обучения, в том числе специальные занятия по коррекции знаний и умений учащихся. По результатам деятельности студента преподаватель корректирует сроки, виды и этапы различных форм контроля уровня работы студента, тем самым обеспечивает возможность самоуправления образовательной деятельностью.

Рассмотрим пример использования рейтинговой системы для дисциплины «Web-дизайн» с аудиторной нагрузкой 36 часов. Этот курс очень мал для того, чтобы имелась возможность рассказать о серьезном программировании для Интернета. Он включает в себя только лекционные занятия. Однако как для любой дисциплины, связанной с программированием, практика очень важна. В виду непродолжительности курса практически заниматься студентам приходиться самостоятельно. По окончании дисциплины предусмотрен зачет.

На первом занятии студентам сообщается количество баллов, которое можно набрать в течении семестра по предмету; какое количество баллов соответствует оценке «зачтено». Полученные в течение семестра баллы позволяют учащимся претендовать на получение оценки «зачтено» автоматически в конце семестра.

Посещение лекции — 1 балл, наличие конспекта лекции — 2 балла, правильное выполнение практической работы — 50 баллов. Также дополнительные баллы можно получить при успешном написании тестовых контрольных работ (1 балл за каждый правильный ответ), проводимых на лекционных занятиях. Таким образом, всего за курс можно заработать: за все лекции и конспекты 18+36=54 балла, за практическую работу — 50 баллов, 4 тестовые работы — 40 баллов. Прежде чем суммировать баллы, необходимо применить весовые коэффициенты: для баллов, заработанных на лекциях, — 1, за практические — 3, за тестовые — 2. В итоге максимальная сумма становится равной 284. Для оценки «зачтено» необходимо набрать не меньше 230 баллов.

При внедрении рейтинговой системы в учебный процесс создаются следующие преимущества в обучении:

- снижается стрессовая ситуация в процессе контроля как для учащихся, так и для преподавателей;
- обучение становится личностно-ориентированным;
- рейтинговая система исключает всякое унижение личности учащегося, позволяет ему самому оценивать свои способности и возможности, т. е. стимулирует его на добросовестную работу в течение всего периода обучения.

Таким образом, внедрение рейтинговой системы оценки знаний студентов обеспечивает постоянное стремление студентов набрать больше баллов, повышает их интерес к учебной деятельности, тем самым организует систематическую, ритмичную работу студентов и, как результат, повышает мотивацию к учебной деятельности.

Рейтинговая система оценки знаний позволяет студентам:

- осознавать необходимость систематической и ритмичной работы по усвоению учебного материала на основании знания своей текущей рейтинговой оценки по данной дисциплине;
- четко понимать систему формирования итоговой оценки;
- своевременно оценить состояние своей работы по изучению дисциплины, выполнению всех видов учебной нагрузки до начала экзаменационной сессии;
- углубленно осваивать изучаемый материал, непрерывно повышая свой рейтинг в течение семестра;
- вносить в течение семестра коррективы по организации текущей самостоятельной работы.

Преподавателям рейтинговая система позволяет:

- рационально планировать учебный процесс по данной дисциплине и стимулировать работу студентов;
- иметь объективную картину усвоения изучаемого материала;
- своевременно вносить коррективы в организацию учебного процесса по результатам текущего контроля;
- точно и объективно определять итоговую оценку по дисциплине с учетом текущей успеваемости;
- обеспечить более точную градацию оценки уровня знаний по сравнению с традиционной системой.

Рейтинговая система не только снимает многие противоречия в контроле знаний учащихся, но и оптимально способствует решению проблем усиления мотивации к учебной деятельности, показывает динамику успехов и неудач в процессе обучения.

Внесение духа соревнования и соперничества, изначально заложенных в человеческой природе, находит оптимальный выход в добровольной форме, которая не вызывает негативной отталкивающей и, самое главное, болезненной стрессовой реакции. Развитие элементов творчества, самоанализа, включение интеллектуальных резервов личности, обусловленных повышенной мотивацией учащихся, подготавливает почву для постепенного стирания жёстких дистанционных границ между преподавателем и учащимся.

Мультиплатформенные интегрированные среды разработки с открытым исходным кодом

Н. С. Лагутина, Ю. А. Ларина

Обсуждается проблема выбора интегрированной среды разработки для обучения студентов. Рассматриваются две мультиплатформенные среды разработки — NetBeans и Eclipse.

Процесс подготовки специалистов в области информационных технологий не может обойтись без изучения систем программных средств, используемых для разработки программного обеспечения.

Вместе с эволюцией процесса программирования совершенствовались и возможности автоматизации труда программистов. Первые среды разработки ограничивались последовательным запуском компиляторов, компоновщиков, загрузчиков и отладчиков с помощью интерфейса командной строки. В 80-е годы вместе с персональными компьютерами появился рынок программных продуктов нового класса — интегрированных сред разработки (integrated development environment, IDE) для структурных, а затем и объектно-ориентированных языков программирования.

Основное назначение IDE — повысить продуктивность труда разработчика. Первые среды разработки, объединяющие функциональность редакторов текста программ, компиляторов и отладчиков, преимущественно освобождали потребителей от рутинных операций. Со временем набор функций IDE становился все богаче. В него вошли пошаговые компиляторы, браузеры для более логичного представления программ, средства автоматической генерации кода и визуальные редакторы для создания графических пользовательских интерфейсов. Следуя веяниям времени, среды разработки трансформировались из инструментов повышения производительности труда программиста в средства поддержки всех этапов коллективной работы над программным проектом.

В настоящее время все большую популярность приобретает свободное программное обеспечение или Open Source. Это вызвано рядом причин.

Во-первых, стоимость лицензионного программного обеспечения достаточно высока, а большая часть ресурсов Open Source распространяется бесплатно. При этом данный вид ресурсов юридически защищен лицензией GPL, основная идея которой состоит не только в том, что исходные тексты программы должны быть открыты для чтения и модификации, но также и в том, что программа, однажды по этой лицензии открытая, уже не может быть вновь закрыта.

Во-вторых, многих специалистов привлекает открытость исходных кодов ПО и возможность их быстрой модификации в соответствии с потребностями потребителей программного обеспечения.

В-третьих, разработка продукта в соответствии с принципами Open Source повышает качество кода, поскольку его совместно отшлифовывают множество заинтересованных разработчиков. Отладка становится проще и качественнее благодаря доступу к исходным текстам программы и привлечению к работе распределенного коллектива. При этом совместный труд позволяет разделить риски создания сложных технологий.

В-четвертых, использование платформы разработки в открытых кодах с гибким механизмом подключаемых модулей для реализации дополнительной функциональности открывает неограниченные возможности ее совершенствования.

Таким образом, возникает потребность готовить специалистов, обладающих навыками работы с программным обеспечением, наиболее востребованным на месте работы будущего молодого специалиста. То есть наряду с программным обеспечением для платформы MS Windows будущий специалист должен иметь навыки работы с открытым программным обеспечением. Поэтому обязательным является использование мультиплатформенного ПО, работающего как под Windows, так и например под Linux.

Учитывая вышесказанное, можно сформулировать требования, которым должна удовлетворять интегрированная среда разработки для обучения программированию:

- мультиплатформенность среды разработки, то есть возможность работы в различных операционных системах;
- простота использования при обучении программированию;
- возможность поэтапного перехода к более профессиональному уровню программирования с использованием различных языков программирования и той же среды разработки.

Согласно перечисленным требованиям для обучения программированию на языках C/C++ и Java выбраны две интегрированные среды разработки, распространяемых на основе лицензии GPL: NetBeans и Eclipse. Рассмотрим их наиболее важные особенности.

Eclipse и NetBeans представляют собой написанные на Java среды разработки самого общего назначения, архитектура которых обеспечивает для решения разных задач интеграцию различных инструментов и языков программирования. Использование данных сред освобождает от рутины написания базовых средств и позволяет программисту сконцентрировать внимание на создании сложных специализированных функций. При этом не только решается проблема поддержки многофункциональных и многоязыковых сред разработки, но и закладывается база для упрощения перехода от одного типа среды к другому в процессе их эволюции.

Среда NetBeans мультиплатформенная, бесплатная и обладает открытыми исходными кодами. NetBeans может быть загружена с сайта http://www.netbeans.org.

Интегрированная среда NetBeans обладает следующими профессиональными возможностями:

- поддерживает языки Java, C/C++, JavaScript, HTML, CSS. Для программирования на C/C++ использует внешние компиляторы GNU, под Windows это коллекции компиляторов MGW и Cygwin;
- обладает наиболее развитым редактором графического пользовательского интерфейса (GUI) из сред с открытым исходным кодом.
- имеет развитый отладчик;
- поддерживет UML-проектирования (прямое, обратное);
- имеет встроенный механизм систем поддержки версий, который, в частности, может быть использован с наиболее известными бесплатных системами поддержки версий — CVS, SVN и др.;

- имеет возможность подключения модулей (плагинов) от третьих производителей;
- наиболее оперативная поддержка новых версий Java, так как разрабатывается при участии Sun Microsystems;
- в состав входит промышленный программный сервер GlassFish и «лёгкий» программный сервер Tomcat Apache, а также средства, необходимые для создания серверных приложений;
- быстро развивается.

К недостаткам интегрированной среды разработки NetBeans можно отнести следующие особенности:

- требует мощного процессора (не хуже P4 1.6 ГГц) и большого объёма памяти (ОЗУ не менее 512 Мб);
- относительно медленная компиляция;
- англоязычный интерфейс.

Таким образом, NetBeans удовлетворяет всем требованиям для использования в вузах при обучении профессиональному программированию.

Интегрированная среда разработки Eclipse также как и среда NetBeans является мультиплатформенной и обладает открытыми исходными кодами. Eclipse может быть загружена с сайта http://www.eclipse.org.

Первоначально Eclipse разрабатывалась IBM как среда разработки для приложений Java. В настоящее время Eclipse это базовое мультиплатформенное средство для разработки программ C/C++ и важное средство для разработки программ на Java.

Интегрированная среда разработки Eclipse имеет следующие профессиональные возможности:

- поддерживает разные языки программирования (C/C++, Java, PHP);
- имеет развитый отладчик;
- поддерживает системы поддержки версий (CVS, SVN и др.);
- имеет возможность подключения модулей (плагинов) от третьих производителей. Причем уже существует большое количество таких модулей, как свободных, так и коммерческих;
- быстро развивается.

К недостаткам среды Eclipse можно отнести следующие особенности:

- отсутствие средств проектирования GUI;
- отсутствие поддержки UML-проектирования;
- отставание в поддержке новых возможностей Java.

Следует отметить, что на настоящий момент Eclipse Consortium фокусируется на следующих проектах:

- The Eclipse Project (http://www.eclipse.org/eclipse/index.html) ответственен за разработку непосредственно Eclipse IDE (платформу для сборки прочих инструментов Eclipse), Java Development Tools (JDT) и Plug-In Development Environment (PDE), используемую для предоставления возможности расширения самой платформы.
- The Eclipse Tools Project (http://www.eclipse.org/tools/index.html) занимается созданием оптимальных инструментальных средств для платформы Eclipse. В текущие подпроекты входят: Cobol IDE, C/C++ IDE, а также инструмент моделирования EMF;
- The Eclipse Technology Project (http://www.eclipse.org/technology/index.html) занимается технологическими исследованиями, инкубацией и образованием по части использования платформы Eclipse.

Таким образом, интегрированная среда разработки Eclipse, наряду с рассмотренной ранее средой NetBeans, в настоящий момент являются наиболее перспективными мультиплатформенными интегрированными средами разработки с открытым кодом и могут использоваться в вузах при обучении профессиональному программированию.

О преподавании компьютерных дисциплин на математическом факультете

В. В. Литвинов, А. Ю. Ухалов

Обсуждается выбор языков программирования, которые следует включать в программу обучения студентов математического факультета.

Вопрос о выборе языков программирования, которые следует преподавать студентам, в последние годы часто становится предметом дискуссий. Одно такое совещание с участием преподавателей математического факультета и факультета ИВТ состоялось весной 2009 года. В данной заметке излагаются взгляды авторов по вопросам, которые обсуждались на этом совещании.

Вопрос чему и в какой мере учить не является праздным, так как для современного специалиста уверенное владение современными компьютерными технологиями — необходимое условие успешной работы практически в любой сфере деятельности. Большинство выпускников математического факультета по окончании учебы работают в областях, так или иначе связанных с компьютерами и программированием. Вместе с тем, программистами работают далеко не все выпускники. В современном мире от специалиста часто требуется не умение создавать свои программы, а способность использовать уже готовые программные продукты. В связи с этим часто поднимается вопрос: не зря ли мы учим программированию всех студентов? Целесообразно ли заставлять студентов писать свои программы при изучении, например, таких курсов как «численные методы», если имеются соответствующие программные продукты (MATLAB, Mathematica и др.)? Отметим, что если рассуждать подобным образом, то вообще не нужно учить студентов «вручную», на бумаге считать интегралы или решать дифференциальные уравнения. Зачем мы это делаем, если существуют программы, которые с этим неплохо справляются? Авторы считают, что университет должен готовить специалистов, которые способны сами участвовать в разработке таких программ, а не только пользоваться ими. Кроме того, даже в процессе обучения и научной работы студент может столкнуться с необходимостью разработки и реализации собственных алгоритмов для решения задач, не предусмотренных имеющимися стандартными пакетами. Такая потребность неоднократно возникала, например, у студентов, решающих задачи вычислительной гидродинамики под руководством одного из авторов. В этих задачах требовалось и запрограммировать собственные алгоритмы, и использовать существующие графические библиотеки для наглядного представления полученных результатов.

Мы считаем, что к вопросу о преподавании компьютерных курсов следует подходить, имея в виду две цели.

Первая цель — такая же, как у всего университетского курса: дать фундаментальное образование и обеспечить учащегося базовыми знаниями и навыками. Авторам представляется, что отказ от обучения программированию был бы ошибкой. Главная цель курсов по программированию на математическом факультете — обучение основам. Мы не готовим программистов под конкретные рабочие места, и это невозможно делать в принципе. Невозможно предугадать, какие конкретно технологии и языки окажутся востребованными и модными через несколько лет. Новые технологии и среды разработки появляются регулярно. Их популярность часто обусловлена не реальными достоинствами продуктов, а удачной рыночной стратегией компаний-производителей. Университет не должен ставить перед собой безнадежной задачи угнаться за этим "прогрессом" . Опыт показывает, что наши студенты при желании вполне способны сами изучить нужный язык программирования или среду разработки. Мы должны научить их учиться. Различия по специальностям представляются нам несущественными. Выпускник с чистой математики часто становится технарем-программистом, выпускник КБ может пойти в аспирантуру и заниматься теорией. Полагаем, что учить студентов всех специальностей можно примерно одинаково, хотя количество часов для разных специальностей может отличаться.

Известно, что лучший способ понять алгоритм — написать на его основе программу и поэкспериментировать с ней. Это вполне относится и к алгоритмам численных методов. Мы считаем полезным для каждого студента самостоятельно написать программы для решения систем уравнений, вычисления интегралов и т.п. Программы, которые нужно для этого написать, не являются слишком сложными и наши студенты не должны испытывать затруднений при разработке и отладке таких программ.

По нашему мнению, основным языком должен быть C/C++. Нельзя уйти от того, что программирование — это всегда программирование некоторых конкретных технических устройств. Попытки учить программированию на неких абстрактных языках, специально придуманных «для обучения программированию», приводят к тому, что обучаемый с трудом ориентируется в реальной ситуации. Такие языки неоднократно придумывались, но из них широкое распространение получил только язык Pascal, и то не в своем оригинальном виде, а будучи серьезно доработанным и доведенным до промышленного уровня.

Наши студенты должны по возможности понимать принципы представления данных в машине, представлять себе не абстрактные переменные x, y, а последовательности байт с записанным там кодом. Язык C дает для этого больше возможностей, чем другие языки. Кроме того, C — внутренний язык операционных систем Windows и UNIX, внутренние функции этих систем используют структуры данных и интерфейс функций языка C. Выбор среды разработки мы считаем менее важным. Вполне подходит для этой цели MSVisual Studio. Учебные классы ЯрГУ сейчас оснащены этим программным продуктом. В пользу выбора языка C как базового говорит также то, что многие популярные языки, такие как C#, Java, PHP, являются C-подобными. Начинать знакомство с программированием сразу на этих языках «сверхвысокого уровня», по мнению авторов, не следует. Студентам, которые начали знакомство с программированием сразу с языков типа PHP, обычно впоследствии труднее понять языки со строгой типизацией данных и труднее научиться писать эффективные программы.

На младших курсах главные задачи — обучить составлению алгоритмов, умению записать алгоритм на языке программирования и отладить программу, познакомить с основными алгоритмами (поиск, сортировка, переборы, численные методы) и структурами данных (списки, стеки, очереди). Это тот багаж знаний, который будет полезен любому специалисту. Многие концепции в этой области не менялись на протяжении нескольких десятилетий.

Вторая цель обучения — адаптация студента к реальности, ожидающей его за порогом вуза. Здесь уже следует учитывать спрос на те или иные технологии. Подготовку в этом направлении целесообразно сосредоточить на старших курсах. Средние и старшие курсы должны изучать базы данных (язык SQL), Visual Basic и/или VBA, какой-либо язык для программирования в системах автоматических вычислений (Wolfram Mathematica, MATLAB), инструменты для программирования веб-сайтов (например, PHP/MySQL). Авторы имели возможность консультироваться по поводу спроса на знание языков программирования с рядом специалистов, активно работающих в этой области. По мнению большинства опрошенных, в последние годы большим спросом на рынке труда пользуются специалисты со знанием языков C# и Java. Это значит, что нам следует преподавать и эти языки.

Полезно познакомить студентов с каким-либо средством создания приложений для Windows (или другой системы) и написания оконного интерфейса. В идеале было бы хорошо изучить хотя бы основы Windows API, хотя можно ограничиться и знакомством с MFC, Visual Basic или другими подобными инструментами. Эти средства достаточно трудно изучать в рамках основных курсов. Но нужно, чтобы студенты знали об их существовании и знали, где искать соответствующую информацию.

Учить студента учиться — высшая педагогическая целесообразность

Н. Л. Майорова

Рассматриваются некоторые проблемы обучения высшей математике на экономическом факультете

Важным моментом в процессе формирования системы знаний студентов является обучение их фундаментальной и мировоззренческой науке — высшей математике. Рост научно-методической информации требует поиска новых путей «упаковки» знаний, умения сочетать старое с новым, серьезного с развлекательным, классического с современным, наглядного с логическим, т. е. постоянно разрешать противоречия, возникающие при любом обучении. Как нужно учить, чтобы изучаемое было понято и прочно закрепилось в памяти студента, было не балластом, а всегда подготовленным к бою орудием? Каждый педагог надеется на идеальный вариант: он предоставляет учащимся много важной и нужной информации, а те ее с энтузиазмом усваивают.

