Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ В КЛАССИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Материалы конференции

7-я научная конференция
(26–27 апреля 2018 г., Ярославль)

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 51:681.3(081)
ББК В1я43+З973.2я43
М34

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом ЯрГУ
в качестве научного издания. План 2018 года

М 34 **Математика и компьютерные науки в классическом университете :** материалы конференции / отв. ред. М. В. Невский ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Ярославль : ЯрГУ, 2018. — 187 с.

ISBN 978-5-8397-1141-9

Представлены материалы 7-й научной конференции «Математика и компьютерные науки в классическом университете», состоявшейся в Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова в апреле 2018 г.

Материалы печатаются в авторской редакции.

УДК 51:681.3(081)
ББК В1я43+З973.2я43

Ответственный редактор М. В. Невский
Технический редактор А. Ю. Ухалов

ISBN 978-5-8397-1141-9

Содержание

Предисловие

Сейчас, в эту самую минуту, где-то в мире какая-нибудь студентка пререкается со своим преподавателем математики, вручившим ей список из тридцати определённых интегралов, на вычисление которых уйдет немалая часть ее драгоценных выходных.

Джордан Элленберг, из книги
«Как не ошибаться. Сила математического мышления»

Любая формула, включённая в книгу, уменьшает число её покупателей вдвое.

Стивен Хокинг

Каждый сам знает, что он понимает под множеством.

Эмиль Борель

Желающие испытать себя в математике могут начать прямо с нуля, доказав его единственность.

Фольклор

Абсолютно бесспорно, что сегодня миром правит число. В Ярославском государственном университете имени П. Г. Демидова подготовка специалистов в области математики и информационных технологий осуществляется на математическом факультете и факультете информатики и вычислительной техники. Наши выпускники входят в ведущий кадровый состав многих предприятий и организаций Ярославля и всего региона, успешно работают в других регионах России и за рубежом.

Сотрудниками факультетов накоплен большой и ценный опыт в научной и педагогической областях. Этот опыт нашёл своё отражение в проведении своей «заволжской» научно-методической конференции и издании сборника её материалов. Такие конференции под названием «Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете» проводились в 2005, 2007, 2010, 2012 и 2014 годах. В 2016 году было решено расширить тематику конференции, сделав её научной, но включить в её программу доклады как научно-исследовательского, так и научно-методического характера.

В нынешнем 2018 году наша конференция, имеющая теперь название «Математика и компьютерные науки в классическом университете», проводится уже в седьмой раз. На конференции было предложено обсудить, кроме традиционных, также вопросы, связанные с математическим образованием школьников, и даже некоторые общие проблемы образования. Это расширение тематики представляется оправданным и весьма актуальным в связи с получением ЯрГУ статуса опорного вуза Ярославского региона.

Настоящий сборник содержит материалы конференции. Отбор статей и подготовка сборника к печати осуществлены ответственным и техническим редакторами. Хотя первоначальный компьютерный набор докладов в системе LaTeX был сделан самими авторами, при работе над сборником в отдельные тексты была внесена техническая правка, порой весьма значительная. Тем не менее, редакторы сборника стремились при этом сохранить все особенности авторского стиля.

М. Невский,
ответственный редактор,
заведующий кафедрой математического анализа
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

УДК 517.95

В. Е. Балабаев

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: balabaev49@mail.ru

О пространственной задаче Дирихле для эллиптических систем второго порядка

С помощью канонических эллиптических систем построены два класса эллиптических систем второго порядка, имеющих ненетерову задачу Дирихле в эллипсоиде любой размерности больше трех. При этом один из этих классов состоит из систем с четным числом уравнений, а другой — с нечетным числом.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача Дирихле.

Хорошо известно, что задача Дирихле для эллиптической системы второго порядка в ограниченной области может быть ненетеровой. Впервые пример такой эллиптической системы для случая двух уравнений второго порядка на плоскости был построен А. В. Бицадзе [1]. Для размерностей $n = 4$ и $n = 8$ подобные примеры были построены соответственно Ю. Г. Антохиным [2] и Е. И. Кузьминым [3]. Во всех этих работах существенно использовался аппарат теории аналитических функций, поэтому и размерность пространства, и число уравнений в системе были четными, а задача Дирихле рассматривалась в шаре. Следует отметить, что в полупространстве примеры эллиптических систем второго порядка с ненетеровыми задачами Дирихле были рассмотрены А. И. Янушаускасом [4].

В настоящей работе строятся два класса эллиптических систем второго порядка, имеющих ненетерову задачу Дирихле, в пространствах любой размерности больше трех. При этом один из этих классов состоит из системы с четным числом уравнений, а другой — с нечетным. Для построения данных систем используются канонические эллиптические системы первого порядка, введенные нами в [5].

Пусть $A_n(\xi)$ — характеристическая матрица канонической системы в R^n [5], а $A_n^1(\xi)$ — матрица, полученная из $A_n(\xi)$ вычеркиванием первой строки и первого столбца:

$$A_n(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & \dots \\ \xi_2 & & \\ \vdots & & A_n^1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\tilde{A}_n(\xi)$ матрицу, получающуюся из $A_n(\xi)$ заменой первого столбца первой строкой и, наоборот, первой строки — первым столбцом, т. е.

$$\tilde{A}_n(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots \\ -\xi_2 & & \\ \vdots & & A_n^1(\xi) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B_n = A_n(\xi)\tilde{A}_n(\xi)$ и рассмотрим систему

$$B_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = 0. \tag{1}$$

Система (1) эллиптична, так как $B_n(\xi)B_n^t(\xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2\right)^2 E_m$, где $m = 2^{r(n)}$, а $r(n)$ — число Радона–Гурвица [5]. Поэтому $\det(B_n(\xi)B_n^t(\xi)) = \left(\sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{2m}$ и, следовательно, $\det B_n(\xi) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^m$. Нетрудно увидеть, что $B_n(\xi)$ имеет следующую структуру:

$$B_n(\xi) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n \xi_i^2 & 0 & \dots \\ 0 & & \\ \vdots & & B_n^1(\xi) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим систему

$$B_n^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0. \tag{3}$$

Так как

$$B_n^1(\xi)(B_n^1(\xi))^t = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{2m-2} E_{m-1},$$

то

$$\det B_n^1(\xi) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{m-1}.$$

Отсюда следует, что система (3) является эллиптической системой второго порядка в пространстве R^n независимых вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Исследуем однородную задачу Дирихле для системы (3) в эллипсоиде $D = \{x \in R^n : (n-3)x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < r^2\}$ $(r > 0,\ n > 3)$:

$$u(x)|_{\partial D} = 0 \tag{4}$$

Докажем, что задача (3)–(4) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Для этого установим, что любой вектор вида

$$u(x) = (r^2 - (n-3)x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}, 0, \ldots, 0\right), \tag{5}$$

где $\varphi(x_2, x_3, x_4)$ — гармоническая функция от x_2, x_3, x_4, т. е. $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2} = 0$, не зависящая от $x_1, x_5, ..., x_n$, удовлетворяет системе (3), а также краевому условию (4). Выполнение условия (4) очевидно.

Для доказательства того, что $B_n^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\ u(x) = 0$, достаточно в силу (5) выписать три первых столбца матрицы $B_n^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Обозначим для краткости $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ через k^2, $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_1}$ через $k*1$. Например, $2(1^2+2^2)$ означает $2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$, а $2(2*3-1*4)$ означает $2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4}\right)$. В этих обозначениях три первых столбца $B_n^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2(1^2+2^2) - \sum_{k=1}^n k^2 & 2(2*3+1*4) & 2(2*4-1*3) \\ 2(2*3-1*4) & 2(1^2+3^2) - \sum_{k=1}^n k^2 & 2(3*4+1*2) \\ 2(2*4+1*3) & 2(3*4-1*2) & 2(1^2+4^2) - \sum_{k=1}^n k^2 \\ 2(5*2) & 2(5*3) & 2(5*4) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2(9*2) & 2(9*3) & 2(9*4) \\ \vdots & 2(9*1)E_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2(n*2) & 2(n*3) & 2(n*4) \\ \vdots & 2(n*1)E_3 & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где 0 — нулевая матрица, а E_3 — единичная матрица третьего порядка.

Непосредственный подсчет показывает, что вектор (5) удовлетворяет системе (3), матрица, которой имеет три первых столбца вида (6). Система (3) имеет нечетное число уравнений, равное $2^{r(n)} - 1$, и n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Если рассмотреть систему (1) и однородную задачу Дирихле (4), то эта система второго порядка имеет четное число уравнений $2^{r(n)}$ и n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. Она будет также эллиптична, так как $\det B_n(\xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^m$. Из структуры B_n (2) видно, что вектор

$$u(x) = (r^2 - (n-3)x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)\left(0, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}, 0, \ldots, 0\right) \ (n > 3), \tag{7}$$

где φ не зависит от $x_1, x_5, ..., x_n$ и удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2} = 0$, является решением задачи (1), (4). Ясно, что среди решений (5), (7) имеет бесконечно много линейно независимых.

Следовательно, задача Дирихле для системы (1) и (3) в эллипсоиде D не является нётеровой.

Ссылки

[1] *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М: Наука, 1966.

[2] *Антохин Ю. Г.* О некоторых некорректных задачах теории потенциала // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 4. С. 525-532.

[3] *Кузьмин Е. И.* О задаче Дирихле для эллиптических систем в пространстве // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 155-157.

[4] *Янушаускас А. И.* Задача о наклонной производной теории потенциала. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.

[5] *Балабаев В. Е.* Канонические эллиптические системы первого порядка // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. с.2082-2094.

УДК 378.14

Л. П. Бестужева
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lpbestlp@mail.ru

О дисциплинах математического цикла на экономическом факультете

Предлагается вариант оптимальной организации обучения математическим дисциплинам, при котором достигаются поставленные цели обучения за данное учебное время с учетом уровня подготовки студентов.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: адаптация, дифференциация требований, планирование занятий.

О проблемах отбора содержания дисциплины «Математика» в рамках ГОС 2000 года и проекта ФГОС ВПО, реализующего компетентностный подход, на экономическом факультете для специальности «Бухгалтерский учет и аудит» автор писала еще в 2010 году [1]. Прошло менее 10 лет, и обозначились новые проблемы. За это время произошел полный переход на двухуровневую систему подготовки. ФГОС ВПО перестал быть проектом, более того, возникли и продолжаются его модификации.

В настоящее время математический цикл для бакалавриата по направлениям подготовки «Экономика» и «Менеджмент» состоит из трех базовых дисциплин: «Математический анализ» (МА), «Теория вероятностей и математическая статистика» (ТВ и МС), «Линейная алгебра» (ЛА). Еще две дисциплины: «Теория игр» и «Методы оптимальных решений» относятся к вариативной части цикла. Каждая дисциплина изучается в течение одного семестра и завершается экзаменом. Переход на новые стандарты сопровождался постепенным сокращением аудиторных часов на базовые дисциплины цикла. В 2010 году на дисциплину «Математика» приходилось 142 часа лекций и 114 часов практических занятий на три семестра. В настоящее время количество лекционных часов уменьшилось на треть, а часов на практические занятия стало вдвое меньше. На практические занятия по МА отводится 2 часа в неделю, а на практические занятия по ТВ и МС и ЛА — всего 1 час в неделю.

Это обстоятельство ставит под сомнение возможность достижения студентами приемлемого уровня математических знаний. В то же время успешное усвоение базовых математических дисциплин является необходимым условием усвоения содержания дисциплин вариативной части цикла, а также обеспечивает дальнейшее обучение в магистратуре. Немаловажным является и тот факт, что знание математики необходимо при изучении других дисциплин экономического бакалавриата, таких как «Эконометрика», «Статистика», «Макро- и Микроэкономика». Кроме того, компетентностная составляющая целей подготовки состоит в формировании готовности использовать математические знания в профессиональной деятельности.

Возникли противоречия между требованиями ФГОС ВПО, целями и значением математических дисциплин в образовании и возможностью удовлетворить эти требования и достичь заявленных целей за то количество аудиторных часов, которые определены учебным планом подготовки бакалавров. В результате возникла необходимость в пересмотре практически всей системы организации обучения с целью ее оптимизации. Создание теории оптимизации процесса обучения связано с именем Ю.К. Бабанского [2]. Рассматривая процесс обучения в целом, а не отдельные его аспекты, Ю.К. Бабанский представил возможные определения оптимизации процесса обучения, сформулировал критерии оптимальности, рассмотрел значение рационального выбора форм и методов обучения для обеспечения оптимальности. Следует отметить, что эта проблема изучалась вне предметного содержания. В дальнейшем различными исследователями положения теории оптимизации учебного процесса конкретизировались для различных предметных областей в основном на уровне школьного образования. В нашем случае оптимизацию будем понимать как подход к организации учебного процесса, при котором достигаются поставленные цели обучения за данное учебное время с учетом уровня подготовки студентов.

В первую очередь была проведена ревизия предметного содержания дисциплин математического цикла так, чтобы сохранить их целостность, профессиональную направленность и профессиональную целесообразность, обеспечивающую перспективы применения полученных знаний в процессе дальнейшего образования, самообразования и профессиональной деятельности. Как следствие, усилилась роль самостоятельной работы студентов, так как значительная часть учебного материала была переведена на самостоятельное изучение. В связи с этим были пересмотрены требования к знаниям студентов. Раньше они рассматривались как уровни усвоения обязательного содержания дисциплин. В настоящее время произошло разделение учебного материала на обязательное с сохранением уровней усвоения и на продвинутое. Оценка знаний студентов стала в большей степени отражением выбора ими индивидуальной траектории изучения дисциплины. Дифференциация требований позволила интенсифицировать обучение с соблюдением оптимального темпа учебной деятельности для всех студентов. Тем самым, студенты, ориентированные на высокий уровень знаний, получили возможность реализовать свои амбиции.

В качестве примера рассмотрим организацию изучения дисциплины МА в первом семестре первого курса. Трудности этого периода обучения хорошо известны и обозначены как адаптационные. В процессе адаптации выделяют обычно два основных компонента: дидактический и социально-психологический. Дидактический компонент связывают с особенностями организации учебного процесса в вузе, с большим объемом учебного материала и увеличением доли самостоятельной работы. Социально-психологический компонент связывают с проблемами, возникающими как результат включения студента в новую для него социальную группу. В настоящее время в традиционной структуре адаптационного процесса произошли существенные изменения. Сложность адаптации в подавляющем большинстве случаев стала определяться слабыми знаниями школьников по предметам, которые являются профильными для многих специальностей. В частности, речь идет о слабой школьной математической подготовке студентов экономического бакалавриата. Это обстоятельство оказывает существенное влияние на другие компоненты адаптационного процесса. О размерах этого явления свидетельствуют многочисленные публикации, ссылки на которые приведены в [3]. В этих публикациях обосновывается необходимость проведения адаптационных мероприятий, направленных на ликвидацию пробелов в школьных знаниях по математике, суть которых сводится к проведению дополнительных занятий и созданию соответствующих пособий. Появилось даже понятие «адаптационное обучение первокурсников». Отметим, что решение вопроса с выделением в учебном плане часов для специального курса (как бы он не назывался: адаптационный, корректирующий, выравнивающий, ликбез), для большинства вузов является проблематичным. Обычно эти занятия проводятся факультативно, либо на них приходится отводить время в начале основной дисциплины.

Как известно, одна из математических дисциплин в школе называется «Алгебра и начала анализа». Если посмотреть на содержание соответствующих школьных учебников для 10-х, 11-х классов, создается впечатление, что материал, который изучается студентами, им в основном уже знаком. Однако это иллюзия. Не секрет, что в выпускных классах во многих школах обучение ориентировано на содержание материалов ЕГЭ, а не на систематическое изучение математики. Предмет предстает не в целостном виде, а в форме разрозненных фактов на уровне примитивных действий по аналогии. Как итог, в школьных знаниях первокурсников по математике, наблюдается большой разброс. Учитывая это обстоятельство, на первом курсе на первых лекциях и практических занятиях по МА рассматриваются вопросы школьной математики, связанные с центральным понятием этой дисциплины: функция, ее область определения, свойства функции, их определения, график функции. Дается обзор элементарных функций, их свойств и графиков. Изучаются способы преобразования графиков. Повторение завершается контрольной работой.

По всем дисциплинам изучение каждой темы сопровождается выполнением аудиторной самостоятельной работы обязательного содержания и дополнительного для тех, кто с обязательной частью справляется быстро. Таких самостоятельных работ за семестр набирается порядка восьми, из них одна (расчетная) выполняется дома. Темы самостоятельных работ: «Метод наименьших квадратов» по МА, «Непрерывная случайная величина и ее числовые характеристики» по ТВ и МС, «Построение экономико-математической модели и ее графическое решение» по ЛА. Такое количество самостоятельных работ стимулирует регулярную работу. Разбиение учебного материала на маленькие порции и контроль его усвоения создает для большинства студентов комфортную ситуацию реального достижения успеха. После проверки работы студенты, имеющие замечания, выполняют работу над ошибками. Работы, которые оценены неудовлетворительно, переписываются. За семестр проводится 2–3 консультации-переписывания. К экзамену студенты приходят с комплектом выполненных работ. Если во время экзамена после выполнения экзаменационных заданий возникает проблема с оценкой знаний, то учитывается текущая успеваемость, и тщательное выполнение работ над ошибками решает проблему в пользу студента.

Уменьшение количества аудиторных практических занятий привело к тому, что каждое занятие стало цениться «на вес золота». В условиях необходимости изучения большого объема материала, дефицита учебного времени и реальных возможностей большинства студентов каждое практическое занятие тщательно планируется, а его развернутые цели доводятся до сведения каждого студента вместе с перечнем задач для решения в аудитории и самостоятельно. Цели предъявляются студентам в письменном виде в виде требований, например, знать определенные формулы, уметь вычислять, уметь выполнять данное преобразование, знать определение, уметь распознавать тип задачи, знать алгоритм решения задачи, уметь его формулировать и т. д. К каждому новому практическому занятию студент должен готовиться по указанному плану, представляя краткий опорный конспект (так называемую, «легальную шпаргалку») с выписанными формулами. Таким образом, достигаются две цели: организуется самостоятельная работа студента с текстом лекций при подготовке к практическому занятию и контроль ее регулярности.

Казалось бы, разбиение одной дисциплины «Математика» на три не имеет принципиального значения. Однако исчезла возможность гибкого распределения аудиторного учебного времени между дисциплинами. Так, для изучения МА одного семестра явно мало. Раздел «Ряды» остается за рамками первого семестра. Приходится, включать этот раздел в дисциплину ТВ и МС в качестве «лирического отступления» при изучении дискретных случайных величин и вычислении их характеристик — математического ожидания и дисперсии. Этот материал не является обязательным для усвоения всеми студентами, а предлагается в качестве дополнительного. За рамки обязательного усвоения вынесены и многие доказательства. Дифференциация требований, позволяет сохранить, хотя бы частично, высокий уровень знаний студентов.

Ссылки

[1] *Бестужева Л. П.* О содержании дисциплины «Математика» на экономическом факультете для специальности 060500 «Бухгалтерский учет, анализ и аудит». // Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете: материалы 3-й науч.-метод. конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Яросл. гос. ун-та им. П. Г. Демидова / Отв. ред. М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль, 2010.

[2] *Бабанский Ю. К.* Избранные педагогические труды / Сост. М. Ю. Бабанский. М.: Педагогика, 1989.

[3] *Бестужева Л. П.* Готовность студентов первого курса к изучению дисциплин математического цикла // Проблемы теории и практики обучения математике. Сб. науч. работ, представленных на Междунар. науч. конференцию «66 Герценовские чтения» / Под ред. В. В. Орлова. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2013.

УДК 37.018.536+378.147+371.255.1

Ю. В. Богомолов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mathematics@inbox.ru

Учебные занятия в выездной математической школе: структура и принципы

В статье описывается структура, особенности и основополагающие принципы построения математических занятий по математике, традиционно проводимых в выездных предметных образовательных школах (лагерях) Ярославской области. Отмечаются достоинства, недостатки, необходимые условия для реализации этих подходов, обсуждаются возможности их переноса в систему высшего образования.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: дополнительное образование, методика, формы преподавания.

Выездная школа как элемент системы образования

Выездные математические школы за последние два десятилетия стали важным звеном дополнительного углублённого математического образования высокомотивированных школьников в Ярославской области [1]. Ежегодно для 50-60 учеников, заинтересованных в глубоких систематических занятиях математикой, организуются математические группы в рамках многопредметного летнего образовательного лагеря. В последние годы также удалось возобновить традицию организации недельных зимних математических лагерей.

Основу образовательной программы лагеря составляют ежедневные математические «аудиторные» занятия продолжительностью 6-7 академических часов. С учётом особенностей выездной школы (например, постоянство учебной группы, погруженность в процесс регулярных занятий) это позволяет более эффективно и более глубоко, нежели на еженедельных дополнительных занятиях, осваивать математические идеи, принципы решения задач, разделы математики. Таким образом, занятия в лагере продолжают и дополняют регулярные городские факультативные занятия. Соответственно, при отборе школьников в лагерь в первую очередь учитываются не локальные успехи (например, на математической олимпиаде), а продемонстрированная способность к продолжительной интенсивной продуктивной работе на занятиях в течение года. Работа в рамках образовательного лагеря позволяет планомерно работать с выявленными в течение года начинающими математиками, поддерживать их интерес к математике, готовить к дальнейшей профессиональной научно-исследовательской деятельности, прививая навыки исследовательской работы и научной дискуссии.

Отдельные занятия (учебные блоки) строятся на основе индивидуального решения задач. При изучении нового раздела математики или конкретной темы вывод учащимися фактологической основы рассматриваемой области или основных свойств рассматриваемых объектов производится школьниками самостоятельно — в форме решения задач и подзадач, а также обсуждения результатов с преподавателем. Ниже мы рассмотрим основную структуру такого занятия, отметим необходимые условия для его реализации, а также обсудим возможность переноса элементов такой формы преподавания в практику работы массовой школы или вуза.

Структура занятия

За последние полвека в нашей стране сформировалась достаточно развитая система математических кружков, привлекающих тысячи заинтересованных школьников к систематическим дополнительным занятиям математикой. Безусловно, говорить о какой-либо «единственно верной» форме построения занятий в рамках системы дополнительного математического образования бессмысленно. Ключевой особенностью, характерной для математических кружков по сравнению с принятой в массовой школе системе, является значительно более выраженная роль самостоятельной работы школьников, в том числе в процессе получения нового знания.

В последние годы в ярославских выездных математических школах за основу большей части занятий принята разработанная в 60-х годах XX века так называемая «система листков» [2, 3]. Такая форма работы предполагает следующую типичную структуру занятия.

1. Ученик получает листок с заданием: несколько основных определений и необходимых фактов, а также набор специально подобранных задач, которые самостоятельно решает во время занятия.

2. Решив задачу и сделав необходимые записи, ученик рассказывает решение преподавателю, обсуждает с ним возможные имеющиеся недочёты и ошибки. При необходимости ученик дорабатывает решение задачи и в дальнейшем пробует сдать её ещё раз.

3. Преподаватель делает нужные пояснения к вводимым понятиям, даёт указания к решению задач, направляет процесс работы.

4. Листок может быть разбит на фрагменты, которые преподаватель предлагает ученику по мере выполнения заданий. Также листок является и домашним заданием: оставшиеся нерассказанными задачи ученики выполняет самостоятельно и сдаёт преподавателю.

Таким образом, комплект разноуровневых (а порой и нестандартных) задач является смысловым стержнем занятия: самостоятельно выполняя задания, школьники осваивают новые для них идеи и принципы. При этом новый теоретический материал, ключевые математические понятия, важные утверждения, основы новых (для школьников) отраслей математики не декларируются учителем, а вводятся совершенно естественным путём на основе прикладного проблемно-ориентированного подхода, ложатся на подготовленную почву и эффективно усваиваются обучающимися.

Отметим, что описанная форма была впервые внедрена в практику работы средней школы, однако сейчас более активно применяется именно в рамках системы дополнительного математического образования. Ключевой особенностью является то, что школьники ориентированы не на пассивное усвоение материала, а именно на активную познавательную деятельность, самостоятельное открытие новых для себя способов решения задач и новых математических фактов.

Помимо отмеченной роли, направленной на получение новых знаний и отработку умений, можно отметить следующие важные функции описанной формы построения занятия.

1. Планирование деятельности: листок одновременно является планом изучения предложенной темы. Преподаватель может самостоятельно устанавливать последовательность выполнения заданий и дозировать количество предлагаемых задач. Это наиболее актуально при работе со школьниками 5-7 классов, у которых только формируются навыки продолжительной самостоятельной работы.

2. Индивидуализация: существует возможность отойти от идеи единого задания для всех учащихся учебной группы и формировать

индивидуальную образовательную траекторию на основе листков, разбитых на фрагменты (модули).

3. Форма текущего контроля: успешность выполнения заданий является также показателем качества усвоения изучаемой темы и может гибко учитываться при индивидуальной работе с учеником.

4. Критерий истинности: сдавая решённые задачи преподавателю, ученик осознаёт важность внешней профессиональной экспертизы для признания математического результата. Ещё более важным является закрепление понимания того, что математическое утверждение является либо доказанным, строго обоснованным (и в этом случае «засчитывается»), либо таковым не является («не засчитывается») и требует доработки.

В выездной математической школе такая форма организации учебных занятий зарекомендовала себя достаточно хорошо [1].

Во-первых, в условиях высокой концентрации учебной нагрузки (по объёму программа лагеря порой соответствует примерно полугоду или даже году регулярных дополнительных занятий, в зависимости от их частоты) система листков позволяет гибко корректировать интенсивность подачи материала для разных школьников.

Во-вторых, появляется возможность совместить самостоятельное изучение материала с достаточно глубоким освоением новых разделов математики.

В-третьих, для отдельных групп школьников оказывается возможным активное опережающее освоение некоторых разделов школьной программы (например, базовых разделов планиметрии с шестиклассниками), в котором ключевую роль играет деятельностный подход на основе самостоятельного обоснования важных утверждений, свойств, соотношений.

В-четвертых, участниками образовательного лагеря традиционно становятся школьники, уже хорошо зарекомендовавшие себя на занятиях в течение года, с достаточно развитыми навыками самостоятельной работы, что является важным при работе на основе листков.

Наконец, формат образовательного лагеря позволяет не только оперативно менять различные формы математической деятельности (и, таким образом, сглаживать многие негативные стороны излишне технологичного преподавания на основе листков), но и в целом помогать школьникам планировать свою деятельность, сочетая самостоятельную работу и восстановление сил.

Пример для начинающих

Одним из примеров уместного использования листковой системы является реализуемая в выездной математической школе программа опережающего изучения геометрии. Исторически сложилось так, что в школьном курсе математики именно на примере классической планиметрии школьники не просто знакомятся с аксиоматическим методом построения отдельной отрасли математики, но и вообще зачастую впервые сталкиваются в явном виде с понятием доказательства и некоторыми общематематическими методами обоснования утверждений (например, методом доказательства от противного).

Вместе с этим при традиционном подходе к построению урока в средней школе этот эффект «доказательности» в геометрии и математике вообще несколько смазывается. Во-первых, процесс доказательства основополагающих утверждений со стороны школьников носит пассивный, потребительский характер: учитель шаг за шагом демонстрирует доказательство теоремы — ученик фиксирует это у себя в тетради или заучивает для дальнейшего воспроизведения (порой без понимания). Во-вторых, фиксируется отчуждённое отношение к научным результатам, подавляется творческая математическая активность: функция носителя математического знания закрепляется за учителем, ученик же на ближайшее будущее (а может, и навсегда) отводит себе роль созерцателя или исполнителя, способного только повторить сделанное кем-то до него. Иначе говоря, возможность самостоятельно получать (пусть даже переоткрывать) математические результаты у школьников отнимается даже там, где существует явная возможность проявить познавательную активность.

Осознание описанных (возможно, обусловленных объективными причинами) недостатков существующего подхода привело к тому, что в ярославских выездных математических школах серьёзное внимание стало уделяться активному опережающему изучению геометрии на основе самостоятельной работы по системе листков. Опережение здесь является в какой-то степени вынужденной мерой: исправить закрепившиеся неверные установки значительно сложнее, чем сформировать их.

Например, для школьников, окончивших 6 класс, в выездной математической школе предлагается следующая основная программа курса введения в геометрию.

1. Основные понятия: точки, прямые (в том числе отношения между прямыми), лучи, углы (и их разновидности), многоугольники (в том числе частные случаи).

2. Основные теоремы: критерии и свойства параллельных прямых, признаки равенства треугольников, признаки и свойства равно-

бедренных треугольников, общие свойства треугольников, признаки и свойства параллелограмма.

3. Понятия и свойства, связанные с элементами треугольников, формулировка и доказательство основных соотношений.

Фактически в описанных условиях школьники во многом самостоятельно за две-три недели осваивают основу программы курса геометрии за 7 класс. При обсуждении такого подхода встречается довод, что этим подавляется их познавательная активность в дальнейшем — школьникам будет неинтересно заново проходить всё то же самое в школе. Здесь можно отметить, что, во-первых, неинтересно изучать геометрию пассивно (как уже отмечалось выше), поэтому описанный подход как раз стимулирует самостоятельную деятельность школьников. Во-вторых, в рамках основного школьного курса геометрии ученики, уже изучившие теоретические основы, закрепляют их в ходе решения задач — то есть не в виде пассивной фиксации фактов, а на основе их применения к получению новых математических результатов.

Более старшие школьники, уже имеющие хорошую базу по геометрии, в условиях выездной математической школы закрепляют приобретённые умения и навыки на более высоком уровне, а также осваивают разделы геометрии, которые в большинстве случаев не входят в традиционную учебную программу (избранные классические теоремы планиметрии, основы аффинной и проективной геометрии, метод центров масс, применение комплексных чисел в геометрии). Изучение отмеченных разделов геометрии также эффективно реализуется в рамках листкового подхода.

Пример для продвинутых

В качестве ещё одного примера рассмотрим изучение темы «Векторные пространства» в летнем образовательном лагере «Олимп» 2017 года на основе системы листков. Возможность работы по этой теме объясняется тем, что к старшим классам сильная группа школьников уже владеет достаточно богатым набором разнообразных математических объектов со схожими операциями, поэтому вполне уместно изучить некоторые общие закономерности и обобщения.

Школьникам, закончившим 9-10 класс, было предложено три комплекта заданий (листка), рассчитанных на три учебных блока по 4 академических часа. В частности, первый листок содержал следующие материалы.

1. Основные определения: векторного пространства, подпространства, линейной комбинации, системы образующих, линейно независимой системы, базиса, размерности пространства.

2. Примеры, иллюстрирующие основные определения.

3. Упражнения: проверка соответствия определению векторного пространства, нахождение базисов, переформулировка утверждений в терминах векторных пространств, доказательство простейших свойств линейно независимых систем, обоснование связей между понятиями линейно независимой системы и базиса.

4. Основные теоремы: о равносильных определениях базиса, о линейной зависимости линейных комбинаций и корректности определения размерности.

5. Набор задач (помимо упомянутых упражнений и теорем).

Теоретическая база, предложенная в первом листке, постепенно изучалась в течение двух учебных блоков (четыре академические пары) параллельно с решением задач. По ходу выполнения заданий преподаватель обобщал предложенные школьниками доказательства, подчеркивал общие полезные идеи, устранял отдельные недочёты и демонстрировал учебной группе «причесанные» варианты обоснования основных утверждений (отметим: после того, как основная масса школьников справлялась с ними самостоятельно).

В листки включались как технические задания, предназначенные для закрепления основных понятий и формирование умений работы с векторными пространствами, так и нестандартные задачи, демонстрирующие универсальный характер изученных закономерностей и возможность их применения для достаточно широкого класса ситуаций. Приведем примеры таких задач.

1. Докажите, что множество строк — решений однородной системы линейных алгебраических уравнений — образует векторное пространство.

2. Докажите, что любой многочлен степени n линейно зависим от 1, x, $x(x-1)$, …, $x(x-1)\dots(x-n+1)$.

3. Рассмотрим такие шестерки действительных чисел по кругу, что сумма любых трех подряд идущих равна нулю. Докажите, что множество таких расстановок образует векторное пространство над $\mathbb{R}$, а также найдите его размерность и базис.

4. Каждую клетку доски 8×8 можно красить в белый или чёрный цвет. Изначально вся доска белая. Разрешается перекрасить в противоположный цвет каждую клетку любого (выбранного) квадрата 3×3 или 4×4. Верно ли, что существует такая раскраска доски, которую такими перекрашиваниями получить не удастся?

В частности, последняя задача оказалась убедительным примером эффективности применения ранее доказанных фактов. Вместо громоздкого перебора случаев и нетривиального поиска инвариантов, связанных с окраской клеток доски, оказалось возможным построить довольно естественное решение: (1) рассмотреть раскрашенную доску как элемент векторного пространства; (2) построить базис, элементом которого является доска с одной покрашенной клеткой; (3) определить, что размерность пространства равна 64; (4) рассмотреть разрешенные перекрашивания как систему образующих; (5) количество элементов в системе образующих $36 + 25$ — меньше размерности пространства.

Однако наиболее важным результатом является то, что выбранная форма построения занятия позволила большинству школьников изучить основы нового для них раздела алгебры, во многом самостоятельно проведя доказательство ключевых утверждений, и закрепить полученные знания и умения на практике. Также обращает на себя внимание то обстоятельство, что эти результаты получены за время (шесть академических пар), примерно соответствующее отведённому на изучение этой же темы на первом курсе математических специальностей вуза, но с большей эффективностью за счёт упора на самостоятельную работу.

Приведённый выше пример, несмотря на результаты, не является веским поводом для опасной эйфории и желания тут же перестроить формы преподавания учебных дисциплин в вузе. Реализация формы учебных занятий на основе листков будет эффективна лишь при соблюдении достаточно жёстких условий, о которых поговорим в следующем разделе.

Условия реализации и ограничения

Как и любая другая форма организации учебной работы, система листков имеет свои положительные и отрицательные стороны, риски при негибком использовании, а также определённые и условия реализации, в рамках которых будет работать с наибольшей эффективностью. Достаточно подробный обзор плюсов и минусов листковой системы предложен в работе [2]. Здесь мы ограничимся обсуждением даже не методических, а организационных ограничений, затрудняющих перенос рассматриваемой формы организации занятий в чистом виде в практику работы высшего учебного заведения.

1. Однородность учебной группы: при заметном расслоении обучающихся по стартовому уровню более слабая часть группы ещё больше демотивируется (в особенности при ведении открытого рейтинга успеваемости). В образовательном лагере эта проблема частично решается приглашением небольших групп достаточно мо-

тивированных школьников с хорошим начальным уровнем. В вузе возможность управлять этим процессом несколько ограничена.