Переход от школьного математического курса к вузовскому часто происходит болезненно. Первокурсник твердо придерживается школьных знаний, а соображения нового подхода, его осмысливание воспринимается с трудом. Не всегда беседа преподавателя на лекциях и практических занятиях достигает убедительного эффекта. Студент может внимательно выслушать, но не понять, не переспросить, дома не доработать, и материал дисциплины будет «потерян». С другой стороны, раскрытие любой темы, например, темы «Функция», обрастая деталями, задачами, упражнениями развивающего характера, теряет свою простоту и наглядность. Кроме того, различный уровень школьной подготовки усложняет работу преподавателя. Быстрый переход от одной задачи к другой не воспринимается слабым студентом и в конце концов отпугивает его от изучения дисциплины, заставляет отвлекаться на занятии, мешать преподавателю и другим обучающимся или вообще не посещать занятия, надеясь в будущем «на авось». В свою очередь, разжевывание материала раздражает и расхолаживает хорошо подготовленных учащихся, что тоже не способствует учебному процессу. На экономическом факультете это создает особые трудности, поскольку в силу привлекательности для выпускников и их родителей профессии экономиста на факультет стремятся очень разнородные по знаниям массы школьников (балл ЕГЭ по математике разнится от 28 до 92 из 100).

Дисциплина «Математика» на экономическом факультете относится к числу фундаментальных, входит в блок естественно-научных дисциплин и знакомит студентов с основами математических дисциплин и математическими методами, позволяющими моделировать, анализировать и решать прикладные экономико-математические задачи. Кроме того, дисциплина должна обеспечивать развитие логического, эвристического и алгоритмического мышления и давать представление о месте и роли математики в современном мире, мировой культуре и истории.

На специальности «Менеджмент» и «Мировая экономика» высшую математику изучают в 1, 2 и 3 семестрах (142 часа лекций и 114 часов практических занятий). При этом обе специальности объединены в один поток, который (при наборе в 40 человек) с учетом договорных студентов составляет порядка 90 человек. Практические занятия проводятся отдельно в четырех группах.

Государственным стандартом за три часа в неделю лекций и два часа семинарских занятий предусматривается изучить основы математического анализа (включая теорию пределов, дифференциальное и интегральное исчисление, функции многих переменных, теорию числовых и функциональных рядов), дифференциальные уравнения, аналитическую геометрию, векторную и линейную алгебру, линейные задачи оптимизации, целочисленное, дискретное и динамическое программирование, основы нелинейного программирования, теорию вероятностей и математическую статистику, теорию графов и теорию игр. Форма отчетности — зачет и два экзамена, плюс по окончании курса — интернет-экзамен. Имеющаяся программа по этой дисциплине, на взгляд автора, отличается чрезмерной широтой и не соответствует количеству часов, отводимых учебным планом и требуемых для более-менее сознательного усвоения материала большинством учащихся, только что пришедших в стены вуза. Перед лектором постоянно возникает непростая задача отбора и наилучшей организации подачи материала.

В связи с обширностью теоретического материала, большой разнородностью студентов, малопригодными к чтению лекций по математике аудиториями (для больших потоков) процесс обучения становится весьма трудоемким. Опыт показывает, что занятие, при подготовке к которому студент не решил ни одной задачи, не построил ни одного чертежа, не понял никакого алгоритма, не вызывает интереса или желания что-либо понять. Поэтому используемые методы и приемы проведения практических занятий, обычно используемые на естественных факультетах, часто непригодны. Кроме того, два часа в неделю семинарских занятий при обширном теоретическом материале, когда практика не поспевает за теорией и не может охватить все ее разделы, требует от преподавателя поиска новых методических приемов. В этой ситуации очень помогает издавна принятая лекторами схема многогранной домашней самостоятельной работы, когда по каждой новой теме или даже отдельному параграфу каждому студенту задается индивидуальное задание (около 20 в семестр), которое он должен быстро выполнить и сдать на проверку преподавателю. Кроме того, выполняются и расчетно-графические работы вычислительного характера, требующие больших затрат времени. Некоторые из них задаются на каникулярное время. Каждый шаг деятельности студента оценивается определенным количеством баллов, учитывается степень усвоения теоретического материала, умения использовать полученные знания для решения конкретных задач. Многие из этих работ носят не контролирующий, а обучающий характер. Однако результаты выполнения всех таких работ (включая и оценки одного-двух коллоквиумов за семестр) учитываются в экзаменационную сессию. Кстати, очень помогают при данной форме обучения авторские методические разработки. Роль коллоквиумов может быть очень велика как для слушателей, так и для лектора, который на основе результатов коллоквиума корректирует темп и стиль изложения материала, а студенты начинают осознавать пробелы в своих знаниях. Письменные контрольные работы также дают качественные представления об овладении учащимися суммой знаний и умений.

Следует отметить, что данный вид самостоятельной работы очень стимулирует умных, аккуратных, творческих, пытливых студентов, повышает их стремление к учебе. Оценка на традиционном экзамене часто не отражает истинного уровня знаний студентов и носит субъективный характер. При рейтинговой системе оценки знаний успевающие студенты экзамен по всей программе могут не сдавать. Для преподавателя же такая организация труда требует огромных затрат личного времени, которое нигде не учитывается, тем более, что академические потоки доходят до 80–90 человек.

Преподаватель, работающий на одном потоке, имеющем несколько учебных академических групп, ощущает острую потребность изменять содержание, методы, задачное обеспечение курса и методологию частных методов математического курса. Конструкция и содержание занятий, проведенных в один и тот же день или в одну неделю, по одной и той же теме, как правило, отличаются друг от друга. Самостоятельная работа студентов над домашним заданием, способности восприятия материала, уровень школьной подготовки, локальные интересы минигрупп академической группы и даже время занятия ставят вопросы, требующие предельно четкой, экономной во времени и допускающей определенный «люфт» формы проведения занятия. Студент должен покинуть аудиторию с чувством удовлетворения, открыв для себя нечто новое.

Отличительной стороной обучения в вузе является существенная интенсификация учебного процесса, активный положительный эмоциональный прессинг, значительное усиление самостоятельной работы, выполняемой на более высоком учебно-методическом уровне. Изучение математических дисциплин в вузе предполагает формирование определенных умений и навыков работы с обширной литературой, поиск и переработка которой приобретает исследовательский характер. Немаловажное значение имеет такая особенность, как работа с математическим текстом, предполагающая осуществлять дублирование вычислений и преобразование выражений, позволяющих выявлять опущенные «выкладки» и некоторые логические шаги-доказательства, требующие самостоятельного восстановления. Однако погоня за «начитанным» материалом приводит к тому, что учащиеся не успевают его осознавать в той степени, которая могла бы привести к умению проводить аналогии, обнаруживать и использовать внутреннюю логику в однотипных по содержанию задачах, оказываются беспомощными в ситуациях, связанных с необходимостью принятия решений в условиях, даже незначительно отличающихся от стандартных. На младших курсах студенты очень перегружены, «завалены» огромным количеством математических фактов, теорем, понятий. Многие из них, не умея правильно организовывать работу, не могут самостоятельно выбраться из этой ситуации. Рационально даже объяснять студентам, как правильно записывать лекцию, выделять основные определения, утверждения, примеры. При прорабатывании лекционного материала осознается противоречие между имеющимися знаниями и необходимостью их пополнения, устанавливается преемственные связи с ранее усвоенными понятиями.

С другой стороны, уровень знаний первокурсников постоянно снижается. Причинами этого является расширение перечня изучаемых школьных дисциплин и их неоправданная глубина, а также переход по многим из них к ЕГЭ, при подготовке к которому изучение этих «глубин» заменяется формальным натаскиванием. Школьная математика практически целиком избавилась от доказательства как математического метода обучения. Выпускники просто не подозревают о том, что ту или иную формулу надо выводить, а утверждения доказывать. Также психологически трудно перейти от школьных заданий типа «вычислить» или «решить» к новым заданиям типа «оценить выражение», «доказать теорему», «проверить сходимость интеграла или ряда», тем более эта трудность усугубляется дефицитом времени на усвоение и большим объемом нового материала. Поэтому совершенно невозможно полагаться на знания школьников и форсировать темпы изложения материала. Большинство первокурсников при этом быстро теряют нить изложения, не могут приспособиться к новой для них форме обучения и могут полностью потерять интерес к дисциплине. Пропуск же одного или нескольких занятий является полным крахом для учащегося и приводит к тому, что данный студент даже не пытается что-либо уловить в речи лектора, скучает, отвлекает соседей по аудитории, мешает преподавателю, чем вызывает его недовольство, и часто полностью перестает посещать лекционное занятие. Возникают психолого-педагогические проблемы адаптации к новой обстановке и новым требованиям. Очень помогает учебному процессу быстрое знакомство преподавателя персонально с каждым обучающимся. Пользуясь своей методикой, автор за одну-две недели работы с новым потоком всех студентов запоминает по именам, а сопоставление имени с фамилией приходит чуть позже. Это позволяет не только во время практических занятий, но также и на лекциях оперативно разрешать многие проблемы учебного и воспитательного характера.

Таким образом, эффективность обучения находится в прямой зависимости как от уровня активности учащихся в познавательной деятельности, так и от приемов и методов активизации этой деятельности, применяемых педагогом. Студент должен быть убежден в том, что знания по математике будут востребованы в дальнейшем и в процессе изучения специальных дисциплин, и в будущей профессиональной деятельности. Лишь по окончании вуза, приобретая определенный опыт профессиональной деятельности, молодой специалист постепенно начнет осознавать важность преподаваемых ему дисциплин, ощущать потребность в их применении и корректировке.

О некоторых свойствах базисных многочленов Лагранжа

М. В. Невский

Приводятся решения ряда задач, связанных с невырожденным симплексом $S \subset \mathbb{R}^n$. Основной является следующая задача. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ требуется найти максимальный отрезок, принадлежащий S и параллельный i-й координатной оси.

Библиография: 4 названия.

1. Описание используемых результатов

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Положим $Q_n := [0,1]^n$. Через $C(Q_n)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : C(Q_n) \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := = \max_{x \in Q_n} |f(x)|$, а через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных степени $\leqslant 1$.

Рассмотрим невырожденный симплекс $S \subset \mathbb{R}^n$, то есть такой, что $\mathrm{vol}(S) \neq 0$. Обозначим вершины S через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}\right)$, $j = = 1, \ldots, n+1$. Из координат вершин $x^{(j)}$ составим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \ldots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\Delta := \det(\mathbf{A})$, а определитель $\Delta_j(x)$ получается из Δ заменой j-й строки на строку $(x_1, \ldots, x_n, 1)$. Многочлены $\lambda_j(x) := \Delta_j(x)/\Delta$ из $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ обладают свойством $\lambda_j\left(x^{(k)}\right) = \delta_{jk}$. Их коэффициенты составляют столбцы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Уравнения $\lambda_j(x) = 0$ задают $(n-1)$-мерные грани S. Имеет место представление

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \lambda_j(x) \geqslant 0, j = 1, \ldots, n+1\}. \tag{1.1}$$

В дальнейшем используется запись

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \ldots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}. \tag{1.2}$$

В настоящей работе даётся описание некоторых приложений многочленов λ_j к задачам геометрии, линейной алгебры и теории приближений. По мнению автора решение предлагаемых упражнений может быть полезным для студентов при изучении ими различных дисциплин.

Обозначим через $d_i(S)$ максимальную длину отрезка, содержащегося в S и параллельного оси x_i. Величину $d_i(S)$ будем называть i-м осевым диаметром S. В 2009 г. автором были доказаны следующие утверждения [4]. Для любого $i = 1, \ldots, n$ справедливо равенство

$$\frac{1}{d_i(S)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}| \,. \tag{1.3}$$

В симплексе S существует ровно один отрезок длины $d_i(S)$, параллельный оси x_i. Концы $y_+{}^{(i)}$ и $y_-{}^{(i)}$ этого отрезка суть

$$y_+{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} s_{ij} x^{(j)}, \ \ s_{ij} := \frac{|l_{ij}| + l_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}; \tag{1.4}$$

$$y_-{}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij} x^{(j)}, \ \ t_{ij} := \frac{|l_{ij}| - l_{ij}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} |l_{ik}|}. \tag{1.5}$$

Имеет место равенство

$$\mathrm{vol}(S) = \frac{d_i(S) \cdot \Sigma_i(S)}{n}, \tag{1.6}$$

где $\Sigma_i(S)$ обозначает $(n-1)$-меру проекции S на гиперплоскость $x_i = 0$. Если $Q_n \subset S$, то справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leqslant 1. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что в случае $Q_n \subset S$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S содержит отрезок длины n, параллельный оси x_i.

Если $S \subset Q_n$, то многочлены λ_j могут применяться для вычисления величины $\xi(S) := \min \{\sigma \geqslant 1 : \, Q_n \subset \sigma S\}$, где σS есть результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. В [3] доказано, что

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1 \leqslant j \leqslant n+1} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_j(x)) + 1. \tag{1.8}$$

Здесь и далее $\mathrm{ver}(Q_n)$ есть совокупность вершин Q_n.

Пусть $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами $S \subset Q_n$. Этот проектор определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f_j := f\left(x^{(j)}\right)$. Справедлив следующий аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = p(x) := \sum_{j=1}^{n+1} f_j \lambda_j(x), \tag{1.9}$$

в связи с чем многочлены λ_j мы называем базисными многочленами Лагранжа. Из (1.9) получается, что норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$ может быть найдена по формулам

$$\|P\| = \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)| = \max_{f_j=\pm 1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} |p(x)|. \tag{1.10}$$

Для $n=2$ равенство (1.10) обосновано в [1]; общий случай см. в [2]. Как установлено в [3,4], в случае $S\subset Q_n$ введённые нами величины связаны двойным неравенством

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leqslant \xi(S) \leqslant \frac{n+1}{2}(\|P\|-1)+1. \tag{1.11}$$

2. Примеры решения задач

Пусть даны вершины $x^{(j)}$ невырожденного симплекса S в $\mathbb{R}^n$. Приведём примеры решения следующих задач: задание S с помощью линейных неравенств; установление принадлежности данной точки симплексу S или его границе; вычисление осевых диаметров $d_i(S)$ и соответствующих максимальных отрезков; вычисление $\|P\|$ и $\xi(S)$ (в случае $S\subset Q_n$).

Из методических соображений мы рассмотрим лишь случаи $n=2$ (S — треугольник) и $n=3$ (S — тетраэдр), но предлагаемые методы работают для $n\in\mathbb{N}$. Чтобы охватить сразу все упражнения, возьмём $S\subset Q_n$. Разбираемые ситуации достаточно просты, чтобы убедиться в правильности ответов по чертежам. Для вычислений при $n>3$ студентом может быть использован компьютер.

2.1. Пусть $n=2$, S — треугольник с вершинами $x^{(1)}=(1,1/4)$, $x^{(2)}=(1/2,1)$, $x^{(3)}=(0,0)$. Тогда

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты базисных многочленов Лагранжа составляют столбцы матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, поэтому

$$\lambda_1(x) = \frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2,\ \lambda_2(x) = -\frac{2}{7}x_1 + \frac{8}{7}x_2,\ \lambda_3(x) = -\frac{6}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + 1. \tag{2.1}$$

В соответствии с (1.1) симплекс S (с границей) задаётся системой линейных неравенств

$$\frac{8}{7}\,x_1 - \frac{4}{7}\,x_2 \geqslant 0,\ -\frac{2}{7}\,x_1 + \frac{8}{7}\,x_2 \geqslant 0,\ -\frac{6}{7}\,x_1 - \frac{4}{7}\,x_2 \geqslant -1.$$

Пусть даны точки $z=(1/2,1/2)$, $w=(1/4,3/4)$, $h=(1/4,1/2)$. Так как все $\lambda_j(z)>0$, то z принадлежит внутренности S. Так как $\lambda_1(w)<0$, то $w\notin S$. Наконец, соотношения $\lambda_1(h)=0$, $\lambda_2(h)>0$, $\lambda_3(h)>0$ означают, что h принадлежит границе S, а именно стороне, противоположной вершине $x^{(1)}$.

Вычисления по формуле (1.3) с учётом (1.2), (2.1) дают:

$$\frac{1}{d_1(S)} = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{7}+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\right) = \frac{8}{7},\ \frac{1}{d_2(S)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}+\frac{8}{7}+\frac{4}{7}\right) = \frac{8}{7},$$

т. е. $d_1(S)=d_2(S)=7/8$. Заметим, что совпадение $d_1(S)$ и $d_2(S)$ сразу следует из равенства длин проекций S на координатные оси — достаточно привлечь (1.6). Для любого невырожденного треугольника с вершинами $(1,s)$, $(t,1)$, $(0,0)$, $0\leqslant s,t\leqslant 1$, эти длины равны 1.

Найдём координаты концов максимальных отрезков рассматриваемого вида. При $i=1$ формулы (1.4) – (1.5) приводят к следующим результатам:

$$s_{11} = \frac{8/7+8/7}{16/7} = 1,\ s_{12} = \frac{2/7-2/7}{16/7} = 0,\ s_{13} = \frac{6/7-6/7}{16/7} = 0,$$

$$y_+{}^{(1)} = s_{11}x^{(1)} + s_{12}x^{(2)} + s_{13}x^{(3)} = x^{(1)} = \left(1, \frac{1}{4}\right);$$

$$t_{11} = \frac{8/7-8/7}{16/7} = 0,\ t_{12} = \frac{2/7+2/7}{16/7} = \frac{1}{4},\ t_{13} = \frac{6/7+6/7}{16/7} = \frac{3}{4},$$

$$y_-{}^{(1)} = t_{11}x^{(1)} + t_{12}x^{(2)} + t_{13}x^{(3)} = \frac{1}{4}\,x^{(2)} + \frac{3}{4}\,x^{(3)} = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right).$$

Концы максимального в S отрезка, параллельного оси x_1, есть точки $y_+{}^{(1)}=(1,1/4)$, $y_-{}^{(1)}=(1/8,1/4)$. При $i=2$ аналогично получаем:

$$s_{21}=0,\ s_{22}=1,\ s_{23}=0,$$

$$y_+{}^{(2)} = s_{21}x^{(1)} + s_{22}x^{(2)} + s_{23}x^{(3)} = x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, 1\right);$$

$$t_{21} = \frac{1}{2},\ t_{12} = 0,\ t_{13} = \frac{1}{2},$$

$$y_-{}^{(2)} = t_{21}x^{(1)} + t_{22}x^{(2)} + t_{23}x^{(3)} = \frac{1}{2}\,x^{(1)} + \frac{1}{2}\,x^{(3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right).$$

Поэтому максимальным в S отрезком, параллельным оси x_2, является отрезок с концами $y_+{}^{(2)} = (1/2, 1)$, $y_-{}^{(2)} = (1/2, 1/8)$.

Теперь найдём $\xi(S)$. Очевидно,

$$\max_{x\in\mathrm{ver}(Q_2)}(-\lambda_1(x)) = \frac{4}{7},\ \max_{x\in\mathrm{ver}(Q_2)}(-\lambda_2(x)) = \frac{2}{7},\ \max_{x\in\mathrm{ver}(Q_2)}(-\lambda_3(x)) = \frac{3}{7}.$$

Формула (1.8) даёт $\xi(S) = 3\cdot(4/7)+1 = 19/7$.

Наконец, найдём норму интерполяционного проектора $P : C(Q_2) \to \Pi_1(\mathbb{R}^2)$, узлы которого совпадают с вершинами S. Интерполяционная формула Лагранжа (1.9) в данном случае имеет вид

$$p(x) = Pf(x) = f_1\lambda_1(x) + f_2\lambda_2(x) + f_3\lambda_3(x).$$

Подставим сюда выражения для базисных многочленов λ_j и найдём значения p в вершинах Q_2 :

$$p(0,0) = f_1,\ p(1,0) = \frac{8}{7}f_1 - \frac{2}{7}f_2 + \frac{1}{7}f_3,$$

$$p(0,1) = -\frac{4}{7}f_1 + \frac{8}{7}f_2 + \frac{3}{7}f_3,\ p(1,1) = \frac{4}{7}f_1 + \frac{6}{7}f_2 - \frac{3}{7}f_3.$$

Поэтому в соответствии с (1.10)

$$\|P\| = \max_{f_j=\pm1}\max(|p(0,0)|, |p(1,0)|, |p(0,1)|, |p(1,1)|) = \frac{15}{7}.$$

Соотношения (1.11) принимают вид $16/7 < 19/7 = 19/7$.

2.2. Пусть $n=3$, S — тетраэдр с вершинами $x^{(1)} = (1,0,1)$, $x^{(2)} = (0,1,1)$, $x^{(3)} = (1,1,0)$, $x^{(4)} = (0,0,0)$. Это правильный тетраэдр, вписанный в куб $Q_3 = [0,1]^3$. В рассматриваемой ситуации

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисные многочлены Лагранжа —

$$\lambda_1(x) = \frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3,\ \lambda_2(x) = -\frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2 + \frac{1}{2}\,x_3,$$

$$\lambda_3(x) = \frac{1}{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3,\ \lambda_4(x) = -\frac{1}{2}\,x_1 - \frac{1}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_3 + 1.$$

Поэтому симплекс S (с границей) задаётся системой неравенств

$$x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 0,\ x - x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0,$$

$$x_1 + x + 2 - x_3 \geqslant 0,\ -x_1 - x_2 + x_3 \geqslant -2.$$

Пусть $z = (1/3, 1/3, 1/3)$, $w = (1, 0, 0)$, $h = (1/3, 2/3, 1/3)$, $g = (0, 1/3, 1/3)$. Так как все $\lambda_j(z) > 0$, то z принадлежит внутренности S. Так как $\lambda_2(w) < 0$, то $w \notin S$. Соотношения $\lambda_1(h) = 0$, $\lambda_2(h) > 0$, $\lambda_3(h) > 0$, $\lambda_4(h) > 0$ означают, что h является внутренней точкой грани, противоположной вершине $x^{(1)}$. Наконец, в силу условий $\lambda_1(g) = 0$, $\lambda_2(g) > 0$, $\lambda_3(g) = 0$, $\lambda_4(g) > 0$ точка g одновременно принадлежит граням S, противоположным $x^{(1)}$ и $x^{(3)}$, то есть принадлежит ребру $x^{(2)}x^{(4)}$.

Вычислим осевые диаметры S и максимальные отрезки, параллельные координатным осям. Формула (1.3) даёт $d_1(S) = d_2(S) = d_3(S) = 1$. Факт совпадения всех $d_i(S)$ следует также из (1.6) и того, что площади проекций S на координатные плоскости одинаковы (и равны 1). Числа s_{ij} и t_{ij} оказываются следующими:

$$s_{11} = \frac{1}{2},\ s_{12} = 0,\ s_{13} = \frac{1}{2},\ s_{14} = 0;$$

$$t_{11} = 0,\ t_{12} = \frac{1}{2},\ t_{13} = 0,\ t_{14} = \frac{1}{2};$$

$$s_{21} = 0,\ s_{22} = \frac{1}{2},\ s_{23} = \frac{1}{2},\ s_{24} = 0;$$

$$t_{21} = \frac{1}{2},\ t_{22} = 0,\ t_{23} = 0,\ t_{24} = \frac{1}{2};$$

$$s_{31} = \frac{1}{2},\ s_{32} = \frac{1}{2},\ s_{33} = 0,\ s_{34} = 0;$$

$$t_{31} = 0,\ t_{32} = 0,\ t_{33} = \frac{1}{2},\ t_{34} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$y_+{}^{(1)} = \sum_{j=1}^{4} s_{1j} x^{(j)} = \frac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(3)}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$y_-{}^{(1)} = \sum_{j=1}^{4} t_{1j} x^{(j)} = \frac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(4)}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$y_+{}^{(2)} = \sum_{j=1}^{4} s_{2j} x^{(j)} = \frac{1}{2}\left(x^{(2)} + x^{(3)}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$y_-{}^{(2)} = \sum_{j=1}^{4} t_{2j} x^{(j)} = \frac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(4)}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$y_+^{(3)} = \sum_{j=1}^{4} s_{3j} x^{(j)} = \frac{1}{2}\left(x^{(1)} + x^{(2)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

$$y_-^{(3)} = \sum_{j=1}^{4} t_{3j} x^{(j)} = \frac{1}{2}\left(x^{(3)} + x^{(4)}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Максимальными в S отрезками, параллельными координатным осям, оказываются отрезки единичной длины, соединяющие середины противоположных (скрещивающихся) рёбер. Например, максимальный отрезок, параллельный оси x_1, имеет концы $y_+^{(1)} = (1, 1/2, 1/2)$ и $y_-^{(1)} = (0, 1/2, 1/2)$. Указанные отрезки пересекаются в центре куба.

Найдём $\xi(S)$. Нетрудно видеть, что при всех $j = 1, 2, 3, 4$

$$\max_{x \in \mathrm{ver}(Q_3)} (-\lambda_j(x)) = \frac{1}{2},$$

поэтому по формуле (1.8) $\xi(S) = 4 \cdot (1/2) + 1 = 3$. Пусть $P : C(Q_3) \to \Pi_1(\mathbb{R}^3)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами S. Применяя формулу

$$p(x) = Pf(x) = f_1\lambda_1(x) + f_2\lambda_2(x) + f_3\lambda_3(x) + f_4\lambda_4(x)$$

и явный вид λ_j, найдём значения p в каждой из восьми вершин Q_3 : $p(0,0,0) = f_4$, $p(1,0,0) = (1/2)(f_1 - f_2 + f_3 + f_4)$ и т. д. Как оказывается,

$$\|P\| = \max_{f_j = \pm 1} \max_{x \in \mathrm{ver}(Q_3)} |p(x)| = 2.$$

В этом примере двойное неравенство (1.11) имеет форму равенства — каждая из его частей равняется 3.

Список литературы

[1] *Невский М. В., Иродова И. П.* Некоторые вопросы теории приближения функций: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 1999. 92 с.

[2] *Невский М. В.* Оценки для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции по вершинам n-мерного куба // Моделирование и анализ информационных систем. 2003. Т. 10, №1. С. 9 – 19.

[3] *Невский М. В.* Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, №1. С. 24 – 43.

[4] *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // (в печати)

О теореме Левинсона в курсе дифференциальных уравнений

П. Н. Нестеров

Приводится один из фундаментальных результатов в теории асимптотического интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений — теорема Н. Левинсона. Поднимается вопрос о целесообразности включения соответствующих асимптотических теорем в дисциплину «Дифференциальные уравнения».

Библиография: 5 названий.

Как правило, в базовом курсе дифференциальных уравнений изучению линейных систем с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

уделяется довольно мало внимания. Обычно излагается результат о том, что решения системы (1) образуют линейное пространство размерности n. Но если матрица $A(t)$ сколько-нибудь произвольна, построить базис (фундаментальную систему решений) в этом пространстве не представляется возможным. Чуть более подробно разбирается ситуация в случае T-периодической матрицы $A(t)$, т. е. $A(t+T) \equiv A(t)$, $T > 0$ (теория Ляпунова–Флоке). Впрочем, и здесь зачастую возникает та же проблема: мы знаем структуру фундаментальной матрицы, но ее явной вид нам не известен. На помощь, правда, приходит тот факт, что поведение решений в случае периодической системы (1) определяется мультипликаторами, некоторую информацию о которых иногда удается получить.

Вопрос о том, как же быть в случае произвольной матрицы $A(t)$ остается не проясненным. Возникающее желание распространить результаты, известные для систем (1) с постоянной матрицей $A(t) \equiv A$, приводит лишь к заблуждениям. Основное из них состоит в следующем: поведение решение системы (1) при $t \to \infty$ определяется собственными числами $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ матрицы $A(t)$. Следующий пример демонстрирует, что это утверждение не верно даже в предположении о том, что действительные части собственных чисел матрицы $A(t)$ отделены от мнимой оси (см. [1]).

Рассмотрим систему (1) с матрицей

$$A(t) = C^{-1}(t)BC(t),$$

где

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что собственные числа матрицы $A(t)$ совпадают и равны -1. Замена $x = C^{-1}(t)y$ приводит исходную систему к виду

$$\dot{y} = \Gamma y$$

с матрицей

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

собственные числа которой $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. Отсюда следует, что исходная система (1) имеет колебательные решения, амплитуда колебаний которых растет как e^t. Следовательно, известные результаты для систем с постоянными коэффициентами к системам (1) оказываются неприменимы.

По этой причине особую важность представляют асимптотические теоремы. К сожалению, вопросы связанные с получением асимптотических представлений для решений системы (1), редко находят отражение в университетском курсе дифференциальных уравнений. Как нам кажется, это не совсем справедливо. В этой заметке мы расскажем об одном из фундаментальных результатов в теории асимптотического интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений — о теореме Н. Левинсона.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \bigl(\Lambda(t) + R(t)\bigr)x, \tag{2}$$

где $x(t)$ — комплекснозначный вектор размерности n,

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\bigl(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\bigr)$$

— непрерывная[1]) диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Последняя запись означает, что матрица $R(t)$ абсолютно интегрируема, т. е. существует конечный интеграл (вообще говоря, лебегов)

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \|R(t)\| dt.$$

Системы вида (2) называют L-диагональными.

[1]) Достаточно, впрочем, считать, что элементы $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ матрицы $\Lambda(t)$ суммируемы в каждом конечном интервале $[t_0, t_1]$, $t_1 > t_0$.

Потребуем далее, чтобы для элементов матрицы $\Lambda(t)$ были выполнены следующие условия, известные как условия дихотомии: пусть для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{3}$$

либо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{4}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Понятно, что условия (3) и (4) не являются взаимоисключающими. Эти условия можно переписать в следующем эквивалентном виде: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо

$$\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \to -\infty, \qquad t \to \infty \tag{5}$$

и

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{6}$$

либо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big) ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0. \tag{7}$$

Здесь K_1, K_2, как и прежде, суть некоторые постоянные (вообще говоря, отличные от аналогичных констант в (3), (4)). Очевидно, что условия (5), (6) и условие (7) исключают друг друга.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему(см. [2,4,5]).

Теорема 1 (Левинсон). *Пусть выполнены условия дихотомии* (5) – (7). *Тогда фундаментальная матрица* $X(t)$ *L-диагональной системы* (2) *допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$X(t) = \Big(I + o(1)\Big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s) ds\Big\}, \qquad t^* \ge t_0.$$

В целом ряде случаев исходную систему (1) с помощью серии преобразований удается привести к L-диагональному виду. Мы упомянем здесь лишь о самом простом результате в этом направлении, который, тем не менее, оказывается полезен при решении многих практических задач.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + V(t) + R(t)\Big)x, \tag{8}$$

где A_0 — постоянная матрица с различными собственными значениями, матрица $V(t)$ стремится к нулевой матрице при $t \to \infty$, а матрицы $\dot{V}(t)$ и $R(t)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Пусть $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, на диагонали которой находятся собственные числа $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ матрицы $A_0 + V(t)$. Имеет место так называемая лемма о диагонализации переменной матрицы (см. [4,5]).

Лемма 1. *При достаточно больших значениях t существует ограниченная матрица $C(t)$, имеющая ограниченную обратную $C^{-1}(t)$ и производную $\dot{C}(t) \in L_1[t_*, \infty)$, такая, что замена $x = C(t)y$ приводит систему* (8) *к L-диагональному виду*

$$\frac{dy}{dt} = \Big(\Lambda(t) + R_1(t)\Big)y, \tag{9}$$

где $R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) - C^{-1}(t)\dot{C}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$.

Применив теорему 1 к системе (9), получаем следующий результат.

Теорема 2. *Если для собственных чисел $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ матрицы $A_0 + V(t)$ выполнены условия дихотомии* (3), (4), *то фундаментальная матрица $X(t)$ системы* (8) *имеет следующую асимптотику*:

$$X(t) = \Big(C_0 + o(1)\Big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}, \qquad t \to \infty,$$

где C_0 — постоянная матрица, по столбцам которой стоят собственные векторы матрицы A_0, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ $(\lambda_1 = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_1(t), \ldots, \lambda_n = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_n(t))$.

В завершение этой небольшой работы приведем примеры задач, решение которых подразумевает использование теоремы Левинсона. Более подробную информацию о теореме Левинсона и ее практическом использовании при решении прикладных задач можно найти в пособии [3].

Задачи

1. Построить асимптотику решений следующего линейного уравнения второго порядка при $t \to \infty$:

$$\ddot{x} + \big(\omega^2 + r(t)\big)x = 0$$

при условии, что $r(t) \in L_1[t_0, \infty)$ и $\omega \neq 0$.

2. Найти асимптотику решений при $t \to \infty$ уравнения

$$x'' - [1 + r(t)]x = 0,$$

если $r(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

3. Исследовать устойчивость решений следующей линейной системы:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} t^{-\frac{3}{2}} \ln t & t^{-1} \\ -t^{-1} & f(t) \end{pmatrix} x, \qquad f(t) = \int\limits_t^\infty \frac{\sin u}{u^2}\, du.$$

4. Бесселева функция целого порядка $u(x) = \mathcal{J}_n(x)$ $(x > 0)$ является решением уравнения

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Найти асимптотическую формулу для функции $\mathcal{J}_n(x)$ при $x \to \infty$.

Список литературы

[1] *Coppel, W. A.* Dichotomies in Stability Theory / W. A. Coppel. Springer-Verlag. New York, 1978.

[2] *Levinson, N.* The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations / N. Levinson // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 111–126.

[3] *Бурд, В. Ш.* Системы дифференциальных и разностных уравнений: метод усреднения и асимптотика решений: учебное пособие / В. Ш. Бурд, П. Н. Нестеров; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 192 с.

[4] *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1967. 472 с.

[5] *Коддингтон, Э. А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. М.: ИЛ, 1958. 475 с.

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРЕПОДАВАНИЯ ЯЗЫКА АССЕМБЛЕР

В. А. Никулин

Описываются проблемы, возникающие у студентов при изучении материала по программированию, и пути решения этих проблем с помощью освоения программирования на Ассемблере.

Опыт преподавания компьютерных дисциплин, связанных с преподаванием программирования для студентов младших курсов позволяет выделить некоторые вопросы, которые вызывают особые трудности у студентов, начинающих осваивать программирование на языке высокого уровня. В данном докладе мы пытаемся показать, как преподавание курса программирования на Ассемблере может решить эти возникающие проблемы.

1. *Проблема.* Сложность усвоения некоторых аспектов программирования в языках высокого уровня.

Решение. В языке ассемблера приходится реализовывать данные механизмы на низком уровне, поэтому приходит понимание "изнутри".

Пример. Одна из первых проблем, с которой сталкивается студент при изучении языка высокого уровня, — понимание механизма передачи параметров в процедуры (функции). Возникают сложности в передаче по ссылке и по значению. При написании программы на ассемблере параметры необходимо передавать вручную (через стек или регистры), поэтому приходит более глубокое понимание данной темы.

2. *Проблема.* Написание неэффективного кода вследствие непонимания внутреннего устройства высокоуровневых механизмов.

Решение. Когда студент пытается понять, как данный фрагмент кода может быть реализован в языке ассемблера, он осознает, какая реализация будет наиболее эффективной.

Пример. Допустим, необходимо пройти по матрице и сделать некоторые вычисления над ее элементами, например, вычислить их сумму. Типичное решение будет состоять из двух вложенных циклов и доступа к необходимому элементу матрицы:

```
int sum = 0;
for (int i = 0; i<N; ++i)
for (int j = 0; j<M; ++j)
```

```
sum += A[i][j];
```

Такое решение является далеко не самым эффективным. Дело в том, что при каждом обращении к A[i][j] происходит вычисление выражения

```
A+(i*MAX_ M+j)*sizeof(int).
```

Данное выражение содержит в себе одно умножение (*MAX_ M), один сдвиг (*sizeof(int)) и два сложения. Следует отметить, что операция умножения является достаточно трудоемкой и занимает десятки тактов. При этом есть существенно более быстрый способ решить данную задачу, а именно, завести указатель на первый элемент строки и сдвигать его при переходе к следующему элементу:

```
int sum = 0;
const int *p0 = & A[0][0];
for (int i = 0; i < N; ++i, p0 += MAX) {
    const int *p = p0;
    for (int j = 0; j < M; ++j, ++p)
        sum += *p;
}
```

Такое решение уже требует всего одной операции сложения для каждого элемента массива и является более эффективным.

3. *Проблема.* Неожиданная работа программы, например, в случае неопределенного поведения (C++).

Решение. Умение отлаживать программу с использованием дизассемблера помогает быстрее понять, что именно повлекло ошибку в работе программы.

Пример. Одной из распространенных ошибок является использование уже разрушенных объектов. Рассмотрим такой фрагмент кода:

```
std::string & GetString() {
    std::string tmp(« hello » );
    return tmp;
}
int main()
        std::cout << GetString() << std::endl;
}
```

Функция GetString() возвращает ссылку на объект tmp, который существует только во время вызова функции. По этой причине использовать его за пределами функции нельзя. Во время отладки в дизассемблере сразу станет видно, что в момент выхода из функции будет вызван деструктор std::string, таким образом, вопрос станет ясным.

4. *Проблема.* Написание потенциально опасного кода с точки зрения взлома.

Решение. Понимание того, каким образом уязвимость в программе может быть использована злоумышленником, помогает защищаться от подобных действий.

Пример. Одной из наиболее распространенных проблем является переполнение буфера. Рассмотрим следующую программу:

```
void BadFunc() {
    char buf[10];
    scanf(« \ % s » , buf);
}
```

В случае, если пользователь введет более девяти символов, то возникнет переполнение буфера, которое может быть использовано злоумышленником. Дело в том, что массив buf выделяется в стеке, а прямо перед ним в стеке лежит адрес возврата из функции. Как правило, злоумышленники в подобных случаях вводят такие данные (чтобы в buf не хватило места и затерлось то, что лежит в стеке перед buf, а это адрес возврата), при которых адрес возврата из функции указывал не туда, куда должен, а на код злоумышленника.

5. *Проблема.* Внутреннее устройство C++ достаточно сложно для понимания.

Решение. Знание языка Ассемблер и методов отладки с помощью дизассемблера помогает понять, как реализованы указанные механизмы. Для этого необходимо создать интересующие примеры на C++ и провести их исследования в отладке.

Пример. Виртуальные вызовы реализованы через таблицу виртуальных функций. У каждого полиморфного объекта первые 4 байта заняты таблицей виртуальных функций. Указатель на данную таблицу инициализируется в момент вызова конструктора. В момент вызова виртуальной функции просто происходит переход по адресу, хранящемуся в соответствующей ячейке таблицы виртуальных функций.

Таким образом, знание языка Ассемблера помогает писать более безопасный и эффективный код. Кроме того, навыки отладки в дизассемблере помогают изучать внутреннее устройство интересующих механизмов в языках высокого уровня, например, C++.