2. Нагрузка преподавателя: необходимость постоянно активно слушать решения предложенных заданий задаёт некоторое предельное количество обучающихся, которых может сопровождать один преподаватель. В частности, для ярославских выездных математических школ использование листковой системы в чистом виде оказывается затруднительным при размере группы более 10–12 человек.

3. Проблема универсальности подхода: далеко не все разделы математики, а также важные общематематические идеи и понятия можно свести к набору задач (как предполагается при использовании листковой системы). В частности, при изучении концептуально насыщенных разделов математики, а также при воспитании теоретического мышления [2] более адекватными являются другие формы построения учебных занятий. В профильном вузе такие ситуации встречаются достаточно часто.

Выводы

Листковая система построения учебных занятий хорошо себя зарекомендовала в системе дополнительного математического образования школьников: как для периодических регулярных занятий в течение учебного года, так и в условиях интенсивной работы выездной математической школы. Организация занятий в описанной выше форме в рамках образовательного лагеря позволяет достаточно гибко регулировать процесс самостоятельной работы обучающихся, стимулировать их инициативу, поощрять самостоятельную работу, помогать развивать творческие математические способности. Соответственно, опыт реализации такого подхода даёт возможность задуматься о переносе основных его элементов в систему высшего образования.

Вместе с тем большое количество ограничений и условий реализации (организационных, педагогических, методических, психологических) побуждают перейти к полярному выводу о том, что такого рода подход в массовом образовании, в отличие от частного случая элитарного дополнительного образования, объективно неприменим. Такого рода выводы опровергаются, как минимум, тем, что организация уроков на основе листков в описанном выше виде уже несколько десятилетий применяется в практике работы нескольких средних школ страны при изучении математики в старших классах [3]. Также листковая система широко распространена в практике работы Независимого московского университета.

Тем не менее, успешный опыт использования системы листков в школе и вузе оказывается возможным при соблюдении описанных выше требований к условиям реализации. В частности, эффективность (и принципиальная возможность) проведения уроков алгебры и начал математического анализа в московской школе № 57 во многом связана с параллельной работой нескольких специалистов в рамках одного урока, благодаря которой на одного преподавателя приходится порядка 3–4 школьников. Для потоковых занятий в вузе вряд ли можно добиться даже сопоставимого соотношения, однако в рамках дисциплин специализации и курсов по выбору препятствия к применению элементы листковой системы могут быть сильно уменьшены.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.12873.2018/12.1.

Ссылки

[1] Ярославская математическая школа как модель выявления, сопровождения и развития детей с признаками математической одаренности: методическое пособие / Ю. В. Богомолов, М. Д. Власова, М. П. Кривунь [и др.]; под. общ. ред. А. В. Золотаревой. Ярославль: ГАУ ДПО ЯО ИРО, 2016. 89 с.

[2] *Ковальджи А. К., Канель-Белов А. К.* Занятия по математике — листки и диалог // Математическое просвещение. Серия 3. Вып. 19. М.: Изд-во МЦНМО, 2015. С. 206–233.

[3] *Голенищева-Кутузова Т. И. и др.* Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Ч. I // Голенищева-Кутузова Т. И., Казанцев А. Д., Кудряшов Ю. Г. и др. М.: МЦНМО, 2010. 248 с.

УДК 521.8+514.1 (075.8)

Ю.И. Большаков
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: bolshakovyi@mail.ru

К теореме Польке–Шварца

В работе речь идёт о классической теореме Польке–Шварца играющей фундаментальную роль в начертательной геометрии. Приводится её алгебраическая формулировка и соответствующее доказательство для трехмерного евклидова пространства. Рассматривается возможность её обобщения на n–мерное евклидово пространство.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: теорема Польке–Шварца, трёхмерное евклидово пространство.

Постановка задачи. В параллельной аксонометрии теорема Польке–Шварца может быть сформулирована следующим образом:

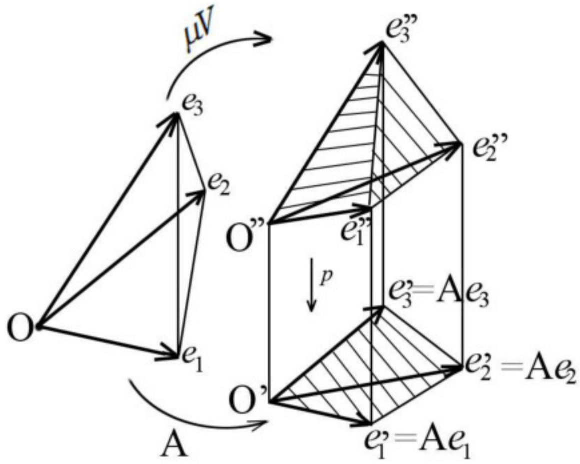
Теорема 1. *Пусть* $\overrightarrow{Oe_i}$ *— произвольный репер в трёхмерном евклидовом пространстве,* $\overrightarrow{O'e'_i}$ *— произвольные векторы этого пространства, причем* $\dim span\{\overrightarrow{O'e'_1}, \ \overrightarrow{O'e'_2}, \ \overrightarrow{O'e_3i'}\} = 2$*; Тогда существует репер* $\overrightarrow{O''e''_i}$*, метрически подобный исходному, т. е. получаемый из него с помощью гомотетии и движения, такой что векторы* $\overrightarrow{O'O''}$, $\overrightarrow{e'_1e''_1}$, $\overrightarrow{e'_2, e''_2}$, $\overrightarrow{e'_3, e''_3}$, *паралельны.*

Геометрическая формулировка теоремы 1 приведена, например, в книге [1, с. 154, с. 165], алгебраическая формулировка и её обобщения на n–мерное евклидово пространство даны в работе А. М. Лопшица [2, с. 93–123].

Поскольку перенос на вектор является движением евклидова пространства, то, не нарушая общности в рассуждениях, точки O, O' и O'' из теоремы 1 можно совместить, и суть теоремы 1 может быть изображена на следующем рисунке.

Здесь A — линейный оператор $A : e_i \mapsto e'_i$, $\mu V : e_i \mapsto e''_i$, $p : e''_i \mapsto e'_i$, $\mu > 0$, V — движение евклидова пространства, p — проектирование $e'_ie''_i = \lambda_i a$, $i = 1, 2, 3$, a — фиксированный вектор пространства. Иначе говоря,

$$A = \mu PV, \tag{1}$$



что равносильно $\mu V(x) - A(x) = \lambda(x)a$, где λ — линейная функция. Хорошо известно, что $\lambda(x)$ может быть записана в виде $\lambda(x) = [-b,\ x]$, где $[,]$ — скалярное произведение, а b — некоторый вектор, поэтому

$$A = \mu V + a\,\centerdot\,b. \tag{2}$$

Здесь $a{\centerdot}b$ —диадное произведение векторов a и b [3, с. 126], определяемое соотношением:

$$a\,\centerdot\,b(x) = [b, x]a. \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$P = I + \frac{1}{\mu} a\,\centerdot\,Vb. \tag{4}$$

С другой стороны, оператор A представим в виде

$$A = SU, \tag{5}$$

где S — неотрицательно определенный симметрический оператор, а U — ортогональный оператор [4, с. 244–247]. При этом оператор S определяется формулой $S = \sqrt{AA^*}$, и если A — невырожденный, то U однозначно определяется равенством $U = S^{-1}A$.

Итак, пусть имеет место равенство (5). Перепишем (2) в виде $SU = \mu V + a\,\centerdot\,b$, тогда $S = \mu VU^{-1} + (a\,\centerdot\,b)U^{-1} = \mu VU^{-1} + a\,\centerdot\,Ub$. Будем считать, что A задан и, следовательно, заданы S и U. Необходимо найти число $\mu > 0$, ортогональный оператор V, пару векторов a и b таких, что

$$S = \mu VU^{-1} + a\,\centerdot\,Ub. \tag{6}$$

Поэтому достаточно найти $\mu > 0$, ортогональный оператор W и пару векторов a и $\hat{b}$ таких, что

$$S = \mu W + a\,\centerdot\,\hat{b}, \tag{7}$$

где $V = WU$, $b = U^{-1}\hat{b}$. С другой стороны, из (7) следует, что $S = \mu W^* + (a \centerdot \hat{b})^* = \mu W^* + \hat{b} \centerdot a$ и, поэтому, $(S - a \centerdot \hat{b})(S - \hat{b} \centerdot a) = \mu^2 I$, что равносильно равенству $S^2 - S(\hat{b} \centerdot a) - (a \centerdot \hat{b})S + \hat{b}^2 a \centerdot a = \mu^2 I$. Оно в свою очередь, эквивалентно числовому тождеству

$$[S^2 x, x] - 2[S\hat{b}, x][a, x] + \hat{b}^2 [a, x]^2 = \mu^2 x^2, \tag{8}$$

где $\hat{b}^2 = [\hat{b},\ \hat{b}]$, $x^2 = [x,\ x]$, а x — произвольный вектор трехмерного пространства.

Будем считать, что оператор S в ортонормированном базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ имеет канонический вид. Поскольку $rgA = rgS = 2$, что следует из условия теоремы 1 и соотношения (5), то $Se_1 = \lambda_1 e_1$ $Se_2 = \lambda_2 e_2$, $Se_3 = 0$. Соотношение (8) равносильно тождеству

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 - 2[b_1\lambda_1 e_1 + b_2\lambda_2 e_2,\ x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3](a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) +$$
$$+ \hat{b}^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = \mu^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Учитывая ортонормированность базиса и приравняв коэффициенты при одинаковых выражениях $x_i x_j$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 - 2b_1 a_1 \lambda_1 + \hat{b}^2 a_1^2 = \mu^2, \\ \lambda_2^2 - 2b_2 a_2 \lambda_2 + \hat{b}^2 a_2^2 \mu^2, \\ \hat{b}^2 a_3^3 = \mu^2, \\ -2b_1\lambda_1 a_2 - 2b_2\lambda_2 a_1 + 2\hat{b}^2 a_1 a_2 = 0, \\ -2b_1\lambda_1 a_3 + 2\hat{b}^2 a_1 a_3 = 0, \\ -2b_2\lambda_2 a_3 + 2\hat{b}^2 a_2 a_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Одним из решений этой системы будут векторы $a = \begin{pmatrix} 0, & \frac{\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}{\lambda_2}, & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{pmatrix}^t$ и $b = \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, & \lambda_1 \end{pmatrix}^t$, а $\mu = \lambda_1$ в предположении, что $\lambda_2 > \lambda_1$. Случай же $\lambda_2 = \lambda_1$ описывается формально теми же формулами, т. е. формулы для a и $\hat{b}$ описывают решения (9) при условии $\lambda_2 \geq \lambda_1$, $\mu = \lambda_1$.

Вернёмся к формуле (2). Поскольку S и U в (5) известны, то из (7) найдём $W = \frac{1}{\mu}(S - a \centerdot \hat{b})$, а оператор V находится по формуле $V = WU$. Найдем матрицу W в базисе e_1, e_2, e_3:

$$a \centerdot \hat{b} = \frac{1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, & \lambda_1 \end{pmatrix}^t \centerdot \begin{pmatrix} 0, & \sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, & \lambda_1 \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2} & \frac{\lambda_1\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}{\lambda_2} \\ 0 & \frac{\lambda_1\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}}{\lambda_2} & \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \end{bmatrix},$$

откуда

$$W = \frac{1}{\lambda_1}(S - a \centerdot \hat{b}) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}\left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \tfrac{1}{\lambda_2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \lambda_1\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_1^2} \\ 0 & \lambda_1\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_1^2} & \lambda_1^2 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} & -\frac{\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_1^2}}{\lambda_2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_1^2}}{\lambda_2} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что $WW^* = I$, Тогда $V = WU$, где U — оператор из (5), а векторы a и $\hat{b}$ найдены выше. Поэтому вектор b находится легко: $b = U^{-1}\hat{b},\ \mu = \lambda_1$.

Найдем теперь оператор P из формулы (4):

$$P = I + \frac{1}{\lambda_1}a_{\blacksquare}Vb = I + \frac{1}{\lambda_1}a_{\blacksquare}VU^{-1}\hat{b} = I + \frac{1}{\lambda_1}a_{\blacksquare}W\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{\lambda_2^2-\lambda_1^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что P не зависит от U, а зависит лишь от S в формуле (5).

Теорема 1 доказана.

Если потребовать, чтобы в условиях теоремы 1 имело место равенство $rgA = 1$, то система (9) примет вид:

$$\begin{cases} \hat{b}^2 a_1^2 = \mu^2 \\ \lambda_2^2 - 2b_2a_2\lambda_2 + \hat{b}^2a_2^2 = \mu^2, \\ \hat{b}^2a_3^2 = \mu^2, \\ \hat{b}^2a_1a_2 = b_2\lambda_2a_1 \\ \hat{b}^2a_1a_3 = 0 \\ \hat{b}^2a_2a_3 = b^2\lambda_2a_3. \end{cases} \tag{10}$$

Поскольку $A \neq \mu V$, то $a \neq 0$, $b \neq 0$, что следует из (3). Поэтому подсистема, состоящая из первого, третьего и пятого уравнений системы (10), противоречива.

Покажем, что если $rgA = 1$, то существуют четыре вектора a, b, c и d, подобие μV, такие что имеет место равенство

$$A = \mu V + a_{\blacksquare} b + c_{\blacksquare} d. \tag{11}$$

Представив оператор A в виде (5), получим $S = \mu W + a_{\blacksquare}\hat{b} + c_{\blacksquare}\hat{d}$, где

$$W = VU^{-1},\ \hat{b} = bU^{-1},\ \hat{d} = dU^{-1}. \tag{12}$$

С другой стороны, поскольку $rgS = rgA = 1$, то, не нарушая общности в рассуждениях, будем считать, что в ортонормированном базисе $e_1,\ e_2,\ e_3$, имеем $S = diag(\lambda,\ 0,\ 0)$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Из равенства (12) следует соотношение

$$(S - a_{\blacksquare}\hat{b} - c_{\blacksquare}\hat{d})(S - \hat{b}_{\blacksquare}a_1 - \hat{d}_{\blacksquare}c) = \mu^2 I, \tag{13}$$

которое равносильно тождеству

$$[S^2x,\ x]-2[S\hat{b},x][a,x]-2[S\hat{d},x][c,x]+$$
$$+2[\hat{b},\ \hat{d}][a,x][c,x]+\hat{b}^2[a,x]^2+\hat{d}^2[c,\ x]^2=\mu^2x^2. \tag{14}$$

Последнее же, подобно (8), приводит к системе (15), аналогичной (9):

$$\begin{cases} \lambda^2-2(b_1a_1+d_1c_1)\lambda+2[\hat{b},\hat{d}]a_1c_1+\hat{b}^2a_1^2+\hat{d}^2c_1^2=\mu^2,\\ 2[\hat{b},\hat{d}]a_2c_2+\hat{b}^2a_2^2+\hat{d}^2c_2^2=\mu^2,\\ 2[\hat{b},\hat{d}]a_3c_3+\hat{b}^2a_3^2+\hat{d}^2c_3^2=\mu^2,\\ -(a_2b_1+c_2d_1)\lambda+[\hat{b},\hat{d}](a_1c_2+a_2c_1)+\hat{b}^2a_1a_2+\hat{d}^2c_1c_2=0,\\ -(a_3b_1+c_3d_1)\lambda+[\hat{b},\hat{d}](a_1c_3+a_3c_1)+\hat{b}^2a_1a_3+\hat{d}^2c_1c_3=0,\\ \left[\hat{b},\hat{d}\right](a_2c_3+a_3c_2)+\hat{b}^2a_2a_3+\hat{d}^2c_2c_3=0. \end{cases} \tag{15}$$

Одним из решений системы (15) являются векторы

$$\begin{cases} a=\sqrt{\tfrac{\lambda}{2}}(1,0,1)^t,\\ \hat{b}=\sqrt{\tfrac{\lambda}{2}}(1,1,0)^t,\\ c=\sqrt{\tfrac{\lambda}{2}}(0,1,0)^t,\\ \hat{d}=\sqrt{\tfrac{\lambda}{2}}(0,0,\sqrt{2})^t, \end{cases} \tag{16}$$

при этом $\mu=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$.

Непосредственное вычисление показывает, что

$$a\centerdot\hat{b}=\frac{\lambda}{2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix},\qquad c\centerdot\hat{d}=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

и, поскольку $S=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, то

$$S-a\centerdot\hat{b}-c\centerdot\hat{d}=\lambda\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}W, \tag{17}$$

откуда

$$W=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&-1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix}. \tag{18}$$

В представлении оператора A в форме (11) нужно положить $\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, $V = WU$, $b = U^{-1}\hat{b}$, $d = U^{-1}\hat{d}$. Из равенства $A = \mu PV$ оператор P может быть записан в виде:

$$P = I + \frac{\sqrt{2}}{\lambda}(a \centerdot W\hat{b} + c \centerdot W\hat{d}). \tag{19}$$

С учетом формул (16) и (19), его матрица в базисе e_1, e_2, e_3 будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Итак, нами рассмотрены все возможные ситуации для трехмерного евклидова пространства, в котором действует линейный оператор A с рангом 1 или 2. При этом найдены число $\mu > 0$, оператор проектирования P и движение V пространства (если найдено полярное разложение $A = SU$), при которых размерность k подпространства $Im(A - \mu V)$ минимальна, или, что равносильно, размерность подпространства $Im(P - \mu V)$ минимальна.

Если $A = 0$, то число k, очевидно, равно 3.

Пусть теперь $rgA = 3$, тогда возникнут следующие случаи 3.1–3.4.

3.1. $e'_i = e'_j$, при $i \neq j$ и $|e'_i| = |e'_j|$ Тогда существует μV такой, что $\mu V e_i = e''_i = e'_1$, и так как $P : e''_i \mapsto e'_i$, то $P = I \rightarrow k = dim(ImP - I) = 0$.

3.2. $e'_1 \perp e'_2$, $|e'_1| = |e'_2| \neq |e'_3|$. Тогда существует μV такой, что $\mu V e_i = e''_i i = 1, 2$, $\mu V e_3 = e''_3$, и так как $P : e''_i \mapsto e'_i$, то $P : e'_i \mapsto e'_i, i = 1, 2$, $k = dim(ImP - I) = 1$, поскольку $e'_3 e''_3 \neq 0$.

3.3. $e'_i \perp e'_j$ при $i \neq j$ и модули этих векторов попарно различны. Тогда, как нетрудно, понять $k = 2$.

3.4. В оставшихся случаях, с учетом равенства $rgA = 3$, число k равно 2.

Замечание. В работах [2], [5] и [6] рассмотрены обобщения классической теоремы Польке–Шварца на многомерные евклидово и псевдоевклидово пространства с некоторыми ограничениями на оператор A. Как видно из множества различных ситуаций, рассмотренных в настоящей работе, при переходе на многомерное пространство ожидается достаточное количество существенных трудностей, что можно обнаружить, например, в работах [5] и [6].

Ссылки

[1] *Нартова, Л.Г., Якунин В.И.* Начертательная геометрия. М.: Дрофа, 2008, 208 с.

[2] *Лопшиц А.М.* Аффинные отображения многомерного евклидова пространства, подобные кратноперспективным, и обобщенная теорема Польке–Шварца // Ученые записки Ярославского пед. ин–та. Вып. 57. Геометрия. Ярославль: ЯГПИ, 1967. С. 93–123.

[3] Математическая энциклопедия. Т. 2. М.: Наука, 1979. 1104 с. С. 126.

[4] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц М.: Наука, 1998. 552 с.

[5] *Большаков Ю.И., Райхштейн Б.З.* Задача Польке–Шварца–Лопшица в многомерном псевдоевклидовом пространстве. Деп. в ВИНИТИ. № 1928–76. 32 с.

[6] *Большаков Ю.И.* Решение задачи Польке–Шварца–Лопшица в многомерном псевдоевклидовом пространстве. Деп. в ВИНИТИ. № 1880–76. 12 с.

УДК 519.681.5: 519.682

В. В. Васильчиков
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vasilch@uniyar.ac.ru

Об опыте рекурсивно-параллельной реализации решения трудоемких задач методом ветвей и границ

Обсуждается опыт организации рекурсивно-параллельных вычислений для нескольких алгоритмов, относящихся к категории методов ветвей и границ. Соответствующие программные приложения были основаны на использовании разработанных автором библиотек RPM_ParLib и CommModule. Приводятся результаты ряда вычислительных экспериментов по исследованию достигаемого ускорения.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: метод ветвей и границ, параллельные вычисления, рекурсия, .NET Framework.

Концепция рекурсивно-параллельных (РП) вычислений разрабатывалась в расчете на решение трудоемких задач, не допускающих очевидного разбиения на параллельные ветви с предсказуемой длительностью выполнения. Программные механизмы реализации этой концепции рассчитаны в первую очередь на ситуацию, когда параллельные ветви вычислений порождаются динамически и невозможно заранее оценить их трудоемкость.

В [1, 2] были описаны программные компоненты RPM_ParLib и CommModule, предназначенные для разработки рекурсивно-параллельных приложений под .NET Framework. С их использованием были разработаны РП-приложения для решения задачи о клике [1] и задачи коммивояжера [3]. Обе относятся к категории NP-полных задач, а значит, для них неизвестны алгоритмы решения с полиномиальной трудоемкостью. В качестве основы для разработки РП-алгоритмов их решения использовались алгоритмы Брона–Кербоша и Литтла соответственно. Позже был разработан алгоритм для параллельного решения NP-полной задачи о рюкзаке (вариант 0-1). В качестве основы был взят один из алгоритмов, предложенных Дэвидом Пизингером в [4]. При разработке рекурсивно-параллельной версии использовался шаблон, описанный в [3].

Все три алгоритма относятся к категории методов ветвей и границ, то есть фактически основаны на переборе, правда, переборе оптимизированном, когда заведомо неперспективные ветви вычислений своевременно отсекаются. Эффективность этого отсечения во многом зависит от точности оценки решения на исследуемой ветви, однако это далеко не единственный фактор, определяющий время вычислений как при последовательном, так и при параллельном решении задачи.

Как показывают результаты многочисленных экспериментов, едва ли не более важным фактором, определяющим скорость решения задачи, является то, как быстро будет найдено лучшее или достаточно близкое к нему решение. После нахождения такового количество ветвей вычислений, отвергаемых на ранних стадиях по причине бесперспективности, резко возрастает. По этой причине время решения конкретной задачи является непредсказуемым и становится весьма некорректным делать какие-то выводы о зависимости этого времени, скажем, от размера задачи, если только он не изменяется очень сильно. Особенно заметно эта особенность проявилась при исследовании параллельной версии решения задачи о рюкзаке. Для этой задачи было сгенерировано несколько десятков однотипных наборов входных данных. Даже в последовательном режиме решения задачи время ее решения для разных наборов отличалось как минимум на четыре порядка. Более точно оценить это соотношение сложно, так как в некоторых случаях у автора просто не хватило терпения дождаться результата.

При проектировании параллельного алгоритма приобретает большой вес и такой фактор, как способ деления задачи на параллельно исполняемые ветви. При этом для всех трех задач было принципиально невозможно заранее определить трудоемкость вычислений для отдельно взятой ветви даже приблизительно. Вместе с тем для получения хорошего ускорения за счет параллельности требуется обеспечить достаточное количество подзадач сопоставимого размера, чтобы, будучи оформленными как потенциально мигрирующие процессы, они позволили на начальном этапе вычислений быстро обеспечить всю систему работой, а затем позволили бы механизму динамической балансировки загрузки достаточно эффективно выполнять свои функции.

Обычно можно предложить сразу несколько способов разделить работу на отдельные подзадачи, допускающие одновременное решение, однако заранее сказать, какой из вариантов окажется лучше, очень непросто. При этом каждый вариант дробления задачи подразумевает принципиально иную структуру хранения параметров подзадачи и результатов ее исполнения. А поскольку эти данные должны мигрировать по вычислительной системе, это сказывается на накладных расходах на их передачу и на способах синхронизации вычислений.

Для всех трех задач рассматривалось и программно реализовывалось несколько вариантов дробления работы, пока не находился достаточно эффективный. Так, для задачи о клике очевидное, казалось бы, деление по принципу "брать/не брать вершину" оказалось плохим вариантом ввиду очень сильной неравновесности порождаемых ветвей, их пришлось искусственным способом объединять в более равновесные группы, которые уже и брались в качестве исходных данных для подзадачи [1]. А в случае задачи коммивояжера такая группировка проявила себя недостаточно хорошо, и лучшим оказался вариант "включать / не включать ребро в строящийся цикл" , правда, с дополнительной оптимизацией [3].

Результаты вычислительного эксперимента для оценки эффективности предложенных вариантов распараллеливания изложены в [1, 3], поэтому мы их здесь не приводим. Отметим только, что ускорение не просто приближалось к количеству задействованных в вычислениях компьютеров, а зачастую существенно превышало его. Объясняется это тем, что при решении задачи методом ветвей и границ одновременное исследование различных ветвей вычислений, как правило, быстрее приводит к достаточно хорошим решениям, что позволяет раньше отсекать неперспективные варианты. В любом случае эффект от использования нашей модели вычислений был однозначно положительным.

Для параллельной организации алгоритма решения задачи о рюкзаке [5] достаточно эффективным оказался вариант с обычным рекурсивным делением пополам. Исходный последовательный алгоритм [4] был выстроен так, что сначала строилось некоторое базовое решение, а затем делались попытки его улучшения путем удаления или добавления предметов в строящийся набор в зависимости от этапа вычислений. Множество предметов в построенном наборе, наличие/отсутствие которых не совпадало с их наличием/отсутствием в базовом решении, называется списком исключений. Соответственно, на каждом этапе дробления задачи рассматривалось два варианта: включать или не включать предмет в список исключений. Это классический подход, однако его реализация усложнялась тем фактом, что собственно решение можно получить только на обратном ходе рекурсии. Для качественной программной реализации требовалось разработать компактный способ хранения и передачи данных подзадачи и полученных результатов. К слову сказать, в описании последовательного алгоритма [4] вопросы хранения ключевых данных, их глобальность/локальность не затрагивались вообще, тогда как при разработке программной реализации, в особенности параллельной, это ключевой вопрос.

Объем статьи не позволяет подробно изложить все детали выстроенного параллельного алгоритма, потому ограничимся описанием результатов проведенного вычислительного эксперимента.

		Вар.1	**Вар.2**	**Вар.3**	**Вар.4**	**Вар.5**
1 ПМ	Ветвей (млн)	*45 510.13*	*5 332.43*	*21 477.44*	*3 956.54*	*47 836.56*
	Время (с.)	2263.17	272.35	1068.25	209.42	2466.22
	Ускорение	***1.00***	***1.00***	***1.00***	***1.00***	***1.00***
2 ПМ	Ветвей (млн)	*33 072.12*	*2 359.90*	*3 453.82*	*1 843.44*	*33 829.43*
	Время (с.)	859.64	65.69	94.26	52.65	878.55
	Ускорение	***2.63***	***4.15***	***11.33***	***3.98***	***2.81***
4 ПМ	Ветвей (млн)	*30 943.51*	*2 020.09*	*5 502.24*	*3 768.49*	*12 369.67*
	Время (с.)	393.76	31.37	73.25	51.37	161.71
	Ускорение	***5.75***	***8.68***	***14.58***	***4.08***	***15.25***
6 ПМ	Ветвей (млн)	*30 197.71*	*2 894.13*	*6 892.83*	*1 394.06*	*17 925.07*
	Время (с.)	260.25	27.42	62.82	14.37	155.08
	Ускорение	***8.70***	***9.93***	***17.00***	***14.58***	***15.90***
8 ПМ	Ветвей (млн)	*15 252.44*	*3 846.42*	*8 233.19*	*1 518.84*	*9 858.63*
	Время (с.)	98.73	28.26	56.19	12.32	64.90
	Ускорение	***22.92***	***9.64***	***19.01***	***17.00***	***38.00***
12 ПМ	Ветвей (млн)	*21 327.09*	*5 689.95*	*3 530.34*	*2 242.82*	*11 678.20*
	Время (с.)	93.61	27.01	18.59	12.71	52.94
	Ускорение	***24.18***	***10.08***	***57.48***	***16.48***	***46.58***
16 ПМ	Ветвей (млн)	*11 504.56*	*7 175.60*	*1 559.01*	*1 046.64*	*13 985.47*
	Время (с.)	41.95	27.40	9.49	6.87	48.84
	Ускорение	***53.95***	***9.94***	***112.54***	***30.47***	***50.49***

Таблица 1. Ускорение параллельного алгоритма на задаче с 80 предметами

Исходные данные генерировались случайным образом. При этом размер и ценность предметов варьировались не слишком значительно, чтобы дополнительно усложнить задачу. Было сгенерировано несколько десятков наборов исходных данных объемом в 60 и 80 предметов. Размер и ценность их брались случайно из диапазона от 1850 до 2150. Размер рюкзака позволял взять примерно половину предметов. Но даже для таких примерно однотипных наборах исходных данных время работы последовательного алгоритма варьировалось как минимум в десятки тысяч раз. Некоторые решались быстрее секунды, для других не хватало двух часов, в этих случаях работу программы приходилось завершать, не дождавшись получения окончательного решения. Поэтому при исследовании эффективности параллельного алгоритма мы отобрали только те варианты исходных данных, на которых последовательный алгоритм выдавал решение за время в пределах от 3 минут до 1 часа.

В процессе тестирования использовались компьютеры на базе четырехядерного процессора Intel Core i3 с тактовой частотой 3.07 GHz и 4 GB оперативной памяти, работающие под управлением 64-разрядной ОС Windows 7. Пропускная способность сети равнялась 100 Mb/s.

В таблице 1 приведены некоторые результаты вычислений, позволяющие оценить трудоемкость решения задачи, время решения и ускорение, полученное для нескольких случайных наборах исходных данных из 80 предметов. Трудоемкость задачи можно оценить по указанному количеству порожденных параллельных ветвей (суммарно для всех процессорных модулей).

Ссылки

[1] *Васильчиков В. В.* О поддержке рекурсивно-параллельного программирования в .NET Framework // Моделирование и анализ информационных систем. 2014. Т. 21, № 2. С. 15–25.

[2] *Васильчиков В. В.* Компоненты для организации параллельных вычислений в .NET Framework // Преподавание математики и компьютерных наук в классическом университете : материалы 5-й научно-методической конференции преподавателей математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Ярославль, 2014. С. 19–23.

[3] *Васильчиков В. В.* Об оптимизации и распараллеливании алгоритма Литтла для решения задачи коммивояжера // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 4. С. 401–411.

[4] *Pisinger D.* Algorithms for Knapsack Problems // Ph.D. Thesis, DIKU, University of Copenhagen, Denmark, 1995. Technical Report 95–1.

[5] *Гэри М. Джонсон Д.*. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

УДК 378.14+004

О. В. Власова, О. П. Якимова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vlasova_ov@mail.ru
E-mail: olga_pavl02@mail.ru

Из опыта применения системы автоматического тестирования программ для обучения основам программирования

Статья посвящена обсуждению опыта использования системы автоматического тестирования программ Яндекс-контест в учебном процессе.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: обучение программированию, системы автоматизированного тестирования, Яндекс-контест.

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

Д. Пойа

Перефразируя слова известного венгерского математика, хочется сказать: "Если хотите научиться программировать, то пишите программы". Как правило, студенты 1-2 курса строят математическую модель задачи и пишут реализующую ее программу в рамках лабораторных работ. В течение семестра преподаватель успевает проверить у каждого студента 5-7 лабораторных работ. Вроде бы совсем немного, почему же на этот процесс уходит так много времени и сил преподавателя?

В ЕГЭ по информатике, который сдают все абитуриенты, поступающие на наш факультет, около 40% заданий связаны с программированием, но при этом выпускник школы должен написать лишь одну программу полностью самостоятельно (задание 27), добавить кусок кода (задание 25) и найти ошибки в программе (задание 24). Все эти задания относятся ко второй части. На Рис. 1 и Рис. 2 приведены диаграммы, иллюстрирующие процент решивших задания второй части, причем для групп выпускников, набравших довольно высокие баллы ([1]). Большинство поступивших на математический факультет относятся к группе выпускников, имеющих 61-80 баллов по информатике и написать несложную программу не могут. Отсюда перед преподавателем стоят задачи: формирования алгоритмического мышления — раз, обучения синтаксису языка программирования — два, привития навыка анализа кода — три.

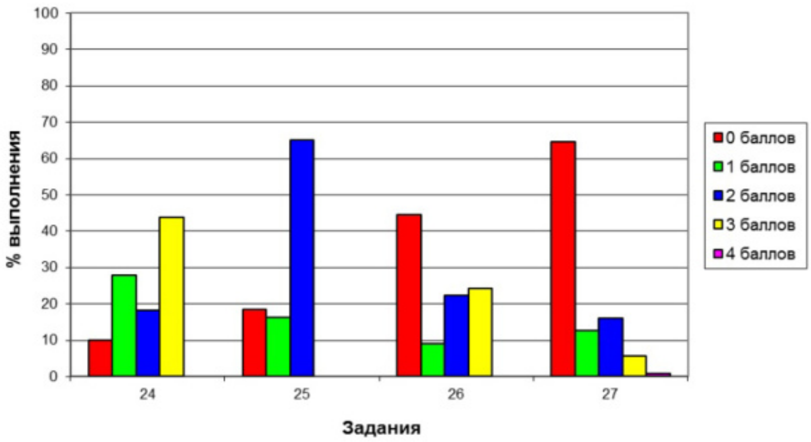


Рис. 1: Процент решения задач части 2 среди выпускников школ, набравших 61-80 тестовых баллов

Как правило, студент считает, что как только синтаксические ошибки исправлены, программу можно сдавать, пренебрегая всесторонним тестированием кода. Преподаватель же находит тестовые случаи, на которых программа работает неверно, побуждает к анализу алгоритма. Естественно, код надо переписывать и сдавать еще раз. А на это уходит драгоценное время практических занятий, на которых, кроме приема лабораторных, надо разобрать типичные задачи, возможные ошибки, обратить внимание на стиль и оформление кода и т. п. Необходимо увеличить число решаемых задач, чтобы количество перешло в качество и у студентов сформировался необходимый навык, но при этом сохранить тщательность проверки решения без увеличения часов работы преподавателя. Выходом из этой ситуации могут быть системы автоматического тестирования программ (САТ).

Такие системы широко используются при подготовке и проведении соревнований по программированию (например, http://acm.timus.ru, http://contest.yandex.ru, http://codeforces.com). Также они применяются и в вузах, как в нашей стране, так и за рубежом ([2], [3]).