О подготовке ИТ-специалистов на факультете информатики и вычислительной техники ЯрГУ им. П. Г. Демидова

И. В. Парамонов, В. А. Соколов, Д. Ю. Чалый

Рассматриваются основные подходы к подготовке специалистов в области информатики и информационных технологий в современных условиях, излагается существующий опыт такой подготовки на факультете ИВТ ЯрГУ, намечаются направления, которые могут обеспечить повышение качества образования в данной области.

Программа подготовки современного специалиста в области информационных технологий включает в себя универсальные знания и специальные знания. Специальные знания, в свою очередь, состоят из трех основных частей.

- Концептуальные знания заключают в себе основные концепции и принципы разработки и функционирования программного и аппаратного обеспечения. Эти знания используются для более качественного решения сложных (в том числе новых) проблем. Их приобретение происходит при изучении фундаментальных дисциплин.

- Практические знания — это знания того, как решать конкретные проблемы. Эти знания позволяют быстро решить проблему на практике без «изобретения велосипеда». Приобретение происходит при изучении существующих решений, программных средств и т. п.

- Опытные знания составляют то внутреннее нетранслируемое знание, которое формируется со временем. Этот вид знаний позволяет органично использовать концептуальные и практические знания и может быть приобретен только при самостоятельной разработке программ и анализе принятых в процессе разработки решений.

Обучение в университете построено таким образом, что выпускник должен обладать значительным багажом концептуальных знаний (которые приобретаются во время лекций, семинаров и научной работы) и заметно меньшим объемом практических и опытных знаний. Это позволяет ему подготовиться к решению новых и сложных задач, однако недостаточно хорошо готовит к практической деятельности. С этой точки зрения для рынка более интересен специалист-самоучка, который на практике освоил ряд инструментов разработки и который может их применять «здесь и сейчас».

Однако в более долгой перспективе, поскольку информатика является бурно развивающейся прикладной наукой, выпускник университета имеет шансы построить более успешную карьеру, так как он гораздо эффективнее может осваивать новые концепции. Это, однако, не отменяет факта, что практическим и опытным знаниям необходимо уделять внимание при планировании учебной программы. Чем качественнее выпускники обучаются практическим и опытным знаниям — тем быстрее они адаптируются и становятся более ценными специалистами на рынке. Проблема обучения информатики существует не только у нас в университете, но также и центральных регионах, где, казалось бы, сосредоточены ведущие вузы в этой области — Москве и Санкт-Петербурге. При этом компании, которые там работают, отмечают не только медленную адаптацию к практическим задачам вследствие недостатка практических и опытных знаний, но также недостаток концептуальных знаний.

Весьма показательным в плане опыта реализации концепции подготовки программистов является следующий проект. В 2007 году компанией «Яндекс» была организована и профинансирована «Школа анализа данных и информатики», представляющая собой двухгодичные вечерние курсы. В школе работают два отделения: Computer Science и отделение анализа данных. На отделении Computer Science студенты изучают дополнительные главы дискретного анализа, теории графов, комбинаторики, теории вероятностей, методы построения и анализа эффективных алгоритмов и структур данных, современные методы машинного обучения, обработки текстовой информации и распределенных вычислений. На отделении анализа данных изучаются базовые разделы анализа данных (методы построения классификаторов, кластерный анализ и др.), методы анализа специальных данных (изображений, символьных последовательностей, текстов на естественных языках), методы оптимизации, необходимые для построения основных вычислительных процедур. Занятия ведут преподаватели МГУ, МФТИ, ИСА РАН и других ведущих университетов и институтов. Как правило, выпускники школы идут работать в «Яндекс», где их адаптация происходит в рамках программы стажеров. Аналогичные проекты есть и в Санкт-

Петербурге.

В нашем университете есть условия для организации подобных школ. Проект становится более реальным, если в него вложится не только университет (прежде всего интеллектуальными ресурсами), но и действующий в регионе бизнес (материально). При этом созданная структура могла бы вести обучение в нескольких направлениях, что позволило бы сформировать у студентов более качественный набор концептуальных и практических знаний. Чтение «продвинутых» курсов по теоретической информатике позволяет развивать концептуальные знания специалистов. Сейчас такую роль выполняют семинары «Моделирование и анализ информационных систем», «Нейронные сети», «Нелинейная динамика». В рамках этих семинаров заседания объединены общей, достаточно широкой научной тематикой, что позволяет им быть гибкими и обсуждать новейшие направления в науке. Однако введение курсов, где необходимые области знания развиваются более целенаправленно, было бы в значительной мере полезно. Разработка и преподавание таких курсов могла бы быть осуществлена специалистами Центра инновационного программирования ЯрГУ и вестись на базе этого центра.

Кроме этого существенное значение имеет обучение студентов работе с конкретными средствами разработки программного обеспечения и информационными технологиями. В университете уже сейчас существуют подобные курсы в области администрирования и сетевых технологий — академия Cisco. По окончании обучения студенты готовы к прохождению испытаний для получения международного сертификата. Можно было бы расширить спектр таких курсов и программ сертификации (в том числе коммерческих), например, по программам Sun и Microsoft. Чтение таких курсов преподавателями, ответственными за ведение практических дисциплин, позволило бы повысить уровень подготовки бакалавров, специалистов и магистров, а также поддержало бы преподавателей финансово.

Для получения студентами опытных знаний может быть полезной работа в специализированных центрах, например, Центре инновационного программирования ЯрГУ, где студентами уже ведутся работы в рамках международных проектов (например, Finnish-Russian University Cooperation in Telecommunications), а также прорабатываются возможности расширения тематики работ.

Считается, что идеальный вариант ИТ-образования — это 50% универсальных знаний плюс 50% технологий. В универсальные знания входят как традиционные общепрофессиональные дисциплины, так и инвариантная составляющая компьютерных дисциплин (проектирование, инженерия ПО и т. д.). Технологии должны быть максимально современными (здесь имеется проблема, связанная с их бурным развитием, поэтому в реальности до 50% не дотягиваем). Изучение технологий особенно важно в условиях Российской действительности, где внутрикорпоративное обучение развито слабо и выпускаемые специалисты уже должны быть готовы к решению практических задач. Также важен акцент на программной инженерии, охватывающей вопросы методологии и технологии программирования в целом, а также взаимодействия специалистов в ходе процесса разработки.

Рассмотрим два примера реализации формулы 50%+50% в рамках учебных планов факультета ИВТ ЯрГУ.

1. Объектно-ориентированное программирование на II курсе. Используется язык программирования C++, однако основные принципы даются с минимальной привязкой к конкретному языку программирования. Для разработки приложений с графическим интерфейсом предлагается фреймворк Qt, который является одним из наиболее развитых инструментов в своём классе применительно к языку C++ (также есть библиотеки привязок к другим языкам). Поощряется использование студентами разнообразных сред разработки (Eclipse, NetBeans, Visual Studio), чтобы, с одной стороны, расширить их кругозор, а с другой стороны, выработать независимость от используемой среды разработки.

2. Комплекс дисциплин специализации на IV курсе. Данный комплекс включает: язык программирования Java, шаблоны объектно-ориентированного проектирования (безотносительно к применяемой среде разработки), технологию совместного объектно-ориентированного проектирования системы классов и базы данных, технологию объектно-реляционного отображения, унифицированный язык моделирования UML, CASE-технологии, а также технологии Java Enterprise Edition, которые позволяют на практике прикоснуться к построению крупных программных систем, изучить особенности их архитектуры, овладеть принципами их разработки.

Особую значимость при подготовке ИТ-специалистов приобретает инновационная и проектная деятельность. Эта деятельность, представлена разноплановыми и часто очень разнородными работами, в которых оказываются задействованы и студенты, и преподаватели. Она позволяет оказаться на переднем крае современных технологий, «окунуться» в них порой в той степени, в которой это порой невозможно сделать в рамках задач, решаемых профессионалами в рамках коммерческих проектов, и даже принять непосредственное участие в развитии этих технологий. Ниже приведены некоторые из таких проектов, реализованных и реализующихся на факультете ИВТ.

1. Проекты, связанные с использованием операционной системы GNU/Linux. В настоящее время ОС GNU/Linux является чрезвычайно быстроразвивающейся и инновационной, поэтому её недопустимо игнорировать в рамках процесса подготовки ИТ-специалистов. Она является открытой, свободной, логично устроенной, легкодоступной для изучения, всячески поощряет это изучение, а также участие в доработке, перспективна в плане научных и студенческих проектов. Кроме того, ОС GNU/Linux является превосходным выбором для рабочего стола ИТ-профессионала, способного настроить среду под себя.

   На факультете ИВТ класс с ОС GNU/Linux (дистрибутив Mandriva) включён в инфраструктуру университета: обеспечена единнобразная авторизация пользователей на рабочих станциях в классах с Windows и Linux. После входа пользователям доступны одни и те же сетевые ресурсы. Для развёртывания были созданы специальные инструменты, позволяющие автоматически установить или переустановить операционную систему, выполнив загрузку машины по сети. В процессе развёртывания были обнаружены ошибки в таких продуктах, как Samba и модули аутентификации PAM, патчи посланы разработчикам, соответствующие ошибки уже исправлены в новых версиях соответствующих средств.

   Кроме того, университетом заключён договор с компанией Линуксцентр (Санкт-Петербург) о совместной работе в области Linux-образования и исследования возможностей свободного ПО в образовании, госструктурах и бизнесе.

2. Эксперимент по проведению занятий в смешанной среде. На втором курсе занятия проводятся как в компьютерных классах с MS Windows, так и с ОС GNU/Linux (в следующем семестре аналогичное планируется проделать в отношении первого курса). Предполагается, что студенты могут переходить из класса в класс, и компилировать и запускать одни и те же проекты как под Windows, так и под Linux. Для обеспечения этого им предлагается использовать компилятор GCC (под Windows — его порт Mingw), а также кросс-платформенные фреймворки (Qt для разработки приложений с графическим интерфейсом). В качестве среды разработки предлагается Eclipse и NetBeans. Обе открытые и свободные. Проекты студентов располагаются в их личных каталогах на сервере, доступных им из любых классов.

3. Развёрнута среда управления учебным контентом (LMS) Moodle. Её основное назначение — поддержка учебного процесса: оперативное размещение учебных материалов преподавателями, а так-

же тестирование студентов. LMS Moodle доработана: реализована поддержка групп студентов в том виде, в котором они присутствуют на сервере каталогов Active Directory (используется для централизованного управления пользователями в учебном корпусе), авторизация в Moodle осуществляется с теми же логинами и паролями, что и при регистрации на рабочих станциях в компьютерных классах, интегрирована ранее существовавшая система статистики доступа пользователей в Интернет (часть дипломной работы студента V курса).

   Тестирование студентов в LMS Moodle осуществляется в классах с ОС GNU/Linux. Для тестирования был разработан специальный браузер, который открывается на голом экране и не позволяет делать ничего, кроме собственно прохождения тестирования (курсовая работа студента III курса).

4. Выполнена добработка среды разработки NetBeans: в мастер автоматического создания классов по таблицам базы данных (Java Persistence API) добавлена возможность определения собственного преобразования имён столбцов таблиц. Соответствующий патч послан разработчикам среды (курсовая работа студента IV курса).

5. Предложено архитектурно-целостное решение валидации форм Spring Framework с помощью AJAX. Это теоретическая работа (опубликована в студенческом сборнике) по тематике, связанной со способом организации архитектуры приложения, использующего конкретный фреймворк для платформы Java Enterprise Edition. Были тщательно проанализированы существующие решения, предложен и обоснован свой подход. По духу работа близка к тому, что защищают за границей в качестве дипломов магистров и диссертаций PhD в области Computer Science и информационных технологий.

Из сказанного выше видно, что несмотря на существующие трудности в подготовке ИТ-специалистов и вызовы, которые бросает системе образования стремительное развитие информационных технологий, повышение качества достигаемых в этой области результатов возможно. И основные направления движения, по всей видимости, должны быть связаны с активным вовлечением студентов в реальные ИТ-проекты (как свободные, так и коммерческие при участии бизнеса), а также в деятельности научно-образовательных центров, таких, как Центр инновационного программирования ЯрГУ.

Создание мультимедийного методического пособия к курсу "Администрирование информационных систем"

А. Ю. Проворов, А. Г. Солопов, М. Ю. Тимофеев

Обсуждаются вопросы преподавания дисциплины "Администрирование информационных систем". В частности, в рамках курса предлагается использование мультимедийного пособия по основам администрирования операционной системы Linux.

"Администрирование информационных систем" (АИС) — одна из дисциплин подготовки специалистов по системному администрированию. Требования государственного образовательного стандарта (как, впрочем, и для других курсов) довольно расплывчаты. Поэтому в рамках АИС обычно преподают основы функционирования локальных сетей и сети Интернет на основе протоколов TCP/IP, типичные сетевые сервисы и реализующие эти сервисы клиент-серверное программное обеспечение. В разных университетах программа может отличаться в деталях. Это зависит, скорее, от личных знаний и профессиональных способностей преподавателя курса, а также от его видения целесообразности отдельных тем предмета. Так, например, в качестве платформы выбирают семейство Windows Server, Linux или, реже, UNIX. Некоторые преподаватели, к сожалению, вообще ограничиваются одной теорией, что, на наш взгляд, в корне неверно.

Основная (и самая сложная) задача — в течение ограниченного одним семестром курса дать студентам не только теоретические знания, но и хотя бы базовые навыки администрирования. И если содержание теоретической части вполне понятно, состав, методология и другие части практики вызывают вопросы.

Два самых распространенных на сегодня семейства ОС — Windows и Linux. Администрирование в каждой из них сильно отличается. Настолько же сильно, как отличается администрирование рабочих станций и администрирование серверов. Это связано с тем, что в Windows используется для настроек преимущественно простой приближенный к пользователям графический интерфейс, а в Linux — текстовый интерфейс. Студентам, которые встречались лишь с ОС от Microsoft, очень сложно перестроиться. Тем не менее, знание Linux крайне важно для специалистов по администрированию: в мире количество построенных на них серверов значительно превышает Windows. По данным netcraft на 2006 год, доля Windows в серверном сегменте российского рынка составляет лишь 9%, остальное занимают Linux и другие UNIX-подобные ОС. Подобные исследования проводились и позднее, но спонсировались в основном Microsoft, что не говорит в пользу их достоверности.

Поэтому если навыки администрирования рабочих станций есть практически у всех студентов факультета информатики, то навыки администрирования серверов должен давать вуз. Главная сложность — такие навыки нельзя сформировать устно на лекциях или, например, бумажным пособием. Как и с программированием, они приобретаются только продолжительной практикой. Область знаний по системному администрированию сейчас стала настолько сложна, что один человек в принципе не может знать все. Хороший системный администратор — тот, который может найти решение любой возникающей проблемы. А это в первую очередь — знание размещения и формата файлов журналов, навыки диагностики ошибок, умения работать с поисковыми системами Интернета для нахождения решений в аналогичных ситуациях, которые случались у более опытных специалистов. Чем больше проблем самостоятельно решено студентом, тем более потенциально опытным он будет для решения других проблем.

Вызвать подобные проблемы искусственно сложно. Зато можно дать возможность студентам повторить процессы, в ходе которых такие ошибки могут повториться. Примером процессов может быть установка программного обеспечения из исходных кодов. В отличие от Windows-систем, процесс установки сложен и включает конфигурирование параметров компиляции, непосредственно компиляцию, создание файловой структуры программы, а также многие дополнительные действия, которые сильно разнятся от программы к программе. Вся последовательность установки подробно расписана в текстовом файле, идущем с исходными кодами программного обеспечения. Однако, при выполнении этих инструкций у системного администратора много возможностей наделать ошибок, выполнив нужные команды в неправильном месте (или порядке), опечатавшись, случайно опустив выполнение одной или нескольких нужных команд и т. д. Все еще больше осложняется тем, что ошибка чаще всего проявляется не сразу или порождает наведенные ошибки. В решении таких ошибок студент и приобретает опыт администрирования Linux.

Предлагаемый нами подход — в использовании интерактивного мультимедийного обучающего пособия. В таком пособии могут содержаться как теоретические статьи, так и практические задания с образцами их выполнения. Одним из вариантов пособия является мультимедийный диск. Он содержит учебную операционную систему, теоретический материал, тесты для отработки материала, видеоролики и практические задания. Ролики содержат описание действий системного администратора при настройке системы и решение возникающих при этом проблем.

Начиная обучение курса АИС, студент получает такой диск. Первым действием он устанавливает с диска на компьютер или виртуальную машину специальную учебную версию операционной системы. ОС основана на ядре Linux, она содержит в себе все необходимые пакеты для выполнения практических заданий диска. Из нее исключены все лишние и несущественные компоненты.

Запустив графическую оболочку, студент получает доступ к теоретической части. Весь материал в ней разбит на несколько основных тем, каждая из которых разделена на подразделы. Например, тема «Установка почтового сервера» включает в себя подразделы «установка антивирусной защиты на почтовом сервере», «установка защиты от нежелательной почты» и т. д. Оболочка основана на использовании языка гипертекстовой разметки HTML с применением скриптового языка JavaScript и асинхронного JavaScript (AJAX). Оболочка работает во всех основных операционных системах, не требует установки дополнительного программного обеспечения и нетребовательна к ресурсам компьютера.

После прочтения и понимания материала обучаемый может просмотреть видеоролики с примерами выполнения типичных задач администрирования. Каждое действие в роликах комментируется субтитрами. Цветом выделяются основные команды, вводимые в консоли настройки и директории, которые используются при установке программ. Для создания видео материалов была использована программа захвата с экрана Camtasia Studio. Для интегрирования субтитров — Aegisub. Она дает возможность выделения основных кусков текста шрифтом и цветом. Выделение позволяет подчеркивать самые важные места, на которые необходимо обращать внимание.

Темы рассматриваемых заданий — самые разные, от настройки IP-адресов и маршрутизации до конфигурирования почтовых, web- и DNS-серверов. Спектр заданий таков, что он покрывает большинство типичных действий, которыми занимаются администраторы Интернет-серверов и серверов локальной сети.

Следующий шаг — воспроизведение показанного в видеоролике материала на установленной операционной системе. Это самый простой шаг. Далее студент приступает к выполнению практических заданий по теме. Задания предназначены для закрепления показанного в видеоролике материала, выработке навыков использования встроенной системы документации linux (man-pages), документации устанавливаемого ПО и использования сети Интернет для решения возникающих проблем.

В конце каждого раздела студент выполняет тест на проверку полученных знаний. Проверку выполняет написанный на JavaScript модуль. Вопросы и ответы хранятся в отдельном зашифрованном файле, который не позволяет нерадивым студентам подделать результаты тестирования. Порядок вопросов меняется от запуска к запуску. По окончании теста пользователю выдается результат с количеством правильных ответов и оценка знаний.

Проходя подготовку с использованием данного диска, студент получает фундаментальные знания по предмету, включающие как теорию, так и практику. Из обычного пользователя, студент превращается в специалиста, готового выполнять настройку linux-серверов начальной сложности для любых функциональных ролей.

Организация индивидуальной работы студентов специальности "Информационные технологии" по дисциплине "Основы дискретной математики"

В. С. Рублёв

Организация индивидуальной работы студентов должна быть направлена не только на освоение дисциплины, но и на развитие логического мышления, недостаток которого массово проявляется у многих выпускников средней школы.

Низкий уровень среднего образвования, вызванный снижением требований в школе, привел к тому, что абсолютное большинство абитуриентов не умеют логически мыслить. К сожалению, правила приема не ограничивают поступление таких абитуриентов. По этой причине невозможно дать таким студентам математические знания, без которых нельзя получить образованного выпускника специальности «Информационные технологии», умеющего разрабатывать такие технологии.

Для преподавателя младших курсов добавилась задача обучения студентов в первую очередь русскому языку, ибо мышление, и в частности, логическое мышление, связано с языком, на котором мы выражаем наши мысли. Многие студенты не могут понять смысл предложений, в которых присутствуют придаточные предложения и обороты.

Дисциплина «Основы дискретной математики» связана с базовым обучением студентов языку математики — языку множеств и языку логики. Но лекционный материал только информативен, а практические занятия, как правило, рассчитаны на добросовестное выполнение домашних заданий после освоения той или иной лекционной темы. Решение домашних заданий недоступно для большинства студентов, так как они не привыкли трудиться, а привыкли списывать домашние задания у успешных студентов, если таковые есть в группе. Поэтому без проведения огромной индивидуальной работы не добиться успеха.

Организация индивидуальной работы должна быть построена таким образом, чтобы студент осваивал не только язык записи математических формул, но, в первую очередь, язык логических рассуждений, ведущих к решению задачи. Эти рассуждения должны выражаться правильным русским языком. Нельзя допускать обедняющий язык сленг или просторечные обороты. Надо тщательно отбирать задачи для индивидуального обучения. Они должны быть направлены на обучение анализу исходного текста задачи, на описание возможностей различного выбора при декомпозиции задачи, на тщательную логическую проверку обоснованности такой декомпозиции. Часто студенты не могут точно описать функцию, если она не выражается формулой из элементарных функций. Выпускники школ не знают этого важного понятия, которое является центральным в преподавании математики старших классах школы.

Проверяя индивидуальное задание, преподаватель должен делать неформальные замечания, объясняющие причину ошибок решения, неграмотность в русском языке и рассуждениях. Задача из индивидуального задания может быть принята к зачету только после исправления всех ошибок. Для этого студенту приходится неоднократно переделывать решение задачи, но только такой подход вырабатывает у студента базовые знания по предмету. Наш опыт преподавания дисциплины «Основы дискретной математики» по новой специальности «Информационные технологии» привел к выделению 10 индивидуальных заданий (по 5 в каждом семестре), каждое из которых содержит от 2 до 4 задач, направленных на изучение и освоение базового материала дисциплины. Для каждого задания установлены сроки его зачета. Студенты, сдавшие все задания досрочно и получившие по ним зачет, имеют право на зачет-автомат в осеннем семестре и высокую досрочную оценку по экзамену в весеннем семестре, если они к тому же проявляют большую активность в выполнении домашних заданий по практике. Студенты, сдавшие все индивидуальные работы в срок, получают право на досрочную зачетную работу, при выполнении которой устанавливаются льготы для этих студентов. Это стимулирует студентов к активной работе в течение семестра. Все остальные студенты допускаются к зачетной работе только после полной сдачи всех индивидуальных заданий.

Такой подход к индивидуальной работе требует от преподавателя жертв, связанных с огромным временем на проверку индивидуальных заданий. Следует отметить, что нельзя только по выполненным индивидуальным работам поставить результирующую оценку, так как находятся недобросовестные студенты, которые нанимают за плату репетиторов, выполняющих за них такое задание. Только бесплатные консультации преподавателей, ведущих дисциплину, могут помочь студентам освоить материал. Однако практика показывает, что такие консультации плохие студенты не стремятся получить, и их нельзя заставить своевременно выполнять индивидуальные задания.

Для более успешной индивидуальной работы студентов в настоящее время разработаны методические указания по работам, содержащие не только варианты задач индивидуальных заданий и примеры их решения, но и необходимый теоретический материал, а также практические указания по решению задач и избежанию типичных ошибок. Все это вместе с настойчивой работой преподавателей должно поднять качество образования по дисциплине «Основы дискретной математики» до приемлемого уровня.

В заключение приведем требования к задачам индивидуальных заданий.

I задание. Множества

1. Ввести обозначения множеств утверждения 1-й задачи и упростить их формулы по мере возможности, используя алгебру множеств. Провести доказательство утверждения задачи, разделив его на отдельные части. Построить диаграммы Венна для множеств, входящих в утверждение задачи, для случаев выполнения условий утверждения и каждого случая невыполнения условий. Разные множества выделить цветом и штриховкой с пояснениями. Построить примеры с множествами из натуральных чисел для случаев выполнения условий утверждения и каждого случая невыполнения условий, определив все множества примера.

2. Ввести обозначения исходных множеств, заданных во 2-й задаче, и вывести формулу для искомого в задаче множества через исходные множества. Построить диаграмму Венна для всех указанных в задаче множеств и выделить их штриховкой, цветом с пояснениями. Основываясь на формуле включений и исключений для множеств, вывести формулу для числа элементов искомого множества и найти это число.

II задание. Простые комбинаторные модели (без повторения элементов)

1–3. Для каждой из первых трех задач определить одну из комбинаторных моделей, соответствующую этой задаче (перестановки без повторений, сочетания без повторений, размещения без повторений; любая из них, возможно, в сочетании с правилами умножения или сложения), обосновав выбор модели (установлением взаимнооднозначного соответствия между множеством комбинаций задачи и множеством комбинаций модели) и правила умножения или сложения (если требуется), а затем решить, используя формулу для числа комбинаций соответствующей модели.

4. Дать развернутый ответ на вопрос, объяснив заданную модель (или правило) и вывод формулы для числа комбинаций, определяемых этой моделью (или правилом). Привести пример использования модели из решения других задач этого задания.

III задание. Простые комбинаторные модели (с повторением элементов)

1–3. Для каждой из первых трех задач определить одну из комбинаторных моделей, соответствующую этой задаче (перестановки с повторениями, сочетания с повторениями, размещения с повторениями; любая из них, возможно, в сочетании с правилами умножения или сложения), обосновав выбор модели (установлением взаимнооднозначного соответствия между множеством комбинаций задачи и множеством комбинаций модели) и правила умножения или сложения (если требуется), а затем решить, используя формулу для числа комбинаций соответствующей модели.

4. Дать развернутый ответ на вопрос, объяснив заданную модель (или формулу) и вывод формулы (для числа комбинаций), определяемых этой моделью (или вопросом). Привести пример использования модели (формулы) из решения других задач этого задания.

IV задание. Булева алгебра и сложная комбинаторная задача

1. Решить задачу 1 задания 1 путем сведения к проверке истинности формулы алгебры высказываний. Обосновать сведение к формуле алгебры высказываний ссылками на теорему и следствия для каждой ее части.

2. Решить комбинаторную задачу: "Сколько чисел с заданным числом знаков можно составить из цифр заданного числа?"Обосновать подробно весь ход решения.

V задание. Булевы функции и сложная комбинаторная задача

1. Булеву функцию, полученную в ходе решения задачи 1 задания 4 для равенства множеств, представить в следующих формах (с обоснованием выводом и проверкой таблицей истинности): СДНФ; СКНФ;

полином Жегалкина; формулу, содержащую только штрих Шеффера.

2. Для заданных систем булевых функций решить вопрос о полноте и замкнутости этих систем (с обоснованием).

3. Решить комбинаторную задачу: "Каким числом способов можно вынуть заданное число карт с заданными свойствами из полной колоды в 52 карты?" Обосновать подробно весь ход решения.

VI задание. Изоморфизм и планарность графов

1. Определить является ли граф, заданный матрицей смежности вершин, *планарным.* В случае планарности построить реализацию графа на плоскости без пересечения ребер. В случае непланарности найти часть графа (указав удаляемые при этом вершины или ребра), которая является гомеоморфной K_5 или $K_{3,3}$.

2. Определить, являются ли *изомофными* 2 графа, один из которых взят из задачи 1, а второй задан списком ребер. В случае изоморфности графов построить *изоморфизм* — взаимно-однозначное соответствие вершин первого и второго графов, сохраняющее смежность вершин.

VII задание. Маршруты в графах

1. Для графа, заданного списком ребер с их длинами, найти кратчайший маршрут из первой вершины графа (с номером 1) в последнюю вершину (с наибольшим номером):

a) описать алгоритм Дейкстры нахождения кратчайшего маршрута в графе с пояснением всех вводимых в алгоритме обозначений;

b) свести выполнение алгоритма для заданного графа в таблицу;

c) построить реализацию графа с указанием длин ребер и выделением жирными ребрами найденного кратчайшего маршрута.

2. Для графа (или орграфа), заданного матрицей смежности вершин, найти эйлеров маршрут (цикл, контур, цепь, путь):

a) анализировать граф на существование эйлерова маршрута (цикла, контура, цепи, пути), сформулировав соответствующий критерий существования;

b) описать алгоритм нахождения эйлерова маршрута (цикла или контура, цепи, пути);

c) свести выполнение алгоритма для заданного графа в таблицу;

d) выписать полученный маршрут в качестве результата.

VIII задание. Кратчайшее дерево. Транспортная задача

1. Для графа задачи 1 задания 7, найти кратчайшее остовное дерево:

a) описать алгоритм Краскала нахождения кратчайшего остовного дерева с пояснением всех вводимых в алгоритме обозначений;

b) свести выполнение алгоритма для заданного графа в таблицу;

c) построить реализацию графа с указанием длин ребер и выделением жирными ребрами найденного кратчайшего остовного дерева;

d) построить таблицу списка отцов, сыновей и братьев для описания полученного дерева и проверить полученное описание построением по нему дерева.

2. Решить транспортную задачу, заданную матрицей производительностей продукта в пунктах производства, спроса продукта в пунктах потребления и способностей транспортных перевозок:

a) указать условия, при которых весь производимый продукт может удовлетворить весь спрос продукта и перевозки могут быть осуществлены; построить транспортную сеть для указанной транспортной задачи;

b) описать сведение транспортной задачи к задаче о наибольшем потоке;

c) описать алгоритм решения задачи о наибольшем потоке;

d) свести выполнение алгоритма для заданной задачи в таблицы;

e) по решению задачи о наибольшем потоке получить матрицу перевозок — решение транспортной задачи.

IX задание. Задача о назначениях. Сети из функциональных элементов

1. Решить задачу о назначениях, заданную булевой матрицей размерности $n \times m$ возможностей n работников для m работ:

a) указать условия, при которых может существовать решение задачи о назначениях; построить транспортную сеть для указанной задачи о назначениях;

b) описать сведение задачи о назначениях к задаче о наибольшем потоке;

c) описать алгоритм решения задачи о наибольшем потоке для задачи о назначениях;

d) свести выполнение алгоритма для заданной задачи в таблицы;

e) если наибольший поток удовлетворяет условиям существования решения задачи о назначениях, то по решению задачи о наибольшем потоке *получить матрицу назначений*; в противном случае *найти узкое место*, которое не позволяет решить задачу о назначениях.

2. Для заданной функции множества выходных сигналов от множества входных сигналов дискретного устройства разработать сеть из системы функциональных элементов $\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$ этого устройства с возможно меньшей сложностью (числом функциональных элементов):

a) проанализировать заданную функцию с целью определения множества входных и выходных сигналов и получения функций каждого выходного сигнала в зависимости от входных сигналов;

b) разработать систему булевых функций для выходных сигналов и представить каждую булеву функцию системы в виде ДНФ или КНФ;

c) преобразовать каждую булеву функцию системы из ДНФ или КНФ в формулу, содержащую наименьшее число операций системы $\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$;

d) построить сеть из функциональных элементов для заданного дискретного устройства;

e) определить сложность построенной сети из функциональных элементов.

X задание. Алгоритмы

1. Для функции 2-й задачи задания 9 построить машину Тьюринга (МТ):

a) проанализировать функцию задания и построить полный набор тестов;

b) разработать неформальное пошаговое описание алгоритма функции задания;

c) построить функциональную таблицу МТ;

d) прокрутить каждый тест на разработанной МТ, подписывая состояние МТ под рассматриваемым символом строки.

2. Написать на языке C^{++} программу проверки тождественной истинности булевой функции, построенной в 1-й задаче задания 4 и показать ее выполнение на компьютере (результатом выполнения задачи является текст программы и файл исходного модуля программы).

Математика для гуманитариев

А. О. Толбей

Дается анализ математической подготовки студентов, обучающихся на гуманитарных специальностях. Приводятся рекомендации о преподавании математики для студентов-гуманитариев.

Библиография: 3 названия.

Университет закладывает фундаментальные основы знаний студентов. Важное место среди всех изучаемых дисциплин, независимо от выбранного направления или специальности, занимает математика. Она формирует и развивает качества, необходимые современному специалисту. Роли математики в современном мире посвящено немало публикаций. Математические методы находят применение практически во всех областях человеческого знания. Цель математизации знаний состоит в том, чтобы

— из точно сформулированных предпосылок выводить логические следствия, в том числе такие, которые могут быть непосредственно наблюдаемы;

— сделать доступными логическому и количественному анализу сложные запутанные процессы;

— не только описывать уже установленные факты, но и предсказывать новые закономерности;

— создавать тот специфический математический подход, а вместе с ним и формальный аппарат, который позволил бы наиболее полно и точно описывать интересующий нас круг явлений, выводить следствия и использовать полученные результаты для практической деятельности [1].

В настоящее время математическая подготовка стала неотъемлемой частью общеобразовательной подготовки высококвалифицированных специалистов всех уровней. Практически на всех гуманитарных факультетах высшей школы предусмотрены математические курсы. У преподавателей этих курсов возникло немало проблем, связанных как с постановкой такого курса, так и методикой обучения.

В университет вчерашние школьники приходят со сложившимся отношением к математике. Особенно ярко это отношение, чаще всего отрицательное, выражено у студентов гуманитарных специальностей. У студентов нет достаточной базовой подготовки по элементарной математике, нет навыков самостоятельной практической работы. Еще одним существенным обстоятельством является то, что студент, особенно в первый год обучения, имеет весьма слабое представление о том, чем ему предстоит заниматься в будущем и куда его приведут полученные знания. Все это ведет к трудностям и неуспеваемости в освоении нового материала.

Математика — наука о количественных отношениях и пространственных формах. При преподавании математики необходимо донести до слушателей то, что понятия математики отвлечены от конкретных явлений и предметов. Это обстоятельство оказывается чрезвычайно трудным для понимания. Например, сложно осознать, что число "три" не связано неразрывно с каким-либо определенным содержанием. Часто чересчур абстрактное изложение понятий порождает боязнь математики, поэтому введение математических понятий должно выглядеть естественно и сопровождаться комментариями, наглядными примерами. Использование математического аппарата должно быть рациональным.

Принципиальными моментами проблемы математического образования на гуманитарных специальностях являются: выбор объема и содержания математических курсов, определение целей, сочетание широты и глубины изложения, строгости и наглядности, то есть выбор наиболее эффективных и рациональных путей обучения с учетом ограниченного времени, отводимого на изучение математики. Правильно поставленное обучение даст студентам толчок к самостоятельному активному участию в учебе. Как следствие, необходим поиск новых подходов к преподаванию математики на гуманитарных специальностях.

При преподавании математики следует помнить слова И. Р. Шафаревича: *"Я не думаю, что математика радикально отличается от других форм культурной деятельности. Однако ее объекты более абстрактны, в ней происходит отвлечение от большего числа случайных свойств. Как говорил Платон, в ней больше от познания чистого бытия и меньше — от мнений о предметах видимого мира, в ней "как бы грезят о сущем". Поэтому в математике ясно различимы закономерности, хотя и универсальные, но лишь смутно видимые в других областях"* [2].

Современное понимание фундаментальности образования связано с его направленностью на выявление связей между процессами окружающего нас мира, событиями, объектами. Поэтому желание, чтобы каждый выпускник обладал представлением о методах доказательств, расчетов, о возможностях современных средств коммуникации, обработки информации, является естественным. В учебном процессе необходимо использовать информационные технологии, чтобы повысить интерес учащихся к предмету и успешно освоить ряд разделов математики.

Математика — это не только мощное средство решения самых разных прикладных задач и универсальный язык науки, но также и элемент общей культуры.

Основная цель университетского образования гуманитария в области математики — воспитание определенной математической культуры, привитие некоторых навыков использования математических методов в практической деятельности. Поэтому преподавание разумно ориентировать прежде всего на достижение понимания концептуальных моментов математических наук. Целесообразно максимально учитывать психологические особенности мышления людей гуманитарного склада ума, ментальность и уровень соответствующей подготовки студентов, обучающихся на гуманитарных факультетах. Стоит отказаться и от формально-логического изложения, доказательства заменять описательно-наглядными рассуждениями. Полезными могут быть различные аналогии и сравнения. Практические занятия следует начинать с решения и подробного анализа типовых задач. Затем занятие должно идти в форме самостоятельной работы студентов, в ходе которой преподаватель при необходимости разъясняет отдельные наиболее трудные места решения и направляет его ход.

Важно научить студентов-гуманитариев видеть математические понятия и понимать действие математических законов в реальном, окружающем нас мире, применять их для научного объяснения явлений. Математика должна быть тесно увязана с общекультурными ценностями и общефилософскими концепциями, с событиями и фактами истории, языками, литературой, искусством и музыкой. Правильному пониманию и грамотному употреблению терминов следует уделить особое внимание. Но вместе с тем необходимо снабдить студента-гуманитария и определенным математическим аппаратом, который позволил бы ему осуществлять хотя бы простейший количественный анализ информации.

Список литературы

[1] *Саранцев Г. И.* Обучение математическим доказательствам в школе: книга для учителя. М.: Просвещение, 2000. 173 с.

[2] *Шафаревич И. Р.* Сочинения в трех томах. Т. 2. М.: Феникс, 1994. 337 с.

[3] *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1980. 144 с.

Две формулы для вычисления площадей и объемов

А. Ю. Ухалов

Приводится вывод двух формул для вычисления площади области, ограниченной ломаной линией, и объема тела, ограниченного набором треугольников. Приведенные формулы удобны для численного решения геометрических задач, но не представлены в распространенных учебниках и задачниках.

Библиография: 1 название.

Используемые в университетах учебные пособия по математическому анализу и аналитической геометрии посвящены в первую очередь строгому изложению теоретического курса. В них часто невозможно найти формулы для решения тех или иных задач, пригодные, например, для программирования. Решение задач часто описывается на уровне общих указаний. Разумеется, учебник не должен заменять собой справочник по расчетным формулам, а студент, усвоивший курс, должен быть в состоянии самостоятельно вывести формулу, удобную для конкретного практического применения. Вместе с тем, представляется целесообразным несколько приблизить теоретические курсы к современным приложениям. Многие полезные для практики формулы студенты могут получать самостоятельно на практических занятиях.

Опыт автора показывает, что студенты легко выводят рассматриваемые в настоящей заметке формулы на практических занятиях по математическому анализу при изучении темы «Кратные и криволинейные интегралы».

Представление кривых в виде набора простых элементов (отрезков, дуг окружностей и т. д.), а также представление поверхностей в виде триангуляций (набора треугольников) широко применяется в системах компьютерного моделирования. В связи с этим полезно знать формулы для вычисления площадей и объемов для кривых и тел, описанных таким образом.