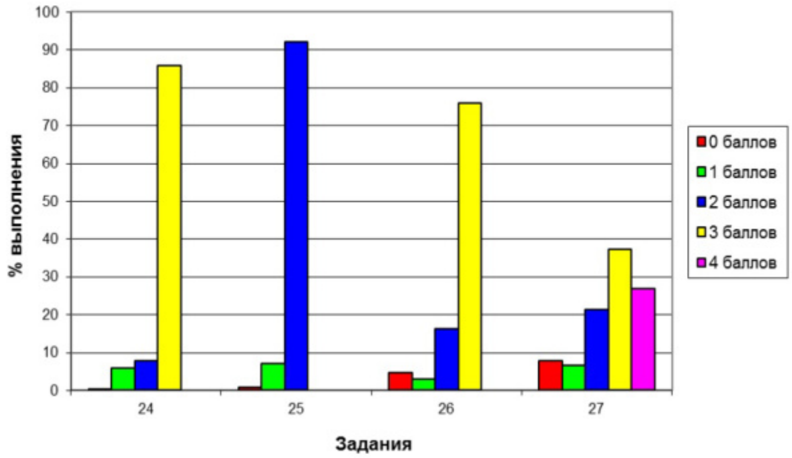


Рис. 2: Процент решения задач части 2 среди выпускников школ, набравших 81-100 тестовых баллов

САТ представляет собой программный комплекс, который позволяет проверять программную реализацию некоторого решения задачи по программированию путем тестирования этой реализации на множестве специальных тестов и сопоставляет результаты тестов с эталонными результатами. Кроме того, он отслеживает процесс работы приложения и контролирует потребление ресурсов системы. Как правило, современные САТ реализованы в виде веб-сайта, что позволяет использовать систему вне рамок локальной сети университета, обеспечивая максимально свободный доступ пользователям в любое время и с любых устройств.

С октября 2016 года в качестве такой системы мы используем сервис для онлайн-проверки заданий по математике и программированию Яндекс.Контест (https://contest.yandex.ru). Яндекс.Контест поддерживает более двадцати языков программирования и позволяет использовать разные схемы проведения состязаний. В системе реализован автоматизированный запуск решений участников на тестах, при этом строго ограничивается время и количество памяти, используемые тестируемой программой, что заставляет студента искать эффективное решение, иначе задача не будет засчитана.

На базе Яндекс.Контест мы в 2016/2017 учебном году провели турнир для студентов 1-го курса (все направления обучения), 2-го и 3-го курсов специальности компьютерная безопасность (КБ) математического факультета. В первом семестре 2017/2018 учебного года также были организованы соревнования для первокурсников и отдельно для второго курса КБ, ИБ и МКН.

Для первокурсников соревнование проходит в течение 2-х семестров и состоит из 10 туров в первом семестре и 6 туров во втором. На каждый тур первого семестра отводилась одна неделя. Предлагалось по 4 задачи разного уровня сложности; обязательными к решению были 2 задачи. Каждая задача описывается не в каких-то формальных терминах, а в виде жизненной ситуации. Студенту сначала нужно как-то формализовать эту историю, найти в ней математическую задачу, а уж потом решать путем разработки алгоритма и написания программного кода. Чтобы сдать задачу, студенты вынуждены устранить все синтаксические и логические ошибки, продумать систему тестов и выбрать оптимальный алгоритм решения. Тематика тура соответствовала материалам лекций и практических занятий (от линейных алгоритмов до алгоритмов обработки строк).

Приведем пример подобной задачи.

Сушка белья
Ограничение времени: 1 секунда
Ограничение памяти: 64Mb
Ввод: стандартный ввод или input.txt
Вывод: стандартный вывод или output.txt

Зимой очень трудно стирать и особенно сушить одежду. Но студенты ЯрГУ, проживающие в общежитии, очень находчивые. Они решили использовать радиатор, чтобы высушить все быстрее. Но радиатор мал, поэтому он может вместить только одну вещь. Студенты хотят высушить белье за минимально возможное время, пока не увидел комендант. Они попросят вас написать программу, которая рассчитает минимальное время для данного набора одежды. Есть N вещей, которые студенты только что выстирали. Каждая мокрая вещь содержит a_i влаги. Каждую минуту количество влаги, содержащейся в каждой вещи, уменьшается на единицу (конечно, только если вещь еще не полностью сухая). Когда количество влаги становится равным нулю, ткань становится сухой и эту вещь можно убирать. Каждую минуту ребята могут положить только одну вещь сушиться на радиатор. Радиатор очень горячий, поэтому сумма влаги в этой вещи уменьшается на k единиц за минуту (но не меньше нуля — если вещь содержит менее k единиц влаги, то через минуту вещь будет сухой). Задача состоит в минимизации общего времени сушки с помощью радиатора. Процесс сушки заканчивается, когда вся одежда сухая.

Формат ввода

В первой строке входных данных записано число n ($1 \leq n \leq 100000$) — количество вещей. Во второй строке записаны n целых чисел a_i ($1 \leq a_i \leq 10^9$) — количество влаги в каждой из вещей. В третьей строке записано число k ($1 \leq k \leq 10^9$) — количество влаги, выпаривающейся за минуту радиатором.

Формат вывода

Выведите единственное целое число — минимальное количество минут, необходимых, чтобы высушить все вещи.

Во втором семестре каждый тур длился 2 недели (6 задач на тур) и охватывал такие темы как динамическое программирование, динамические структуры данных, объектно-ориентированное программирование и т. д. Для студентов, не решивших необходимый объем задач, были открыты туры отработки.

Для 2 и 3 курсов специальности КБ соревнования включали в себя задачи на проектирование классов, применение различных структур данных и алгоритмов, в том числе алгоритмов на графах.

Система Яндекс.Контест оснащена довольно удобным интерфейсом. Преподаватель имеет возможность просматривать посланные решения и при необходимости обсудить со студентом тот или иной фрагмент алгоритма. Если же ошибки имеют массовый характер, то преподаватель может оперативно скорректировать ход учебного процесса, разобрав их на практическом занятии в группе. Монитор, присутствующий в каждом туре соревнования, позволяет отслеживать рейтинг участников. В нем показана информация о том, кто сдал решение, сколько времени (попыток) на него затрачено, какая именно задача была решена.

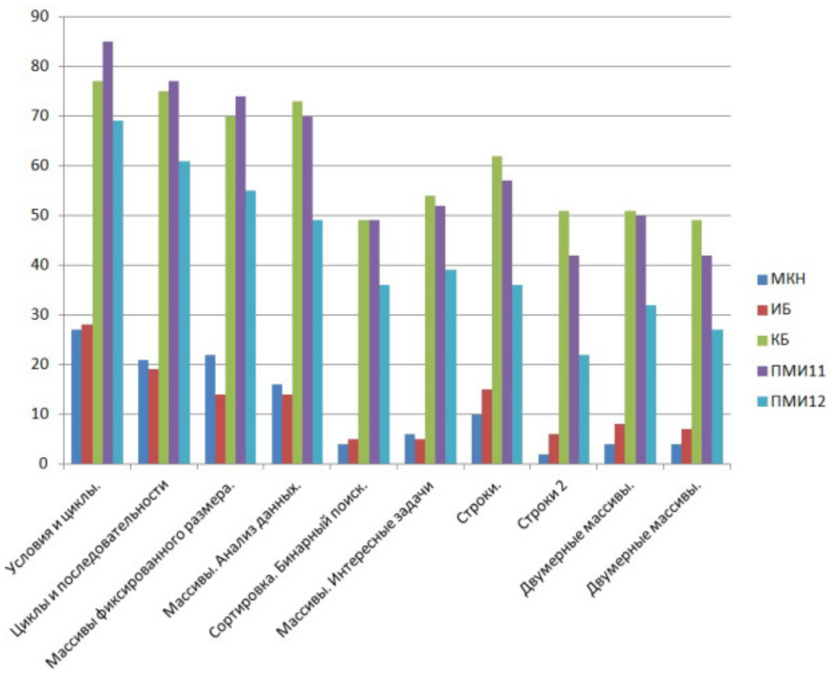


Рис. 3: Процент решенных задач по темам для различных направлений подготовки. 2016/17 учебный год, 1 семестр

Для сопровождения турнира в социальных сетях была создана и второй год функционирует группа Матфак.Контест (https://vk.com/math.uniyar.contest). В группе обсуждались организационные вопросы и вопросы, связанные с решениями задач, предоставлялась необходимая для решения задач теоретическая информация. В результате был установлен более тесный контакт между студентами и преподавателями. Кроме того, организация самостоятельной работы именно в виде соревнования с награждением победителей, создавала мотивацию для многих студентов. Мы отметили, что студенты между собой обсуждают эффективные пути решения задач, узнают и применяют новые алгоритмы.

Такой способ организации самостоятельной работы студента позволил нам увеличить количество решенных студентами за семестр задач до 20-40 в зависимости от уровня подготовки студента и быть уверенными в том, что все сданные решения прошли все необходимые тесты и нужные компетенции сформированы. Результаты каждого участника учитывались при выставлении оценок за экзамен. На диаграммах представлена информация о среднем проценте решенных задач по темам (см. Рис. 3 и Рис. 4).

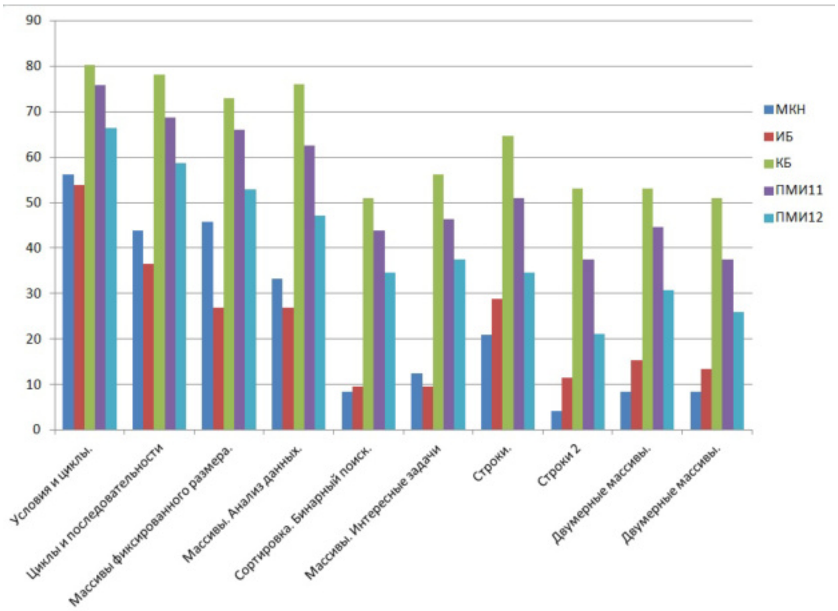


Рис. 4: Процент решенных задач по темам для различных направлений подготовки. 2017/18 учебный год, 1 семестр

Большее количество задач решили студенты специальности КБ и направления ПМИ. Возможно, это связано не только с более высокой начальной подготовкой (которая отражается в количестве баллов за ЕГЭ по информатике и математике), но и с большей мотивированностью этих студентов. Можно отметить, что в этом учебном году году увеличилась активность студентов ИБ-11.

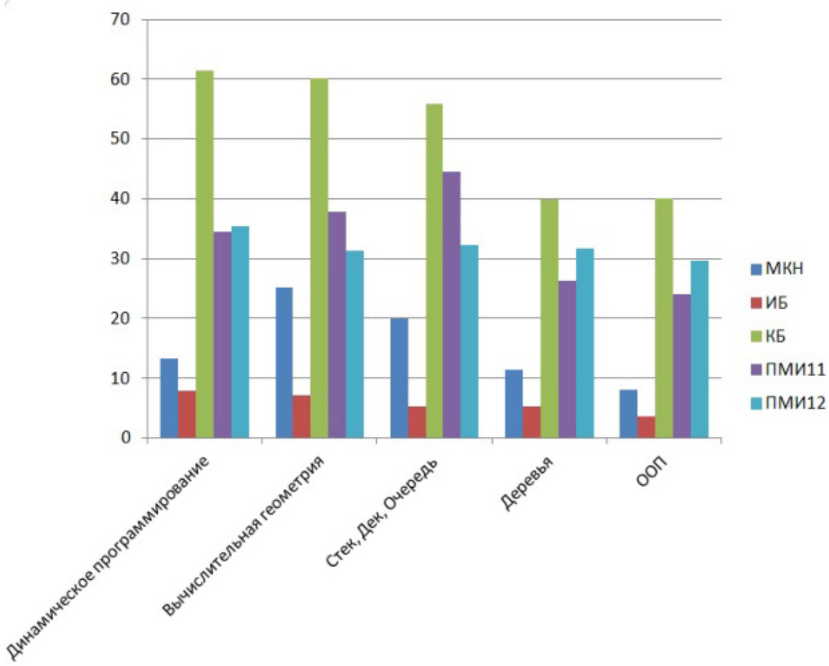


Рис. 5: Процент решенных задач по темам для различных направлений подготовки. 2016/17 учебный год, 2 семестр

Анализ результатов закончившегося турнира позволяет преподавателю оценить, как студенты усвоили лекционный материал по какой-либо теме. Например, легко видно, что наиболее трудными для всех направлений во втором семестре 2016/2017 учебного года оказались задачи, связанные с объектно-ориентированным программированием (см. Рис. 5).

Огромным преимуществом сервиса Яндекс.Контест является встроенная метрика кода, которая позволяет выявлять похожие решения. К сожалению, некоторые студенты вместо самостоятельной работы сдают результат чужого труда. Все выявленные сервисом схожие работы проверялись преподавателями вручную, чтобы избежать ошибки (на простых задачах могут быть одинаковые по смыслу решения, полученные независимо), и в результате задача не засчитывалась всем “сиамским близнецам”.

Из недостатков использования системы отметим необходимость создания наборов задач, их эталонных реализаций и полного пула тестов для каждой задачи. Все это легло на плечи преподавателей, что повлекло существенное увеличение временных затрат. Отдельную благодарность авторы выражают студенту математического факультета Даниилу Федулову, который активно помогал с созданием эталонных решений задач и введением их в систему. На данный момент наша база содержит уже более 150 задач и постоянно пополняется.

Опыт показал, что использование САТ позволяет вывести образование на новый, более высокий уровень. Но несмотря на все достоинства применения подобных систем стоит отметить, что они не способны заменить преподавателя в образовательном процессе, а лишь являются хорошим дополнением к нему.

Ссылки

[1] *Крылов С. С.* Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2017 года по информатике и ИКТ. М.: ФИПИ, 2017.

[2] *Деева Н. В., Кадан Н. В.* Обучение основам программирования с использованием системы автоматизированного тестирования учебных программ // Информационные технологии в науке, образовании и бизнесе: материалы Междунар. науч.-практ. конф., Махачкала, 25 июня 2011 г. Махачкала. 2011. С.224–230.

[3] *Корнеев Г. А.* Автоматизированная система тестирования программ. // Материалы VIII международной конференции "Современные технологии обучения «СТО-2002»". 24 апреля 2002 года. Том 2. С. 327–329. СПб.: СПбГЭТУ, 2002.

УДК 510

В. Г. Дурнев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: durnev@uniyar.ac.ru

Об одном подходе к усилению фундаментальных математических дисциплин учебного плана по специальности «Компьютерная безопасность»

Приводятся некоторые сведения об опыте математического усиления, углубления и дополнения за счет вузовского компонента таких фундаментальных математических дисциплин, как "Алгебра" и "Математическая логика и теория алгоритмов", и таких профессионально ориентированных математически насыщенных дисциплин, как "Теоретико-числовые методы в криптографии", "Криптографические методы защиты информации", "Методы алгебраической геометрии в криптографии" и "Модели безопасности компьютерных систем".

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: теория чисел, теоретико-числовые методы в криптографии, теория алгоритмов, алгоритмически неразрешимые проблемы, сложность выполнения алгоритма, криптография на эллиптических кривых, конечные поля и неприводимые над ними полиномы в алгоритмах шифрования.

Статья написана на основе доклада «Об опыте усиления некоторых математических дисциплин учебного плана по специальности *Компьютерная безопасность*» ([1]), сделанного автором на Межвузовской научно-практической конференции «Актуальные проблемы обеспечения информационной безопасности», проходившей в рамках XXI Пленума Федерального учебно-методического объединения в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 10.00.00 "Информационная безопасность" с 20 по 24 мая

2017 года на базе Самарского государственного университета и других образовательных организаций городов Самара, Саратов и Волгоград.

“Федеральный государственный стандарт высшего образования по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность (уровень специалитета)” (ФГОС 3+), утвержденный Минобрнауки 1 декабря 2016 года, определил, что “набор дисциплин (модулей), относящихся к базовой части программы специалитета, организация определяет самостоятельно в объеме, установленном настоящим ФГОС ВО, *с учетом соответствующей примерной основной образовательной программы*”. Разрабатываемый в настоящее время Федеральным учебно-методическим объединением по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 10.00.00 “Информационная безопасность” (ФУМО ВО ИБ) “Федеральный государственный стандарт высшего образования по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность (уровень специалитета)” (ФГОС 3++) усиливает, уточняет и развивает это положение.

“Примерную основную образовательную программу (ПООП) по специальности “10.05.01 Компьютерная безопасность” (уровень специалитета)” в настоящее время разрабатывает ФУМО ВО ИБ. После утверждения Минобрнауки она будет включена в “Реестр примерных основных образовательных программ” и ее выполнение становится обязательным для всех участников образовательного процесса. ПООП включает в себя “Примерный учебный план” (ПУП), содержащий наименования учебных дисциплин и их распределение по семестрам, *минимальное возможное отступление* от которого прямо прописано в ПУП, “Примерные программы учебных дисциплин” (ППУД), включая дисциплины специализаций.

Содержание каждой “Примерной программы учебной дисциплины” должно быть полностью включено в разработанную вузом соответствующую “Рабочую программу учебной дисциплины”. При этом допускается разбиение дисциплины, в названии которой присутствует союз “и”, на две дисциплины. Например, дисциплина “Математическая логика и теория алгоритмов” может быть разбита на две дисциплины: “Математическая логика” и “Теория алгоритмов”. Все это можно рассматривать как уточнение смысла слов *с учетом соответствующей примерной основной образовательной программы*”.

Так как “Примерные программы” основных для направления “Информационная безопасность” математических дисциплины содержат достаточно большой объем трудного и весьма абстрактного математического материала, то и с учетом уровня общематематической подготовки студентов, возникает проблема, как при имеющемся фонде времени, выделяемого на изучение этих дисциплины, выполнить требования ПООП и ППУД.

В заметке описывается один из возможных подходов к решению этой проблемы — использование вариативной части ПООП для усиления и укрепления ее базовой части'.

Еще "Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 075200 "Компьютерная безопасность"" (Москва, 2000), подпункт 6.1.2 пункта 6.1 "Требования к разработке основной образовательной программы подготовки математика" раздела 6. "Требования к разработке и условиям реализации основной образовательной программы подготовки выпускника по специальности 075200-Компьютерная безопасность" гласил: "При реализации основной образовательной программы высшее учебное заведение имеет право ... в каждом блоке дисциплин использовать часы национально-регионального (вузовского) компонента для образования новых дисциплин этого блока и/или усиления дисциплин федерального компонента". На математическом факультете Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова еще в 2000 году при разработке учебного плана по специальности "Компьютерная безопасность" пошли по пути использования часов национально-регионального (вузовского) компонента для усиления дисциплин федерального компонента путем введения новых дисциплин, поддерживающих, усиливающих, углубляющих и дополняющих дисциплины федерального компонента.

Дисциплина "Введение в теорию множеств и логическую символику" предназначена для студентов первого курса (первый курс, 1-й или 2-й семестр, 3 часа в неделю). Она подводит теоретико-множественный фундамент под математические дисциплины. Через понятие *множество* определяются такие математические понятия, как *упорядоченная пара и упорядоченный набор элементов*, *соответствие*, *отношение*, *отображение* и *функция*, т.е. строится теоретико-множественный фундамент математики. С использованием понятий *отношение эквивалентности*, *класс эквивалентности* и *фактормножество по отношению эквивалентности* строится цепочка расширений числовых систем: *система натуральные числа* (система Пеано) — *кольцо целых чисел — поле рациональных чисел — поле действительных чисел — поле комплексных чисел — алгебра кватернионов*. На основе понятий *инъективное отображение* и *биективное отображение* определяется понятие *равномощности множеств*, *мощность множества A не превосходит мощности множества B*. Доказывается теорема Г. Кантора о мощности множества всех подмножеств данного множества, изучаются счетные и континуальные множества. Весь этот материал в дальнейшем используется при изучении таких математических дисциплин, как "Математический анализ", "Алгебра" и "Теория вероятностей", а так же дисциплин специализации. Изучается некоторый начальный материал по математической логике — логика высказываний и исчисление высказываний. Очень кратно обсуждается логика предикатов. Все это более подробно будет изучаться в дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов", а на этом этапе осуществляется лишь первоначальное знакомство с базовыми понятиями канторовской "наивной" теории множеств и математической логики.

Дисциплина "Алгебра" усиливается целым рядом дисциплин. Это прежде всего "Линейная алгебра" (второй курс, 3-4 семестры, 4 часа в неделю), в которой изучается традиционный материал: векторные пространства, линейные отображения, билинейные и квадратичные формы, полилинейные отображения. Подробно изучаются линейные операторы и жорданова нормальная форма. В евклидовом и эрмитовом пространствах изучаются сопряженные операторы и доказывается спектральная теорема для нормальных операторов. Завершается курс изучением аффинных и евклидовых точечных пространств, выпуклых множеств, задачи линейного программирования, подходов к ее решению Левина–Хачияна, квадрик и их канонических уравнений. Дисциплина "Избранные вопросы алгебры" (второй курс, 2-й семестр, 3 часа в неделю) посвящена изучению элементов теории полей — конечные и алгебраические расширения, "теоремы о башне полей" и линейных рекуррентных последовательностей. Дисциплина "Общая алгебра", другое название — "Фундаментальные алгебраические структуры" посвящена изучению классических алгебраических структур — группоидов, полугрупп, моноидов, групп, колец и полей. При изучении групп особое внимание уделяется комбинаторной теории групп, нашедшей применение в современной криптографии (Group-based cryptography) — заданию групп образующими и определяющими соотношениями, фундаментальным проблемам М. Дэна, теоремам П. С. Новикова и С. И. Адяна – М. Рабина об алгоритмической неразрешимости соответствующих проблем. Методами комбинаторной теории групп доказывается классическая теорема о строении конечно порожденных абелевых групп. Обсуждаются теоретико-групповые аспекты некоторых криптоалгоритмов, лежащих в основе современных стандартов шифрования, цифровой подписи и выработки хэш-значения. Изучаются ассоциативные кольца и кольцевые конструкции, идеалы, факторкольца, теоремы о гомоморфизмах для колец. Особое внимание уделяется теории полей и их расширений — конечных и алгебраических, изучению конечных полей и их мультипликативных групп, неприводимых и примитивных полиномов над конечными полями. Достаточно спорным является материал, посвященный модулям и представлениям групп и алгебр. Завершается курс углубленным изучением линейных рекуррентных последовательностей и систем линейных уравнений над кольцом целых чисел, что позволяет подвести слушателей к пониманию важности вопроса о сложности алгоритма, решающего данную задачу, наряду с вопросом о существовании самого алгоритма. Дисциплина "Общая алгебра" служит фундаментом и для дисциплины "Методы алгебраической геометрии в криптографии".

Дисциплина "Математическая логика и теория алгоритмов" развивается и усиливается такими дисциплинами, как "Теория алгоритмов" (четвертый курс, 7-й семестр или пятый курс, 9-й семестр, 3 часа в неделю), "Сложность вычислений" (четвертый курс, 8-й семестр или пятый курс, 10-й семестр, 3 часа в неделю), "Алгебраическая алгоритмика' (2-3 курсы, 4-й и 5-й семестры, 3 часа в неделю) и "Теория автоматов" (5-й курс, 10-й семестр, 3 часа в неделю).

Дисциплина "Теория алгоритмов" в основном посвящена изучению двух подходов к уточнению интуитивного понятия "алгоритм". В терминах частично рекурсивных функций и через понятие машины Тьюринга, доказывается "эквивалентность" этих двух подходов: функция вычислима по Тьюрингу тогда и только тогда, когда она частично рекурсивна. В ходе доказательства слушатели знакомятся с фундаментальным математическим понятием - понятием *арифметизации теории*, что представляется чрезвычайно важным само по себе. Вершиной теории служит теорема Райса об алгоритмической нераспознаваемости свойств вычислимых функций по их программам, что чрезвычайно важно для будущих специалистов в области компьютерных наук. Обсуждаются алгоритмически неразрешимые проблемы из различных разделов математики: теории алгоритмов, математической логики, алгебры, теории чисел, теории формальных грамматик, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии, математического анализа, теории конечных автоматов, что позволяет подвести слушателей к пониманию утверждения о том, что алгоритмически неразрешимые проблемы проникли во все разделы математики и с этим надо считаться, как с объективной реальностью. Алгоритмическая неразрешимость проблемы остановки для машин Тьюринга используется в дисциплине "Модели безопасности компьютерных систем" при изучении модели HRU дискреционного управления доступом. Из-за недостатка времени обычно не удается обсудить другие вычислительные модели: нормальные алгорифмы А. А. Маркова, машины с произвольным доступом к памяти и диофантовы множества и функции (10-я проблема Д. Гильберта), хотя это и планируется сделать за счет некоторого перераспределения материала и часов. В дисциплине "Сложность вычислений" основное внимание уделяется вопросу о сложности распознавания языков на многоленточных детерминированных и недетерминированных машинах Тьюринга. При этом основное внимание по ряду причин уделяется обсуждению классов P-TIME и NP-TIME, NP-трудных и NP-полных проблем, что представляется достаточно близким интересам современной теоретической информатики (Computer Science) и асимметричной криптографии

(Public Key Cryptography). Слушатели знакомятся с некоторыми подходами к сложностной классификации языков и проблем. К этому же блоку относится и дисциплина “Алгебраическая алгоритмика”, в которой изучаются прежде всего конкретные алгоритмы для кольца целых чисел и колец многочленов над полями и кольцами, вычисления в конечных полях, дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и быстрое преобразование Фурье (БПФ). Дисциплина “Алгоритмы на графах” также в основном посвящена изучению конкретных алгоритмов, связанных с графами.

Дисциплина “Теория чисел” (второй курс, 3-й семестр, 2 часа в неделю) служит основой для дисциплины “Теоретико-числовые методы в криптографии”. В ней изучаются вопросы, связанные с натуральными и целыми числами: теория делимости, сравнения и вычеты, квадратичные вычеты, закон взаимности, теоремы Ферма и Эйлера, играющие важную роль в системе RSA, теоретико-числовые функции, цепные дроби, простые числа и закон их распределения, распределение простых чисел в арифметических прогрессиях (теорема Дирихле), первообразные корни и индексы, что, как известно, очень важно для современной асимметричной криптографии. Эти знания используются и при изучении некоторых разделов дисциплины “Криптографические методы защиты информации”.

Знания, полученные слушателями при изучении дисциплин “Теория графов” и “Алгоритмы на графах”, облегчают им изучение, в частности, модели *Take-Grant* в дисциплине “Модели безопасности компьютерных систем”.

Дисциплины “Теория автоматов” и “Комбинаторика” служат важным дополнением к дисциплине “Дискретная математика”.

Дисциплина “Топология” дополняет дисциплину “Математический анализ”, в частности, через изучение общего понятия “непрерывность” в метрических и топологических пространствах.

Дисциплина “Теория функций комплексного переменного” не только дополняет дисциплину “Математический анализ”, но и играет важную роль в приложениях, в частности, в электротехнике.

Дисциплина “История математики” вносит существенный вклад в общематематическое образование выпускников, в их общенаучную культуру.

Для студентов, подготовка которых ориентирована на научно-исследовательскую или проектную деятельность, на наш взгляд, было бы достаточно естественно завершить изучение математического цикла дисциплин некоторой дисциплиной, посвященной обсуждению общих математико-философских вопросов, связанных с основаниями математики, например, дисциплиной “Некоторые вопросы оснований математики”. Однако пока это не позволяют сделать как ограничения, связанные с общей трудоемкостью учебного плана, так и трудности с определением того, каким видом деятельности в основном будут заниматься выпускники[1]. Дисциплину "Некоторые вопросы оснований математики" целесообразно было бы включить в учебный план для тех выпускников, которые готовятся для "Научно-исследовательской деятельности" или для "Проектной деятельности". В этой дисциплине можно было бы достаточно подробно обсудить вопрос о генетическом и аксиоматическом построении математических теорий: рассмотреть последовательное построение, исходя из системы натуральных чисел, кольца целых чисел, полей рациональных, вещественных и комплексных чисел и аксиоматическое введение множества натуральных чисел (арифметика Пеано), аксиоматическое задание кольца целых чисел и полей рациональных, вещественных и комплексных чисел. Обсудить вопрос об аксиоматической теории множеств, формализм Д. Гильберта (доведенный до логического конца аксиоматический метод, его ограниченность — теорема К. Геделя о неполноте). При обсуждении вопроса о непротиворечивости систем аксиом на основе теоремы К. Геделя о недоказуемости в "достаточно сильной" непротиворечивой теории формулы, содержательно (при естественной интерпретации) утверждающей, что рассматриваемая теория непротиворечива, рассмотреть вопрос о финитных (конструктивных) и нефинитных (неконструктивных) методах в математики, что тесно связано с компьютерной практикой.

Завершим заметку обсуждением одного факта, крайне важного для проблемы обеспечения информационной безопасности.

В книге П. Н. Девянина [5, с. 28] сформулировано следующее принципиально важное, фундаментальное положение.

"Согласно требованиям основных критериев оценки безопасности КС [6], [7] их системы защиты должны строиться на основе *формальных моделей*. С использованием формальных моделей должно быть *теоретически обосновано* соответствие системы защиты требованиям заданной политики безопасности".

Предлагается следующее уточнение этого принципа.

"Системы защиты КС должны строиться на основе *формальных (формализованных) математических моделей*. С использованием *формальных (формализованных) математических моделей* должно быть *математически доказано* соответствие системы защиты требованиям заданной политики безопасности".

Это связано и с развернувшимися в последние годы исследованиями в области поиска математических доказательств криптографической стойкости криптопротоколов и криптоалгоритмов.

[1]ФГОС ВО предусматривает следующие виды деятельности "Научно-исследовательская деятельность", "Проектная деятельность", "Контрольно-аналитическая деятельность", "Организационно-управленческая деятельность" и "Эксплуатационная деятельность".

Все это приводит к постановке вопроса о необходимости дополнения математической части учебного плана для студентов, подготовка которых ориентирована на научно-исследовательскую или проектную деятельность в области обеспечения информационной безопасности, а также для обучающихся в магистратуре по направлению “Информационная безопасность”, дисциплинами типа “Теория доказательств” или “Введение в метаматематику”, “Компьютерное доказательство математических теорем” или “Компьютерная проверка доказательств математических теорем”, “Математические методы верификации компьютерных программ” и “Математические методы обфускации компьютерных программ”. Конечно, при введении перечисленных дисциплин следует соблюдать определенную сбалансированность и осторожность, учитывать достигнутый общематематический уровень слушателей, по возможности избегать технически сложных доказательств, сосредоточивая внимание на идейной стороне обсуждаемого материала. Но не надо забывать и о том, что нередко *идеи становятся ясны только после проведения технических выкладок.* Руководствуемся принципом “*Вычисления без руководящей идеи – пустая трата времени, идея без вычислений может превратиться в рассуждения ни о чем (схоластика) и повиснуть в воздухе*”. Возможные траектории движения: “*Вычисления — идеи — вычисления*” или “*Идеи — вычисления — идеи*”.

В 90-е годы XX века *идеологи* привлечения математических факультетов классических университетов к подготовке кадров для научно-исследовательской и практической деятельности в области обеспечения информационной безопасности исходили, в частности, из того, что эта область, особенно криптография, может стать в XXI веке таким же источником важных и интересных теоретических и прикладных математических проблем, каким в конце XIX века – первой половине XX века была физика. Это нашло отражение при разработке ГОС ВО, ФГОС ВО, “Примерных учебных планов” и “Примерных программ учебных дисциплин” по ведущей специальности группы “Информационная безопасность” — “Компьютерная безопасность”. ГОС ВО, ФГОС ВО и “Примерные учебные планы” по специальности “Компьютерная безопасность” были сформированы более математически насыщенными, чем, например, ГОС ВО, ФГОС ВО и “Примерные учебные планы” по специальности “Прикладная математика и информатика” (на это в своих выступлениях *Идеологи*” неоднократно обращали внимание). В этом обсуждаемые документы стали ближе к ГОС ВО, ФГОС ВО и “Примерным учебным планам” по специальности “Математика”, но отличались от них преобладанием математических дисциплин дискретного цикла, в то время, как ГОС ВО, ФГОС ВО и “Примерные учебные планы” по специальности “Математика” имели и продолжают иметь ярко выраженный крен в область дисциплин непрерывного цикла, что не является бесспорным в компьютерный век, век всеобщей оцифровки[2] и господства дискретных преобразователей информации.

Ссылки

[1] *Дурнев В. Г.* Об опыте "усиления" некоторых математических дисциплин учебного плана по специальности "Компьютерная безопасность" // Труды Межвузовской научно-практической конференции "Актуальные проблемы обеспечения информационной безопасности". Самара: Изд-во. Инсома-пресс, 2017. С. 85–89.

[2] Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 075200 "Компьютерная безопасность". Москва, 2000.

[3] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования направления подготовки (специальности) 090301 "Компьютерная безопасность" (квалификация (степень) "специалист"). Москва, 2011.

[4] Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по специальности 10.05.01 "Компьютерная безопасность" (уровень специалитета). Москва, 2016.

[5] *Девянин П. Н.* Модели безопасности компьютерных систем. Управление доступами и информационными потоками. Учебное пособие для вузов. М.: Горячая-линия-Телеком, 2012. 320 с.

[6] Безопасность информационных технологий. Критерии оценки безопасности информационных технологий // Руководящий документ (ГОСТ Р ИСО / МЭК 15408) М.: Гостехкомиссия России, 2002. Ч. 1–3.

[7] Trusted Computer System Evaluation Criteria. US Department of Defense, 1985. CSC-STD-001-83.

[2]Распоряжением Правительства Российской Федерации № 1632-р от 28 июля 2017 года утверждена Государственная Программа "Цифровая экономика Российской Федерации".

УДК 517.51

И. П. Иродова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: IrinaIrodova@gmail.com

Диадические пространства Лизоркина–Трибеля

Дано определение и приведены некоторые свойства диадического пространства Лизоркина–Трибеля.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: диадическое разбиение, полиномиальные приближения, пространство Лизоркина–Трибеля.

Напомним, как определяются пространства Лизоркина–Трибеля в классическом случае (см., например, [1]). Разложим функцию f из $L_p(R^d)$, $1 < p < \infty$, в ряд по f_n, где функции f_n определяются с помощью преобразования Фурье. Пространство $L_p^{\lambda\theta}(R^d)$ задается как множество функций f, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L_p^{\lambda\theta}(R^d)} := \left\| \left\{ 2^{\lambda n} |f_n(x)| \right\}_{l_\theta} \right\|_{L_p(R^d)}, \tag{1}$$

где $\{a_n\}_{l_\theta} := \left(\sum |a_n|^\theta \right)^{1/\theta}$.