Доказываемые ниже формулы удобны для программирования, но не представлены в распространенных учебниках и задачниках. Формула для вычисления площади широко известна, ее легко найти в интернете, выполнив запрос к поисковой системе по словам «площадь многоугольника» или «polygon area». Формула для объема известна меньше. На момент подготовки статьи автору не удалось найти ее в интернете в открытом доступе.

Теорема 1. *Пусть область на плоскости ограничена ломаной линией без самопересечений с вершинами в точках* (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). *Тогда ориентированная площадь области может быть найдена по формуле*

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$.

Под ориентированной площадью области понимается площадь области, взятая со знаком плюс, если вершины ломаной перечислены в порядке, соответствующем обходу области в положительном направлении (т. е. контур пробегается в направлении против часовой стрелки) и со знаком минус — в противном случае.

Отметим, что ориентированную площадь можно вычислить для определения ориентации контура, т. е. когда требуется по набору вершин ломаной выяснить направление ее обхода.

Доказательство. Воспользуемся формулой для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла второго типа (см., например, [1]):

$$S = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx, \qquad (2)$$

где C — данная ломаная. Пусть C_i — сегмент ломаной, соединяющий точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) $(i = 1, \ldots, n)$. В силу аддитивности интеграла, интеграл в правой части (2) равен сумме интегралов по сегментам C_i :

$$\int_C = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i}.$$

Интеграл по i-му сегменту легко вычислить, воспользовавшись параметризацией

$$x(t) = x_i + t(x_{i+1} - x_i), \quad y(t) = y_i + t(y_{i+1} - y_i), \quad t \in [0, 1].$$

Имеем

$$\int_{C_i} xdy - ydx = \int_0^1 [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt =$$

$$= \int_0^1 \begin{vmatrix} x_i + t(x_{i+1} - x_i) & (x_{i+1} - x_i) \\ y_i + t(y_{i+1} - y_i) & (y_{i+1} - y_i) \end{vmatrix} dt = \int_0^1 \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} dt = \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix}.$$

Суммируя по i, находим интеграл $\int_C$. Подставляя полученное значение в (2), приходим к формуле (1). Теорема доказана. □

Формула (1) остается справедливой и для случая неодносвязной области — области, ограниченной одним внешним контуром и несколькими непересекающимися внутренними контурами. Требуется только, чтобы внутренние контуры, описывающие области, которые нужно «вынуть», пробегались в направлении, противоположном направлению обхода внешнего контура. Внутренние контуры также не должны иметь самопересечений.

В качестве задач для самостоятельного решения можно предложить студентам вывести аналогичные расчетные формулы для областей, ограниченных контурами, составленными не только из прямых отрезков, но и включающими другие элементы, например, дуги окружностей, эллипсов и т. п.

Справедливы аналоги формулы (1) для пространств с большим числом измерений. Мы ограничимся рассмотрением трехмерного случая.

Теорема 2. *Пусть тело в трехмерном пространстве ограничено поверхностью S, представляющей собой набор треугольников S_i с вершинами в точках (x_0^i, y_0^i, z_0^i), (x_1^i, y_1^i, z_1^i), (x_2^i, y_2^i, z_2^i), $i = 1, \ldots, n$, причем порядок перечисления точек треугольника задает ориентацию треугольника в пространстве по отношению к телу: если при обходе точек в порядке 0 – 1 – 2 – 0 треугольник остается слева, то мы* *«идем» по внешней стороне границы тела. Предполагается также, что поверхность S не имеет самопересечений. Тогда объем тела может быть вычислен по формуле*

$$V = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Доказательство. Вывод формулы (3) аналогичен выводу формулы (1). Объем тела можно найти с помощью поверхностного интеграла второго типа по внешней стороне поверхности S, ограничивающей тело (см., например, [1]):

$$V = \frac{1}{3} \iint_S x dydz + y dzdx + z dxdy. \tag{4}$$

Так как $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, интеграл можно представить в виде суммы интегралов по всем треугольникам:

$$\iint_S = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i}.$$

Для вычисления интеграла по i-му треугольнику воспользуемся параметризацией

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_0^i + u(x_1^i - x_0^i) + v(x_2^i - x_0^i), \\ y(u,v) &= y_0^i + u(y_1^i - y_0^i) + v(y_2^i - y_0^i), \\ z(u,v) &= z_0^i + u(z_1^i - z_0^i) + v(z_2^i - z_0^i), \end{aligned}$$

$(u,v) \in \Delta$, где Δ — треугольник на плоскости (u,v) с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$. Сводя поверхностный интеграл к двойному, получим

$$J_i = \iint_{S_i} x dydz + y dzdx + z dxdy =$$

$$= \iint_\Delta \left[x(u,v)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + y(u,v)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + z(u,v)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv =$$

$$= \iint_\Delta \begin{vmatrix} x_0^i + u(x_1^i - x_0^i) + v(x_2^i - x_0^i) & (x_1^i - x_0^i) & (x_2^i - x_0^i) \\ y_0^i + u(y_1^i - y_0^i) + v(y_2^i - y_0^i) & (y_1^i - y_0^i) & (y_2^i - y_0^i) \\ z_0^i + u(z_1^i - z_0^i) + v(z_2^i - z_0^i) & (z_1^i - z_0^i) & (z_2^i - z_0^i) \end{vmatrix} dudv =$$

$$= \iint_\Delta \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix} dudv = \begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix} \iint_\Delta dudv.$$

Интеграл по треугольнику Δ от 1 равен площади этого треугольника, т. е. $\frac{1}{2}$. Окончательно получаем

$$J_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0^i & x_1^i & x_2^i \\ y_0^i & y_1^i & y_2^i \\ z_0^i & z_1^i & z_2^i \end{vmatrix}.$$

Суммируя по i и подставляя полученное выражение для $\iint_S$ в формулу (4), приходим к формуле (3). Теорема доказана. □

Формула (3) справедлива и для тела с пустотами, если треугольники, описывающие внутренние пустоты тела, ориентированы соответствующим образом.

На этом же пути могут быть получены формулы для вычисления объемов тел, ограниченных более сложными поверхностями.

Список литературы

[1] *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

Особенности преподавания практикума на ЭВМ в первом семестре

Н. Б. Федотов

Рассматриваются некоторые особенности преподавания практикума на ЭВМ в самом начале изучения этой дисциплины, когда крайне важно привить "правила хорошего тона" при разработке программного кода.

Первой особенностью работы в первом семестре является то, что студенты имеют сильно различающуюся подготовку по информатике. Поэтому полезно провести самостоятельную работу с простым заданием. Например, написать на любом языке программу, которая вводит 3 числа и выводит максимальное число. После этого будет ясен начальный уровень подготовки.

Далее, крайне важна изначальная установка на "правила хорошего тона" в программировании. Вот примерный перечень этих правил.

1. Начинайте разработку кода с построения полного набора тестов.

2. Разбивайте код на фрагменты меньшего размера. Довольно просто сосредоточиться на решении проблемы и приступить к написанию программного кода. По мере того, как вы решаете текущую задачу, ваши функции становятся все длиннее и длиннее. Это не составляет проблемы в долгосрочной перспективе, если впоследствии вы вернетесь назад и переформируете свой код в виде фрагментов меньшего размера. Рефакторинг — это прекрасная идея, однако вы должны развить у себя привычку к написанию более коротких и более фокусированных методов с первого раза. Более короткие методы, которые можно увидеть в одном окне, проще в понимании. Слишком большая длина метода, не позволяющая ему поместиться в окне целиком, препятствует его пониманию, поскольку вы просто не можете быстро просмотреть его содержимое от начала до конца. Вам также следует сформировать привычку к такому написанию методов, чтобы каждый из них выполнял одну и только одну функцию. Существует несколько причин для такого пристального внимания к написанию методов. Во-первых, метод проще применять многократно в том случае, если он делает только одно задание и делает его хорошо. Во-вторых, такие методы проще в тестировании. В-третьих, такие методы проще понимать и легче изменять в случае необходимости.

3. Давайте надлежащие имена (мнемоника имен). Использование "хороших" имен — важная привычка, поскольку содержательные имена упрощают чтение и понимание программного кода. Понятность вашего кода в конечном итоге определяет возможность его последующего сопровождения. Даже если написанный вами код не будет содержать комментариев, но при этом будет прост для понимания, то вам или кому-либо еще будет легче его изменить в случае необходимости. При выработке этой привычки ваша цель должна состоять в том, чтобы благодаря "хорошим" именам ваш код читался так же легко, как книга.

4. Документируйте свой код (комментирование). Хорошее документирование кода иногда представляется столь же сложной задачей, как и его написание. Выбор того, что именно нужно документировать, является трудным делом, поскольку естественное желание разработчика — описать действия, выполняемые его программным кодом. Однако документирование назначения кода — это гораздо более плодотворная идея. В заголовках функций, действия которых могут быть не вполне очевидными, расскажите читателю о том, что ожидается на входе и на выходе методов, а также об их

назначении. Описание того, что делает код — это широко распространенная практика, которая, однако, не является необходимостью. Если ваш код настолько запутан, что вам приходится описывать то, что он делает, задумайтесь — возможно, имеет смысл переработать этот код, чтобы упростить его понимание. Развитие привычки к использованию хороших имен, а также методов и структур небольшого размера, сделает ваш код более читаемым и избавит вас от необходимости комментирования его действий.

5. Структурное размещение текста облегчает визуальное восприятие текста и позволяет избежать ошибок типа нарушения парности скобок.

6. Никогда не пользуйтесь операцией "копировать и вставить". Возможность скопировать код из одного места и затем вставить его в другое место вашего кода — палка о двух концах. С одной стороны, это избавляет вас от множества ошибок, возникающих при использовании клавиатуры для ручного ввода какого-либо кода из примера или из шаблона. С другой стороны, это способствует "разрастанию" схожих фрагментов кода. Соблюдайте максимальную осторожность при копировании кода между разными частями вашего приложения. Когда вы поймаете себя на том, что вы занимаетесь именно этим, остановитесь и спросите себя, каким образом вы могли бы переписать копируемый фрагмент кода, чтобы обеспечить его повторное использование. Размещение кода в одном месте существенно упрощает его последующее сопровождение, поскольку изменения необходимо производить только в одной точке.

7. Обрабатывайте ошибки. Хорошо известно, что при написании устойчивых приложений объем кода для обработки ошибок должен соответствовать правилу 80/20. 80% кода посвящено обработке исключений и валидации, а 20% кода выполняет фактическую работу. Вполне естественно, что при написании кода многие разработчики ориентируются на наиболее благоприятный сценарий (happy-path). Такой код хорошо работает в так называемой "базовой" обстановке, когда все данные являются валидными, а все условия соответствуют ожидаемым. Однако в течение срока службы приложения такой код может проявить свою неустойчивость. С другой стороны, вы можете потратить слишком много времени на написание кода в расчете на условия, с которыми, возможно, никогда не столкнетесь. Хорошая привычка состоит в нахождении разумного баланса между достаточным объемом обработки ошибок и отказом от излишнего совершенствования своего кода,

которое может никогда не закончиться.

Полезно проведение на каждом занятии 5-минутных самостоятельных работ по ранее рассматривавшимся или очень близким к ним задачам для контроля усвоения материала. Предполагается проверка выполнения работы в виде разбора решения с каждым студентом индивидуально сразу на этом же занятии. Это позволяет быстро снять затруднения в понимании материала.

Подбор задач для разбора на занятии и для домашнего задания желателен с несколькими вариантами постановки задачи и с несколькими методами решения. Примером нескольких вариантов постановки задачи служит задача о вычислении "золотого сечения" через вычисления чисел Фибоначчи. В одном случае можно ограничиться выводом десяти отношений, а можно подсчитать его с заданной точностью при соответствующей стабилизации этого отношения. Наличие многовариантности позволяет нагрузить и слабых, и продвинутых студентов.

Все разрабатываемые методы должны проверяться специально для них написанными тестирующими методами, в которых для каждого теста из полного набора тестов делается инициализация данных, выводятся название теста, его исходные данные и результат работы тестируемого метода. Отчеты по лабораторным работам должны содержать постановку задачи и результаты тестирования всех методов.

Проблемы адаптации первокурсников и пути их решения

В. Ф. Чаплыгин

Названная тема постоянно находилась в центре внимания, но ее актуальность в настоящее время не снизилась, а может быть, даже возросла. Между школой и вузом всегда существовал барьер, который требовалось преодолеть абитуриенту, и сейчас высота барьера увеличилась. Очевидно, имеющий место дифферент зависит от качества образовательной подготовки в средней школе и требований, предъявляемых высшей школой.

В данной заметке речь пойдет об обучении математике в классических университетах. Прежде всего следует отметить, что уровень школьной математической подготовки за последние годы заметно снизился. Из многих причин этого явления выделим три: 1) недостаточная компетентность учителей математики, 2) уменьшение количества часов, выделяемых на математику, и, как следствие, сокращение программы и более поверхностное изложение материала и, наконец, 3) переход на ЕГЭ как в одиннадцатых, так и в девятых классах. Последняя причина заставляет учителя "натаскивать" учащихся на выполнение тестовых заданий, подчиняя этому все преподавание. В результате ученик средней школы получает слабую математическую подготовку, деформированную требованиями ЕГЭ. Он плохо владеет математическим языком, имеет крайне слабую логическую культуру, не умеет провести простейшие доказательства и проанализировать задачу, не знает основные математические понятия.

Не ставя перед собой целью перечислить все недостатки, остановимся на некоторых из них. Школьники плохо понимают идею функциональной зависимости и функциональную символику, не знают свойства основных элементарных функций, формулы из алгебры, геометрии и тригонометрии. Они плохо владеют понятием абсолютной величины, не умеют выполнять действия с обыкновенными дробями как арифметическими, так и алгебраическими, затрудняются в проведении алгебраических преобразований, не могут выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, что часто требуется. Из школьной математики практически исключены доказательства. Это приводит к тому, что студенты первого курса не видят необходимости в доказательствах, не понимают, зачем они нужны. Большинство школьников не знают происхождения формул, выражающих расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве и, как следствие, не понимают уравнения окружности и сферы.

Если говорить об элементах математического анализа в школе, то он скорее приносит вред, чем пользу. Усвоив весьма поверхностно сведения их этого школьного раздела, школьник считает, что он знает, что такое производная, что такое интеграл и т. д. На самом деле это не более, чем так называемые ложные знания. Такого рода представления мешают первокурснику воспринимать систематический курс математического анализа. Студент слышит знакомые слова и считает, что он уже знает, что излагает лектор.

Таким образом, сегодняшний первокурсник менее подготовлен к обучению в университете, чем десять лет назад. Ему надо помочь адаптироваться. Во-первых, в начале каждого математического курса можно дать, хотя бы кратко, изложение того материала школьной математики, на который лектор рассчитывает опираться. Во-вторых, студента нужно учить слушать и конспектировать лекции, для чего время от времени просматривать его конспекты. В-третьих, темп изложения и плотность излагаемого на первых порах материала должны быть невысокими, так как студент не приучен воспринимать информацию в больших объемах и серьезную по содержанию, а доступность должна быть максимальной. Лекция должна содержать достаточное количество удачно подобранных примеров. Важную роль могут сыграть хорошо продуманные, доступные учебные пособия, особенно если их авторами будут являться сами лекторы. В таком случае пособия могут быть продолжением и дополнением лекций, содержать комментарии к ним, а не являться их конспектом. В пособие можно включить контрольные вопросы, которые помогут студенту понять, правильно ли он усвоил теоретический материал. В него же можно включить задачи для самостоятельного решения и разобранные примеры задач, решение которых может вызвать у студента затруднения. Пособие для первокурсников должно быть написано проще, чем для студентов старших курсов. Конечно, при этом надо приучать студентов к чтению учебников, а позже и монографической литературы. И этим процессом следует руководить. Основными вопросами остаются следующие: что излагать и как излагать. На первый из них часто отвечает учебная программа дисциплины, на второй — должен ответить сам лектор. И это у разных лекторов получается по-разному.

Особенно важна работа по формированию основных понятий. Конечно, лектору приходится использовать неопределяемые понятия такие, как множество, точка, прямая, плоскость и др., но есть понятия, которые используются при доказательстве теорем и нуждаются в точном определении, такие как предельная точка, открытое и замкнутое множество, непрерывность функции и многие другие. Здесь возможны два подхода: определение дается чисто формально в готовом виде или к нему можно подвести студента, формируя так называемое предпонятие. Иначе говоря, в первом случае студенту сообщается определение, выработанные кем-то, а во втором случае студент участвует в его выработке, вычленяя вместе с преподавателем некоторые характерные признаки изучаемого объекта и отвлекаясь от остальных. Ниже сказанное будет проиллюстрировано на конкретном примере. Близкая ситуация возникает и с доказательством теорем. Либо приводится ее формулировка и далее следует доказательство, либо студента можно подготовить к теореме, предсказать ее заключение, увидеть ее геометрический смысл, после чего доказать. Это придает наглядность, образность восприятия, уменьшает опасность формального усвоения. Фактически речь идет о соотношении дедуктивного и индуктивного методов преподавания. Если в доказательстве используется искусственный прием, вводятся некоторые вспомогательные функции и т. п., то их происхождение, по возможности, нужно объяснить. Пониманию сути дела способствуют контрпримеры, с помощью которых можно опровергнуть ложное предположение, неверную гипотезу, что важно для развития интуиции.

Большую опасность представляет перегрузка студентов первого курса, которые не в состоянии усвоить за короткий срок огромное количество новых для них фактов, увидеть связь между ними, понять доказательства и принцип их построения. Кроме того, они не умеют организовать свою работу, рационально распределить свое время, так как привыкли в школе, что учитель направляет каждый их шаг, родители следят за работой.

Первокурсники крайне нуждаются в помощи со стороны преподавателя как в организации самостоятельной работы, так и в консультационной помощи. Кстати, в этом могут помочь студенты старших курсов. На наш взгляд, каждая группа первого курса должна иметь куратора, который понимает всю важность своей работы, добросовестно к ней относится, постоянно находится в контакте со студентами и готов оказать необходимую им помощь. В этом качестве могут выступать как преподаватель, так и хороший студент старшего курса. Следует отметить, что несколько лет назад вопрос о проведении дополнительных консультаций для студентов первого курса обсуждался на математическом факультете, в частности, на кафедре общей математики. Ряд преподавателей выразили готовность безвозмездно провести консультации по отдельным дисциплинам, но эта идея так и не была реализована. Без постоянной, системной поддержки первокурсник опускает руки, перестает понимать лектора, а тот, выражаясь спортивным языком, "уходит в отрыв" . Студент только механически записывает лекцию, не вникая при этом в суть дела.

Отметим еще один негативный фактор, влияющий на первокурсника. Школьник, имевший по математике в школе хорошие и отличные оценки, возможно, завышенные, получает на первых же контрольных работах и коллоквиумах, а потом и на первой экзаменационной сессии неудовлетворительные оценки, что лишает его веры в собственные силы. Следует сказать, что первые контрольные работы, коллоквиумы и экзамены очень важны, требуют тщательного анализа и подробного разбора со студентами. Их задача состоит не в том, чтобы ошеломить студента, а скорее озадачить его и помочь ему сделать правильные выводы, а главное, не опускать руки и работать, засучив рукава. Преподавателю эти контрольные мероприятия дают серьезную информацию к размышлению. Возможно, он неудачно что-то преподнес, не раскрыл тему, не отработал материал на практических занятиях. Очень важную роль играет контакт лектора и ассистента, отсутствие тесного контакта крайне отрицательно сказывается на эффективности учебного процесса.