Если поменять порядок операций в (1), то получим определение пространства Никольского–Бесова $B_p^{\lambda\theta}(R^d)$, так как

$$\|f\|_{B_p^{\lambda\theta}(R^d)} := \left\{ 2^{\lambda n} \|f_n\|_p \right\}_{l_\theta}.$$

Известно (см., например, [1]), что $L_p^{\lambda p} = B_p^{\lambda p}$, а если $\theta = 2$, то пространства $L_p^{\lambda 2}$ совпадают с пространствами бесселевых потенциалов L_p^λ.

Сейчас по аналогии с тем, как это было сделано для классических пространств Лизоркина–Трибеля, мы введем диадические пространства Лизоркина–Трибеля $L_p^{\lambda\theta}(D)$, используя, однако, локальные приближения многочленами, а не преобразование Фурье.

Начнем с определения диадического разбиения. Пусть Q_0 — единичный куб в d-мерном пространстве, $Q_0 = [0,1]^d$. Разделим Q_0 гиперплоскостями параллельными координантным гиперплоскостям на равные кубы с длиной ребра 2^{-n}. Полученное разбиение обозначим через D_n. Семейство $D = \{D_n, n = 0, 1, ...\}$ будем называть диадическим семейством.

Обозначим через P_k пространство многочленов степени не более $k-1$ по каждой из d переменных. Тогда функция $g_n = \sum_{Q \in D_n} g_Q \chi_Q$, где $g_Q \in P_k$, а χ_Q — характеристическая функция куба Q, является кусочно-полиномиальной функцией, построенной по разбиению D_n. Обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_p(Q_0)$ с помощью таких кусочно-полиномиальных функций через $e_k(f, D_n)_p$. Таким образом,

$$e_k(f, D_n)_p = \inf ||f - \sum_{Q \in D_n} g_Q \chi_Q||_{L_p},$$

где нижняя грань взята по всем наборам полиномов g_Q. Здесь и всюду ниже $L_p = L_p(Q_0)$.

Тогда диадическое пространство Никольского–Бесова, построенное по семейству D, определяется с помощью нормы (квазинормы при $0 < p < 1$)

$$\|f\|_{B_p^{\lambda\theta}(D)} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n\lambda} e_k(f, D_n)_p \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} + \|f\|_{L_p};$$

здесь $D = \{D_n, n = 0, 1, ...\}$ — семейство диадических кубов.

Диадическое пространство Никольского–Бесова, которое было введено в [2], можно описать с помощью эквивалентной квазинормы. Для ее определения обозначим через f_n кусочно-полиномиальную функцию наилучшего приближения, т. е.

$$e_k(f, D_n)_p = \|f - f_n||_{L_p}.$$

Заметим, что $f = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n - f_{n-1})$ в смысле сходимости в пространстве L_p. Тогда

$$\|f\|_{B_p^{\lambda\theta}(D)} = \left\{ 2^{\lambda n} \|f_n - f_{n-1}\|_p \right\}_{l_\theta}.$$

Поменяем порядок операций в последней формуле и рассмотрим множество функций f, у которых величина

$$\| \left\{ 2^{\lambda n} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \right\}_{l_\theta} \|_{L_p}$$

конечна. Если теперь обозначить

$$M_D^{\lambda\theta} f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n\lambda} |f_n(x) - f_{n-1}(x)\right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

то определение $L_p^{\lambda\theta}(D)$ можно дать следующим образом.

Определение 1. *Функция f из $L_p(Q_0)$ принадлежит диадическому пространству Лизоркина–Трибеля $L_p^{\lambda\theta}(D)$, построенному по диадическому семейству D, $0 < p, \theta, \lambda < \infty$, если функция $M_D^{\lambda\theta} f$ принадлежит L_p. При этом*

$$|f|_{L_p^{\lambda\theta}(D)} = \|M_D^{\lambda\theta} f\|_p.$$

Отметим, что в отличие от классических пространств определение дано для $p > 0$, а не для $p > 1$.

Приведем некоторые свойства диадических пространств Лизоркина–Трибеля. Для формулировки первого результата обозначим через $P_Q(f)$ многочлен наилучшего приближения функции f на кубе Q в норме пространства $L_p(Q)$. Для куба Q из D_n обозначим через Q' единственный куб из D_{n-1}, который содержит Q. Пусть Q_0' будет пустым множеством.

Теорема 1. *Функция f из $L_p(Q_0)$ принадлежит пространству $L_p^{\lambda\theta}(D)$, $k > \lambda > 0$, $0 < p, \theta < \infty$, тогда и только тогда, когда*

a)

$$f = \sum_{Q \in D} (P_Q(f) - P_{Q'}(f))\, \chi_Q \qquad \text{(сходимость в } L_p\text{)};$$

b) конечна величина

$$\| \left\{ 2^{\lambda n} |P_{Q_{nx}}(f)(x) - P_{Q'_{nx}}(f)(x)| \right\}_{l_\theta} \|_{L_p};$$

здесь Q_{nx} — куб из D_n, содержащий точку x.

В заключение приведем результат, который показывает, что между диадическими пространствами Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля существует такая же связь, как и в классическом случае.

Теорема 2. *Пусть $0 < p, \theta, \lambda < \infty$, тогда имеют место следующие непрерывные вложения.*

Если $0 < p < \theta < \infty$, то $B_p^{\lambda,p}(D) \subset L_p^{\lambda,\theta}(D) \subset B_p^{\lambda,\theta}(D)$.

Если $0 < \theta < p < \infty$, то $B_p^{\lambda,\theta}(D) \subset L_p^{\lambda,\theta}(D) \subset B_p^{\lambda,p}(D)$.

Если $\theta = p$, то $B_p^{\lambda,p}(D) = L_p^{\lambda,p}(D)$.

Ссылки

[1] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[2] *Иродова И. П.* О диадических пространствах Никольского-Бесова и их связи с классическими пространствами // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 683–696.

УДК 517.51

И. П. Иродова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: IrinaIrodova@gmail.com

Приближение сплайнами с фиксированными узлами

В статье приводится два способа приближения функции на отрезке с помощью параболических сплайнов с фиксированными узлами

Библиография: 1 название.

Ключевые слова: параболический сплайн, фиксированное разбиение, B-сплайны, приближение функции.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывно дифференцируемая функция f. Используя метод наименьших квадратов, нужно найти параболический сплайн s дефекта 1, который приближает функцию f. Сплайн должен быть построен по разбиению, которое заранее выбрано. Это одна из задач, которые решаются на спецкурсе "Сплайны в вычислительной математике". Спецкурс ориентирован на студентов 3-4 курса математического факультета. Меняются алгоритмы приближения, функции, которые приближают, не обязательно должны быть гладкими, заданы они могут быть и на квадрате, но неизменным остается аппарат приближения — сплайны.

В этой заметке мы покажем, как может быть решена предложенная задача, и наметим путь обобщения этого способа.

Напомним, в чем заключается метод наименьших квадратов. Пусть $f \in L_2[a, b]$, A — конечномерное пространство. Функцию $s^* \in A$ будем называть элементом наилучшего приближения, если

$$\|f - s^*\|_{L_2[a,b]} = \inf_{\{a_k\}} \|f - \sum_{i=1}^{N} a_k \varphi_k\|_{L_2[a,b]};$$

здесь $N = \dim A$, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ — базис пространства A.

Так как функционал, стоящий под знаком точной нижней грани, выпуклый, то, взяв производные по всем a_i $(i = 1, ..., N)$ и приравняв их к нулю, получим систему линейных уравнений

$$(f, \varphi_i) = \sum_{k=1}^{N} a_k^*(\varphi_k, \varphi_i) \tag{1}$$

для нахождения a_k^*. Здесь $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Тогда $s^* = \sum_{k=1}^{N} a_k^* \varphi_k$.

Выбирая пространство A, мы меняем аппарат приближения. Сейчас в качестве A рассмотрим пространство S_Δ^k сплайнов степени $k-1$ с фиксированным разбиением Δ. Напомним определение S_Δ^k. Пусть Δ — разбиение отрезка $[a, b]$ на n интервалов $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$. Точки $t_j, j = 0, ..., n$ называются узлами разбиения. Функция s принадлежит пространству S_Δ^k, если она на каждом отрезке разбиения совпадает с некоторым многочленом степени не выше $k-1$ и на $[a, b]$ обладает всеми производными до порядка $k-2$ включительно. В частности, если $k = 2$, то S_Δ^2 — пространство ломаных. Случай приближения ломаными рассмотрен в [1].

Рассмотрим случай приближения параболическими сплайнами S_Δ^3. Чтобы решить задачу, используя метод наименьших квадратов, нужно выбрать базис пространства. Заметим, что размерность пространства S_Δ^3 равна $n + 2$. Базис этого пространства можно выбирать разными способами. Для практических приложений самым удобным является базис из B-сплайнов, который определяется соотношениями

$$B_{i1}(x) = \begin{cases} 1, & t_i \le x < t_{i+1}; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$B_{ik}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(x).$$

В частности, для параболических сплайнов получаем следующее определение:

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-t_i)^2}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})}, & t_i \le x \le t_{i+1}; \\ \\ \frac{(x-t_i)(t_{i+2}-x)}{(h_i + h_{i+1}) \cdot h_{i+1}} + \frac{(t_{i+3}-x)(x-t_{i+1})}{h_{i+1} \cdot (h_{i+1} + h_{i+2})}, & t_{i+1} \le x \le t_{i+2}; \\ \\ \frac{(x-t_{i+3})^2}{h_{i+2} \cdot (h_{i+1} + h_{i+2})}, & t_{i+2} \le x \le t_{i+3}; \\ \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $h_i = t_{i+1} - t_i$, $B_i = B_{i3}$.

Чтобы решить систему (1), нужно вычислить скалярные произведения (B_i, B_j). Прежде всего заметим, что из формулы (2) следует, что носителем B_i является отрезок $[t_i, t_{i+3}]$. Поэтому $(B_i, B_j) = 0$, если $|i-j| > 2$. Вычисление скалярного произведения (B_i, B_j) — задача несложная, но трудоемкая. Например,

$$\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} B_i^2(x)dx = \frac{10h_i^2 h_{i+1} + 5h_i h_{i+1}^2 + h_{i+1}^3}{30(h_i + h_{i+1})^2}.$$

Чтобы избежать громоздких формул, покажем, как решить систему (1), если взять равномерное разбиение отрезка $[a,b]$. Пусть $h_i = h$. В этом случае формулы (2) упростятся, но даже сейчас потребуется много времени, чтобы вычислить все (B_i, B_j), $i,j = -2, ..., n-1$. Отметим, что для построения базиса пространства S_Δ^3 добавлены слева и справа по два фиктивных узла $t_{-2} = t_{-1} = a$ и $t_{n+1} = t_{n+2} = b$.

Приведем результат вычислений элементов матрицы C, где $c_{ij} = (B_i, B_j)$ для параболического сплайна, построенному по равномерному разбиению:

$$c_{kk} = \frac{11h}{20}, \quad c_{k,k+1} = \frac{13h}{60}, \quad c_{k,k+2} = \frac{h}{120}, \quad k = 0, ..., n-3.$$

Элементы двух первых и двух последних строк матрицы C вычисляются по формулам

$$c_{-2,-2} = c_{n-1,n-1} = \frac{h}{20}, \qquad c_{-2,-1} = c_{n-1,n-2} = \frac{13h}{120},$$

$$c_{-2,0} = c_{n-1,n-3} = \frac{h}{120}, \qquad c_{-1,-2} = c_{n-2,n-1} = \frac{13h}{120},$$

$$c_{-1,-1} = c_{n-2,n-2} = \frac{h}{2}, \qquad c_{-1,0} = c_{n-2,n-3} = \frac{13h}{60},$$

$$c_{-1,1} = c_{n-2,n-4} = \frac{h}{120}.$$

Теперь остается приближенно вычислить интегралы $b_i = (f, B_i)$, $i = -2, -1, ..., n-1$, и решить линейную систему $Ca^* = b$ с симметричной пятидиагональной матрицей C.

Пусть теперь приближается функция f, про которую известно, что она непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, за исключением отдельных точек, например, $f(x) = |\cos x|$. Покажем, как в этом случае использовать приближение параболическими сплайнами. Если взять сплайн, построенный по равномерному разбиению, то он плохо приблизит функцию в точках, где нет производной. Есть два способа уменьшить погрешность: взять более мелкую сетку разбиения рядом с этими точками или выбрать B-сплайны, которые имеют такую же гладкость, как и приближаемая функция. Первый способ решения задачи мы уже описали. Перейдем ко второму варианту решения. Для этого будем использовать B-сплайны с кратными узлами.

Рассмотрим для примера гладкую функцию, которая не имеет производной только в одной точке z. Выберем разбиение

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < z = z < t_{m+2} < \dots < t_n = b; \; z = t_m = t_{m=1}.$$

Как и ранее, добавим в начало и конец последовательности фиктивные узлы $t_{-2} = t_{-1} = a$ и $t_{n+1} = t_{n+2} = b$. Формулы (2) для вычисления B-сплайнов не изменились. Выбирая четыре узла, мы строим параболический сплайн. Продвигаясь по последовательности узлов (начинаем с узла t_{-2}), мы построим все $n+2$ базисные функции пространства S^3_Δ.

Отметим изменения, которые произошли с B-сплайнами. Они коснулись только B-сплайнов, построенных по четырем точкам, среди которых две были равны z. Это сплайн B_{m-2}, построенный по узлам (t_{m-2}, t_{m-1}, z, z), сплайн B_{m-1}, построенный по (t_{m-1}, z, z, t_{m+2}), и сплайн B_m, построенный по (z, z, t_{m+2}, t_{m+3}). Эти B-сплайны состоят из двух (а не из трех) кусков парабол. Параболы стыкуются в точке z только по непрерывности. Все остальные B-сплайны являются непрерывно дифференцируемыми функциями и в точке z равны нулю. Формулы для вычисления скалярных произведений (B_i, B_j) почти не изменятся, только нужно учитывать, что $h_m = 0$.

Мы привели два способа приближения параболическими сплайнами. После изучения этой темы студенты должны написать соответствующие программы и сравнить погрешности приближения.

Ссылки

[1] *К. Де Бор.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Наука, 1985.

УДК 513.7

В. С. Климов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vsk76@list.ru

Спрямляемые кривые и случайные прямые

Сравниваются различные подходы к определению длины кривой. Обсуждаются свойства меры и размерности по Хаусдорфу.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: длина кривой, мера, проекция, прямая.

Спрямляемые кривые — это удобная тема для преподавания, хороший трамплин для научных исследований и широкое поле деятельности для разнообразных приложений. В первом пункте сравниваются аналитический и геометрический подходы к определению длины кривой. Второй раздел посвящён мерам Хаусдорфа. Заключительный пункт связан с интегральной геометрией.

1. Длина параметризованной кривой. Всюду далее $\mathbb{R}^n$ — действительное n-мерное арифметическое пространство точек $x = (x_1; \ldots; x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ — координаты точки x. Расстояние $d(x, y)$ между точками $x = (x_i), y = (y_i)$ определяется равенством

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}. \tag{1}$$

Кривой называют непрерывное отображение $\gamma(t) = (\gamma_1(t); \ldots; \gamma_n(t))$ отрезка $[a, b]$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Можно говорить о сужении $\gamma_{[c,d]}$ отображения γ на отрезок $[c, d] \subset [a, b]$, а также об области значений $\gamma([a, b])$ отображения γ на отрезке $[a, b]$. Иногда именно множество $\gamma([a, b])$ именуют кривой, однако во многих вопросах интерес представляет не только данное множество, но и способ его обхода. Такая точка зрения характерна для физиков, занимающихся помимо траекторий движущихся точек и динамикой перемещения.

Длина кривой может вводиться по разному. Геометры предпочитают аналитический способ определения длины $L(\gamma)$ кривой γ, полагая

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{\left[\frac{d\gamma_1}{dt}(t)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{d\gamma_1}{dt}(t)\right]^2}\, dt. \tag{2}$$

Чтобы избавиться от хлопот, связанных с существованием интеграла (2), функции $\gamma_i(t)$ считают достаточно гладкими, чаще всего имеющими производные любого порядка в каждой точке t отрезка $[a, b]$.

Достоинства приведенного определения: краткость и обозримость, нацеленность на численный результат. Недостатков куда больше. Основной из них связан с тем, что для определения интуитивно ясного понятия длины кривой приходится использовать более сложные понятия производной и интеграла. Отсутствует само понятие спрямляемой кривой. В одной интересной книге, посвященной таинственным кривым, утверждается, что эллипс $\gamma_1(t) = 2\cos t, \gamma_2(t) = \sin t\, (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — неспрямляемая кривая, так как соответствующий эллипсу интеграл (2) в элементарных функциях не считается.

Приведём геометрическое определение длины кривой, используемое, как правило, аналитиками. Пусть $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — кривая в $\mathbb{R}^n$. Разбиение T отрезка $[a, b]$ — это набор чисел $\{t_0, t_1, \cdots, t_{m-1}, t_m\}$, удовлетворяющих соотношениям $a = t_0 < t_1 < \ldots t_{m-1} < t_m = b$. Каждому набору $T = \{t_j\}$ сопоставим число

$$L_T(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} d(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j))$$

— длину ломаной с вершинами в точках $\gamma(t_j)\, (j = 0, 1, \ldots, m)$. Кривая γ называется *спрямляемой*, если существует такое число l, что для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство $L_T(\gamma) \leqslant l$. Наименьшее из подобных чисел l называется *длиной кривой* γ и обозначается символом $L(\gamma)$. Приведенное определение понятно любому старшекласснику (хотя бы при $n = 2$).

Недостаток геометрического определения длины кривой состоит в его неэффективности с вычислительной точки зрения. Для исправления этого недостатка следует привести примеры спрямляемых кривых и установить некоторые свойства длины кривой. Например, полезно заметить, что если кривая γ спрямляема, то её сужение $\gamma_{[c,d]}$ на любой отрезок $[c, d] \subset [a, b]$ также спрямляемая кривая. Длина кривой аддитивна в следующем смысле: если $a \leqslant c \leqslant b$, то $L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[a,c]}(\gamma) + L_{[c,b]}(\gamma)$. В частности, имеет смысл функция $s(t) = L_{[a,t]}(\gamma)$.

Кардинальное значение для вычисления длины кривой имеет правило дифференцирования функции $s(t)$: при определенных предположениях относительно кривой $\gamma(t)$ справедливо равенство

$$\frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{\left[\frac{d\gamma_1}{dt}(t)\right]^2 + \ldots + \left[\frac{d\gamma_1}{dt}(t)\right]^2}. \tag{3}$$

Формула (3) легко доказывается в рамках одномерного дифференциального исчисления для непрерывно дифференцируемых кривых. Она позволяет в ряде случаев находить явные выражения для длины различных кривых; при этом наряду с (3) полезно учесть очевидные равенства $s(a) = 0, s(b) = L(\gamma)$.

Переход от (3) к (2) осуществляется на основе формулы Ньютона-Лейбница. Предположение о непрерывной дифференцируемости отображения $\gamma(t)$ можно заменить менее ограничительным условием Липшица

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leqslant M|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b]. \tag{4}$$

Условие (4) влечёт спрямляемость кривой γ - это легко доказывается. Существенно сложнее в данном случае устанавливаются аналоги равенств (2), (3). Достаточно тонкая теория влечёт за собой так называемую *«формулу площади»* для липшицевых отображений конечномерных пространств [1]. Вместо евклидовой метрики (1) можно использовать и другие метрики.

2. Хаусдорфова мера. Напомним несколько определений. Если U — непустое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, то его диаметр $diamU$ определяется равенством $diam\, U = \sup\{d(x, y) : x, y \in U\}$. Говорят, что последовательность множеств U_j образует *δ-покрытие* ($\delta > 0$) множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если выполнены соотношения

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \quad 0 < diamU_j \leqslant \delta \quad \forall j.$$

Пусть $s \geqslant 0, 0 < \delta < \infty, A \subset \mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение число

$$H^s_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(diam\, U_j)^s | U_j \text{есть} \quad \delta\text{-покрытие множества } A\right\}. \tag{5}$$

Изучим зависимость $H^s_\delta(A)$ от параметров δ, s. Поскольку при уменьшении δ класс допустимых покрытий A в (5) сужается, то $H^s_\delta(A) \leqslant H^s_{\delta_1}(A)$, если $\delta > \delta_1$. Следовательно, $H^s_\delta(A)$ — убывающая функция от положительного параметра δ. Поэтому $H^s_\delta(A)$ при $\delta \to 0$ имеет неотрицательный (конечный или бесконечный) предел. Введем обозначение

$$H^s(A) := \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} H^s_\delta(A). \tag{6}$$

Существующий для каждого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ предел (6) называют *s-мерной хаусдорфовой мерой.*

Пусть $s < t < \infty$. Если система множеств U_j образует δ-покрытие множества A, то верно неравенство

$$\sum_j diam^t\, U_j \leqslant \delta^{t-s} \sum_j diam^s\, U_j. \tag{7}$$

Из неравенства (7) вытекает оценка

$$H^t_\delta(A) \leqslant \delta^{t-s} H^s_\delta(A). \tag{8}$$

В частности, оценка (8) влечет за собой следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ и $0 \leqslant s < t < \infty$. Тогда 1) если $H^s(A) < \infty$, то $H^t(A) = 0$; 2) если $H^t(A) > 0$, то $H^s(A) = \infty$.*

Хаусдорфовой размерностью множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называют число

$$dim_H(A) := inf\{0 < t < \infty : H^t(A) = 0\}.$$

Условие $0 < H^s(A) < \infty$ гарантирует равенство $dim_H A = s$. В общем случае это условие лишь достаточно для выполнения равенства $dim_H A = s$. Однако оно применимо в ряде интересных ситуаций.

Рассмотрим несколько примеров. Если A — конечное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, то $H^0(A)$ совпадает с числом элементов A и $dim_H A = 0$. Вместе с тем, если A — счётное подмножество $\mathbb{R}^n$, то $H^0(A) = \infty$, а $dim_H A = 0$. Если A — спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^n$, имеющая конечное число самопересечений, то $H^1(A) = L(A)$ и $dim_H A = 1$. Варианты формулы $H^1(A) = L(A)$ верны для любой спрямляемой кривой. Для кубируемого подмножества A пространства $\mathbb{R}^n$ мера Хаусдорфа $H^n(A)$ отличается от обычного n-мерного объёма $v_n(A)$ лишь множителем: $H^n(A) = \dfrac{2^n}{\omega_n} v_n(A)$, где ω_n есть n-мерный объем шара радиуса 1. Если A — гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, то $H^2(A) = \dfrac{4}{\pi} S(A)$, где $S(A)$ — площадь поверхности A.

Заслуживает отдельного рассмотрения пример канторова множества A_0. Напомним, что A_0 можно определить как совокупность действительных чисел x, допускающих представление

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{3^j},$$

где c_j равны либо 0, либо 2. Подсчёты показывают, что $dim_H A_0 = s = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ и $0 < H^s(A_0) < \infty$. Аналогичные примеры известны для любого s

из $[0, n]$. Долгое время они рассматривались как результат злонамеренной деятельности математиков, однако с появлением теории фракталов ситуация изменилась.

3. Формула Коши и интегральная геометрия. Интересные подходы к изучению длины кривых основаны на идеях интегральной геометрии [2]. В целях наглядности ограничимся плоскими кривыми. Для нас будет существенно, что $\mathbb{R}^2$ — евклидово пространство с ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. *Скалярное произведение векторов* $x = (x_1; x_2) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ и $y = (y_1; y_2) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ определено равенством $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

Наиболее обозримые результаты относятся к выпуклым кривым. Под выпуклой фигурой ниже понимается компактное выпуклое подмножество плоскости с непустой внутренностью. Пусть γ — граница выпуклой фигуры Ω, $\Phi(\theta)$ — длина ортогональной проекции фигуры Ω на прямую $G_0(\theta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\cos\theta + y\sin\theta = 0\}$. Справедлива формула Коши

$$L(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta. \tag{9}$$

Доказательство формулы (9) для гладкой кривой γ основано на геометрически очевидном равенстве

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{2}\oint_\gamma |(\vec{n}(A), \vec{v}(\theta))|\, ds, \tag{10}$$

в котором $\vec{n}(A)$ — вектор внешней нормали к кривой γ в точке $A \in \gamma$, $\vec{v}(\theta) = \vec{e}_1\cos\theta + \vec{e}_2\sin\theta$. Интегрируя равенство (10) по θ от 0 до 2π и меняя порядок интегрирования, приходим к соотношениям

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \oint_\gamma |(\vec{n}(A), \vec{v}(\theta))|\, ds = \frac{1}{2}\oint_\gamma ds \int_0^{2\pi} |(\vec{n}(A), \vec{v}(\theta))|\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_\gamma ds \int_0^{2\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{1}{2}\oint_\gamma 4\, ds = 2L(\gamma).$$

Это влечёт за собой (9) для гладких кривых. Доказательство в общем случае получается с помощью предельного перехода.

Формула Коши (9) послужила отправным пунктом для целой науки — интегральной геометрии [2]. Приведём вариант формулы (9) в удобной для дальнейшего форме. Обозначим через $G_p(\theta)$ прямую в плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемую уравнением

$$x_1\cos\theta + y\sin\theta = p. \tag{11}$$

Найдём условия, при которых прямая $G_p(\theta)$ пересекается с выпуклой фигурой $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Ввиду линейной связности и компактности фигуры Ω эти условия сводятся к двустороннему неравенству

$$\min_{(x,y)\in\Omega}\{x\cos\theta + y\sin\theta\} \leqslant p \leqslant \max_{(x,y)\in\Omega}\{x\cos\theta + y\sin\theta\}. \tag{12}$$

Функцию

$$h(\theta) = \max_{(x,y)\in\Omega}\{x\cos\theta + y\sin\theta\},$$

совпадающую с правой часть (12), называют опорной функцией фигуры Ω. Левая часть (12), как нетрудно заметить, равна $-h(\theta+\pi)$. Поэтому (11) эквивалентно неравенствам

$$-h(\theta+\pi) \leqslant p \leqslant h(\theta). \tag{13}$$

Фигура Ω находится в полосе между прямыми $x\cos\theta + y\sin\theta = -h(\theta+\pi)$ и $x\cos\theta + y\sin\theta = h(\theta)$. Ширина этой полосы равна $h(\theta) + h(\theta+\pi)$; её называют *шириной* фигуры Ω в направлении θ и обозначают символом $\Delta(\theta)$. Как нетрудно видеть, $\Delta(\theta) = \Phi\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Иначе говоря, ширина $\Delta(\theta)$ совпадает с длиной ортогональной проекции Ω на прямую, параллельную направлению θ. Из (9) вытекают равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta(\theta)\,d\theta = \frac{L(\gamma)}{\pi}. \tag{14}$$

Определим меры некоторых множеств прямых. Введём в рассмотрение цилиндрическую поверхность $C \in \mathbb{R}^3$, задаваемую в цилиндрических координатах $(\rho;\varphi;z)$ соотношениями $\rho = 1, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Сопоставим точке $M \in C$ с цилиндрическими координатами $(1;\theta;p)$ прямую $T(M) = G_p(\theta)$. Отображение T есть сюрьекция цилиндра C на множество $\mathfrak{G}$ всех прямых линий плоскости. Однако оно необратимо, поскольку симметричным относительно начала координат точкам M_1, M_2 цилиндра C соответствует одна прямая: $T(M_1) = T(M_2)$. Прообразом любого множества $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ является множество $T^{-1}(\mathfrak{A}) \subset C$, симметричное относительно начала координат. Множество $\mathfrak{A}$ назовём измеримым, если его пробраз $T^{-1}(\mathfrak{A})$ измерим относительно поверхностной меры m_2 в C. Меру измеримого множества $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ естественно определить соотнощением

$$\mu(\mathfrak{A}) = m_2(T^{-1}(\mathfrak{A})).$$

Цилиндр C есть прямое произведение окружности и прямой, поэтому мера m_2 в C есть прямое произведение одномерных мер на окружности и прямой. Отсюда вытекает равенство

$$\mu(\mathfrak{A}) = \iint\limits_{T^{-1}(\mathfrak{A})} 1 dp\, d\theta. \tag{15}$$

Определенная таким образом мера обладает свойством инвариантности относительно действия группы $\mathfrak{M}$ движений плоскости. Любая мера на $\mathfrak{G}$, обладающая подобным свойством, отличается от меры (15) лишь постоянным множителем [2].

В качестве примера найдём меру множества $\mathfrak{A}$ прямых, пересекающих фигуру Ω. Из результатов, установленных выше, вытекает равенство

$$T^{-1}(\mathfrak{A}) = \{(p,\theta) | -h(\theta+\pi) \leqslant p \leqslant h(\theta),\ 0 \leqslant \theta < 2\pi\}.$$

Объединяя это равенство с (13), (14), получаем последовательно

$$\mu(\mathfrak{A}) = \int\limits_0^{2\pi} (h(\theta) + h(\theta+\pi))\, d\theta = L(\gamma).$$

Итак, мера множества прямых, пересекающих фигуру Ω, равна длине её границы. Весьма эффектна формулировка данного результата в терминах геометрических вероятностей.

Теорема. *Пусть* Ω_1 *— выпуклая фигура, содержащаяся в выпуклой фигуре* Ω. *Вероятность того, что случайная прямая, пересекающая* Ω, *пересечёт и* Ω_1, *равна* $\dfrac{L(\gamma_1)}{L(\gamma)}$, *где* $L(\gamma_1), L(\gamma)$ *суть длины границ фигур* Ω_1 *и* Ω *соответственно.*

Вариант равенства (13) верен и для невыпуклых кривых. Пусть γ — спрямляемая плоская кривая. Обозначим через $n_\gamma(p,\theta)$ число точек пересечения кривой γ с прямой $G_p(\theta)$. Имеет место равенство (см., например, [2])

$$L(\gamma) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathfrak{G}} n_\gamma(p,\theta)\, dp\, d\theta. \tag{16}$$

Правая часть (16) имеет смысл не только для спрямляемых кривых; соответствующие обобщения длины (меры Фавара) также изучаются в интегральной геометрии.

Кривую $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, (t \in [a,b])$ назовём *бирегулярной*, если функции $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$ и

$$\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_1''(t)\gamma_2'(t) \neq 0, \quad t \in (a,b).$$

Для бирегулярной замкнутой кривой γ число точек пересечения $n_\gamma(p,\theta)$ с каждой прямой $G_p(\theta)$ конечно. Более точно, справедлива

Теорема. *Пусть* $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *— бирегулярная кривая и* $\gamma(a) = \gamma(b), \gamma'(a) = \gamma'(b)$. *Тогда* $n_\gamma(p,\theta) \leqslant 2|deg(\gamma)|$, *где* $deg(\gamma)$ *— число полных оборотов скорости* $\gamma'(t)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Предположение о бирегулярности кривой γ можно заменить менее ограничительным условием, однако полностью отбросить его нельзя.

Ссылки

[1] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.

[2] *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983.

УДК 514.11

В. С. Климов, А. Ю. Ухалов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vsk76@list.ru
E-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Минисправочник по вычислительной геометрии

В последнее время вычислительная геометрия стала активно изучаться студентами вузов. При проведении занятий возникала необходимость иметь под рукой список наиболее ходовых геометрических формул. Стремление к краткости повлияло на степень подробности приводимых ниже сведений.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: треугольник, многоугольник, окружность, тетраэдр, цилиндр, шар.

Треугольник

Основные обозначения: Δ — треугольник положительной площади S_Δ с вершинами A, B, C; a, b, c — длины сторон BC, CA, AB соответственно; α, β, γ — углы при вершинах A, B, C; R — радиус круга, описанного около Δ; r — радиус круга, вписанного в Δ; r_a — радиус вневписанной окружности , касающейся отрезка BC и продолжений сторон AB и AC; h_a, m_a, l_a — длина высоты (медианы , биссектрисы) треугольника, проведённой из вершины A треугольника Δ; $p = (a + b + c)/2$ — полупериметр Δ. Далее приводятся формулы, связывающие указанные выше геометрические величины, а также некоторые замечания к этим соотношениям.

(I) Теорема косинусов, позволяющая находить косинусы углов треугольника.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

(II) Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

(III) Формулы Герона:

$$S_\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4}\,;$$

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

(IV) Для вычисления площади треугольника применяются формулы

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

(V) Через площадь S_Δ легко выражаются радиусы окружностей, связанных с треугольником Δ:

$$R = \frac{abc}{4S_\Delta}, \quad r = \frac{S_\Delta}{p}, \quad r_a = \frac{S_\Delta}{p-a}.$$

(VI) Длина высоты (медианы, биссектрисы) находится по формуле

$$h_a = \frac{2S_\Delta}{a},\ m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - a^2}}{2},\ l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}.$$

(VII) Теорема Стюарта. Отрезок, соединяющий вершину A с принадлежащей прямой BC точкой A_1, называют чевианой. Например, высота, медиана, биссектриса являются чевианами.

Пусть $|BA_1| = m,\ |A_1C| = n,\ |AA_1| = l$ *Тогда*

$$l^2 = \frac{mb^2 \pm nc^2}{a} - mn.$$

Знак «+» берётся, если A_1 *находится между* B *и* C*, знак «−» возникает, если* C *находится между* B *и* A_1.

Частным случаем теоремы Стюарта является равенство $l_a^2 = bc - mn$. Полезно учесть, что если чевиана AA_1 есть биссектриса угла A, то

$$m = \frac{ca}{b+c}, \quad n = \frac{ba}{b+c}.$$

(VIII) Экстремальные свойства правильного треугольника.

1) Среди треугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет правильный треугольник.

2) Среди треугольников, содержащих фиксированный круг, наименьшую площадь имеет правильный треугольник, стороны которого касаются граничной окружности.

3) Среди треугольников, содержащихся в круге фиксированного радиуса, наибольшую площадь, имеет правльный треугольник, вершины которого лежат на граничной окружности.

Окружность

1. Окружность с центром O радиуса $R > 0$ — это геометрическое место точек P, расстояние от которых до точки O равно R: $C(O, R) = \{P : OP = R\}$. Круг с центром O радиуса $R > 0$ — это геометрическое место точек, расстояние от которых до точки O не превосходит R: $B(O, R) = \{P : OP \leqslant R\}$. Длина окружности выражается формулой $l = 2\pi R$, площадь круга — формулой $S = \pi R^2$.

2. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют хордой. Диаметр окружности — это хорда, проходящая через центр окружности. Длина диаметра равна двум радиусам: простоты ради её также именуют диаметром — такое соглашение общепринято.