Проиллюстрируем сказанное выше конкретными примерами, взятыми из опыта преподавания математического анализа. Известно, насколько важную роль в математике играют понятия и определения. В математическом анализе их довольно много: число, функция, бесконечно малая величина, предел числовой последовательности и функции, интеграл и др. Понятие — это высший уровень обобщения, характерный для словесно-логической формы мышления. Проиллюстрируем на примере предела функции в точке работу по формированию предпонятия.

Опираясь на имеющиеся у студентов представления о свойствах элементарных функций, преподаватель вместе со студентами рассматривает поведение конкретных функций:

1) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$;

2) $\phi(x) = 2^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$;

3) $\psi(x) = 2^{-\frac{1}{(x-1)^3}}$;

4) $\tau(x) = sin\frac{1}{x-1}$;

5) $\sigma(x) = (x-1)^2$

при стремлении значений аргумента x к 1.

Обращается внимание студентов на тот факт, что значения функций $\phi(x)$ и $\sigma(x)$ становятся при этом сколь угодно близкими к нулю. Функция $f(x)$ при стремлении x к 1 справа равна 1, а при стремлении к 1 слева равна -1. Функция $\psi(x)$ при стремлении x к 1 справа стремится к 0, а при стремлении к 1 слева принимает сколь угодно большие значения. Что касается функции $\tau(x)$, то она принимает всевозможные значения из отрезка [-1; 1] в любой, сколь угодно малой окрестности 1.

После проведенного анализа выделяются функции $\phi(x)$ и $\sigma(x)$, которые обладают общим свойством, а именно, при приближении x к 1 их значения становятся сколь угодно близкими к нулю (при этом следует отметить, что функция $\phi(x)$ в самой точке $x = 1$ не определена). А для функций $f(x)$, $\psi(x)$ и $\tau(x)$ нельзя указать никакого числа, к которому приближались бы их значения при стремлении x к 1. После такой пропедевтической работы лектор дает определение предела функции в точке по Коши и Гейне, доказывает их эквивалентность. Последнее очень важно, студент должен видеть, что два различных определения описывают одно и то же понятие, характеризующее множество функций, обладающих определенным свойством. Данные определения применяются к рассмотренным функциям, иллюстрируются геометрически. Рассказывается, как по произвольно взятому положительному числу ε найти соответствующее ему положительное число δ. Используя определение Гейне, доказывается отсутствие предела функции $\tau(x)$ в точке $x = 1$.

Особое внимание обращается на то обстоятельство, что нас не интересует, определена ли функция в точке $x = a$ или нет, а если определена, то ее значение в этой точке никакой роли не играет. Такой подход к введению нового понятия можно назвать индуктивным.

К некоторым понятиям: производная, интеграл — можно прийти от конкретных геометрических и физических задач. Так, перед введением понятия производной можно рассмотреть задачу о нахождении касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ и задачу о мгновенной скорости движения материальной точки, если известна зависимость расстояния от времени $S = S(t)$. Обе задачи приводят к одной и той же математической модели, а именно, к нахождению предела $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ или $\lim_{t\to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$, первый из которых равен угловому коэффициенту касательной, а второй — мгновенной скорости в точке t_0. Имеет смысл привести еще ряд задач, приводящих к этой математической операции (мгновенная скорость электрического тока, точечная плотность стержня, скорость радиоактивного распада и т. п.). После чего, абстрагируясь от конкретных задач, можно дать определение производной в точке $x_0 : f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

К понятию интеграла можно подойти от задач о вычислении площади криволинейной трапеции и пути, пройденном материальной точкой при известной мгновенной скорости.

На наш взгляд, описанный подход предпочтительнее формального определения этих понятий, он раскрывает их суть и более удобен для дальнейшего их использования и применения к решению задач.

Несколько слов о доказательстве теорем. Остановимся на трех из них — теоремах Ферма, Ролля, Лагранжа. Они очень хорошо иллюстрируются геометрически, что можно сделать перед приведением доказательства, во время или после него (а кто-то и вовсе этого не делает). Не будем приводить известную формулировку теоремы Ферма. Ее геометрический смысл таков: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, где x_0 — точка экстремума, параллельна оси абсцисс. Здесь же уместно подчеркнуть, что если $f'(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 экстремума быть не может, функция в этой точке либо возрастает, либо убывает. Но обязательно следует показать на примере, что обращение в нуль производной в точке не свидетельствует о наличии экстремума в ней, а также обратить внимание на то, что экстремум может быть в точке, где производной не существует.

В теореме Ролля в силу ее условий функция может быть постоянной на всем отрезке, и тогда заключение теоремы очевидно. В противном случае внутри отрезка окажется точка экстремума функции и по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю. Все демонстрируется на "картинках". После этого приводится строгое доказательство, опирающееся на теоремы Вейерштрасса и Ферма.

Теорема Лагранжа имеет понятный геометрический смысл, и его надо пояснить студентам, но предупредить, что это не является доказательством. Если для ее доказательства вводится вспомогательная функция $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, то можно объяснить ее геометрический смысл, затем проверить для нее выполнение условий теоремы Ролля и прийти к заключению.

Студенты часто затрудняются в ответе на вопрос, являются ли условия теоремы достаточными для истинности ее заключения или необходимыми (или теми и другими одновременно). Выше при обсуждении теоремы Ферма фактически было доказано, что обращение в нуль производной в точке является лишь необходимым условием экстремума. С логической точки зрения интересна теорема Ролля. Выполнение всех трех ее условий для функции $f(x)$:

1) $f(a) = f(b)$,

2) непрерывность функции на отрезке $[a; b]$,

3) дифференцируемость функции на интервале $(a; b)$

— обеспечивают наличие в интервале $(a; b)$ точки c такой, что $f'(c) = 0$. Возникает естественный вопрос: может ли заключение теоремы быть верным для функции, если какое-либо из трех условий не выполнено. Легко привести примеры, показывающие, что это возможно при нарушении одного, двух и даже всех трех условий теоремы. Это не потребует много времени, а пользу принесет, покажет роль контрпримеров.

Нередко студент принимает необходимые условия за достаточные и наоборот. Приведем несколько примеров ошибочных суждений такого рода.

1) Так как $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Знакопеременный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ расходится, так как не выполнено условие признака Лейбница о монотонном убывании последовательности, состоящей из абсолютных величин членов этого ряда. Данный ряд, конечно, расходится, но это требует доказательства. Можно построить еще один пример:

$$1-2+\frac{1}{4}-1+\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+\dots .$$

Этот ряд сходится, однако монотонное убывание последовательности из абсолютных величин членов ряда не имеет места.

3) Функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке (x_0,y_0), так как ее частные производные в этой точке не являются непрерывными.

4) $f''_{xy}(x_0,y_0) \neq f''_{yx}(x_0,y_0)$, так как производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ не являются непрерывными в точке (x_0,y_0).

5) На вопрос: дифференцируема ли в точке $x=0$ функция $|x||\sin x|$, студент зачастую дает отрицательный ответ.

Список таких ошибочных суждений можно продолжить.

Преподаватель на примерах должен показать, что эти утверждения ошибочны.

Что же требуется от преподавателя и особенно преподавателя, работающего на первом курсе? Во-первых, он не должен быть равнодушным к студентам, должен иметь желание их научить. Во-вторых, он должен знать дисциплину, которую излагает, и как решается педагогическая задача по её преподованию. В-третьих, он не должен торговать совестью и затушевывать в своих интересах или в интересах начальства слабые знания студентов, ставить положительные оценки, когда их ставить нельзя. Читающий эти строки может спросить, а много ли здесь нового, того, что другие не знают. Конечно, тот, кто интересовался вопросами преподавания и пытался овладеть методикой преподавания (а она — скорее искусство, чем наука), тот знаком со многими высказаными мыслями. Многое было сказано А. Я. Хинчиным, Л. Д. Кудрявцевым, Г. Фройденталем и др., но беда в том, что, зная это, мы не делаем этого.

И еще одно. Математика — это язык. Очень важно научить студента грамотной математической речи, языку, четкому изложению мысли, как устному, так и письменному. Это надо делать повседневно на занятиях, коллоквиумах, экзаменах, во время работы над курсовыми и выпускными работами, не прощать небрежной записи, невразумительного высказывания. Такая работа дает результат, вырабатывает математическую культуру, приводит в порядок мысли.

Список литературы

[1] *Хинчин А. Я.* Восемь лекций по математическому анализу. М.-Л.: Огиз, 1948. 260 с.

[2] *Кудрявцев Л. Д.* Современная математика и её преподавание. М.: Наука, 1980. 144 с.

[3] *Фройденталь Г.* Математика как педогагическая задача. Т. 1, 2. М.: Просвещение, 1983.

[4] *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. 251 с.

К одному вопросу теории булевых функций

Н. Б. Чаплыгина

Основная теорема теории булевых функций, теорема Поста, основывается на определении пяти предполных классов булевых функций: сохраняющих нуль, сохраняющих единицу, монотонных, линейных и самодвойственных. Указанные классы являются неполными и замкнутыми. О понятии замыкания и идет речь.

В литературе можно встретить различные определения замыкания, которые разбиваются на два класса. Определения каждого класса эквивалентны между собой, но между определениями разных классов нет эквивалентности, хотя, как мы покажем в дальнейшем, нет и принципиальных разногласий. Вот некоторые из определений.

Определение 1.

Суперпозицией функций $f_1, ..., f_m$ называется функция f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименованием переменных [6, с. 54]. Множество логических функций называется замкнутым классом, если любая суперпозиция функций из M снова принадлежит M [6, с. 73].

Определение 2 [8, с. 26].

Пусть m — некоторое подмножество функций из P_2. Замыканием m называется множество всех булевых функций, представимых в виде формул через функции множества m. Замыкание множества m обозначается $[m]$. Класс (множество) m называется (функционально) замкнутым, если $[m] = m$.

Для полноты данного определения необходимо понятие формулы, которое приводится в [8] в индуктивной форме.

Определение формулы [8].

Пусть $U = \{u_1, ..., u_m, ...\}$ — исходный алфавит переменных. Пусть B некоторое подмножество функций из P_2.

а) Базис индукции. Каждая функция $f(x_1, ..., x_m)$ из B называется формулой над B.

б) Индуктивный переход. Пусть $f(x_1, ..., x_m)$ функция из B и $A_1, ..., A_m$ — выражения, являющиеся либо формулами над B, либо символами переменных из U. Тогда выражение $f(A_1, ..., A_m)$ называется формулой над B.

Представленные два определения эквивалентны между собой, поскольку функция, представимая в виде формул через функции исходного множества m, называется суперпозицией функций исходного множества. Таким образом, обе формулировки определяют одно и то же свойство замкнутости, хотя и являются различными по форме. Аналогичное определение замкнутости можно найти и у других авторов, например, в [2]. Согласно этим определениям примерами замкнутых систем булевых функций могут быть следующие:

а) $\{0, 1\}$.

б) $\{x, 0, 1\}$.

В [4] приводится определение замыкания, не эквивалентное определениям 1 – 2.

Приводимое ниже определение 3 носит более строгий формальный характер, в нем используется понятие терма над множеством булевых функций. Поэтому прежде дается определение терма [4, с. 11].

Пусть Г — произвольная система булевых функций. Каждой n-местной булевой функции f из Г сопоставим n-местный функциональный символ $\tilde{f}$, который будем называть именем функции f.

Индуктивно определим понятие терма над множеством функций Г. Предварительно зафиксируем счетное множество переменных $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Определение терма над множеством функций.

1) Каждая переменная является термом над множеством функций Г.

2) Если f — n-местная булева функция из Г , а $t_1, ..., t_n$ — термы над множеством функций Г, то $\tilde{f}(t_1, ..., t_n)$ — терм над множеством функций Г.

3) Выражение является термом над множеством функций Г тогда и только тогда, когда это следует из пунктов 1) и 2).

Определение 3 (замкнутости системы булевых функций) [4, с. 14].

Для произвольного множества Г булевых функций через [Г] обозначается множество всех булевых функций, представимых термами над множеством Г. Множество [Г] называется замыканием множества булевых функций Г. Если [Г] = Г, то множество булевых функций Г называется замкнутым.

Рассмотрим системы из приведенных выше примеров а) и б) на предмет замкнутости по третьему определению. Система пункта а) не является замкнутой, так как она не содержит никакого терма переменной (каждая переменная является термом над исходным множеством) из зафиксированного предварительно счетного множества переменных, и в то же время функция, представленная таким термом, является элементом замыкания исходного множества. В этом случае нет равенства между исходным множеством и его замыканием. Следовательно, система а) не замкнута. Систему пункта б) определение 3 будет считать замкнутой. Мы видим различие в определении понятия замкнутости. Оно состоит в том, что в замыкание любой системы по определению 3 заведомо попадает функция, представленная термом x, что не следует из первого определения. Добавление функции в замыкание любой системы можно объяснить тем, что при составлении схем из функциональных элементов для получения функции не нужны никакие функциональные элементы, а необходим лишь вход x.

Отметим, что система, замкнутая по определению 3, будет являться замкнутой и по первым двум определениям, так как все суперпозиции функций этой системы принадлежат ей же. Оказывается, что в случае, когда речь идет о системе, имеющей функции с существенными переменными, утверждение верно и в обратную сторону. Различие в определениях проявляется лишь для системы примера а) и всех ее подмножеств: в этих системах не представлены функции с существенными переменными.

Если m — система булевых функций, то будем обозначать через $[m]_2$ замыкание системы m в смысле определения 2, а $[m]_3$ — замыкание системы m в смысле определения 3.

Докажем следующее *утверждение.*

Если система m булевых функций имеет функцию с существенными переменными и замкнута в смысле определения 2, то она замкнута и в смысле определения 3.

Доказательство.

Пусть система булевых функций m замкнута в смысле определения 2, т. е. $m = [m]_2$, и, кроме того, в ней есть функция с существенными переменными. Определение 3 добавляет в замыкание функцию $g(x) =$

$= x$, т. е. $[m]_3 = [m]_2 \bigcup \{x\}$. Докажем равенство $[m]_2 = [m]_3$. Для доказательства достаточно показать, что $x \in [m]_2$.

Возьмем некоторую функцию $f(x, t_2, ..., t_m)$ исходной системы, существенно зависящую от переменной x. Покажем, что функцию $g(x) = x$ можно получить путем конечного числа операций суперпозиции функции $f(x, t_2, ..., t_n)$ с собой. Рассмотрим функцию $f_1(x)$ из замыкания $[m]_2$, определенную с помощью операции отождествления переменных: $f_1(x) = f(x, ..., x)$. Если $f_1(x) = x$ или $f_1(x) = \overline{x}$, то желаемое достигнуто, так как суперпозиция $\overline{x}$ с собой представляет x. В противном случае эта функция $f_1(x) = const$, где константа $const$ равна 0 или 1. Так как $f(x, t_2, ..., t_n)$ существенно зависит от переменной x, то существует набор значений $a_2, a_3, ..., a_n$ таких, что

$$f(0, a_2, a_3, ..., a_n) \neq f(1, a_2, a_3, ..., a_n). \tag{1}$$

Построим суперпозицию функций f и f_1, подставив $f_1(x)$ на место таких переменных t_i, для которых $a_i = const$. Если все $a_i = const$, то в силу (1) получим функцию одной переменной x или $\overline{x}$. В противном случае, если не для всех переменных t_i выполнено равенство $a_i = const$, переименуем таковые в y и оставим обозначение для переменной x. Получим функцию двух переменных $f_2(x, y)$, значения которой

$$f_2(0, a) \neq f_2(1, a), \tag{2}$$

где a равно либо 0, либо 1, а точнее $a = \overline{f}_1(x)$. Если $f_2(0, 0) \neq f_2(1, 1)$, то $f_2(x,)$ представляет функцию x или $\overline{x}$, и желаемое достигнуто. В противном случае

$$f_2(0, 0) = f_2(1, 1). \tag{3}$$

Учитывая (2) и (3), делаем вывод, что $f_2(x, y)$ имеет столбцом значений один из четырех вариантов:

$$(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1). \tag{4}$$

Эти функции можно представить формулами $x\&\overline{y}, \overline{x}\&y, \overline{x}Vy, yV\overline{x}$ соответственно. Вспомним, что мы располагаем функцией $f_1(x)$, равной константе $const$. Из каждого представленного варианта (4) функции $f_2(x, y)$ суперпозицией с любой константой можно получить функцию x или $\overline{x}$, что и требовалось доказать.

Рассмотренное разногласие в определениях влияет лишь на системы, состоящие из констант, или пустые. Понятие замкнутости требуется для определения полноты систем и самостоятельно не играет большой роли. Для исследования свойства полноты системы, состоящие из констант, или пустые, не имеют никакого значения, а на предмет замкнутости исследуются определенные пять систем, называемых классами, в кото рых присутствуют функции с существенными переменными. Более того, можно и не вводить понятия замкнутости для определения полноты. Так, в [3, с. 56] дается определение полноты системы с привлечением лишь понятия суперпозиции функций.

Список литературы

[1] *Воронин В. П. (сост. Поспелов А. Д.)* . Дополнительные главы дискретной математики. / Воронин В. П. // Курс лекций. МГУ, ф-т ВМК, каф мат. кибер. М., 2002.

[2] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. М.: Физматлит, 2005.

[3] *Горбатов В. А.* Основы дискретной математики. М.: Высшая школа, 1986.

[4] *Дурнев В. Г., Башкин М. А., Якимова О. П.* Элементы дискретной математики. Ч. 1. Ярославль: ЯрГУ, 2007.

[5] *Ерусалимский Я. М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е изд. М.: Вузовская книга, 2000.

[6] *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988. .

[7] *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2001.

[8] *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 2003.

Теорема Ламе в курсе алгебраической алгоритмики

С. И. Яблокова

Обсуждаются некоторые особенности изложения вопроса оценки сложности алгоритма Евклида вычисления наибольшего общего делителя двух целых чисел в курсе "Алгебраическая алгоритмика".

Курс "Алгебраическая алгоритмика" для студентов специальности "Компьютерная безопасность" начинается во втором семестре. Этот курс является продолжением и расширением курса алгебры, включая в себя многие вопросы, связанные с алгебраическими проблемами и методами их решения. Рассматриваемые в этом курсе подходы к эффективному решению алгебраических задач, получение алгоритмов решения таких задач приводят к более глубокому изучению алгебры и ее практических приложений.

В этом курсе не только происходит углубление знаний по алгебре, но обсуждаются также вопросы эффективности вычислительных алгоритмов, т. е. их сложности с точки зрения объема требуемых вычислений. Развитие компьютерной техники, требования практики поставили новые задачи в области вычислительной математики. Сейчас требуются специальные методы (алгоритмы), позволяющие проводить вычисления более эффективно. Оценка такой эффективности — математическая и, по большей части, алгебраическая задача. Но начинать изучать сложность тех или иных вычислительных алгоритмов первокурснику, конечно, надо с более-менее известных ему методов вычисления. К таким методам относится знаменитый алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя целых чисел.