3. Угол с вершиной в центре O окружности называют центральным. Множество точек окружности, принадлежащих центральному углу, называют дугой окружности. При этом говорят, что центральный угол опирается на соответствующую дугу. Отношение длины дуги к радиусу не зависит от радиуса, поэтому характеризует сам центральный угол. Это отношение именуют радианной мерой угла. Таким образом, верна формула

$$l = R\alpha\,, \tag{1}$$

в которой l – длина дуги, R — радиус окружности, число α — радианная мера угла.

Часть круга, принадлежащая центральному углу, называется сектором. Площадь S сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\alpha}{2}R^2\,. \tag{2}$$

Пусть центральный угол опирается на дугу $\smile{AB}$ окружности радиуса R, AB – соответствующая хорда. Часть круга, расположенная между хордой AB и дугой $\smile{AB}$, называется сегментом. Площадь S_1 сегмента вычисляется по формуле

$$S_1 = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)\,,$$

справедливой для любого α из $[0, 2\pi]$.

4. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным. Пусть A, B — точки пересечения сторон угла с окружностью, K — принадлежащая окружности вершина угла. Если точки K и O лежат по одну сторону от прямой AB, то радианная мера угла $\angle AKB$ равна половине радианной меры угла $\angle AOB$.

5. Пусть точка K лежит внутри окружности ($OK < R$); A, B — точки на окружности; прямые KA, KB пересекают окружность в точках

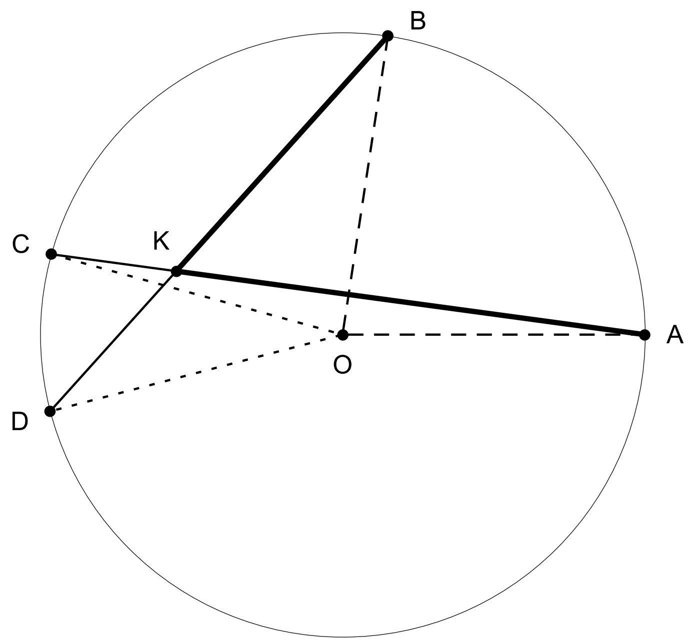


Рис. 1

C и D соответственно (Рис. 1). Тогда 1) радианная мера угла $\angle AKB$ равна полусумме радианных мер углов $\angle AOB$ и $\angle COD$; 2) имеет место равенство

$$AK \cdot KC = BK \cdot KD = R^2 - OK^2\,.$$

6. Пусть точка K лежит вне окружности ($OK > R$); KA, KB — внешние части секущих KC, KD окружности (Рис. 2). Тогда 1) радианная мера угла $\angle AKB$ равна полуразности радианных мер углов $\angle COD$ и $\angle AOB$; 2) справедливо равенство

$$AK \cdot KC = BK \cdot KD = OK^2 - R^2\,.$$

7. Пусть A, B, C, D – вершины вписанного в окружность четырехугольника, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d\,$, $AC = m$, $BD = n$.

Справедливы равенства

$$m = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \qquad n = \sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ad+bc}}\,, \tag{3}$$

$$mn = ac + bd, \qquad \frac{m}{n} = \frac{ad+bc}{ab+cd}\,. \tag{4}$$

Формулы (3), (4) эквивалентны между собой, однако формулы (4) проще запоминаются. Первая из формул (4) выражает теорему Птолемея.

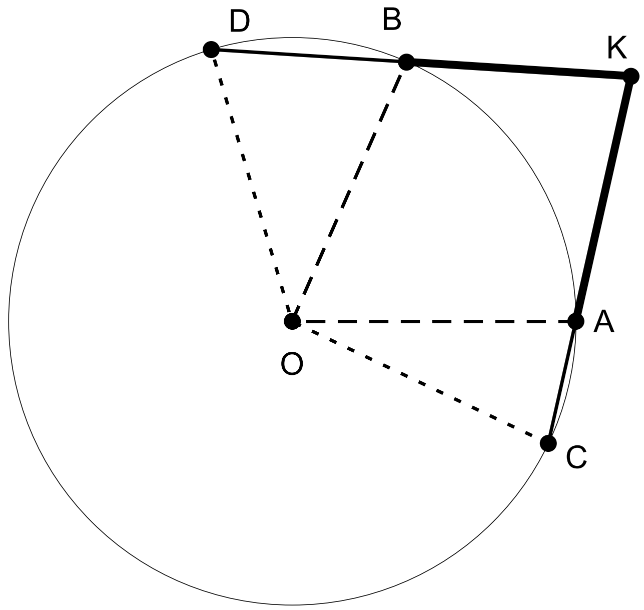


Рис. 2

Формула Герона–Брахмагупты

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник с вершинами A, B, C, D. Обозначим через a, b, c, d — длины отрезков AB, BC, CD, DA соответственно. Пусть $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ — полупериметр, а S — площадь четырёхугольника $ABCD$, α и γ — углы при вершинах A и C соответственно. Справедлива формула Герона–Брахмагупты:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}.$$

2. Пусть a, b, c, d — четыре положительных числа, каждое из которых меньше сумммы трёх других. Тогда существует четырёхугольник, длины сторон которого равны этим числам. Более того, всегда можно найти вписанный в круг четырёхугольник, стороны которого в порядке обхода окружности в положительном направлении будут равны a, b, c, d. Из формулы Герона–Брахмагупты следует, что S^2 достигает максимума, если $\alpha + \gamma = \pi$, т. е. в случае вписанного четырёхугольника. Радиус R соответствующего круга находится по формуле

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}.$$

Теорема Крамера: среди всех n-угольников с заданными длинами сторон наибольшую площадь имеет многоугольник, вершины которого расположены на некоторой окружности.

Тетраэдр

Основные обозначения: T — тетраэдр положительного объёма $V(T)$; K — вершина T; A, B, C — вершины треугольника $\triangle ABC$, лежащего в основании T; a, b, c — длины сторон KA, KB, KC; a_1, b_1, c_1 — длины сторон BC, CA, AB; $\angle BKC = \alpha$, $\angle CKA = \beta$, $\angle AKB = \gamma$; $\angle\mathscr{A}$, $\angle\mathscr{B}$, $\angle\mathscr{C}$ — двугранные углы при рёбрах KA, KB, KC; R — радиус шара, описанного около T; r — радиус шара, вписанного в T; h — длина высоты, опущенной из вершины K на плоскость ABC; $S(ABC)$ — площадь треугольника $\triangle ABC$; φ — угол между скрещивающимися прямыми KA и BC, Δ — расстояние между теми же прямыми; ψ — угол между прямой KA и плоскостью основания ABC. Ниже приводятся формулы, связывающие указанные выше геометрические величины, а также комментарии к этим формулам.

(I)
$$a_1^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b_1^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Теорема косинусов, позволяющая найти косинусы плоских углов при вершине K.

(II)
$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\mathscr{A}.$$

Теорема косинусов для трехгранного угла. С её помощью можно найти косинус двухгранного угла при ребре KA.

(III)
$$\cos\mathscr{A} = -\cos\mathscr{B}\cos\mathscr{C} + \sin\mathscr{B}\sin\mathscr{C}\cos\alpha.$$

Двойственная теорема косинусов .

(IV)
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\mathscr{A}} = \frac{\sin\beta}{\sin\mathscr{B}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\mathscr{C}} \quad .$$

Теорема синусов для трёхгранного угла.

(V) Существует большое число формул для вычисления объёма $V(T)$ тетраэдра T. Они применяются и для нахождения других геометрических характеристик.

$$V(T) = \frac{1}{3}hS(ABC) = \frac{2\sin\mathscr{A}}{3a}S(KAB)S(KAC) = \frac{1}{6}a\,a_1\,\Delta\sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{3} r S_{\text{полн}} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}\,;$$

здесь $S_{\text{полн}}$ — полная площадь поверхности тетраэдра T.

(VI)

$$V^2(T) = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - c_1^2 & a^2 + c^2 - b_1^2 \\ a^2 + b^2 - c_1^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - a_1^2 \\ a^2 + c^2 - b_1^2 & b^2 + c^2 - a_1^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

— трёхмерный вариант формулы Герона.

(VII) Если M и N — середины рёбер AB и KC соответственно, то

$$4MN^2 = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\,;$$

представляет интерес и вырожденный случай, когда K лежит в плоскости ABC. В этой ситуации формула (VII) влечёт теорему Эйлера о связи диагоналей и сторон произвольного четырёхугольника, обобщающую известную школьникам теорему о сумме квадратов диагоналей параллелограмма.

(VIII)

$$2aa_1|\cos\varphi| = |\, b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2\,| \text{ — формула шести рёбер.}$$

Формула для нахождения угла между скрещивающимися рёбрами пирамиды.

(IX) Пусть S_1 — площадь треугольника со сторонами aa_1, bb_1, cc_1. Тогда

$$6V(T)R = S_1 \text{ — формула Крелле.}$$

Эта формула позволяет вычислить радиус шара, описанного около тетраэдра.

(X) $\sin\psi = \frac{h}{a}$.

Формула указывает способ нахождения угла между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

Цилиндр

Круговым цилиндром или просто *цилиндром* называется тело C, полученное вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Поверхность C состоит из двух кругов одинакового радиуса (называемых *основаниями*) и искривленной *боковой поверхности*. Любой отрезок AA', параллельный его оси, называется его *образующей*. *Высота* C равна расстоянию между его основаниями, т. е. длине образующей. Формулы для объёма и плошади воверхности C

$$V(C) = \pi R^2 H, \quad S_1(C) = 2\pi RH, \quad S(C) = 2\pi RH + 2\pi R^2\,.$$

Здесь R — радиус основания C, H — высота C, $V(C)$ — объём C, $S_1(C)$ — площадь боковой поверхности C, $S(C)$ — полная поверхность C.

Положение точки на боковой поверхности C характеризуется двумя цилиндрическими координатами: φ и z. Цилиндрическое расстояние $dist(A_1, A_2)$ между двумя точками A_1, A_2, расположенными на этой поверхности и имеющими цилиндрические координаты (φ_1, z_1) и (φ_2, z_2), находится по формуле

$$\mathrm{dist}(A_1, A_2) = \sqrt{R^2\psi^2(|\varphi_1 - \varphi_2|) + |z_1 - z_2|^2},$$

в которой $\psi(t) = \min\{t, 2\pi - t\},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Конус

Прямым круговым конусом, или просто *конусом* называется тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Конец гипотенузы, оставшийся на месте при вращении, называется *вершиной конуса.* Поверхность конуса состоит из круга, называемого *основанием* конуса, и *боковой поверхности.* Отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой окружности основания, называется *образующей* конуса (её длина l равна гипотенузе треугольника). *Высота* H конуса равна длине неподвижного при вращении катета — *оси* конуса. Формулы для объёма и площади поверхности конуса

$$V = \pi R^2 \frac{H}{3}, \quad S_1 = \pi R l, \quad S = \pi R l + \pi R^2\,.$$

Усечённым конусом называется тело, полученное вращением прямоугольной трапеции вокруг той её боковой стороны, которая перпендикулярна основаниям трапеции. Поверхность усеченного конуса состоит из двух кругов, называемых *основаниями* и боковой поверхности. *Высота* усечённого конуса есть расстояние между его основаниями. *Образующая* усечённого конуса есть линия пересечения любой плоскости, проходящей через его *ось.* Формулы для объёма и площади поверхности усечённого конуса

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2), \quad S_1 = \pi l(R + r), \quad S = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))\,.$$

Здесь H — высота, R и r — радиусы оснований, l — образующая усеченного конуса.

Шар

Шаром называется тело, полученное вращением полукруга вокруг его диаметра. Поверхность шара называется *сферой.* Сферу получается вращением полуокружности вокруг диаметра, соединяющего её концы. Положение точки на сфере фиксированного радиуса характеризуется двумя географическими координатами: φ и θ - долгота и широта. Сферическое расстояние $\operatorname{dist}(A_1, A_2)$ между двумя точками A_1, A_2, расположенными на сфере радиуса R и имеющими географические координаты (φ_1, θ_1)n и (φ_2, θ_2), находится по формуле

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) = R \arccos[\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\theta_1 \sin\theta_2].$$

Объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \dfrac{4}{3}\,\pi R^3$, а площадь его поверхности — по формуле $S = 4\pi R^2$.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсеченная от него плоскостью. *Высотой сегмента* называется длина той части радиуса, которая перпендикулярна секущей плоскости и находится внутри сегмента.

Объём V шарового сегмента высотой h и площадь S его сферической поверхности находятся по формулам

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right), \quad S = 2\pi Rh\,.$$

Шаровым сектором называется часть шара, отсечённая от него конической поверхностью с вершиной в центре шара. Шаровой сектор можно определить и как тело, полученное вращением кругового сектора вокруг одной из его радиальных границ. Объём V_1 шарового сектора вычисляется по формуле

$$V_1 = \frac{2\pi R^2 h}{3} = \frac{SR}{3},$$

где S — площадь сферической части поверхности шарового сектора.

Ссылки

[1] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 1. Планиметрия. 3-е изд. М.: Учпедгиз, 1948.

[2] *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Ч. 2. Стереометрия. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1951.

УДК 514.177.2+517.97

Е. В. Коновалов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kinnarts@mail.ru

На стыке математики и литературы в классическом университете

Обсуждаются некоторые факты и явления на стыке математики и гуманитарных областей знаний, в частности, литературы.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: математика, гуманитарные науки, связь математики и литературы.

Важнейшая особенность нашего школьного образования — изучение всех (или почти всех) предметов по отдельности. Разумея под предметами и так называемые точные науки, и так называемые гуманитарные дисциплины, и всё то, что большинство людей помещают между ними. Предметная специализация сплошь и рядом приводит к тому, что ученики в принципе не воспринимает различные области знания в их целостности и единстве. Математика и история, физика и биология, география и литература представляются в сознании практически непересекающимися областями. Это весьма прискорбно. Помимо естественности целостного и контекстуального восприятия знаний, помимо ассоциативной природы нашей памяти, которой удобнее хранить информацию не по отдельности, а объединяя ее прихотливым контекстом, есть и еще кое-что. Речь об уме как таковом, сущностью которого является способность, по выражению Ломоносова, “сопрягать далековатые идеи” [1], и о развитии этой способности.

Выдающиеся ученые, художники, изобретатели, интеллектуалы как раз и отличаются не только широтой кругозора, но и его целостностью, пресловутой энциклопедичностью познаний. По всей видимости, эта способность и позволяет совершать выдающиеся открытия междисциплинарного толка, использовать идеи в одной области и переносить их на другие. Актуальность подобных вещей назрела, не зря широко распространились такие термины как системное мышление, комплексные научные знания и т.п. Хочется думать, что ораторы, говорящие об этом с высоких трибун, способны продемонстрировать системное мышление и обладают комплексными знаниями. Школьный воз, однако, и ныне там.

Высшее образование в этой ситуации поставлено уже перед фактом, исправить который и в каждом индивидуальном случае крайне тяжело, а уж в общем случае и вовсе невозможно. Меж тем классический университет сочетает "подготовку высококвалифицированных специалистов и воспитание гармонично развитой личности", как это отражено и в стратегии работы ЯрГУ им. П.Г. Демидова [2]. Без широких междисциплинарных знаний невозможно говорить ни о "гармонической личности", ни о "высококвалифицированных специалистах" широкого профиля. Одним из ярких свидетельств такого антисистемного положения дел служит знаменитое (и во многих головах безапелляционное) деление на "математиков" и "гуманитариев". О вреде такой дихотомии в процессе обучения нечего и говорить.

Автор настоящей статьи постарается далее подвергнуть сомнению это устоявшееся деление на нескольких, далеко не исчерпывающих, наблюдениях, которые достаточно красноречивы, но не очень известны широкой аудитории. В качестве же источников "далековатых идей" выбраны две области знаний, находящиеся, кажется, на противоположных концах соответствующего спектра: математика и литература.

Первое наблюдение общего характера. То, что литература относится к сфере гуманитарной, кажется общеизвестным. Менее известно, что и математику, например, в Индии (не последней стране в этом смысле) принято считать гуманитарной наукой. На научных конференциях математики там сидят рядом с искусствоведами [3]. Одно это уже заставляет задуматься. Ведь математика имеет дело с абстракциями второго порядка, по сравнению с естественными науками. Но с абстракциями второго порядка парадоксальным образом имеет дело и любое словесное искусство. Из этой неожиданной для многих параллели родилась и вся математическая лингвистика.

Следующие сугубо биографические наблюдения не менее красноречивы. В апреле 1755 года состоялось торжественное открытие Московского университета. После молебна были произнесены четыре речи. Первая из них (и единственная, сказанная на русском языке) называлась "О пользе учреждения Московского университета" и произнес ее Антон Алексеевич Барсов (1730–1791). Неудивительно, что вскоре он был назначен профессором на кафедру красноречия. Чем же занимался там Барсов? Преподавал математику. Именно с него и началось преподавание математики в Московском университете. А сам А. А. Барсов в дальнейшем прославился трудами по русской грамматике.

Более того, первая русская грамматика на русском же языке принадлежит перу Василия Евдокимовича Ададурова (1709–1780), автору еще нескольких сочинений по русскому языку, талантливому ученику Даниила Бернулли, сделавшему несколько заметных открытий в теории чисел. Подробнее о математической работе Ададурове можно прочитать в “Математическом энциклопедическом словаре” [4].

Приведенные примеры легко умножить за счет людей еще более известных, достаточно назвать М. В. Ломоносова, А. Н. Колмогорова или Н. Н. Лузина. Все они так или иначе соединяли выдающие достижения в математике или физике с тем, что принято выносить за рамки точных наук, будь то философия, история или искусство. По-видимому, творчество имеет единый источник, в какой бы области оно ни проявлялось. Тем же, кто скажет, что выдающиеся личности отличаются от всех остальных людей, хочется ответить: образцом для подражания должны быть именно выдающиеся личности. А там уж как получится.

Третья параллель между математикой и литературой касается как раз творчества в его узком смысле и высших проявлениях. В русской поэзии XX века немало выдающихся фигур. Тем не менее, имя Осипа Мандельштама в последние годы всё чаще звучит, когда нужно назвать наиболее значительного русского поэта прошлого века [5]. В позднем творчестве поэта выделяется незаконченный цикл стихотворений (или одно большое стихотворение из нескольких частей) под названием “Стихи о неизвестном солдате”, созданный в 1937 году. Помимо того, что это одно из самых значительных произведений Мандельштама, это еще и “самое длинное и самое темное стихотворение поэта”, вызывающее огромный интерес филологов и читателей [6]. Казалось бы, причем тут математика? Процитируем первую же строфу:

Этот воздух пусть будет свидетелем,
Дальнобойное сердце его,
И в землянках всеядный и деятельный
Океан без окна — вещество.

Последняя строка в следующем четверостишии еще раз повторяется, она явно несет какой-то важный смысл. В дальнейшем описываются картины массовых жертв и разрушений, очень похожие на последствия атомного взрыва:

Аравийское месиво, крошево,
Свет размолотых в луч скоростей,
И своими косыми подошвами
Свет стоит на сетчатке моей.

В одной из ранних редакций сказано даже так:

Сквозь эфир, десятично означенный
Свет размолотых в луч скоростей

Начинает число, опрозрачненный
Светлой болью и молью нолей.

Добавим, что во время написания этого стихотворения (и некоторое время до того) Осип Мандельштам отбывал ссылку в Воронеже, где его постоянными собеседниками были молодые ученые — биологи и физики. Процитированных фрагментов достаточно, чтобы сообразить: речь идет о скорости света, числе, в котором и правда много нолей. Величина же скорости света имеет самое прямое отношение к колоссальной энергии, способной вызвать самые страшные разрушения, достаточно вспомнить Хиросиму. В этом свете неожиданно проясняется и темная строка "океан без окна — вещество", которая оказывается поэтической шарадой. "Океан без окна" — это просто-напросто буква E, принятое в физике и математике обозначение энергии. Вся же строка иллюстрирует знаменитую математическую формулу: $E = mc^2$. Более подробно параллели между "Стихами о неизвестном солдате" и теорией относительности Эйнштейна изложены в работе Вяч. Вс. Иванова [7].

Приведенные наблюдения общего характера, биографические факты и текстологические параллели позволяют навести некоторые мосты между таким далекими на первый взгляд дисциплинами как математика и литература. Они могут быть интересны и преподавателям обоих предметов, и любознательным студентам.

Ссылки

[1] *Ломоносов М. В.* Краткое руководство к красноречию. Кн. I. СПб. : При Имп. Академии наук, 1748. 315 с.

[2] Миссия и стратегия ЯрГУ им. П.Г. Демидова.
http://www.uniyar.ac.ru/yargu/mission/

[3] *Успенский В. А.* Предисловие к математике. СПб.: Амфора, 2015. 474 с.

[4] Математический энциклопедический словарь. Под. ред. Ю.В. Прохорова — М. : Сов. энциклопедия, 1988. 847 с.

[5] *Мандельштам О. Э.* Стихотворения. Проза / Сост., вступ. ст. и коммент. М. Л. Гаспарова. М.: АСТ, Харьков: Фолио, 2001. 736 с.

[6] *Лекманов О. А.* Опыт быстрого чтения: „Стихи о неизвестном солдате“ Осипа Мандельштама // Новый мир. 2013. № 8. С. 144–149.

[7] *Иванов Вяч. Вс.* „Стихи о неизвестном солдате“ в контексте мировой поэзии // Жизнь и творчество О. Э. Мандельштама. Воронеж: Издательство Воронежского университетета, 1990. С. 356–366.

УДК 517.9

Е. П. Кубышкин
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: kubysh.e@yandex.ru

Методы комплексного анализа в построении решения задачи Неймана для уравнения Лапласа

Изложен метод построения решения задачи Неймана для уравнения Лапласа, основанный на использовании аналитических функций комплексного переменного. Это позволило получить простую аналитическую формулу решения.

Библиография : 1 название.

Ключевые слова: уравнение Лапласа, задача Неймана, формула Дини.

В плоской ограниченной односвязной области Ω с гладкой границей Γ рассматривается следующая краевая задача

$$\Delta u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f(x,y), \tag{1}$$

где $u = u(x,y), (x,y) \in \Omega, \Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy}$ — оператор Лапласа, n — направление внешней нормали к границе области Ω (по отношению к Ω), $f(x,y)$ — непрерывная на Γ функция.

Функции, удовлетворяющие уравнению (1), называются гармоническими. Требуется найти гармоническую в Ω функцию $u(x,y)$, имеющую непрерывные производные первого порядка в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющую условию (1) на границе Γ. Сформулированная задача называется внутренней задачей Неймана для уравнения Лапласа в области Ω.

Следующая задача называется внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа.

Пусть имеется односвязная ограниченная область Ω с гладкой границей Γ и непрерывная на Γ функция $f(x,y)$. Требуется найти гармоническую в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ функцию $u(x,y)$, имеющую в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ непрерывные производные первого порядка, удовлетворяющую условию (1) на границе Γ, где n — направление внешней нормали к Γ (по отношению к $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$).

Необходимым условием существования решения краевой задачи (1), вытекающим из свойств гармонических функций (см, например [1], с. 293), является условие

$$\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,ds = 0, \tag{2}$$

которое в дальнейшем предполагаем выполненным.

Условия гладкости границы Γ в определениях решений могут быть ослаблены условием кусочной гладкости.

Рассмотрим только внутреннюю задачу Неймана.

Теорема 1. *Решения внутренней задачи Неймана определяются с точностью до постоянной.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Рассмотрим их разность $v(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$. Для $v(x,y)$ имеем краевую задачу

$$\Delta v = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0.$$

Применим для функции $v(x,y)$ 1-ю формулу Грина (см., например, [1], с. 288), взяв в ней в качестве функции $u(x,y)$ функцию $v(x,y)$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2)\,dxdy = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n}\,v\,ds = 0.$$

Отсюда $v_x \equiv v_y \equiv 0$ при $(x,y) \in \Omega$, т.е. $v(x,y) = c$, где c — некоторая постоянная. Теорема доказана.

Покажем, что задача Неймана для гармонической функции $u(x,y)$ может быть сведена к решению задачи Дирихле для сопряженной с ней гармонической функции $v(x,y)$.

Напомним, что сопряженной к гармонической функции $u(x,y)$ в области $\overline{\Omega}$ называется функция $v(x,y)$, удовлетворяющая в точках области условиям Коши-Римана

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \;\; u_y(x,y) = -v_x(x,y). \tag{3}$$

В односвязной области функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ могут быть восстановлены одна через другую с точностью до постоянной. Действительно,

$$du(x,y) = u_x(x,y)dx + u_y(x,y)dy = v_y(x,y)dx - v_x(x,y)dy.$$

Отсюда

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_{y_1}(x_1,y_1)dx_1 - v_{x_1}(x_1,y_1)dy_1 + u(x_0,y_0)dy, \tag{4}$$

где интегрирование ведется по произвольной кусочно-гладкой кривой, лежащей в области и соединяющей точки (x_0, y_0) и (x, y). Аналогично востанавливается $v(x, y)$ по $u(x, y)$.

В точках границы Γ введем параметризацию s, где s — длина дуги границы, отсчитываемой от некоторой точки s_0. В точках границы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(x \wedge n) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(y \wedge n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos{(x \wedge s)} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos{(y \wedge s)},$$

где соответственно $\cos{(x \wedge n)}$, $\cos{(y \wedge n)}$ и $\cos{(x \wedge s)}$, $\cos{(y \wedge s)}$ — косинусы углов между осями x, y и направлением внешней нормали и касательной к Γ в точке границы, характеризуемой параметром s. С учетом равенств

$$\cos x \wedge n = \cos{(\pi/2 - x \wedge s)}, \quad \cos y \wedge n = \cos{(\pi/2 + y \wedge s)}$$

и условий (3) в точках границы получим равенство

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} = f(x, y) = f(s),\ v(s) = \int\limits_{s_0}^{s} f(s_1)ds_1 = g(s). \tag{5}$$

где $f(s)$ параметрическая запись функции $f(x, y)$ вдоль Γ.

В результате для нахождения функции $v(x, y)$ имеем задачу Дирихле

$$\Delta v = 0, \quad v|_{\Gamma} = g(s), \tag{6}$$

в области Ω с граничным условием, определенным согласно (5). Найдя $v(x, y)$, искомую $u(x, y)$ восстановим согласно (4).

Введем комплексную переменную $z = x + iy$, $(i = \sqrt{-1})$ и перепишем краевую задачу (6) в терминах аналитических функций переменной z. С учетом равенств $x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ запишем

$$v(x, y) = v\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = v(z, \bar{z}) \tag{7}$$

и будем рассматривать (7) как функции z и $\bar{z}$. Из (7) имеем

$$v_z = \frac{v_x - iv_y}{2}, \qquad u_{\bar{z}} = \frac{v_x + iv_y}{2},$$

$$\Delta v \equiv v_{xx} + v_{yy} \equiv 4v_{z\bar{z}}.$$

Таким образом, уравнение (6) примет вид

$$v_{z\bar{z}} = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) легко интегрируются. Интегрируя (8) по $\bar{z}$, получим уравнение $v_z = \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ — произвольная функция z. Интегрируя теперь это уравнение по z, будем иметь

$$v(z,\bar{z}) = \int\limits_{z_0}^{z} \varphi_1(z_1)dz_1 + \varphi_2(\bar{z}), \tag{9}$$

где $\varphi_2(\bar{z})$ произвольная функция $\bar{z}$. Так как $v(z,\bar{z})$ является гармонической функцией, являющейся вещественной частью функции комплексного переменного, то согласно (9) с необходимостью имеем выражение

$$v(z,\bar{z}) = \frac{\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}}{2}, \tag{10}$$

где $\varphi(z)$ произвольная аналитическая в области Ω функция z.

Граничное условие в (6) для функции (10) примет вид

$$\left(\varphi(z) + \overline{\varphi(z)}\right)\Big|_{\Gamma} = 2g(s). \tag{11}$$

Задача (6) свелась, таким образом, к отысканию аналитической в области Ω функции $\varphi(z)$, действительная часть которой обращается на границе Γ в заданную функцию $g(s)$.

В общем случае задача нахождения функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей условию (11) является непростой задачей. Рассмотрим эту задачу в предположени, что область Ω является кругом K_R радиуса R с центром в нуле. Точку на границе K_R обозначим $\zeta = R\exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Имеем $g(s) = g(R\theta) = g^*(\theta)$ (* в дальнейшем опустим). В результате равенство (11) может быть записано в виде

$$\varphi(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)} = 2g(\theta), \quad \theta = -i\ln\left(\frac{\zeta}{R}\right) \quad (\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)). \tag{12}$$

Умножим равенство (12) на $\frac{d\zeta}{2\pi i(\zeta - z)}$ и проинтегрируем по Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{\varphi}(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{g(\theta)d\zeta}{\zeta - z}. \tag{13}$$

Первый интеграл в (13) является интегралом Коши и определяет внутри области Ω функцию $\varphi(z)$. Покажем, что второй интеграл равен $\overline{\varphi(0)}$. Представим $\bar{\zeta}$ с учетом равенства $\bar{\zeta} = \frac{R^2}{\zeta}$ ($\zeta = R\exp(i\theta)$) на границе Γ

$$\varphi(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\zeta^m, \quad \overline{\varphi(\zeta)} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m\bar{\zeta}^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{a}_m R^{2m}}{\zeta^m}.$$

Отсюда с учетом равенства $\bar{a}_0 = \overline{\varphi}(0)$ получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\bar{a}_m R^{2m} d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)} = \overline{\varphi}(0), \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta^m(\zeta - z)} = 0, \quad m > 0.$$

Рассмотрим задачу Неймана (1) для круга K_R радиуса R с центром в нуле. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — взаимно сопряженные функции, определяющие решения рассматриваемой задачи. Введем в рассмотрение функцию $p(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ переменной $z = x + iy$, аналитическую в K_R. Полагая $z = \rho e^{i\phi}$, с учетом условий (3), выраженных в полярных координатах $\rho u_\rho = v_\phi$, $\rho v_\rho = -u_\phi$, а также равенств $\rho_x = \cos\phi$, $\phi_x = -\sin\phi/\rho$, будем иметь выражение

$$\begin{gathered} p'(z) = u_\rho \rho_x + u_\phi \phi_x + i(v_\rho \rho_x + v_\phi \phi_x) = u_\rho \cos\phi - u_\phi \sin\phi/\rho + \\ + i(v_\rho \cos\phi - v_\phi \sin\phi/\rho) = \\ = (u_\rho + iv_\rho)\cos\phi - i(u_\rho + iv_\rho)\sin\phi = (u_\rho + iv_\rho)e^{-i\phi} = \frac{\rho}{z}(u_\rho + iv_\rho) \end{gathered}$$

Отсюда задача нахождения $u(\rho, \phi)$ свелась к задаче нахождения аналитической в K_R функции $zp'(z)$, вещественная часть которой на границе Γ_R круга имеет известное значение $Ru_\rho(R, \phi) = Rf(R\cos\phi, R\sin\phi) = Rf(\phi)$. Решение этой задачи дается формулой (13) с учетом равенства $zp'(z)|_{z=0} = 0$ и имеет вид

$$zp'(z) = \frac{R}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $f(\zeta) = f(\xi, \eta)$. Отсюда

$$p(z) = \int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz_1}{z_1}\frac{R}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_1}, \quad z_0 \in K_R. \tag{14}$$

Меняя в (14) порядок интегрирования и вычислив интеграл

$$\int\limits_{z_0}^{z}\frac{dz_1}{z_1(\zeta - z_1)} = -\frac{1}{\zeta}\ln(\zeta - z) + \frac{1}{\zeta}\ln z + c,$$

где $c = c_1 + ic_2$ — некоторая постоянная, запишем (14) в следующем виде:

$$p(z) = -\frac{R}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\ln(\zeta - z)d\zeta + \frac{R\ln z}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta + c. \tag{15}$$

На основании (2)

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta} = i\int\limits_{0}^{2\pi} f(R\cos\psi, R\sin\psi)d\psi = 0.$$

В результате (15) примет вид

$$p(z) = -\frac{R}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(Re^{i\psi})\ln(Re^{i\psi} - z)d\psi + c. \tag{16}$$

Выделив из (16) действительную часть, получим выражение

$$u(\rho,\phi) = -\frac{R}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \ln(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\phi-\psi))f(\psi)\,d\psi + c_1,$$

носящее название формулы Дини.

Ссылки

[1] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

УДК 514.177.2+517.97

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail:anat_kulikov@mail.ru
E-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Коммуникативная компетентность и обучение математическому языку

Рассматривается один из аспектов формирования коммуникативной компетенции у студентов математического факультета: овладение математическим языком.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: компетенции, математический язык, учебный план.

Компетентностный подход — реальность современной системы высшего профессионального образования. Он нормативно воплощен в текстах федерального государственного стандарта высшего профессионального образования Российской Федерации. Компетентность (от латинского compete — добиваюсь, соответствую, подхожу) можно интерпретировать как знания, опыт в той или иной области деятельности, знаний. Далее речь пойдет о математике, прикладной математике, информатике и, быть может, частично о физике, т. е. о формировании компетенций у изучающих «точные» науки. Безусловно, специалист в данных областях знаний должен приобретать ряд компетенций, общих с другими специалистами, но подчас этот процесс имеет существенные отличия. Попробуем пояснить это на примере такой компетенции как коммуникативная [1].

Любая специальность, и в том числе, связанная с точными науками, предполагает освоение языка характерного для данной группы профессий. По-видимому, не следует обстоятельно обосновывать, что специалист в любой области обязан уметь общаться с коллегами, т. е. в письменной или устной форме уметь доносить до коллег свои знания, результаты и, безусловно, понимать информацию полученную от специалистов данной области. Это может быть выражено в умении составлять отчеты, писать статьи, выступать на конференциях, участвовать в дискуссиях и т. д. Наконец, просто общаться с коллегами по тематике относящейся к данной области знаний. При этом как в письменной, так и в устной форме.

Эти умения основываются на таком инструменте как математический язык [1]. В России он сформировался на основе русского языка, но вовсе не тождественен ему, предполагает использование специальной лексики, а также конструкций, которые редко используются в бытовой речи, литературном языке, художественных произведениях. Часто речь идет не только о специальных терминах, а о конструкциях, используемых в математических текстах. Можно вспомнить некоторые из них. Например, «тогда и только тогда», «условия необходимы и достаточны», «из данного утверждения (формулы) с необходимостью вытекает» и т. д. Безусловно, такие обороты студент слышит на лекциях, читает в математической литературе, но это пассивная форма овладения соответствующей компетенции. Для полновесного овладения такой компетенции обязательна активная форма, когда студент сам использует такие термины, конструкции. В программе обучения в университете есть занятия по русскому языку, иным гуманитарным дисциплинам, но они, как правило, мало или совсем не способствуют овладению специальным математическим языком, так как направлены на обучение других навыков и умений, на изучение литературного языка, развитию общей культуры, иногда канцелярского (делового) языка. Кстати, в прежние годы считалось, что последнее должно быть усвоено в рамках общего среднего образования, в системе тех учебных заведений, которые принято называть школой. В свое время проверкой таких навыков обосновывалась необходимость экзамена по русскому языку и литературе в форме сочинения. Иногда сочинение заменялось на изложение.

В настоящее время студенты математического факультета в силу многих обстоятельств (сокращение аудиторной нагрузки по профилирующим дисциплинам, преобладание экзаменов и зачетов в письменной или тестовой форме) крайне плохо владеют математическим языком. Часто не могут сформулировать теорему, так как не владеют стандартными наработками, навыками.

Было бы целесообразно увеличить число практических занятий (семинаров) по соответствующим дисциплинам. На таких занятиях шире практиковать такую форму занятий как доклады обучающихся. Безусловно, шире практиковать проведение устных экзаменов, т. е. в традиционной их форме, которая в последнее время вытесняется иными формами проведения аттестации: письменными экзаменами, тестами.

Возможно, было бы полезно увеличить количество курсовых работ по учебным дисциплинам математического профиля, при выполнении которых предполагалось бы включить реферативный материал, изложение соответствующих фрагментов лекционных курсов в письменной форме.

Предложенные меры или иные, им эквивалентные, быть может, позволят способствовать формированию такой компетенции как коммуникативная. По крайней мере, это позволит остановить такой процесс, когда студенты теряют последние способности для формулировки каких-либо математических утверждений, определений в соответствии с нормами математического языка, давать развернутые определения и т. д. Не секрет, что из всех видов проверки знаний студенты предпочитают тесты или письменный экзамен. При этом они предпочитают задания, которые классифицируются как задания на применения, по крайней мере, не любят задания, где предполагаются рассуждения. Последнее часто связано с неумением формулировать соответствующие фрагменты.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.12873.2018/12.1.

Ссылки

[1] *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Коммуникативная компетентность в контексте математического образования // Актуальные проблемы совершенствования высшего образования. Материалы XII межвузовской научно-методической конференции. Ярославль, 2013. С. 24–25.

[2] *Куликов А. Н., Куликов Д. А., Куликова Л. А.* Математика — язык науки // Полилог культур: один мир — многообразие языков. Ярославль, 2009. С. 42–45.

УДК 004.424

Ю. А. Ларина, Н. С. Лагутина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: lar_u_a@mail.ru
E-mail: lagutinans@rambler.ru

Особенности выбора языка программирования для обучения объектно-ориентированным технологиям

Рассматриваются особенности языка Java как инструмента при обучении студентов младших курсов основам объектно-ориентированных технологий.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: объектно-ориентированное программирование, язык программирования, обучение студентов, образование.

В настоящий момент технология объектно-ориентированного программирования (ООП) является наиболее актуальным объектом для изучения в сфере профессиональной подготовки будущих IT-специалистов [1]. При этом методика обучения программированию не всегда соответствует современным тенденциям в области компьютерных технологий. Поэтому проблема модификации существующей методики изучения ООП является неотъемлемой задачей в рамках формирования профессиональных компетенций выпускников IT-направлений.

Традиционная методика обучения программированию заключается прежде всего в том, что студенты знакомятся сначала с теоретическими основами программирования, затем им предлагается написать несколько программ, используя полученные теоретические знания по конкретному языку программирования. Эта методика показала себя достаточно эффективно при изучении структурного подхода к разработке программных систем и соответствующих языков программирования, так как позволяет приобрести достаточные знания и опыт в ходе решения определенного количества опорных задач и сформировать у студентов алгоритмический стиль мышления.

В дальнейшем, в процессе изучения более сложной объектно-ориентированной методологии, студенты сталкиваются с необходимостью изменения стиля мышления с алгоритмического на объектно-ориентированный. Именно на начальном этапе формирования представлений об основах ООП большинство обучающихся испытывают затруднения. Это способствует неправильному формированию представлений об объектной декомпозиции и объектно-ориентированном подходе, что приводит к проблемам в дальнейшем обучении методологии ООП.

Основной причиной проблем, возникающих в обучении, с одной стороны, является недостаточная проработанность методики обучения объектно-ориентированному программированию. Зачастую методология ООП изучается поверхностно, в недостаточной степени используются визуальные средства объектно-ориентированного проектирования, студенты не успевают накапливать практический опыт в области разработки объектно-ориентированного программного обеспечения.

С другой стороны, для студентов трудности изучения ООП связаны со сложностью процесса разработки программного обеспечения, так как в процессе обучения достаточно тяжело понять и прочувствовать преимущества объектно-ориентированного подхода перед структурным, потому что преподаватель ограничен в данном случае уровнем сложности решаемых в процессе обучения задач. Студенты могут обладать необходимыми теоретическими знаниями, но могут быть не способны эффективно применить эти знания на практике из-за сложности реализуемых проектов. В свою очередь эти преимущества являются мотивирующим фактором для изучения студентами методологии ООП, так как только после понимания возможностей, предоставляемых объектно-ориентированным подходом, у студентов происходит смена стиля мышления, формируются правильные представления об основах методологии и появляется возможность реализовать объектную декомпозицию на практике.

Для решения перечисленных проблем в процессе обучения студентов младших курсов особое внимание необходимо уделить выбору объектно-ориентированного языка программирования. Этот язык должен обладать целым рядом характеристик. Он должен обладать четким, понятным, желательно знакомым синтаксисом, чтобы в процессе обучения преподаватель мог в первую очередь сосредоточиться на объектно-ориентированных технологиях. Язык должен быть реализован в рамках ООП и иметь механизмы, ограничивающие программиста (в первую очередь начинающего) от написания некачественного кода. По мнению авторов, язык должен быть строго типизированным, так как непонимание механизмов проверки соответствия типов данных мешает самостоятельному изучению многих существующих и новых технологий программирования. Важной чертой является кроссплатформенность, поскольку компетенции IT-специалиста подразумевают умение работать на различных операционных системах и платформах и гибкий переход между ними. Для полноценной мотивации к обучению язык должен быть востребованным в настоящий момент, обладать инструментами, позволяющими применять его в самых разных сферах IT-индустрии. Кроме того, изучение выбранного языка должно обеспечивать преемственность между различными курсами по программированию.

Отталкиваясь от обозначенных характеристик, в рамках курса для начального освоения технологий ООП мы выбрали язык Java. Язык Java зародился как часть проекта создания передового программного обеспечения для различных бытовых приборов. Большинство архитектурных решений, принятых при создании Java, было продиктовано желанием предоставить синтаксис, сходный с C и C++. В Java используются практически идентичные соглашения для объявления переменных, передачи параметров, операторов и для управления потоком выполнением кода. Поэтому для студентов, знакомящихся на первом курсе с языком C, синтаксис Java максимально понятен и привычен. Java — язык со строгим контролем типов. Код проверяется во время трансляции и во время интерпретации, таким образом устраняются некоторые типы ошибок при программировании.

Java — полностью объектно-ориентированный язык. Все сущности в языке Java являются объектами, за исключением немногих основных типов, например чисел. В центре внимания находятся данные (т. е. объекты) и средства доступа к ним. Свойства и методы вместе описывают состояние и поведение объекта. Java реализует все фундаментальные свойства ООП: классы, наследование и полиморфизм. Удобными чертами являются автоматическое управление памятью, расширенные возможности обработки исключительных ситуаций, набор стандартных коллекций, таких как массив, список, стек и т. п., наличие простых средств создания сетевых приложений, встроенные в язык средства создания многопоточных приложений, параллельное выполнение программ. Java предоставляет программисту богатый набор классов и объектов для ясного абстрагирования многих системных функций, используемых при работе с окнами, сетью и для ввода-вывода [2].

Java может использоваться для создания приложений, которые работают на различных платформах и операционных системах. Программы на Java транслируются в байт-код, выполняемый виртуальной машиной Java — программой, обрабатывающей байтовый код и передающей инструкции оборудованию как интерпретатор. Достоинством подобного способа выполнения программ является полная независимость байт-кода от операционной системы и оборудования, что позволяет выполнять Java-приложения на любом устройстве, для которого существует соответствующая виртуальная машина.

Основные области применения Java — это большие web-приложения, банковские desktop-приложения и мобильная разработка для Android. На сайте http://www.java.com/ru/about/ утверждается следующее.

1. Java используется на 97% корпоративных настольных ПК.
2. Java используется на 89% настольных ПК в США.
3. 9 млн разработчиков на Java в мире.
4. Java используется в 3 млрд. мобильных телефонов.
5. Java входит в комплект поставки 100% всех проигрывателей дисков Blu-ray.
6. Используется 5 млн. Java Card.
7. Java используется в 125 млн. ТВ-устройств.

В настоящий момент Java является не просто популярным языком программирования, а очень мощным инструментом для создания самых разных приложений, включающим в себя библиотеки, фреймворки, различные комплекты для разработчиков, документацию и т. п. Этот инструмент постоянно развивается, совершенствуется, дополняется. Использование этого языка позволяет не только обучить студентов основам ООП, но и показать применение самых современных IT-технологий.

Ссылки

[1] *Орлов С. А.* Теория и практика языков программирования: учебник для вузов. Стандарт 3-го поколения. СПб.: Питер, 2017.

[2] *Арнольд К., Гослинг Д.* Язык программирования JAVA. СПб.: Питер, 1997.

УДК 517.1

В. В. Литвинов, О. И. Литвинова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vladimirlitvinov@yandex.ru
E-mail: vladimirlitvinov@yandex.ru

Формула Фруллани

Рассматриваются вопросы, связанные с преподаванием темы «Несобственные интегралы, зависящие от параметра» в курсе математического анализа.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: несобственные интегралы; интегралы, зависящие от параметра; формула Фруллани.

Тема «Несобственные интегралы, зависящие от параметра» является важной составляющей курсов непрерывной математики. Вместе с тем в связи с сокращением часов, отводимых для изучения математического анализа, данную тему не удается рассмотреть в достаточном объеме. В этой ситуации представляется целесообразным на лекциях и практических занятиях рассмотреть только интегралы, используемые в других курсах, а часть материалов предложить для самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных расчетно-графических работ. Это касается студентов специальности «Компьютерная безопасность» и направления «Прикладная математика».

Хотя литературы по собственным и несобственным интегралам, зависящим от параметра, довольно много, тем не менее, на первоначальном этапе следует ограничиться рассмотрением отдельных типов интегралов.

Рассмотрим вопрос о существовании и вычислении одного частного вида несобственного интеграла — интеграла Фруллани. Вопрос о существовании интеграла и вывода формулы Фруллани редко приводится в классических курсах математического анализа. В частности, в книге [1] эта формула даже не упоминается. Для изучения данной темы можно рекомендовать обратиться к книге [2].

Интегралом Фруллани называется интеграл вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \quad (a,b>0).$$

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geq 0$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty).$$

Из непрерывности следует, что при $0 < \delta < \delta_1 < \infty$

$$\int\limits_{\delta}^{\delta_1} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_{\delta}^{\delta_1} \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_{\delta}^{\delta_1} \frac{f(bx)}{x} dx =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{a\delta_1} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{b\delta}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t} dt = \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{\delta_1 \to +\infty} \int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Применяя к каждому интегралу обобщенную теорему о среднем, получим

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \quad a\delta < \xi < b\delta.$$

Аналогично

$$\int\limits_{a\delta_1}^{b\delta_1} \frac{f(t)}{t} dt = f(\nu) \ln \frac{b}{a}, \quad a\delta_1 < \nu < b\delta_1,$$

так как $\xi \to 0$ при $\delta \to 0$, а $\nu \to +\infty$ при $\delta \to 0$. Отсюда следует равенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}.$$

Заметим, что если $f(+\infty) = 0$, то формула Фруллани приобретает вид

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

Рассмотрим следующий пример:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \ln \left(\frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} \right) \frac{dx}{x} = J, \quad (p, q) > 0.$$

Справедливы равенства:

$$\ln\left(\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\right) = \ln(p+qe^{-ax}) - \ln(p+qe^{-bx}),$$

$$f(0) = \ln(p+q), \quad f(+\infty) = \ln p.$$

В соответствии с формулой Фруллани получим, что значение искомого интеграла равно

$$J = \ln\left(1+\frac{q}{p}\right)\ln\frac{b}{a}.$$

В качестве упражнений можно предложить студентам найти значения следующих интегралов (параметры предполагаются положительными):

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x}dx, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx,$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}dx, \qquad \int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^3}}{x}dx.$$

Ссылки

[1] *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. М.: Наука, 1988.

[2] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т. Т. 2. СПб.: Лань, 2017.

УДК 51:1+7.072.2

В. В. Литвинов, О. И. Литвинова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: vladimirlitvinov@yandex.ru
E-mail: vladimirlitvinov@yandex.ru

Математика и живопись

Обсуждаются вопросы о связи математики с изобразительным искусством.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: живопись, математика, перспектива, парадокс.

Рационально об иррациональном

Что общего между математикой и изобразительным искусством?

Понятно, что изобразительное искусство и математика являются способом познания мира и человека в этом мире. Бросается в глаза сходство подходов к решению своих проблем в математике и изобразительном искусстве.

Математика, как и живопись, в любом явлении выявляет суть, то есть выявляет формальную структуру. Процитируем точно часто искажаемую фразу Иммануила Канта: «В каждом отделе естествознания есть лишь столько настоящей науки, сколько в нем математики» (см. [2]).

Живопись, как и наука, это познание мира, но другим способом. Когда художник пишет пейзаж с деревьями он же не пересчитывает все листочки на дереве, хотя есть и такие любители.

В развитии математики большую роль играло рассмотрение парадоксов. Например, апории Зенона («Стрела», «Ахилес не догонит черепаху» и др.), парадокс лжеца, парадокс Рассела и много других. Обсуждение парадоксов часто приводило к созданию новых концепций в науке. В изобразительном искусстве тоже встречаются парадоксальные изображения. Одним из наиболее последовательных и интересных художников, создававших парадоксы, был Мориц Эшер (см. [3],[4]). Некоторые из его работ являются художественным осмыслением серьезных математических проблем, таких как задачи о замощении и проблема изображения трехмерных объектов на плоскости. В работах Эшера каждая локальная часть изображения непротиворечива, однако в целом, получается невозможная ситуация.

Исследования перспективы в период высокого возрождения привело впоследствии к созданию новых разделов математики, таких как проективная геометрия и начертательная геометрия.

Учение о линейной перспективе разработано в эпоху Возрождения художниками такими как Леонардо да Винчи ([5]), Дюрер ([6]) и многими другими. Эти результаты впоследствии привели к созданию новых разделов математики — проективной и начертательной геометрии, область применения которой вся конструкторская и инженерная работа.

Естественное обобщение линейной перспективы — так называемая «Общая теория перспективы» и, в частности, «перцептивной перспективы» — разработана современным математиком и механиком Борисом Раушенбахом (см. [1]).

В математике первоначальные идеи тоже появляются как интуитивные. Только впоследствии они оформляется в виде строгих результатов. В математике есть возможность формально проверить доказать или опровергнуть математическое утверждение. Другое дело, считать ли этот результат важным или частным, второстепенным. В живописи же столько истин, сколько художников и сколько зрителей. Возможна только экспертная оценка: выставочный комитет, жюри и т. д. Изобразительное искусство, как и музыка, принципиально индивидуально. Автор выражает свои чувства, эмоции, мировоззрение (если выражает) на собственном художественном языке.

Таким образом, математика и изобразительное искусство, развиваясь, взаимно обогащают друг друга.

Иррационально о рациональном

Солнце. Самый лучший художник — это солнце. Однажды в серенький день ранней весны, бродя с этюдником по старым улочкам Перекопа, я зашел в какой-то дворик. Покосившиеся стены двухэтажного дома, старые доски сараев, просевший снег с засыпанными золой тропинками, за покосившимся забором переплетение ветвей столетних тополей и молодой поросли. Острый запах подтаявшего снега, набухающих почек, гниющего дерева. Печальное и даже гнетущее впечатление. Вдруг все преобразилось — выглянуло солнце. Старые доски заборов и сараев окрасились всеми переливами оранжевого, желтого, в тенях фиолетового цвета, снег — россыпи розового и голубоватого жемчуга. Бордовые и желто-зеленые ветки об разовали замысловатый узор, закаркали вороны. Стены дома оказались в тени и приобрели загадочные очертания и цвет. Потрясающая картина. Набежала туча и сказка исчезла. Наверное, каждый видел что-нибудь подобное. Две стихии с которыми солнце находится в непрерывном взаимодействии — это вода и небо. Прорвавшись сквозь тучи, солнце играет бликами, отражаясь в воде, а ближе к вечеру образует слепящие дорожки. Для художника, пишущего мотив с рекой, озером или прудом, нет более интересной и трудной задачи. Если солнце скрыто тучами или даже льет дождь, все равно именно солнце определяет эмоциональный строй работы. Возможны различные подходы к передаче своего восприятия этих стихий. Можно, например, писать чистыми яркими спектральными красками (импрессионисты и др.), пытаясь вызвать у зрителя праздничное настроение. Ведь ощущение праздника всегда ассоциируется с яркими красками. Верными тонами можно вызвать те же чувства или совместить эти подходы.

Художник всегда один на один с холстом и, на мой взгляд, нужно внимательно слушать свой внутренний голос и идти на поводу своей интуиции, не очень доверяя своему рассудку и навыкам. Приведем здесь слова румынского художника Корнелиу Баба: «Разве можно учить кого-нибудь тому, где следует накладывать на холст красное или же какая площадь положена этому цвету или другому, чтобы равновесие, достигнутое при гармоничном наложении различных мазков, могло быть столь же точным, как движение пальцев на скрипичных струнах, извлекающих просто *соль* или *соль диез*».

Ссылки

[1] *Раушенбах Б. В.* Пространственные построения в живописи. М.: Наука, 1980.

[2] *Кант И.* Сочинения в шести томах. Т. 6. М.: Мысль, 1966. 743 с. С.53–175.

[3] *Лошер Ж. Л., Вельдхуизен В. Ф.* Магия М. К. Эшера. Арт-Родник, Taschen, 2007.

[4] *Хофштадтер Д.* Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. Самара: Издательский дом «Бахрах-М», 2001.

[5] *Леонардо да Винчи.* Избранные произведения. Минск: Харвест, М.: АСТ, 2000. 704 с.

[6] *Дюрер А.* Трактаты, дневники, письма. СПб.: Азбука, 2000.

На открытии юбилейной выставки В. В. Литвинова 8 февраля 2018 г.

В. В. Литвинов. Последний день лета. Ильинское-Урусово. 2014.
Холст, масло. 59×78.5 см.

В. В. Литвинов. Отражение. Церковь Петра и Павла. 2003.
Холст, масло. 65×80 см.

В. В. Литвинов. Снежный март. Курба. 2005.
Холст, масло. 50×80 см.

В. В. Литвинов. Март. Спасский монастырь. 2010.
Холст, масло. 90×120 см.

В. В. Литвинов. Которский залив. Черногория. 2017.
Холст, масло. 61×91 см.

В. В. Литвинов. Жаркий полдень. Ильинское-Урусово. 2011.
Холст, масло. 60×80 см.

В. В. Литвинов. Начало весны. Вятское. 2016.
Холст, масло. 60×80 см.

В. В. Литвинов. Улица Риволи. Париж. 2013.
Холст, масло. 60×60 см.

В. В. Литвинов. Вечер накануне Пасхи. Романов. 2012.
Холст, масло. 70×100 см.

В. В. Литвинов. Финляндия. 2011.
Холст, масло. 100×140 см.

В. В. Литвинов. Важный разговор. 2010.
Холст, масло. 100×100 см.

В. В. Литвинов. Карабиха. Март. 2013.
Холст, масло. 60×80 см.

В. В. Литвинов. Сите. Париж 2013.
Холст, масло. 60×80 см.

В. В. Литвинов. Небо над Парижем. 2015. Холст, масло. 112×99 см.

УДК 372.851

Н. Л. Майорова, Г. В. Шабаршина
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mnlv@yandex.ru
E-mail: shegeve@yandex.ru

Некоторые рассуждения о результатах единого государственного экзамена по математике

В докладе дается обзор результатов ЕГЭ по Ярославскому региону в этом году и анализ одного из заданий. Обобщается опыт работы по обучению математике в общеобразовательных учреждениях.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: единый государственный экзамен, задачи с экономическим содержанием.

Большинство преподавателей вуза, не работающих со школьниками, не представляют себе объем и уровень знаний современных школьников. Конечно, сталкиваясь с выпускниками школы на первых курсах в вузе, они начинают понимать всю глубину их математического невежества, но с этим остается только смириться и все уменьшать и уменьшать объем учебного материала, ориентируясь на большинство студентов учебной группы. Авторы этой заметки уже более десяти лет вплотную связаны с такой формой оценивая знаний учащихся, как единый государственный экзамен. Предметная комиссия по математике в нашей области насчитывает более семидесяти экспертов — преподавателей вузов области и учителей высшей квалификации средних учебных заведений. Каждый эксперт каждый год проходит переаттестацию, участвуя в различных формах повышения квалификации, являясь слушателем семинаров и вебинаров, предлагаемых ФИПИ, ИРО, ЦОиККО. Эксперты демонстрируют свое умение решать задания единого экзамена, а также умения адекватно оценивать ученические работы согласно предоставляемым критериям оценивания. Но удручает то, что во время работы предметной комиссии часто оценивать бывает нечего. Экзаменационные ведомости пестрят «крестиками» и «ноликами», что соответствует «к решению не приступал» и «решение ошибочно». И эти ведомости содержат данные тех учащихся, которые добровольно выбрали так называемый профильный уровень оценивания знаний, содержащий 12 весьма простых заданий и 7 заданий повышенного уровня сложности. Остальные выпускники выбирают базовый уровень, гораздо более простой по своему содержанию.

Высший балл профильного экзамена — 100. По всей стране уже много лет средний балл колеблется около 45, в нашей области в прошедшем году он был 46,5. Всего участников единого экзамена в области было около трех с половиной тысяч. Пороговый балл, отделяющий неудовлетворительные знания от удовлетворительных — 27 (крайне низкий). И даже его в 2017 году не преодолели 460 человек — 12,67 % (опять же в Ярославской области). Высокий балл от 81,0 до 99 получили 92 выпускника (2,93 %), высший балл 100 получили два школьника. Доля участников ЕГЭ, набравших балл ниже минимального, для СОШ (средние школы) — 11,04%, для гимназий — 0,46%, для лицеев — 0,15 %. Разница, что весьма закономерно, существенная.

Естественно, единый государственный экзамен позволяет статистически оценить работу каждого района, каждой школы и конкретного учителя. Но эта статистика может и негативно влиять на учебный процесс в учебном заведении. Для достижения положительного результата своей деятельности (преодоления каждым учеником минимального порога) учитель вынужден отрабатывать сформулированные экзаменационные задачи низшего уровня, которые существенно не изменялись многие годы. А на способных учеников у учителя просто не остается времени. Это наглядно видят те преподаватели вузов, которые вынуждены заниматься со школьниками старших классов, подготавливая их к сдаче экзамена. На наш взгляд, интересны следующие данные статистической обработки результатов ЕГЭ. В таблице 1 приведен рейтинг средних образовательных учреждений, показавших наиболее высокие результаты по математике.

Также в нашем регионе существуют средние образовательные учреждения, практически все выпускники которых не преодолели минимального порога в 27 баллов. Таковыми являются: Ярославский техникум электроники и телекоммуникаций (100 %), Ярославский медицинский колледж (100 %), Сарафановская СОШ (100 %), химико-технологический техникум (100 %), ярославская СОШ № 16 (100 %), ярославская СОШ № 97 (100 %), СПО РГ АТУ им. П.А. Соловьева (100 %), Ярославский профессиональный колледж № 21 (100 %), Дубковская СОШ (80 %), Яролавский колледж гостиничного и строительного сервиса (75 %).

Однако существует и другая сторона вопроса. Минимальный пороговый балл можно получить, не приступая к решению второй части вариантов ЕГЭ, которую непосредственно и проверяет предметная комиссия экспертов. И вот к содержанию и критериям КИМ (контрольно измерительных материалов) этой второй части у предметников много вопросов. Исходя из приведенных цифр статистики следует, что получить более-менее высокий балл можно, лишь полностью решив несколько задач второй части тестов. И с этим справляются порядка 100 выпускников по всему региону, хотя тип заданий не меняется год от года. Вдумайтесь в цифры, показывающие уровень выполнения заданий второй части вариантов экзамена: тригонометрическое уравнение – полностью справились с заданием 36,34 %, стереометрическая задача — 0,91 %, рациональное неравенство относительно показательной или логарифмической функции — 11,17 %, планиметрическая задача — 0,74 %, экономическая задача — 6,16 %, задача с параметром — 0,74 %, задание по теории чисел — 0,44 %.

Ежегодно возникает вопрос, зачем предлагать практически все задачи этой части тестов такого уровня сложности, который отпугивает учащихся от попыток проникнуть в понимание их решения. Методически правильным ([1]–[2]) было бы дать несколько достаточно простых задач, посильных для многих учащихся. А две-три задачи сделать реально сложными, что являлось бы достаточным для дифференцирования выпускников по их уровню подготовки. Это не разочаровывало бы учащихся после экзамена и во время к его подготовке, а экспертам не пришлось бы листать пустые бланки ответов. И этот шаг позволил бы улучшить картину математической подготовки школьников не только в виде формальных цифр, но и в способности привлечь учащегося к попытке решения задания...

Подводя итоги первой сессии, да и последующих, мы задаем себе вопрос: как получается, что развитые в целом первокурсники в массе своей не справляются с материалом первого семестра по математическим дисциплинам? Да и по программированию часто тоже. Хотя поступали целенаправленно на математический факультет и факультет ИВТ, желая приобрести профессию программиста. Потому что, во-первых, привыкли учиться индивидуально с репетитором, и, во-вторых, учиться, в основном, не рассуждать, а выполнять определенную последовательность действий по каждому заданию ЕГЭ.

Введение текстовых задач экономического содержания есть наиболее заметное изменение во всем комплексе заданий КИМ по математике с развернутым ответом. Текст условия задачи априорно уже является некоторой моделью реальной жизненной ситуации, сюжетное условие предложенной задачи надо сводить к решению математической вычислительной задачи. В задаче, предлагаемой в 2017 году, возникал алгоритм, основанный на понимании экономических вопросов кредитования, поэтому заинтересованные учащиеся могли в них разобраться и научиться решать подобные задачи. Однако большинство школьников, даже составив подобие математической модели, столкнулись с рациональным уравнением третьей степени и не смогли его решить. Думаем, что большинству школьных учителей не профильных классов не хватает времени на решение экономических задач. Правда, некоторым учащимся помогло справиться с заданием решение аналогичных типовых задач на сайтах в Интернете.

Представим вашему вниманию некоторые задания экономического содержания.

Задание 1. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит. Найти r.

Решение задачи.

Обозначим через X сумму кредита. Долг уменьшается равномерно, т. е. на $\dfrac{X}{19}$ в месяц. Поэтому долг по месяцам составляет

$$X, \quad \frac{18X}{19}, \quad \frac{17X}{19}, \quad \ldots \quad \frac{2X}{19}, \quad \frac{X}{19}, \quad 0.$$

Обозначим $1+\dfrac{r}{100}$ через m.

Ежемесячные выплаты должны быть следующими:

$$mX - X + \frac{X}{19}, \quad \frac{18mX}{19} - \frac{18X}{19} + \frac{X}{19}, \quad \ldots \quad \frac{mX}{19} - \frac{X}{19} + \frac{X}{19}.$$

Общая сумма выплат равна

$$19 \cdot \frac{X}{19} + X(m-1)\left[1 + \frac{18}{19} + \frac{17}{19} + \ldots + \frac{2}{19} + \frac{1}{19}\right] = X(1 + 10(m-1)).$$

Эта сумма на 30% больше суммы кредита X, т. е. $X(1+10(m-1)) = 1,3X$, $10(m-1) = 0,3$, $m-1 = 0,03$. Значит, $r = 3\%$.

Задание 2. 15 января 2017 года был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице 2 представлен график его погашения.

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 5 %. На сколько процентов увеличится выплаченная сумма кредита по сравнению с первоначальной?

Для получения результата проведем вычисления:

- февраль: $100(1+0,05)-90=15\%$
- март: $90(1+0,05)-80=14,5\%$
- апрель: $80(1+0,05)-70=14,5\%$
- май: $70(1+0,05)-60=13,5\%$
- июнь: $60(1+0,05)-50=13\%$
- июль: $50(1+0,05)=52,5\%$

Итого $15\%+14,5\%+14\%+13,5\%+13\%+52,5\%=122,5\%$.

Ответ: $22,5\%$.

Задание 3. В начале 2020 года некто планирует взять кредит в банке на некоторую сумму. 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r %. Если выплачивать долг по 58564 рубля, то кредит будет погашен за четыре года, а если по 106964 рубля — то за два года. Найти r.

Решение задачи.

Пусть сумма кредита X рублей, ежегодные выплаты X_1 и X_2 соответственно, $m=1+\frac{r}{100}$. Долг перед банком составляет:

$$X \quad kX-X_1, \quad k^2X-kX_1-X_1, \quad k^3X-k^2X_1-kX_1-X_1,$$

$$k^4X-k^3X_1-k^2X_1-kX_1-X_1,$$

или

$$X, \quad kX-X_2, \quad k^2X-kX_2-X_2.$$

Получим систему

$$\begin{cases} k^4X=X_1\left(k^3+k^2+k+1\right), \\ k^2X=X_2\left(k+1\right), \end{cases}$$

или

$$\frac{k^4X_2(k+1)}{k^2}=\frac{X_1\left(k^4-1\right)}{k-1},$$

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{\left(k^2-1\right)\left(k^2+1\right)}{k^2\left(k^2-1\right)},$$

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{58564}{106964}=\frac{121}{221}.$$

Имеем: $\frac{k^2}{k^2+1}=\frac{121}{221}$, $k^2=\frac{121}{100}$, откуда $k=1,1$. Следовательно, $r=10\%$.

Как выше отмечалось, экономические задачи правильно решают около шести процентов всех участников единого государственного экзамена профильного уровня. Казалось бы, таких школьников должно быть гораздо больше: задача имеет практическое применение и не требует очень глубоких математических знаний. Более того, в каждой задаче на кредиты используется одна из стандартных схем кредитования, что позволяет решать практически любую подобную задачу, если учащийся эти схемы понял.

Конечно, составители КИМов каждый год вносят в условия изменения, усложняющие решение школьникам, которые приучены подставить какие-то данные в одну из известных им формул. Небольшое изменение условия приводит к невозможности решить новую задачу. Мы всегда отмечаем, что обучение в старших классах почти повсеместно «ЕГЭ-ориентировано». Учащийся получает навыки решения определенного набора задач, но не достигает уровня образованности, позволяющего в каждой новой задаче увидеть опорные задачи, проанализировать, что нужно сделать для сведения к базовым знаниям, а затем для соединения частей решения в единое целое. Кроме того, у многих школьников, а потом наших студентов, существует проблема прочтения условия текстовой задачи. В ней слишком много слов (мы приводим условие задачи в уже читаемой форме). Следует заметить, что большое количество ошибок также связано с непониманием, что такое процент.

Хотелось бы обратить внимание еще на одну задачу с экономическим содержанием. Такого типа задание предлагалось в позапрошлом году во время досрочного единого экзамена.

Задание 4. Алексей приобрел ценную бумагу за 8 тысяч рублей. Цена бумаги каждый год растет на 1 тысячу. Через k лет Алексей бумагу продал и положил на счет под 8 % годовых имеющуюся сумму. Чему должно быть равно k, чтобы через 25 лет сумма на банковском счете была наибольшей?

Обозначим через z_k — сумму на банковском счете через 25 лет при условии, что продажа ценной бумаги состоится в год с номером k.

Мы не будем приводить подробное решение этого задания: приведенные выше решения уже позволяют составить представление об уровне сложности подобных задач ЕГЭ. Однако задача оказалась интересна тем, что стандартное решение с использованием производной (на что «натасканы» школьники) не дает результата. Можно записать функцию, выражающую доход, вычислить ее производную, провести соответствующие рассуждения, но не найти значение k года продажи ценной бумаги, поскольку ответ имеет вид $k = \frac{1}{\ln(1{,}08)} - 7$, причем по условию, $k \in N$.

А если привлечь здравый смысл и понять, что пока разность $z_{k+1} - z_k$ положительна, продавать бумагу не стоит. Эта разность меняет знак при $k = 5,5$. Поэтому продажа должна состояться при значении $k = 6$. Задача хороша тем, что ученик может сам провести ряд вычислений и найти нужное значение. Потом можно обсудить и общий подход к решению. Кстати, такую задачу полезно предложить и первокурсникам.

На сегодняшний день в ЕГЭ сделан важный шаг: разделены базовая и профильная математика. Необходимо сделать еще один шаг — отделить ЕГЭ от школы. Сделать центры ЕГЭ независимыми, и тестировать профессионально ориентированных учащихся, а всех аттестовать в школе для получения документа об образовании. Пусть учитель работает с учениками так, как это было несколько десятилетий назад, когда приходилось сдавать вступительные профильные экзамены в вуз.

Единый государственный экзамен рассматривается как средство одновременно сдать выпускной экзамен в школе, вступительный экзамен в ВУЗ и получить своего рода *сертификат на бесплатное высшее образование*, действующий в течение нескольких лет. Университет, принимая этот сертификат, *обязан* обучать людей, которые неспособны (их немного) или не желают (таких большинство) получить фундаментальное математическое образование. Отчисляя студентов, ВУЗ терпит финансовое поражение, а выпуская специалистов с подготовкой на «удовлетворительно» — профессиональное.