Оценка сложности этого алгоритма обсуждается на одной из первых лекций курса. Студентам предлагается освоить доказательство известной теоремы Ламе. Если бы эта теорема излагалась студентам, скажем, третьего курса, то не возникало бы особых трудностей при изложении того изящного ее доказательства, которое предложено в [2]. Однако студенты первого курса еще не владеют элементарной математической культурой и не знакомы с некоторыми математическими понятиями, которые требуется привлечь для строгого доказательсва этой теоремы.

При выборе доказательства теоремы Ламе сравнивались два возможных варианта рассуждений. Один изложен в [1], другой — в [2].

Оба доказательства используют свойства ряда чисел Фибоначчи. В [1] доказательство основано на том, что количество чисел в последовательности Фибоначчи, имеющих одинаковое число цифр, не меньше четырех и не больше пяти, и на рассуждении о том, в какие интервалы между числами Фибоначчи попадают остатки от последовательных делений в алгоритме Евклида. Это доказательство не требует особых дополнительных знаний, но несколько скучновато и не дает обучаемым ни новой техники, ни новых понятий. Во втором источнике, напротив, при получении результата используются неизвестные еще первокурснику понятия и новые методы исследования. Кроме того, эта книга написана сложным, почти недоступным студенту первого курса математическим языком. Но сам способ доказательства не только более красив и изящен с точки зрения математики, но и позволяет получить новые знания, умения и навыки, т. е. более полезен с точки зрения обучения. Поэтому для доказательства теоремы Ламе был выбран именно этот второй вариант.

При этом пришлось саму теорему доказывать постепенно, небольшими шагами приближаясь к цели. Эти последовательные шаги изложены в [3] и формулируются в виде лемм. Здесь мы рассмотрим схему изложения доказательства теоремы Ламе.

Даже с числовым рядом Фибоначчи не все студенты-первокурсники знакомы, поэтому сначала дается определение ряда Фибоначчи. В первой лемме речь идет об оценке величины целых чисел a и b в случае, когда нахождение их наибольшего общего делителя требует определенного числа шагов алгоритма Евклида. Эти оценки получаются с помощью чисел Фибоначчи.

Лемма 1. *Если для вычисления наибольшего общего делителя чисел a и b $(a > b > 0)$ алгоритм Евклида требует n итераций, то*

$$a \geq f_{n+2}, \qquad b \geq f_{n+1},$$

где f_{n+2}, f_{n+1} — соответственно $(n+2)$-й и $(n+1)$-й члены ряда Фибоначчи.

Если при этом $a = f_{n+2}$, $b = f_{n+1}$, то алгоритм Евклида требует ровно n итераций, причем НОД$(a\,,\,b) = 1$.

Второй шаг доказательства состоит в получении оценок на число шагов алгоритма Евклида при нахождении наибольшего общего делителя чисел a и b, зависящих от величины этих чисел. Но в ходе получения этих оценок требуется использовать формулу Бинэ для ряда Фибоначчи, поэтому перед началом второго шага необходимо ее получить. Формула Бинэ выводится с использованием свойств пространства решений бесконечной однородной системы уравнений. И здесь возникает определенная трудность. Курс линейной алгебры начинается с третьего семестра, слушатели еще только завершили первый семестр. Понятие линейно зависимой системы векторов, конечно, им известно и из курса алгебры, и из курса геометрии, но с понятием линейного пространства и тем более с понятием пространства решений бесконечной системы однородных линейных уравнений обучаемые не знакомы. Поэтому сначала вводится определение решения бесконечной системы уравнений и аккуратно доказывается, что операции сложения решений и умножения их на вещественные числа замкнуты в множестве решений. Эти доказательства очень просты и не вызывают затруднений у слушателей.

Далее формулируется утверждение о том, что если найдены два непропорциональных решения системы

$$f_k = f_{k-2} + f_{k-1} \qquad (k > 2), \tag{1}$$

то любое ее решение является линейной комбинацией таких двух решений.

В ходе доказательства этого утверждения сначала изучается понятие непропорциональных решений, т. е. доказывается, что эта непропорциональность должна обнаруживаться уже для первых членов этих решений. Далее обсуждается вопрос, как получить любое решение системы (1), зная два ее непропорциональных решения. Решения системы (1) ищутся среди геометрических прогрессий, и в результате получается формула Бинэ для чисел ряда Фибоначчи:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \qquad n \geq 1.$$

На основании этой формулы теперь совсем просто доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *В предположении, что алгоритм Евклида отыскания НОД$(a\,,\,b)$ $(a > b > 0)$ требует n итераций, справедливы неравенства*

$$n + 2 < \frac{log_{10}\sqrt{5}(a+1)}{log_{10}\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad и \quad n + 1 < \frac{log_{10}\sqrt{5}(b+1)}{log_{10}\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Теперь можно оценить целую часть выражения, стоящего в правой части второго из полученных неравенств.

Лемма 3. *Если p – число десятичных цифр положительного целого числа b, то*

$$\left\lfloor \frac{log_{10}\sqrt{5}(b+1)}{log_{10}\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\rfloor \leq 5p + 1.$$

Из лемм 2 и 3 теперь легко следует основной результат.

Теорема Ламе. *Число итераций, необходимых для вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел a и b таких, что $a > b > 0$, мажорируется пятикратным числом десятичных знаков наименьшего из этих двух чисел. То есть если n — число итераций, то*

$$n \leq 5(\lfloor log_{10} b \rfloor + 1).$$

Кроме теоремы Ламе слушатели знакомятся еще с одной оценкой наихудшего случая для алгоритма Евклида (Абрамов, 1979).

Теорема. *Пусть a и b — целые положительные числа и $M = max(a,b)$. Количество делений, которое нужно выполнить для нахождения наибольшего общего делителя a и b, не превосходит $\lfloor 2log_2 M \rfloor + 1$.*

Это утверждение в отличие от теоремы Ламе доказывается очень просто и основано на лемме, доказательство которой многие студенты первого курса уже способны провести самостоятельно.

Лемма. *Если $a \geq b \geq 1$, то остаток от деления a на b не больше, чем $\dfrac{a-1}{2}$.*

После получения этих двух оценок на число делений в алгоритме Евклида возникает естественный вопрос, какая из них лучше, т. е. является более точной. Обычно в ходе лекции рассматриваются конкретные примеры, из которых видно, что для разных пар чисел a и b близкими к реальному числу делений могут служить разные оценки.

На следующей лекции рассматриваются примеры нахождения наибольшего общего делителя двух целых (уже не обязательно положительных) чисел с использованием различных правил деления:

1) обычное евклидово деление:

$$a = bq + r, \qquad \text{где} \quad 0 \leq r < |b|;$$

2) деление, когда знак остатка совпадает со знаком делителя на каждом шаге:

$$a = bq + r, \qquad \text{где} \quad 0 \leq |r| < |b|, \ sign\ r = sign\ b;$$

3) деление, когда знак остатка совпадает со знаком делимого на каждом шаге:

$$a = bq + r, \qquad \text{где} \quad 0 \leq |r| < |b|, \ sign\ r = sign\ a;$$

4) центрированное деление, когда остаток выбирается так, чтобы его модуль был наименьшим возможным.

Из расмотрения конкретных примеров, да и из интуитивных соображений очевидно, что последний метод деления наиболее быстро приводит к получению результата. Поэтому возникает естественный вопрос, насколько быстро можно найти наибольший общий делитель двух целых чисел алгоритмом Евклида, использующим такое деление.

При изучении этого вопроса происходит закрепление новых понятий и техники, полученных в ходе доказательства теоремы Ламе. Для этого вводится аккуратное определение центрированного деления целых чисел, определенное равенством

$$a = bq + r, \qquad \text{где} \quad |r| \leq \frac{|b|}{2},$$

и ставится задача оценить сложность алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя чисел a и b, использующего центрированное деление. Эта задача решается по той же схеме, по которой шло доказательство теоремы Ламе. Сначала вводится бесконечная последовательность чисел $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, элементы которой подобно числам Фибоначчи получаются по рекуррентной формуле из первых двух членов последовательности:

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 1, \quad g_{i+2} = 2g_{i+1} + g_i \quad (i \geq 0).$$

Эта последовательность играет ту же роль при оценке сложности алгоритма Евклида, использующего центрированное деление, какую последовательность Фибоначчи играла в доказательстве теоремы Ламе. Затем доказывается предварительный результат, аналогичный второму утверждению леммы 1.

Лемма $1'$. *Пусть $a > b > 0$ — целые числа, причем $a = g_n + g_{n-1}$, $b = g_n$ $(n \geq 1)$. Тогда алгоритм Евклида вычисления наибольшего общего делителя чисел a и b требует ровно n центрированных делений, причем НОД$(a\,,\,b) = 1$.*

Следующий шаг — вывести аналог формулы Бинэ для новой последовательности. Эту задачу лектор зачастую поручает выполнить самим студентам, среди которых всегда находятся несколько человек, способных провести рассуждения и получить требуемый результат.

Лемма $2'$.

$$g_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}, \qquad n \geq 1.$$

Далее доказывается аналог леммы 1.

Лемма $3'$. *Пусть $a > b > 0$ — целые числа. Если алгоритм Евклида вычисления наибольшего общего делителя чисел a и b с использованием центрированного деления требует n делений, то*

$$b \geq g_n, \qquad a \geq g_n + g_{n-1}.$$

Доказательство этого утверждения немного сложнее, чем соответствующее доказательство леммы 1, оно использует свойства центрированного деления.

Затем доказывается аналог леммы 2.

Лемма $4'$**.** *Если алгоритм Евклида вычисления наибольшего общего делителя целых чисел* a *и* b $(a > b > 0)$, *использующий центрированное деление, требует* n *делений, то*

$$n < log_{1+\sqrt{2}}(b+1)2\sqrt{2}.$$

Из последних двух утверждений теперь нетрудно вывести следующую теорему.

Теорема. *Число центрированных делений для вычисления наибольшего общего делителя двух целых чисел* a *и* b $(a > b > 0$ *не превосходит утроенного числа десятичных цифр наименьшего из них.*

Список литературы

[1] *Акритас А.* Основы компьютерной алгебры с приложениями. М.: Мир, 1994.

[2] *Ноден П., Китте К.* Алгебраическая алгоритмика. М.: Мир, 1999.

[3] *Яблокова С. И.* Основы алгебраической алгоритмики. Ч. 1. Ярославль: ЯрГУ, 2008.

Некоторые аспекты преподавания спецкурса "Алгоритмы на графах"

О. П. Якимова

Рассматриваются методические и содержательные аспекты изучения алгоритмов решения NP-полных задач на примере задачи о поиске наибольшего независимого множества.

Библиография: 2 названия.

Теория графов — важнейший математический инструмент, широко используемый в химии, генетике, исследовании операций, лингвистике, проектировании. Непосредственное и детальное представление практических систем, таких, как распределительные сети и системы связи, приводит к графам большого размера, успешный анализ которых зависит от существования "хороших" алгоритмов. Поэтому в рамках курса уделяется большое внимание разработке и описанию эффективных алгоритмов, решающих практические задачи. Работа по этой проблематике значительно обогащает алгоритмическую культуру студентов, совершенствует технику написания программ, так как алгоритмы являются неиссякаемым источником задач любого уровня сложности.

Учебный план для студентов третьего курса специальности "Компьютерная безопасность" предусматривает 51 ч. занятий. Семестровый курс заканчивается зачетом. В связи с обширностью предмета перед преподавателем встает нетривиальная задача об отборе наиболее важных тем и наилучшей организации подачи материала.

В настоящем докладе я хочу рассмотреть вопросы, связанные с методикой рассмотрения алгоритмов решения NP-полных задач на примере задачи о поиске наибольшего независимого множества.

По моему опыту следующая схема раскрытия этой темы позволяет достичь наилучших результатов (под результатами здесь понимается усвоение студентами материала, причем активное усвоение).

1. *Постановка задачи.* Её излагает преподаватель. Здесь возможно обращение к прошлому опыту студентов. С многими задачами они уже встречались при изучении других предметов. Так, понятие независимого множества вводится в курсе дискретной математики. Обязательной,

с моей точки зрения, является практическая привязка задачи. Приведу подобную привязку для задачи о поиске наибольшего независимого множества [1].

Имеется n проектов, которые должны быть выполнены, и допустим, что для выполнения проекта x_i требуется некоторое подмножество R_i наличных ресурсов из множества $\{1, \ldots, p\}$. Далее предположим, что каждый проект, задаваемый совокупностью средств, необходимых для его реализации, может быть выполнен за один и тот же промежуток времени. Построим граф G, каждая вершина которого соответствует некоторому проекту, а ребро (x_i, x_j) — наличию общих средств обеспечения у проектов x_i и x_j, т.е. условию $R_i \bigcap R_j \neq \emptyset$. Наибольшее независимое множество графа G представляет тогда максимальное множество проектов, которое можно выполнить одновременно за один и тот же промежуток времени.

В динамической системе происходит постоянное обновление проектов через определенный промежуток времени, так что каждый раз нужно заново повторять процедуру построения наибольшего независимого множества в соответствующем графе G. В практических ситуациях бывает весьма не просто выполнить множество проектов, соответствующих максимальному независимому множеству на данном отрезке времени, поскольку исполнение некоторых проектов может быть по каким-то причинам отложено. Тогда лучший способ действия состоит в присвоении каждому проекту (вершине) x_i некоторого штрафа p_i, который увеличивается с ростом времени отсрочки в исполнении проекта, и в каждый расчетный момент времени надо выбирать из семейства максимальных независимых множеств такое множество, которое максимизирует некоторую функцию штрафов на вершинах, содержащихся в выбранном множестве.

2. *Поиск решения в малых группах.* Преподаватель предлагает студентам самим разработать алгоритм решения данной задачи и просит аудиторию обсудить возможные подходы к проектированию алгоритма. Фактически обсуждаются пути сокращения перебора вариантов. Понятно, что обсуждение должно быть кратким и продуктивным, здесь преподаватель выполняет роль дирижера дискуссии.

Затем студенты произвольно делятся на малые группы в 4-5 человек. Так как на специальность "Компьютерная безопасность" набирается 20 студентов, то получается 4-5 малых групп. Каждая из них за отведенное время (около получаса) должна разработать свой вариант алгоритма. Очевидно, что учесть все нюансы, сделать реально работающий продукт за этот промежуток времени невозможно. Необходимо продумать саму идею алгоритма, подобрать подходящие структуры для хранения данных. По истечении указанного промежутка времени, каждая подгруппа должна представить вниманию аудитории свой труд.

Работа в малых группах стимулирует активность подавляющего большинства студентов. Здесь проявляется еще и соревновательный момент. Кроме того, вопросы более слабых студентов помогают лидерам групп выявить узкие места их решения.

3. *Подведение итогов.* По истечении оговоренного времени преподаватель предлагает вынести каждой малой группе свой вариант решения на общее обсуждение. Но предварительно аудитория готовит примеры для тестирования: какие графы могут выявить узкие места различных вариантов решения задачи. Тесты выписываются на доске. При необходимости преподаватель сам добавляет графы для тестов.

Каждая подгруппа получает время для доклада своего алгоритма. Пока кто-то один докладывает, его подгруппа проверяет свое решение на тестовых примерах. После доклада поступают вопросы от остальной части аудитории. И отчет подгруппы по тестовым примерам. Далее выступает следующая подгруппа. После выступлений всех подгрупп преподаватель подводит итоги, выделяет лучший подход, самое удачное хранение данных и в качестве домашнего задания — реализацию какой-то части алгоритма.

4. *Изучение оценочных алгоритмов.* На следующем занятии продолжается рассмотрение данной темы и преподаватель рассказывает об одном из алгоритмов апроксимации. Хорошо известно, что для NP-полных задач существуют графы, на которых известные переборные алгоритмы, дающие точный результат, работают очень медленно. С другой стороны, для практических целей подходят простые и эффективные алгоритмы, которые "почти всегда" дают точное значение.

Одним из лучших алгоритмов нахождения максимального независимого множества на сегодняшний день является алгоритм Боппана и Халлдорсона [2], использующий теорию Рамсея. На графах общего вида его трудоемкость составляет $O(n+m)$. Этот алгоритм был опубликован сравнительно недавно — в 1992 г., его описание в русскоязычной литературе не приводится. Рассказывая алгоритм Боппана и Халлдорсона, преподаватель имеет возможность познакомить студентов с очень интересной теорией Рамсея, что обогащает их математическую культуру. Кратко изложим суть алгоритма.

Введем обозначения: $I(G)$ — максимальное независимое множество, $C(G)$ — максимальная клика. Под $N(v)$, где $v \in G$, будем понимать подграф графа G, состоящий из всех вершин и ребер, инцидентных вершине v. Аналогично, под $\overline{N(v)}$, где $v \in G$, будем понимать подграф графа G, состоящий из всех вершин и ребер, не инцидентных вершине v.

Для нахождения максимального независимого множества используется рекурсивный метод, который состоит в следующем: выберем вершину v и занесем её в независимое множество. Построим подграф $\overline{N(v)}$

(из этого подграфа будут выбираться следующие вершины в независимое множество). Вершину v будем выбирать с наименьшей степенью, так как в этом случае окрестность подобной вершины может содержать более значительное независимое множество.

Величину независимого множества будем определять, как максимум из величин чисел независимости подграфов $N(v)$ и $\{v\} \cup \overline{N(v)}$. Аналогичный алгоритм работает и для максимальных клик.

$Choose\ v \in V(G).$
$I(G) \leftarrow max(\{v\} \bigcup I(\overline{N(v)}), I(N(v)))$
$C(G) \leftarrow max(\{v\} \bigcup C(N(v)), C(\overline{N(v)}))$

Таким образом, вид результирующего алгоритма будет следующим:

$Ramsey(G)$
$begin$
$if\ G = 0\ then\ return(0,0)$
$choose\ v\ \in\ V(G)$
$(C_1, I_1) \leftarrow Ramsey(\overline{N(v)})$
$(C_2, I_2) \leftarrow Ramsey(N(v))$
$return(larger\ of(C1 \cup v, C2), larger\ of(I1, I2 \cup v))$
$end.$

Далее прослеживается работа вышеизложенного алгоритма на тестовых примерах и доказывается теорема о его производительности. В качестве курсовой или творческой работы преподаватель предлагает провести сравнительный анализ "жадного" алгоритма и алгоритма апроксимации Боппана и Халлдорсона.

Работа в малых группах по созданию собственного варианта алгоритма является сильным мотивирующим элементом. И после этого аудитория, как правило, заинтересованно изучает предложенный преподавателем алгоритм апроксимации.

Подобная методика изучения алгоритмов решения NP-полных задач позволяет проявить творческие способности студентов и повышать их математическую культуру.

Список литературы

[1] *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 433 с.

[2] *Boppana Ravi B., Halldorsson Magnus M.* Approximating Maximum Independent Sets by Excluding Subgraphs // BIT. V. 32(2), 1992. Pp. 180–196.

Научное издание

Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете

Материалы 3-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Компьютерный набор авторов.
Компьютерная вёрстка М. В. Невский.

Лицензия ЛР № 020319 от 30.12.96.

Подписано в печать 19.03.2010. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,4. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 85 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе
Ярославского государственного университета.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано
ООО "Ремдер", ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
150049, Ярославль, пр. Октября, 94, офис 37
тел. (4852) 73-35-03, 58-03-48, факс 58-03-49.