Таблица 1: Баллы

	81,0 – 100,0	61,0 – 80,0	<27,0
Ярославская СОШ № 33	34,78%	49,28%	0,00%
Рыбинск, лицей № 2	24,00%	42,00%	2,00%
Ярославская СОШ № 52	15,15%	54,55%	3,03%
Ярославский лицей № 86	15,07%	53,42%	1,37%
Рыбинск, СОШ № 23	14,29%	32,14%	3,57%
Борисоглебская СОШ № 2	11,76%	64,71%	0,00%
Тутаевский МР, МОУ лицей № 1	11,10%	33,33%	16,67%
Ярославская СОШ № 2	8,33%	25,00%	25,0%
Ростов, гимназия им. А. Л. Кекина	8,00%	44,00%	12,00%
ЯрСОШ «Провинциальный колледж»	7,58%	36,36%	6,06%

Таблица 2: График погашения кредита

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг в % от кредита	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

Ссылки

[1] *Майорова Н. Л., Шабаршина Г. В.* Математическая составляющая единого государственного экзамена // Проблемы теории и практики

обучения математике: сб. научных работ. 69-е Герценовские чтения. Спб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена. 2016. С. 75–78.

[2] *Майорова Н. Л., Шабаршина Г. В.* Тестирование как средство измерения успешности обучения // Современные подходы к оценке и качеству математического образования в школе и вузе: материалы XXXII Межд. науч. сем. Екатеринбург, 2013. С. 225–226.

УДК 514.17

М. В. Невский
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mnevsk55@yandex.ru

Об одном неравенстве Скотта и его обобщении

Пусть C — выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$. Определим $\alpha(C)$ как минимальное $\tau > 0$, для которого транслят τC содержит $[0,1]^n$. Через $d_i(C)$ обозначим максимальную длину отрезка из C, параллельного i-й координатной оси. Обсуждаются следующие результаты автора, имеющие отношение к одному неравенству П. Скотта. Для любого C выполняется $\alpha(C) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}$. Если же C — невырожденный n-мерный симплекс, то это соотношение является равенством.

Библиография: 5 названий.

Ключевые слова: n-мерное выпуклое тело, куб, симплекс, осевой диаметр, минимальный коэффициент гомотетии.

В заметке обсуждаются результаты автора о соотношениях, связывающих осевые диаметры n-мерного выпуклого тела с минимальным коэффициентом гомотетии при поглощении транслятом этого тела единичного куба. Эти соотношения имеют важные теоретические приложения и также представляют интерес для преподавания спецкурсов.

Пусть C — *n-мерное выпуклое тело,* т. е. компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью. Через τC обозначим образ C при гомотетии относительно центра тяжести с коэффициентом гомотетии τ. Под *транслятом* будем понимать результат параллельного переноса. Символом $\alpha(C)$ обозначим минимальное $\tau > 0$, такое что единичный куб $Q_n := [0,1]^n$ принадлежит трансляту выпуклого тела τC. Через $d_i(C)$ обозначим максимальную длину отрезка из C, параллельного оси x_i. Величину $d_i(C)$ будем называть *i-м осевым диаметром C*.

Понятие осевого или, иначе говоря, аксиального диаметра выпуклого тела было введено П. Скоттом [1], [2]. Из доказанного им утверждения [1, теорема 1] следует такой результат. *Если в C можно вписать транслят куба Q_n, то* $\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)} \geq 1$. Доказательство, приведённое в [1], опирается на n-кратное применение к C симметризации Штейнера. При этом весьма существенно используется то, что все вершины указанного транслята принадлежат границе C. Если рассматривать условие Скотта с точностью до гомотетии, то при $n \geq 2$ этому ограничению будет удовлетворять далеко не всякое выпуклое тело (например, не всякий симплекс).

В 2011 г. автору удалось установить неравенство Скотта в более общей ситуации, когда подход работы [1] оказался неэффективным. Как следствие, было получено, что для осевых диаметров *любого* выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\alpha(C) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}$.

Опишем подход автора, реализованный в статье [3] и более подробно отражённый в монографии [3, гл. 1].

Теорема 1. *Произвольное выпуклое тело C содержит транслят куба σQ_n, где*

$$\sigma := \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i(C)}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Обозначим через D_i любой отрезок, принадлежащий C, который параллелен i-й координатной оси и имеет длину $d_i := d_i(C)$. Рассмотрим множество $V := \operatorname{conv}(D_1, \ldots, D_n)$. Пусть $\mu_i := \frac{\sigma}{d_i}$, $m^{(i)}$ — центр D_i. Положим $m := \sum_{i=1}^n \mu_i m^{(i)}$. Так как

$$\mu_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i = \sigma \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} = 1,$$

то m есть выпуклая комбинация точек V. Поэтому $m \in V$.

Обозначим через Q транслят куба σQ_n с центром в точке m. Покажем, что $Q \subset C$. Произвольная вершина Q имеет вид $v = m + \left(\pm\frac{\sigma}{2}, \ldots, \pm\frac{\sigma}{2}\right)$ с некоторым сочетанием знаков. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — канонический базис $\mathbb{R}^n$. Имеем цепочку равенств:

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma}{d_i} m^{(i)} + \sigma\left(\pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2}\right) = \sigma\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i} m^{(i)} + \sum_{i=1}^n \left(\pm\frac{1}{2} e_i\right)\right] =$$

$$= \sigma \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i}\left(m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i \left(m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i\right).$$

Отрезок D_i параллелен i-й координатной оси и его длина равна d_i, поэтому $m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i \in D_i$. Точки $m^{(i)} \pm \frac{d_i}{2} e_i$ суть концы D_i. Таким образом, каждая вершина Q есть выпуклая комбинация концов отрезков $D_1, \ldots, D_n$ и, следовательно, принадлежит V. Значит, $Q \subset V$. Поскольку $V = \operatorname{conv}(D_1, \ldots, D_n) \subset C$, справедливо и включение $Q \subset C$.

Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1 следует, что неравенство Скотта выполняется для более широкого класса выпуклых тел, чем отмечалось в [1].

Теорема 2. *Пусть n-мерное выпуклое тело C содержит транслят куба Q_n и не содержит никакого транслята куба τQ_n при $\tau > 1$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} \geq 1. \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что для некоторого C из условия теоремы выполняется $\sum \frac{1}{d_i(C)} < 1$. Положим $\sigma := \left(\sum \frac{1}{d_i(C)}\right)^{-1}$. По теореме 1, выпуклое тело C содержит транслят куба σQ_n. Но так как $\sigma > 1$, мы получаем противоречие. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Для любого выпуклого тела $C \subset \mathbb{R}^n$ справедливо*

$$\alpha(C) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)}. \tag{2}$$

Доказательство. Из определения $\alpha(C)$ следует, что выпуклое тело $C' := \alpha(C)C$ удовлетворяет условию следствия. Для C' выполняется неравенство (1), т. е. $\sum \frac{1}{d_i(C')} \geq 1$. Остается заметить, что $d_i(C') = \alpha(C)d_i(C)$, поэтому последнее неравенство эквивалентно (2). $\square$

Отметим, что подход работы Скотта [1] позволяет доказать неравенство (2) лишь для тех выпуклых тел, в которые можно вписать куб с рёбрами, параллельными координатным осям.

Оценка, противоположная (2), выполняется с точной константой $\frac{1}{n}$ в правой части.

Теорема 4. *Для n-мерного выпуклого тела C верно соотношение*

$$\alpha(C) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)}. \tag{3}$$

Равенство в (3) эквивалентно тому, что C есть гомотетическая копия Q_n.

Доказательство. Поскольку транслят выпуклого тела $\alpha(C)C$ содержит Q_n, то при любом i верно $\alpha(C)d_i(C) = d_i(\alpha(C)C) \geq 1$. Отсюда $\frac{1}{d_i(C)} \leq \alpha(C)$. Для получения (3) достаточно просуммировать эти неравенства по i.

Если C есть транслят куба τQ_n ($\tau > 0$), то обе части (3) одинаковы и равны $\frac{1}{\tau}$. Наконец, пусть выпуклое тело $C \subset \mathbb{R}^n$ таково, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(C)} = n\alpha(C).$$

Из предыдущего имеем $d_i(\alpha(C)C) = 1$, $1 \le i \le n$. Так как при этом некоторый транслят куба Q_n, обозначим его через Q, принадлежит $\alpha(C)C$, то $\alpha(C)C = Q$. (Допустим противное. Пусть $x \in \alpha(C)C \setminus Q$. Из выпуклости $\alpha(C)C$ следует, что для некоторого j существует отрезок, проходящий через x, параллельный j-й оси и содержащийся в $\alpha(C)C$. Длина этого отрезка превышает 1, что противоречит равенству $d_j(\alpha(C)C) = 1$.) Значит, C есть транслят τQ_n для некоторого $\tau > 0$.

Теорема доказана. $\square$

В заключение отметим результат, полученный автором в [2].

Теорема 5. *Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\alpha(S) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)}.$$

Таким образом, если C — n-мерный невырожденный симплекс, то (2) является равенством. Интересно заметить, что обратное утверждение верно лишь для $n = 1$, когда любое выпуклое тело C есть отрезок и $\alpha(C) = \frac{1}{d_1(C)}$. Если $n \ge 2$, то в качестве подходящего C, отличного от симплекса, можно взять множество $x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$, $n \le \sum x_i \le 2n$. В этом примере $d_1(C) = \ldots = d_n(C) = n$, $\alpha(C) = 1$, поэтому левая и правая части (2) одинаковы и равны 1.

Ссылки

[1] *Scott P. R.* Lattices and convex sets in space // Quart. J. Math. Oxford (2). 1985. V. 36. P. 359–362.

[2] *Scott P. R.* Properties of axial diameters // Bull. Austral. Math. Soc. 1989. V. 39. P. 329–333.

[3] *Невский М. В.* Об осевых диаметрах выпуклого тела // Матем. заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 313–315. (Англ. перевод: *Nevskii M. V.* On the axial diameters of a convex body // Math. Notes. 2011. V. 90, № 2. P. 295–298.)

[4] *Nevskii M.* Properties of axial diameters of a simplex // Discr. Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

[5] *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 218 с.

УДК 514.17+514.51

М. В. Невский
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mnevsk55@yandex.ru

Свойства осевых отрезков n-мерного симплекса

Под k-м осевым отрезком невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ понимается отрезок максимальной длины, принадлежащий S и параллельный k-й координатной оси. Приводятся свойства осевых отрезков симплекса с условием $S \subset [0,1]^n \subset nS$. В качестве приложений излагаются новые доказательства некоторых известных утверждений для $n = 2$ и $n = 3$.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: n-мерный симплекс, осевой диаметр, осевой отрезок, гомотетия, коэффициент поглощения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n = [0,1]^n$. Через $e_1, \ldots, e_n$ обозначим канонический базис $\mathbb{R}^n$. Для выпуклого многогранника $G \subset \mathbb{R}^n$ через σG обозначим результат гомотетии G относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Под $\mathrm{ver}(G)$ будем понимать совокупность вершин G.

Всюду далее через S обозначается невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ в симплексе S существует единственный отрезок I_k максимальной длины, параллельный k-й координатной оси. Этот отрезок мы будем называть *k-м осевым отрезком,* а его длину $d_i(S)$ — *k-м осевым диаметром симплекса S.* В [1] автором доказаны свойства осевых диаметров симплекса, в частности, формулы, выражающие длину и концы осевых отрезков через вершины S. В этих формулах применяются коэффициенты так называемых базисных многочленов Лагранжа λ_j, соответствующих симплексу S. Позднее автор обобщил эти равенства на максимальные в симплексе отрезки произвольного направления.

Для симплекса S определим величину $\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}$. Число $\xi(S)$ мы называем *коэффициентом поглощения* симплексом S n-мерного единичного куба Q_n. Положим

$$\xi_n := \min\{\xi(S) : S - n\text{-мерный симплекс}, S \subset Q_n, \mathrm{vol}(S) \neq 0\}.$$

Обозначим через $\alpha(S)$ минимальное $\sigma > 0$, такое что Q_n содержится в трансляте симплекса σS.

В [1] установлено, что если $Q_n \not\subset S$, то

$$\xi(S) = (n+1) \max_{1\le k\le n+1} \max_{x\in \mathrm{ver}(Q_n)} (-\lambda_k(x)) + 1.$$

Для произвольного невырожденного $S \subset \mathbb{R}^n$ справедливо

$$\alpha(S) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k(S)}. \tag{1}$$

Элегантное соотношение (1) и его следствия доказаны в [2]. Отметим, что всегда $\xi(S) \geq \alpha(S)$. Равенство $\xi(S) = \alpha(S)$ имеет место тогда и только тогда, когда симплекс $\xi(S)S$ описан вокруг Q_n (т. е. каждая $(n-1)$-мерная грань последнего симплекса содержит вершину куба).

По поводу этой тематики, различных оценок, обобщений и приложений см. монографию автора [3], а также цикл более поздних статей автора и А. Ю. Ухалова (например, [4]). В настоящей заметке мы приведём некоторые свойства осевых отрезков n-мерного симплекса с коэффициентом поглощения n.

Будем считать, что k-й осевой отрезок I_k имеет вид $[a_k, b_k]$, причём, если $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$, $b_k = (b_{k1}, \ldots, b_{kn})$, то $a_{kk} < b_{kk}$. Очевидно, $b_k = a_k + d_k(S)e_k$. Через $c(D)$ обозначается центр тяжести D. В частности, $c(I)$ есть центр отрезка I.

Теорема 1. *Если $S \subset Q_n \subset nS$, то выполняются соотношения*

$$\xi(S) = \alpha(S) = n, \tag{2}$$

$$d_k(S) = |I_k| = 1 \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$c(S) = c(Q_n) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c(I_k) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\frac{n-1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{2}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Сначала применим равенство (1). Так как условие $S \subset Q_n$ влечёт $d_k(S) \leq 1$ при любом k, имеем

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{d_k(S)} = \alpha(S) \leq \xi(S).$$

Включение $S \subset nS$ означает, что верно и противоположное неравенство $\xi(S) \le n$. Тем самым, $\xi(S) = n$, что даёт $\alpha(S) = n$ и $d_k(S) = 1$. Кроме того, совпадение $\xi(S)$ и $\alpha(S)$ с размерностью n означает, что симплекс nS описан вокруг куба Q_n.

Равенство (4) доказано в [4]; здесь мы ограничимся только этой ссылкой. Далее, из соотношений $\alpha(S) = n$ и $c(S) = c(Q_n)$ следует, что максимальный гомотет куба Q_n, содержащийся в S, есть $\frac{1}{n}Q_n$. Как отмечается в доказательстве теоремы 1.5.2 из [3], центр этого куба совпадает с точкой $m = \frac{1}{n}\sum c(I_k)$. Таким образом, выполняется (5). Так как $d_k(S) = |I_k| = 1$, то конец a_k осевого отрезка I_k принадлежит гиперплоскости $x_k = 0$. Поэтому центр отрезка I_k есть точка $a_k + \frac{1}{2}e_k$. Следовательно,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c(I_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + \frac{1}{2}e_k\right) = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right),$$

что даёт (6). □

Заметим, что из равенства (1) получается, что при любом n справедлива оценка $\xi_n \ge n$. Равенство $\xi_n = n$ равносильно существованию при данном n симплекса $S \subset Q_n$, для которого $\xi(S) = n$, т. е. $Q_n \subset nS$.

В качестве примеров применения теоремы 1 приведём новые доказательства некоторых известных свойств для $n = 2$ и $n = 3$. Точные значения $\xi_2 = 1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 2.34\ldots$ и $\xi_3 = 3$, а также описания двумерных и трёхмерных экстремальных симплексов были получены автором с использованием специальных и довольно тонких подходов (см. [3]).

Следствие 1. $\xi_2 > 2$.

Доказательство. Требуется показать, что для любого $S \subset Q_2$ верно $\xi(S) > 2$. Допустим, что это не так. Тогда существует двумерный симплекс со свойствами $S \subset Q_2 \subset 2S$. Пусть I_1, I_2 — осевые отрезки S, $a_1 = (0, a_{12})$ — конец I_1, $a_2 = (a_{21}, 0)$ — конец I_2. Для $n = 2$ равенство (6) равносильно $(a_{21}, a_{12}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Значит, $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, где $a_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right), b_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right), a_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), b_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Но симплекса с такими осевыми отрезками не существует. Противоречие. □

Следствие 2. Пусть $S \subset Q_3 \subset 3S$. Тогда S подобен правильному симплексу S^* с вершинами $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,0,0)$ или симплексу S^{**} с вершинами $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Доказательство. Опишем схему соответвующей редукции. В трёхмерной ситуации максимальный в симплексе отрезок, имеющий данное направление, соединяет либо вершину симплекса и его двумерную грань, либо два скрещивающихся ребра симплекса.

Рассмотрим сначала случай, когда концы некоторого осевого отрезка $I = [a, b]$ симплекса S являются внутренними точками противоположных двумерных граней куба Q_3. Обозначим осевые диаметры симплекса через d_1, d_2, d_3. По теореме 1 выполняются равенства $d_1 = d_2 = d_3 = 1$.

Если точка a является вершиной S, то оставшиеся три вершины не лежат одновременно на противоположной грани куба (нетрудно понять, что в противном случае нарушается необходимое равенство (4)). Но тогда хотя бы один из осевых отрезков, отличных от I, имеет длину, меньшую 1. Поэтому точки a и b принадлежат скрещивающимся рёбрам симплекса, лежащим на соответствующих гранях куба.

Допустим, что ребро симплекса, содержащее конец a, не является диагональю двумерной грани куба. Тогда равенства $d_k = 1$ выполняются лишь в ситуации, когда рёбра S, содержащие a и b, перпендикулярны попарно скрещивающимся рёбрам куба. В этом случае осевые отрезки симплекса S, отличные от I, совпадают с рёбрами S. Иначе говоря, в этой ситуации с точностью до порядка осевых отрезков имеем с некоторыми $0 < \sigma, \tau < 1$

$$a_1 = (0, \sigma, 1), \quad b_1 = (1, \sigma, 1), \quad a_2 = (\tau, 0, 0),$$

$$b_1 = (\tau, 1, 0), \quad a_3 = (\tau, \sigma, 0), \quad b_3 = (\tau, \sigma, 1)$$

(здесь мы положили $I_3 = I$). Равенство (6) принимает вид $(2\tau, 2\sigma, 1) = (1, 1, 1)$, что даёт $\sigma = \tau = \frac{1}{2}$. Тогда $S = S^{**}$.

Рассмотрим случай, когда точки a и b принадлежат скрещивающимся рёбрам S, лежащими в соответствующих гранях куба, и ребро симплекса, содержащее a, является диагональю двумерной грани Q_3. В этом случае все равенства $d_k = 1$ выполняются лишь в ситуации, когда и ребро S, содержащие b, также есть диагональ грани куба. Тогда S является правильным симплексом, подобным S^*.

Наконец, обратимся к ситуации, когда концы всех осевых отрезков симплекса лежат на рёбрах куба. Как и ранее, обозначим через a_k конец осевого отрезка I_k, принадлежащий гиперплоскости $x_k = 0$. Пусть

$$a_1 = (0, a_{12}, a_{13}), \quad a_2 = (a_{21}, 0, a_{23}), \quad a_1 = (a_{31}, a_{32}, 0).$$

Вновь обращаясь к (6), получаем систему равенств

$$a_{21} + a_{31} = 1, \quad a_{12} + a_{32} = 1, \quad a_{13} + a_{23} = 1.$$

Поэтому концы осевых отрезков $I_k = [a_k, b_k]$ имеют вид

$$a_1 = (0, 1 - v, w), \quad b_1 = (1, 1 - v, w), \; a_2 = (u, 0, 1 - w),$$

$$b_2 = (u, 1, 1 - w), \quad a_3 = (1 - u, v, 0), \quad b_3 = (1 - u, v, 1)$$

с некоторыми $u, v, w \in [0, 1]$. В рассматриваемой ситуации, когда a_k, b_k лежат на рёбрах куба, два из трёх параметров u, v, w принимают значения 0 или 1. Все эти случаи рассматриваются однотипно и приводят к следующему: симплекс с такими осевыми отрезками не существует. Заметим, что в совокупность рассматриваемых здесь симплексов включаются лишь те, для которых выполняются равенства (5)–(6). Например, к ним не относится тетраэдр с вершинами $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, для которого концы осевых отрезков $a_k = 0$, $b_k = e_k$ указанным путём не получаются. $\square$

Отметим, что круг рассматриваемых вопросов имеет отношение к оценкам для норм проекторов при интерполяции функций многих переменных с помощью алгебраических многочленов (см. [3]). Эта тематика также может найти своё приложение в преподавании спецкурсов по вычислительной геометрии.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.12873.2018/12.1.

Ссылки

[1] *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 580–593. (Англ. перевод: *Nevskii M. V.* On a property of n-dimensional simpleces // Math. Notes. 2010. V. 87, № 4. P. 543–555.)

[2] *Nevskii M.* Properties of axial diameters of a simplex // Discr. Comput. Geom. 2011. V. 46, № 2. P. 301–312.

[3] *Невский М. В.* Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. Ярославль: ЯрГУ, 2012. 218 с.

[4] *Невский М. В., Ухалов А. Ю.* Об n-мерных симплексах, удовлетворяющих включениям $S \subset [0,1]^n \subset nS$ // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 578–595.

УДК 510.52:372.851

В. С. Рублев, М. Т. Юсуфов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: roublev@mail.ru
E-mail: flood4life@gmail.com

Проблемы компьютерного обучения математике на примере АСО «Анализ сложности алгоритмов»

Рассматриваются идеи разработки компьютерной системы обучения «Анализ сложности алгоритмов», которые способствуют развитию математического мышления и могут быть использованы при разработке подобных систем для других математических дисциплин.

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: компьютерное обучение, алгоритм, вычислительная сложность, анализ, алгебра преобразований, модели обучения, контроль обучения.

В настоящий период проблемы обучения основной массы студентов математическим и компьютерным наукам связаны с неразвитостью мышления, вызванного низким качеством школьного образования. Значительная масса выпускников школ не умеют читать (понимать прочитанное), не умеют рассуждать, поскольку их этому недостаточно обучали.

Эти проблемы могут быть решены только индивидуальным обучением, но такой подход требует от преподавателя огромных дополнительных временных затрат, превышающих в несколько раз часы, выделяемые учебным планом. Поэтому напрашивается путь решения в разработке компьютерных автоматизированных систем обучения (АСО), которые не только контролируют знания, но ведут обучение. В основном многие компьютерные системы осуществляют контроль тестированием памяти студента, а потому могут обучать некоторым определениям, но не их использованию. АСО для разделов точных наук должно обучать анализу данных, их формализации, анализу, рассуждениям и преобразованиям. Мы покажем на примере разработки АСО «Анализ сложности алгоритмов» ([1]-[3]), как этого можно достигнуть.

Целью АСО «Анализ сложности алгоритмов» является обучение студентов проведению анализа алгоритма, заданного программой, для оценки вычислительной сложности. Поскольку сложность алгоритма, содержащего циклы, определяется количеством выполнения этих циклов, то в основу методики получения оценок положено составление *символьной таблицы прокрутки алгоритма.* В этой таблице для каждой переменной алгоритма (кроме тех, от которых не зависят асимптотические оценки вычислительной сложности) отводится столбец и ещё специальные столбцы:
— для каждого цикла столбец с номером выполнения цикла и символьным обозначением этого номера при последнем выполнении цикла;
— столбец *Условие цикла*, в который записывается символьное условие выполнения цикла для последнего его выполнения с комментарием *посл. вып.* и условие выхода из цикла с комментарием *выход.*

Вводится понятие *строк таблицы прокрутки*, связанных с выполнением цикла. Центральной при этом является проверка условия выполнения цикла, которое отображается в столбце условия строки. Если некоторые из параметров условия изменяются перед проверкой условия, то эти изменения отображаются в предыдущей строке. Изменение тех параметров условия, которые имеют место после проверки условия, отображаются в строке проверки условия так же, как и изменение переменных тела цикла (но только до момента изменения этих параметров в теле цикла или вызова вложенного цикла, отображение которых идет уже в следующей строке). Поэтому с выполнением условия в худшем случае могут быть связаны 3 строки, но только та из них, которая содержит проверку условия, помечается в столбце номера выполнения цикла. Выполнение тела цикла приводит к изменению переменных в этой строке, после чего заполняется выражение условия выполнения цикла. Если считается, что оно выполнено, то происходит переход к следующему выполнению тела цикла и, следовательно, к следующей строке. Рассмотрим пример алгоритма с двумя невложенными, но зависмыми циклами:

$$\begin{array}{l}
\textbf{void}\ f\ (\textbf{unsigned long}\ n)\{\\
\quad \textbf{float}\ x = n, z = n;\\
\quad \textbf{while}\ (x > 2)\ \{\ x = \textbf{sqrt}(x);\ \ z = z * z; \}\\
\quad \textbf{while}\ (z\ / = 2 > 1); \qquad \}
\end{array}$$

Не все строки символьной прокрутки могут быть отображены в таблице. Рекомендуется обязательно отображать для цикла первые две строки выполнения тела цикла с номерами 1 и 2, строку последнего выполнения цикла с номером p<номер цикла>, строку выхода из цикла с номером p<номер цикла>$+1$.

Ниже приведена таблица символьной прокрутки этого алгоритма. Все шаги по составлению студентом таблицы должны контролировать-

N_l	i_1	i_2	x	z	*Условие цикла*	
			n	n		
1	1		$n^{1/2}$	n^2	$n > 2$	
	2		$n^{(1/2)^2}$	n^{2^2}	$n^{1/2} > 2$	
	...		...	...	...	
	p_1		$n^{(1/2)^{p_1}}$	$n^{2^{p_1}}$	$n^{(1/2)^{p_1-1}} > 2$	посл.вып.
	p_1+1				$n^{(1/2)^{p_1}} \not> 2$	выход
2		1		$n^{2^{p_1}}/2$	$n^{2^{p_1}}/2 > 1$	
		2		$n^{2^{p_1}}/2^2$	$n^{2^{p_1}}/2^2 > 1$	
		...		...	...	
		p_2		$n^{2^{p_1}}/2^{p_2}$	$n^{2^{p_1}}/2^{p_2} > 1$	посл.вып.
		p_2+1		$n^{2^{p_1}}/2^{p_2+1}$	$n^{2^{p_1}}/2^{p_2+1} \not> 1$	выход

ся системой. Начальную разработку шапки таблицы и символьную инициализацию переменных легко проконтролировать. Но далее идет выполнение шагов алгоритма, которое меняет значения переменной в том или ином столбце. Сложность состоит в многообразии возможных преобразований символьных выражений, которые может сделать студент. Необходимо создать метод контроля правильности преобразования.

Для этого вводится система *нормальных* элементарных алгебраических преобразований. Например, вынесение общего множителя за скобки, или обратное преобразование — раскрытие скобок. Студент выбирает тип преобразования из меню преобразований и выделяет подцветкой в строке символьного выражения операнды. После этого он выполняет вручную преобразование и подтверждает конец выполнеия. Система проверяет правильность такого элементарного преобразования и, если оно неверно, сообщает об ошибке. Последовательностью таких элементарных преобразований может быть достигнут желательный вид выражения, после чего можно переходить к следующему шагу прокрутки.

Анализ условий последнего выполнения цикла и выхода из цикла позволяет получить неравенства для количества выполнения цикла. В примере для цикла 1 получаем неравенства $\log_2 \log_2 n \leq p_1 < \log_2 \log_2 n + 1$, из которых следует $p_1 = \lceil \log_2 \log_2 n \rceil$. Это дает следующую временную сложность цикла 1: $T_1(n) = O(\log \log n)$. А для параметра количества выполнения цикла 2 получаем неравенства $\frac{3}{4} \log_2^2 n \leq p_2 < 2 \log_2^2 n$, а потому временная сложность цикла 2: $T_2(n) = O(\log_2^2 n)$. Выбирая максимальную оценку временной сложности циклов окончательно получаем временную сложность алгоритма: $T_f(n) = O(\log^2 n)$.

Поскольку контроль требуется и при преобразованиях неравенств условий таблицы прокрутки, то вводятся система нормальных элементарных преобразований неравенств для оценок и (подобно преобразованию выражений в таблице символьной прокрутки) меню выбора преобразования, что позволяет пошагово контролировать верность преобразований.

Стратегия обучения основана на разделении изучаемого материала на порции (секции, темы) и контроля усвоения материала порций в виде тестов или упражнений (*тестов-упражнений*). Поскольку для полного усвоения материала обучение должно быть адаптивным, то в начале работы с каждой темой студент получает начальное количество тестов-упражнений, и если он выполняет их безошибочно, то переходит к работе со следующей темой. Если он делает первую ошибку, то дается возможность ее исправить, и после того, как он уже без дальнейших ошибок выполнит этот тест-упражнение, прежнее количество тестов или упражнений остается неизменным. Если же студент делает повторную ошибку в том же тесте-упражнении, то оно снимается с выполнения и прежнее количество тестов-упражнений для выполнения увеличивается. Тем самым студент стимулируется на внимательное изучение материала. Если же он после внимательного изучения материала выполняет безошибочно 2 или более тестов-упражнений, то оставшееся их количество для выполнения снижается прогрессивным образом, что также стимулирует студента.

Мы полагаем, что идеи системы смогут быть успешно использованы при разработке систем компьютерного обучения дисциплинам, связанным с математикой и теоретической информатикой.

Ссылки

[1] *Рублев В. С., Юсуфов М. Т.* Автоматизированная система для обучения анализу вычислительной сложности алгоритмов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12, № 1. С. 135–145.

[2] *Рублев В. С., Юсуфов М. Т.* Автоматизированная обучающая система «Анализ вычислительной сложности алгоритмов» (исследование организации 1-й части проекта) // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т. 13, № 2. С. 170–178.

[3] *Кормен Т. и др.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2013.

УДК 373.1

Е. Р. Семко

Средняя школа «Провинциальный колледж» г. Ярославля
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: semkoer@mail.ru

Система «школа-вуз»: модель формирования исследовательской компетенции учащихся

Предлагается описание модели организации учебно-исследовательской деятельности старшеклассников, обучающихся в соответствии с требованиями федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, способствующей формированию готовности будущих студентов к исследовательской работе

Библиография: 3 названия.

Ключевые слова: учебно-исследовательская деятельность обучающихся, исследовательская компетенция, федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, универсальные учебные действия, метапредметные результаты.

Одной из острых проблем многих организаций высшего профессионального образования сегодня стала проблема эффективного и качественного обучения студентов первых курсов по стандартам высшей школы. Речь идет не о качестве и количестве знаний, приобретенных в общеобразовательной школе, а о подготовленности выпускников к системе обучения в высшей школе.

Если говорить о готовности выпускников продолжать обучение на математических факультетах, то одним из условий успешного обучения, развития математических способностей и математического мышления и, как следствие, повышения качества математического образования в целом, является введение в систему математической подготовки и подготовки в других предметных областях учебно-исследовательской деятельности старшеклассников [3].

Для того, чтобы выпускники общеобразовательной школы были значительно лучше готовы к продолжению обучения, федеральный государственный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) предъявляет новые требования к результатам освоения основной образовательной программы (ООП) [2]. Так, в числе метапредметных результатов освоения ООП названы способность обучающихся к учебному сотрудничеству с педагогами и сверстниками, способность к построению индивидуальной образовательной траектории, владение навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности [1].

Средняя школа «Провинциальный колледж», пилотная школа в регионе по введению ФГОС СОО, получившая в 2017 году статус «Университетская школа» Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, в своей ООП предложила модель организации учебно-исследовательской деятельности старшеклассников, структура которой предполагает этапы постановки учебно-исследовательских задач, учебно-исследовательских действий и действий, связанных с контролем и оценкой.

Обеспечение нового требования ФГОС СОО о выполнении каждым старшеклассником индивидуального проекта в Провинциальном колледже происходит на основе следующего алгоритма.

1. Определение ролей всех организаторов и участников исследовательской деятельности.

    - Проведение педсоветов (методических семинаров) для подготовки квалифицированных специалистов в вопросах организации проектной и исследовательской деятельности школьников.
    - Выработка педагогическим коллективом единых требований к индивидуальному проекту учащегося: формам, методам, видам презентации готового продукта, критериям оценки и т. п.
    - Определение роли и ответственности сопровождающего (тьютора), психолога, классного руководителя и родителя; обсуждение данных вопросов на собраниях.
    - Проведение (в случае необходимости) индивидуальных консультаций с обучающимися и взрослыми участниками процесса.

2. Создание условий для адаптации учащихся в исследовательском пространстве школы.

    - Проведение классных собраний с обсуждением исследовательской деятельности, проектной деятельности, индивидуальном исследовательском проекте.

- Создание стенда с информацией о том, как исследовательская деятельность реализуется в школе, о выходе на конференции и конкурсы, о лучших исследовательских работах школьников.
- Проведение встреч с потенциальными научными руководителями, которые рассказывают о возможных направлениях исследований.
- Ознакомление с работами учащихся прошлых лет (выставки в библиотеке, доступ к электронным каталогам и базам данных исследовательских работ).
- Анкетирование с целью выявить сферу интересов учащихся и, возможно, желаемых руководителей.

3. Информирование о нормативно-правовых документах, определяющих особенности организации, цели и задачи, содержание деятельности.

    - Постоянно действующий и доступный стенд, на котором размещены Положения об исследовательской деятельности в школе, о конференции, о программах, конкурсах и т. д.
    - Размещение нормативных документов на сайте школы.

4. Научно-профессиональное направление исследовательской деятельности учащихся.

    Каждого учащегося закрепляют за конкретным преподавателем, имеющим определенную сферу научных интересов.

5. Усиление исследовательского компонента в содержании учебных программ.

    - Корректировка содержания программ учебных дисциплин.
    - Наполнение учебных программ заданиями исследовательского характера.

6. Повышение квалификации преподавательского состава.

    - Проведение курсов повышения квалификации «Современные технологии обучения в школе», освещающих вопросы дидактики, педагогической психологии, современных информационных технологий, технологий трансляции научного содержания дисциплин в ученической аудитории.
    - Создание условий для вовлечения в научную, научно-методическую деятельность учителей школы.

7. Обеспечение высокого уровня научно-методического сопровождения исследовательской деятельности учащихся.

    - Ежегодное обновление каждым преподавателем в рамках читаемого курса тематики рефератов, курсовых, проектных работ, заданий для самостоятельной работы.
    - Корректировка методических рекомендаций, памяток для учащихся, программ спецкурсов по выполнению исследовательских работ с учетом контингента обучающихся.
    - Проведение экскурсий для ознакомления с современным учебным оборудованием в научно-исследовательские и научно-образовательные центры города.
    - Организация занятий по поиску информации в сети интернет.
    - Обязательное введение в учебный процесс специализированного курса «Основы исследовательской деятельности».

8. Создание системы оценки качества исследовательской деятельности учащихся.

    - Определение требований и критериев оценки выполненных исследовательских работ.
    - Обсуждение результатов мониторинга исследовательской деятельности учащихся на заседаниях педагогического совета.

9. Интенсификация процессов сотрудничества с другими образовательными учреждениями (университетами, колледжами, гимназиями, школами).

    - Привлечение учащиеся к участию в конференциях, семинарах, круглых столах, мастер-классах на базе школы.
    - Презентация результатов исследовательской и проектной деятельности учащихся на конференциях различных уровней.

10. Создание системы морального и материального стимулирования субъектов, участвующих в организации исследовательской деятельности.

    - Формирование портфолио обучающихся и педагогов.
    - Поощрение грамотами и подарками за участие в мероприятиях исследовательского характера.
    - Материальное и моральное поощрение педагогов за развитие исследовательской деятельности учащихся (благодарности и премирование).

Перечислим, как реализуются основные требования к различным форматам урочной и внеурочной работы, направленной на формирование универсальных учебных действий на уровне среднего общего образования, таким как обеспечение возможности самостоятельной постановки целей и задач в предметном обучении, проектной и учебно-исследовательской деятельности обучающихся в Провинциальном колледже.

1. Проблемное ведение уроков. Реализуя проблемный подход к ведению урока, учитель представляет различные точки зрения по конкретной теме, организовывает дискуссию, в процессе которой проводится анализ первоисточников и высказываются различные мнения. Проблемный метод подразумевает совершенствование обучающихся в написании элементарных форм исследовательской работы – реферативных докладов, эссе. Наибольший активизирующий эффект на занятиях дают ситуации, в которых обучающиеся сами должны:

   — отстаивать свое мнение;
   — принимать участие в дискуссиях и обсуждениях;
   — ставить вопросы своим товарищам и преподавателям;
   — рецензировать ответы товарищей;
   — оценивать ответы и письменные работы товарищей;
   — самостоятельно выбирать посильное задание;
   — находить несколько вариантов возможного решения познавательной задачи (проблемы);
   — создавать ситуации самопроверки, анализа личных познавательных и практических действий;
   — решать познавательные задачи путем комплексного применения известных им способов решения.

2. Курс «Основы исследовательской деятельности» — обязательный предмет, включенный в учебный план. В рамках этого курса представляется методология исследовательской деятельности с иллюстрацией способов постановки и реализации исследовательских задач на примере домашних заданий и презентацией итогов на уроках.

3. Курсы в рамках школьного компонента — курсы, поддерживающие профильное обучение, в рамках которых происходит выполнение различных (в том числе исследовательских) проектов.

4. Программы внеурочной деятельности с применением широкого спектра различных форм групповой и индивидуальной работы.

5. Экскурсионная деятельность, предполагающая применение элементов исследовательского подхода: постановка индивидуальных исследовательских задач с фиксацией результата в виде отчётных работ.

6. Реализация общешкольных проектов (например, проектов образовательных лагерей в рамках интеграции программы общего и дополнительного образования).

7. Проведение научно-практических конференций и конкурсов как форм презентации исследовательской деятельности.

Дидактической единицей исследовательской деятельности является индивидуальный проект. Он выполняется обучающимися в течение одного или двух лет в рамках учебного времени, специально отведенного учебным планом, и должен быть представлен в виде завершенного учебного исследования или разработанного проекта: информационного, прикладного, инновационного, конструкторского, инженерного.

Главная цель выполнения индивидуального проекта — развитие личности учащегося, приобретение учащимися функционального навыка исследования как универсального способа освоения действительности, развитие способностей к исследовательскому типу мышления, активизации личностной позиции учащегося в образовательном процессе на основе приобретения субъективно новых знаний (т. е. самостоятельно получаемых знаний, являющихся новыми и личностно значимыми для конкретного учащегося). Сроки выполнения проекта зависят от объема и глубины проработки выбранной обучающимся темы и могут составлять один или два учебных года.

Индивидуальный исследовательский проект — это самостоятельная работа каждого ученика в соответствии с его особенностями и реальными учебными возможностями. Как дидактическая единица он обладает сложностью и трудностью. Под сложностью понимается объективное содержание предполагаемой деятельности — количество этапов логической схемы проекта, степень изученности поставленной проблемы учебного исследования. Трудность определяется индивидуальной субъективной характеристикой обучающегося и зависит от его личных качеств, запаса знаний и умений. Сложность и трудность индивидуального проекта должна учитывать личностные особенности обучающегося, способствуя повышению его восприимчивости к учению — обучаемости.

Результаты выполнения индивидуального исследовательского проекта должны отражать:

— склонность к инновационной, аналитической, творческой, интеллектуальной деятельности (выдвижение идеи, проблематизация, постановка вопроса);

— умение самостоятельно находить необходимую информацию и ее структурировать (формулирование ключевых слов, работа с библиотечными и интернет-каталогами, контекстный поиск, структурирование информации, выделение главного, приём и передача информации, представление ее в различных формах);

— сформированность навыков исследовательской и проектной деятельности, самостоятельного применения приобретенных знаний и способов действий при решении различных задач, используя знания одного или нескольких учебных предметов или предметных областей (обоснованный выбор способа или метода, пути в деятельности, планирование своей деятельности);

— способность к постановке цели и к формулированию гипотезы исследования, к отбору и интерпретации необходимой информации, структурированию аргументации результатов исследования на основе собранных данных;

— готовность к проведению инструментального эксперимента (подбор необходимого оборудования, подбор и приготовление материалов (реактивов), проведение собственно эксперимента, наблюдение за ходом эксперимента, измерение параметров, осмысление полученных результатов);

— презентацию результатов (построение устного сообщения о проделанной работе, выбор способов и форм наглядной презентации результатов деятельности, изготовление предметов для наглядной демонстрации).

— сформированность коммуникативных навыков (слушать и понимать других, выражать себя, находить компромисс, взаимодействовать внутри группы, находить консенсус).

К условиям, обеспечивающим формирование исследовательской компетенции обучающихся можно отнести следующие.

1. Высокий профессиональный уровень педагогического коллектива, который может достигаться за счет совершенствования коллектива штатных педагогов (разработка собственной научной темы, участие в научных, научно-методических и методических конференциях, семинарах, курсы повышения квалификации) и привлечения в школу преподавателей высших учебных заведений, имеющих опыт работы со старшеклассниками.

2. Система методического обеспечения проектно-исследовательской деятельности обучающихся: мониторинг исследовательских интересов, позволяющий учитывать потребности обучающихся; курс «Основы исследовательской деятельности» (лекции и практические занятия); карты индивидуальных исследовательских маршрутов обучающихся. Методическое обеспечение исследовательской деятельности учащихся должно включать:

   - комплекс учебных программ предметов с указанием целей предмета, основных теоретических разделов, тем исследовательских и проектных занятий с их почасовой разбивкой, перечня основной и дополнительной литературы;
   - методическое описание к исследовательским и проектным работам, содержащим краткие сведения из теории, углубляющее и/или дополняющие учебный материал, описание экспериментальной установки или модели, задание и порядок исследования, контрольные вопросы и достигаемый результат (для проектов), список рекомендуемой литературы;
   - методические указания по проектированию, регламентирующие задания и требования к объему и уровню их содержания, а также указания по выполнению проектных заданий с типовыми примерами;
   - научно-методическую помощь привлекаемых специалистов в различных областях знаний с целью придания исследовательским работам практической и теоретической значимости (график индивидуальных консультаций, групповых семинаров или вебинаров, практических и лабораторных занятий, мастер-классов).

3. Организационное обеспечение (специальное расписание занятий, аудиторий, работы библиотеки), отдельное от урочных занятий место (не ограничивающее свободную деятельность помещение с необходимыми ресурсами и оборудованием – медиатека и лаборатория).

4. Информационная среда в школе (учебные компьютерные классы; наличие информационных технологий обучения, использующих специальные технические средства: аудио, видео, программное обеспечение, мультимедиа; доступность для школьников разного рода Интернет-ресурсов; возможность постоянного контакта с научным руководителем).

5. Овладение всеми школьниками ИКТ-компетенциями и разнообразными методиками работы с информацией. Информация — все

те сведения, которые уменьшают степень неопределенности нашего знания о каком-либо объекте. Соответственно, информационная технология — система процедур преобразования информации с целью её формирования, организации, обработки, распространения и использования.

Универсальные учебные действия оцениваются в рамках специально организованных школой модельных ситуациях, отражающих специфику будущей профессиональной и социальной жизни обучающегося.

На первом этапе перехода к ФГОС СОО в Провинциальном колледже универсальные учебные действия решено оценивать по результатам выполнения и защиты (и предзащиты) индивидуального исследовательского проекта на специально организованной конференции.

Проведение конференции в школе позволяет решать несколько задач: определить общий уровень подготовки обучающихся, выявить наиболее сильные исследования и проекты, дать возможность апробировать полученные материалы на определенной аудитории, получить или развить навыки публичного выступления.

Работа конференции организуется по секциям так, чтобы авторы имели возможность представить свое исследование, слушатели и эксперты — задать вопросы.

Активное обсуждение полезно для всех участников конференции. Итогом становится оценка за исследовательскую работу, которую определяет экспертная комиссия. Оценка, выставляемая экспертами, складывается на основе ряда критериев: ход выполнения исследования, грамотность постановки целей и задач, достаточность использованных источников и исследований, уровень раскрытия темы, соответствие полученных выводов и результатов заявленным целям, подача материала в ходе защиты, глубина и полнота ответов на вопросы. В ходе защиты работы можно также оценивать:

- степень самостоятельности в выполнении различных этапов работы над проектом;
- практическое использование предметных знаний;
- количество новой информации, использованной для выполнения исследования или проекта;
- степень осмысления использованной информации;
- уровень сложности и степень владения использованными методиками;
- оригинальность идеи, способа решения проблемы;

- осмысление проблемы и формулирование цели исследования или проекта;

- уровень организации и проведения презентации: устного сообщения, письменного отчёта, обеспечения объектами наглядности;

- творческий подход в подготовке объектов наглядности презентации;

- социальное и прикладное значение полученных результатов

- умение проводить самоанализ, оценивать эффективность выбора стратегии действий: удачных и неудачных решений задач исследования или проекта.

По итогам защиты индивидуального проекта, с учетом мнения научного руководителя, обучающиеся могут получить рекомендации к участию в конференциях более высокого уровня.

Оценка промежуточных этапов работы над проектом проводится в рамках зачетных мероприятий курса «Основы исследовательской деятельности».

Итоговая оценка индивидуального исследовательского проекта выводится из оценки научного руководителя по результатам совместной деятельности над проектом и оценки, полученной в ходе защиты проекта на школьной конференции перед экспертной комиссией.

Четкость и согласованность действий всего педагогического коллектива школы позволяет провести конференцию с максимальной эффективностью для обучающихся, создать деловую и доброжелательную атмосферу для всех участников.

На конференции происходит апробация и демонстрация универсальных учебных действий, создаются условия для рефлексии и профессионального самоопределения. Школьная конференция становится стартовой площадкой для выхода обучающихся на мероприятия регионального и российского масштаба.

Основной процедурой итоговой оценки достижения метапредметных результатов (требование ФГОС СОО) также является защита индивидуального исследовательского проекта.

Индивидуальный исследовательский проект оценивается по критериям, позволяющим выявить и оценить:

— сформированность предметных знаний и способов действий, проявляющаяся в умении раскрыть содержание работы, грамотно и обоснованно в соответствии с рассматриваемой проблемой/темой использовать имеющиеся знания и способы действий;

— сформированность познавательных универсальных учебных действий в части способности к самостоятельному приобретению знаний и решению проблем, проявляющаяся в умении поставить проблему и сформулировать основной вопрос исследования, выбрать адекватные способы ее решения, включая поиск и обработку информации, формулировку выводов и/или обоснование и реализацию/апробацию принятого решения, обоснование и создание модели, прогноза, макета, объекта, творческого решения;

— сформированность регулятивных действий, проявляющаяся в умении самостоятельно планировать и управлять своей познавательной деятельностью во времени; использовать ресурсные возможности для достижения целей; осуществлять выбор конструктивных стратегий в разных ситуациях;

— сформированность коммуникативных действий, проявляющаяся в умении ясно изложить и оформить выполненную работу, представить ее результаты, аргументированно ответить на вопросы.

Таким образом, реализация предложенной модели по организации индивидуальной исследовательской деятельности (либо реализация иной модели по формированию исследовательской компетенции выпускников школы) должна стать обязательной для обучения в старшей школе, так как будет способствовать адаптации будущих студентов в вузе, повысит эффективность обучения по стандартам высшей школы и позволит подготовить высококвалифицированных специалистов.

Ссылки

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. М.: Просвещение, 2014.

[2] Примерная основная образовательная программа среднего общего образования: ориентировка на результат. М.: Эконинформ, 2015. 291 с.

[3] *Рассоха Е. Н., Анциферова Л. М.* Особенности научно-исследовательской работы студентов и старшеклассников в области математики // Вестник ОГУ. 2012. № 4 (140). С. 33–37.

УДК 372.894 (47)

Я. А. Смирнов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: anibelle@bk.ru

Преподавание дисциплины «История» как непрофильной дисциплины (из опыта работы преподавателя межфакультетской кафедры)

В статье рассмотрен опыт работы преподавателя истории на математическом факультете и на факультете информатики и вычислительной техники. Автор анализирует образ студента негуманитарных специальностей и, исходя из этого, формулирует задачи исторических дисциплин, делится своим опытом работы со студентами.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: дисциплина «История», студенты, преподаватель, инновационные методы и технологии.

Учебная дисциплина «История» относится к числу базовых и изучается студентами на первом курсе. Ее освоение ориентировано на формирование общекультурной компетенции (ОК-2) и предполагает овладение «способностью анализировать основные этапы и закономерности исторического развития общества для формирования гражданской позиции». Речь идет о привитии студентам таких ценностей как патриотизм, уважение к подвигам своего народа, гордости за национальные достижения, формирование гармоничной и гуманной личности. Ответственность за формирование таких качеств возложена на преподавателя истории.

Прикладное значение в преподавании истории сводится к развитию у студентов навыков критического мышления, расширению их познавательных способностей, развитию аргументации и логического умозаключения. Именно в необходимости применения логических операций сходятся, казалось бы, далекие друг от друга, математическая и историческая науки. Однако специфика последней — работа с фактами и выяснение причинно-следственных связей. Именно на это большей частью ориентирована историческая подготовка студентов.

Опыт преподавания свидетельствует о двух взаимоисключающих обстоятельствах: с одной стороны, заметно снижение исторической грамотности среди студентов-математиков, с другой стороны, у них сохраняется живой интересе к дисциплине. Особенно привлекательным для них является вторая половина событийного и противоречивого XX века. К этому периоду в истории России студенты особенно притязательны и ждут от преподавателя дополнительных подробностей. К сожалению, претензии студентов можно удовлетворить лишь отчасти. Катастрофический дефицит аудиторного времени требует дополнительной мобильности, поэтому излагаемый материал часто выглядит предельно схематичным. Одним из решений такой проблемы нам видится разработка спецкурса по современной истории России для студентов 2-3 курсов. Преподавание спецкурса, на наш взгляд, позволит компенсировать недостаток фактического материала и актуализировать роль России в современных условиях внутреннего развития и международных отношений, оценить значение России в решении глобальных проблем, оценить степень интеграции страны в современный миропорядок.

Дополнительная трудность, с которой сталкивается преподаватель в работе со студентами, — слабая историческая подготовка большинства выпускников средней школы. Встречаются случаи, когда студенты впервые слышат об отдельных событиях и фактах, не говоря уже об их историографических оценках. При том условии, что подготовка в высшей школе не столько дает новые знания, сколько работает с уже имеющимся багажом, дополняет и нацеливает на самостоятельное овладение ими.

Зачастую современные студенты не владеют навыками критической оценки текста, не могут отличить факт от мнения, не могут выделить главную мысль или сформулировать её, стремятся использовать «готовые» знания, добытые не собственным трудом, а при помощи сомнительных Интернет-ресурсов. Как современное явление, в методической литературе его определяют «эффектом наименьшего усилия» [1, 2].

Важное место в обучении занимает методическое наполнение. Методическая грамотность является одним из признаков профессиональной культуры преподавателя, позволяет сделать образовательный процесс более насыщенным и привлекательным для всех его участников. Неудивительно, что инновационные методы преподавания прочно закрепились в деятельности современного преподавателя высшей школы. Различные формы активизации, с одной стороны, позволяют компактно изложить обилие материала, с другой стороны, вовлечь в творческую работу практически каждого студента.

Применение современных форм работы со студентами на лекционных, практических занятиях, а также в самостоятельной работе позволяет повысить мотивацию, развивает заинтересованность, оживляет работу студентов в целом. Содействует нестандартным вариантам подачи учебного материала и овладению новым знанием. Разные методики, применяемые в работе со студентами математического факультета и факультета информатики и вычислительной техники, нацелены на расширения спектра форм и видов самостоятельной работы студентов, развития аналитических и критических способностей, умений находить разные решения проблемы.

В данной статье автор делится своим опытом преподавания истории на факультетах негуманитарного профиля, где проводилась апробация современных образовательных технологий на разных темах, преимущественно на практических занятиях. Объем статьи позволяет охарактеризовать лишь отдельные приемы, в том числе рекомендованные специально для высшей школы [3, 4].

Курс «История», читаемый автором статьи, позволяет применять разнообразные методические технологии и формы работы со студентами. Так, например, технология «Дебаты» ориентированная на выработку аргументов и доказательство, была успешно применена на темах «Киевская Русь во второй половине IX – 30-е гг. XII вв.», «Политическая раздробленность Древней Руси», «Россия в период правления Петра I» и т. д. Так, перед студентами была поставлена проблема «Крещение Руси и “Русская Правда” способствовали складыванию раннефеодальных отношений». Студентам предлагалось выработать две противоположные точки зрения на одну проблему и доказать их на основе источников и исследовательской литературы.

В следующей теме студентам надлежало доказать или опровергнуть положение «Политическая раздробленность вела к упадку в развитии страны». В теме «Монголо-татарское нашествие на Русь и иго» студентам предлагалось привести доказательства для подтверждения или опровержения превосходства Золотой Орды над Русью в социально-экономическом, политическом и военном отношениях. Возможна постановка другого проблемного вопроса, например, «Влияние монгольского ига на развитие российской цивилизации». Для сильных групп или отдельных студентов проблему можно усложнить и дать опережающее задание — рассмотреть проблему в контексте отечественной историографии.

На практических и лекционных занятиях используется прием проблемных вопросов. Их постановка в начале занятия мотивирует студентов на более глубокое освоение темы и поиск решения. В конце занятия обязателен возврат к обозначенной проблеме и осмысление проведенной работы. Примеры проблемных вопросов: «Можно ли считать, что реформы Петра I привели Россию к цивилизационному расколу?», «Что изменили Великие реформы в России? Что и почему они изменить не могли?».

Часть практических занятий проводится в форме деловой игры. Игровые технологии позволяют смоделировать историческую ситуацию, либо эпоху, либо провести ее анализ. Деловая игра нацелена, прежде всего, на работу студентов под руководством преподавателя и позволяет глубже погрузиться в историческую канву и дать событиям объективную оценку. Так, на практических занятиях со студентами была «разыграна» тема «Суд над Иваном IV». Студенты были разделены на несколько групп: оперативная группа, эксперты, следователи, свидетели, прокуроры, адвокаты и судьи. Еще один вариант был реализован в обсуждении реформ Александра II при рассмотрении вопроса «Подготовка Крестьянской реформы». В ходе предварительной подготовки участникам деловой игры предстояло ознакомиться с различными материалами и найти в них уместные цитаты и факты в соответствии с ролью участников игры. По итогам занятия преподаватель обязательно анализирует проделанную работу каждого из участников и подводит общий итог. При больших преимуществах игровых технологий, они имеют важный недостаток — значительная предварительная подготовка.

Незаменимым приемом для изучения дисциплины «История» является технология «Развитие критического мышления через чтение и письмо» (РКМЧП). Студентам определяется проблема, на которую необходимо найти ответ (аргументы) с двух противоположных позиций («за» и «против»). Предлагаемая форма позволяет объективно оценить событие с разных сторон, и потому наиболее удобна в разных темах. Так, возможны постановки проблем в разной модификации: «Докажите, что Иван III применял опричнину для объединения Руси»; «Политика опричнины Ивана IV Грозного содействовала укреплению государственности»; «С приходом к власти В. Шуйского в России началась Гражданская война»; «Крестьянская война под руководством Е.И. Пугачева: элементы стихийности и сознательности». Можно определить проблему шире: «Дворцовые перевороты способствовали развитию России»; «Реформы Екатерины II не соответствовали идеологии «просвещенного абсолютизма»; «Консервативная модернизация Николая I: достижения и упущенные возможности»; «Можно ли считать события 1905–1907 гг. в России революцией: аргументы “за” и “против”»; «Цена сталинской модернизации СССР»; «Подготовка СССР к войне с Германией: планы и просчеты». Студенты, используя разные источники информации, должны привести доказательства и сформулировать их опровержение, привести различные историографические оценки.

Для лекционных занятий наряду с постановкой проблемы удобен прием «толстый и тонкий вопрос», когда преподаватель в ходе лекции или по ее завершении предлагает студентам сформулировать два вопроса по конспекту. «Толстый вопрос» требует развернутого ответа, «тонкий вопрос» — краткого и конкретного. Эти вопросы можно адресовать преподавателю, задуматься над их решением самостоятельно, либо предложить обменяться вопросами с соседом по парте. Прием способствует активизации студентов и рефлексии по изученному материалу.

Таким образом, преподавание истории в рамках непрофильной дисциплины ориентировано на разноплановую подготовку специалиста, совершенствование его личностных качеств и убеждений, развитие навыков критической оценки. Практика работы со студентами доказывает, что решение этой задачи возможно через совершенствование исторической подготовки в содержательно-методическом контексте.

Ссылки

[1] *Степанищев А. Т.* Настольная книга преподавателя истории. М.: ВЛАДОС, 2013. 376 с.

[2] *Никифоров Ю. А., Вяземский Е. Е., Иоффе А. Н.* Новейшая история России: преподавание в школе: учебное пособие / Под ред. В. Д. Нечаева. М.: Альфа-М; НИЦ Инфра-М, 2013. 384 с.

[3] Преподаватель вуза: технологии и организация деятельности: учебное пособие / Под ред. С. Д. Резника. М.: Инфра-М, 2011. 361 с.

[4] Современные образовательные технологии: учебное пособие / под ред. Н. В. Бордовской. М.: КНОРУС, 2013. 432 с.

УДК 519.21

Е. А. Тимофеев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: timofeevEA@gmail.com

Применение неравенства Йенсена для оценки дифференциальной энтропии

Предлагается простое доказательство верхней оценки энтропии непрерывной случайной величины. Доказательство опирается на неравенстве Йенсена.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: энтропия, дифференциальная энтропия, неравенство Йенсена, выпуклая функция.

Энтропия непрерывной случайной величины (дифференциальная энтропия) зависит от функции — плотности случайной величины. Поэтому задача ее максимизации (при заданной дисперсии) является задачей вариационного исчисления. Такое решение и приводится в большинстве книг. В настоящей статье приводится решение без использования вариационного исчисления.

Дифференциальная энтропия

Дифференциальной энтропией называется формальный аналог энтропии Шеннона для непрерывной случайной величины. Этот термин был введён И. М. Гельфандом, А. Н. Колмогоровым и А. М. Ягломом [1]. Для непрерывной случайной величины $\mathbf{X}$ с плотностью $p(x)$ дифференциальная энтропия определяется как

$$H(\mathbf{X}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x)\, dx. \qquad (1)$$

Новый термин был введен для того, чтобы подчеркнуть, что это понятие имеет несколько иной смысл, чем энтропия дискретной случайной величины. Самостоятельного смысла эта величина не имеет и может быть отрицательной. Однако разность дифференциальных энтропий двух случайных величин является безразмерной характеристикой.

Неравенство Йенсена

В этом неравенстве используется выпуклая функция, которую определим через опорную прямую.

Определение 1. *Функция $f(x)$, определенная на открытом интервале I, называется выпуклой, если для любого $x_0 \in I$ существует число λ такое, что*

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0), \quad x \in I. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть случайная величина ξ принимает значения на интервале I и пусть функция $f(x)$ выпукла на I, тогда*

$$\mathsf{E}f(\xi) \geq f(\mathsf{E}\xi), \tag{3}$$

если математические ожидания существуют.

Неравенство (3) называется *неравенством Йенсена.* Приведем его короткое изящное доказательство из [6].

Доказательство. Перепишем неравенство (2) при $x = \xi$, $x_0 = \mathsf{E}\xi$:

$$f(\xi) \geq f(\mathsf{E}\xi) + \lambda(\xi - \mathsf{E}\xi).$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей неравенства, получим (3). □

Следствие 1а. *Пусть дискретная случайная величина ξ принимает значения $x_1, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right). \tag{4}$$

При $n = 2$ получаем обычное определение выпуклой функции:

$$p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) \geq f(p_1 x_1 + p_2 x_2), \quad p_1 + p_2 = 1, \quad p_1, p_2 \geq 0.$$

Отметим, что неравенство $\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, доказательство Коши которого отобрано в книгу [3], является простым следствием неравенства (4).

Оценка дифференциальной энтропии

Теорема 2. *Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью $p(x) > 0$, $\mathsf{D}\mathbf{X} = \sigma^2$, тогда*

$$H(\mathbf{X}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \tag{5}$$

и максимум реализуется на нормальном распределении.

Доказательство. Применим основную идею метода множителей Лагранжа. Рассмотрим функционал

$$L = H(\mathbf{X}) - \lambda \mathsf{D}\mathbf{X} = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ln p(x)\,dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m)^2 p(x)\,dx,$$

где $m = \mathsf{E}\mathbf{X}$ и $\lambda > 0$ — некоторый параметр.

Функционал L можно переписать в следующем виде:

$$L = \mathsf{E}\ln\left(\frac{e^{-\lambda(\mathbf{X}-m)^2}}{p(\mathbf{X})}\right).$$

Применяя неравенство Йенсена (3) для случайной величины

$$\xi = \frac{e^{-\lambda(\mathbf{X}-m)^2}}{p(\mathbf{X})}$$

и вогнутой функции $\ln x$, получим

$$\mathsf{E}\ln\xi \le \ln\mathsf{E}\xi = \ln\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(x-m)^2}dx = \ln\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}.$$

Следовательно, $H(\mathbf{X}) \le \lambda\sigma^2 + \ln\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$. Минимум левой части достигается при $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, и полученное неравенство совпадает с (5).

Нетрудно проверить, что для нормального распределения (5) превращается в равенство. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2a. *Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью $p(x) > 0$ при $x > 0$, $p(x) = 0$ при $x \le 0$, $\mathsf{E}\mathbf{X} = m$, тогда $H(\mathbf{X}) \le 1 - \ln m$ и максимум реализуется на показательном распределении.*

Следствие 2b. *Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью $p(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, $p(x) = 0$ при $x \notin (a,b)$, тогда $H(\mathbf{X}) \le \ln(b-a)$ и максимум реализуется на равномерном распределении.*

Ссылки

[1] *Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М.* Количество информации и энтропия для непрерывных распределений // Труды 3-го Всесоюзного математического съезда. 1958. Т. 3. М.: АН СССР. С. 300–320.

[2] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.

[3] *Aigner M., Ziegler G. M.* Proofs from THE BOOK. Springer-Verlag, Heidelberg/Berlin, 1998.

УДК 519.21

Е. А. Тимофеев
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: timofeevEA@gmail.com

О формуле Рохлина для вычисления энтропии

Описано обоснование формулы Рохлина для нахождения энтропии растягивающих отображений. Приведены примеры применения.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: энтропия, разбиение, мера. метрика, эндоморфизм.

Формула Рохлина позволяет в явном виде вычислить энтропию для целого класса динамических систем. Эта формула найдена в работе В. А. Рохлина [4] для преобразований отрезка, связанных с различными представлениями чисел. Цель настоящей статьи показать, что ее обоснование справедливо и для общего случая. Причиной написания является отсутствие обоснования формулы Рохлина в большинстве книг по энтропии динамических систем.

В первом разделе статьи приводятся все необходимые понятия для определения энтропии динамической системы, взятые из [5, 2, 1]. Приведены также все основные утверждения, необходимые для их обоснования.

Во втором разделе дается вывод формулы Рохлина для растягивающих отображений. Рассмотрены примеры применения для марковских цепей и растягивающих отображений отрезка.

1. Энтропия динамической системы

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, которая задается отображением фазового пространства

$$T:\ M \to M.$$

Будем считать, что на M задана σ-алгебра $\mathfrak{M}$ и что преобразование T является *эндоморфизмом*, т. е. для любого $A \in \mathfrak{M}$ имеем $T^{-1}A \in \mathfrak{M}$.

Через μ обозначим инвариантную меру эндоморфизма T, т. е. $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, $A \in \mathfrak{M}$, и будем считать, что $\mu(M) = 1$.

Для упрощения результатов, связанных с измельчением разбиений, дополнительно предположим, что M является компактным метрическим пространством с метрикой ρ и что μ — *борелевская* мера, т. е. σ-алгебра $\mathfrak{M}$ порождается всеми открытыми множествами M.

Через $\alpha = \{A_1, \dots, A_m, \dots\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\bigcup A_i = M$, $A_i \in \mathfrak{M}$, будем обозначать *разбиение* пространства M. Через $\alpha(x)$ будем обозначать элемент разбиения, содержащий точку x. Положим

$$\operatorname{diam}(\alpha) = \max_{A \in \alpha} \operatorname{diam} A.$$

1.1. Первое определение энтропии

Энтропией разбиения α называется

$$H(\alpha) = -\sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A) = -\int_M \log \mu(\alpha(x)) d\mu(x). \tag{1}$$

Для двух разбиений α, β через $\alpha \vee \beta$ будем обозначать разбиение, состоящее из множеств $A_i \cap B_j$, $A_i \in \alpha$, $B_j \in \beta$.

Энтропией на один знак разбиения α называется

$$h(T, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-n+1}\alpha). \tag{2}$$

Обоснование опирается на

- определение *условной энтропии*
$$H(\alpha|\beta) = H(\alpha \vee \beta) - H(\beta); \tag{3}$$
- неравенство
$$H(\alpha|\beta) \leq H(\alpha), \tag{4}$$
которое выводится из неравенства Йенсена [6]
$$\mathsf{E} f(\xi) \geq f(\mathsf{E}\xi), \tag{5}$$
где функция $f(x)$ выпуклая, а ξ — случайная величина;
- лемму Пойа, которая утверждает, что для последовательности $a_n \geq 0$, удовлетворяющей неравенству
$$a_{n+m} \leq a_n + a_m,$$
существует $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n$.

1.2. Второе определение энтропии

Энтропия на один знак разбиения α задается как

$$h(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty} H(\alpha|T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n}\alpha). \tag{6}$$

Обоснование опирается на

- тождество
$$H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n}\alpha) = \sum_{k=1}^{n} H(\alpha|T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-k}\alpha) + H(\alpha),$$
которое выводится из определения условной энтропии (3);
- неравенство
$$H(\alpha|\beta \vee \gamma) \leq H(\alpha|\beta), \tag{7}$$
которое выводится из неравенства Йенсена (5);
- существование предела в (6), которое следует из монотонного возрастания последовательности (в силу (7)).

1.3. Энтропии по различным разбиениям

Легко проверяются следующие свойства:

- $$h(T, \alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \cdots \vee T^{-n}\alpha) = h(T,\alpha); \tag{8}$$
- $$h(T,\alpha) \leq h(T,\beta) + H(\alpha|\beta); \tag{9}$$
- для любого конечного разбиения α и любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любого разбиения β с $\operatorname{diam}(\beta) < \delta$ выполняется неравенство $H(\alpha|\beta) < \epsilon$.

1.4. Энтропия эндоморфизма и генераторы

Энтропией эндоморфизма T называется

$$h(T) = \sup h(T,\alpha), \tag{10}$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям.

Из результатов предыдущего раздела следует

Утверждение 1. *Пусть α_n — последовательность разбиений с $\operatorname{diam}(\alpha_n) \to 0$, тогда $h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T,\alpha_n)$.*

Для вычисления $h(T)$ используется *образующее разбиение — генератор* α, для которого разбиение $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}\alpha$ является точечным.

Теорема 1. *Пусть* α_n *— образующее разбиение, тогда*

$$h(T) = h(T, \alpha).$$

Подчеркнем, что генераторы — это те разбиения, у которых по измерениям вдоль траекторий можно восстановить отображение.

Утверждение 2. *Конечное разбиение* α *является генератором тогда и только тогда, когда существует* $M_0 \subset M$, $\mu(M_0) = 1$, *такое что отображение*

$$M \to \alpha^{\mathbb{N}}$$

$$x \longmapsto \{\alpha(T^k x)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

является вложением на M_0.

2. Формула Рохлина

Эндоморфизм T называется *растягивающим* , если существует разбиение α и число $\theta > 1$, такое что

$$\rho(Tx, Ty) \geq \theta\rho(x, y) \quad \text{для любых } x, y \,:\, \alpha(x) = \alpha(y).$$

Формула Рохлина. *Пусть* T *— растягивающий эндоморфизм и пусть для* μ*–почти всех точек* x *существует*

$$\tau(x) = \frac{d\mu(Tx)}{d\mu(x)} = \lim_{diam(\Delta)\to 0} \frac{\mu(T\Delta)}{\mu(\Delta)}, \quad x \in \Delta,$$

тогда

$$h(T) = \int_M \log\tau(x)\, d\mu(x). \tag{11}$$

Доказательство. Разбиение α является образующим, поскольку T^{-1} — сжатие. Поэтому $h(T) = h(T, \alpha)$.

Для нахождения $h(T, \alpha)$ применим второе определение (6). Обозначим через $A_{n,j}$ элементы разбиения $\alpha \vee \dots \vee T^{-n+1}\alpha$, тогда

$$\begin{aligned}
H(\alpha|T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-n}\alpha) &= \\
&= -\sum_{i,j} \mu(A_i \cap T^{-1}A_{n,j}) \log\frac{\mu(A_i \cap T^{-1}A_{n,j})}{\mu(T^{-1}A_{n,j})} = \\
&= -\sum_{i,j} \mu(A_i \cap T^{-1}A_{n,j}) \log\frac{\mu(A_i \cap T^{-1}A_{n,j})}{\mu(A_{n,j})} \to \\
&\to -\int_M \log\frac{d\mu(x)}{d\mu(Tx)}\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Последний предел идет при $n \to \infty$ и существует по условию теоремы.

Подставляя обозначения, получим (11). $\square$

2.1. Марковская цепь

Пусть $M = \{1, 2, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$ — пространство правосторонних последовательностей, T — левосторонний сдвиг. Марковская мера μ на цилиндре

$$[i_1, i_2, \dots, i_n] = \{x = (x_1, x_2 \dots) : \; x_1 = i_1, \dots, x_n = i_n\}$$

задается по правилу:

$$\mu([i_1, i_2, \dots, i_n]) = \pi_{i_1} \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}},$$

где $||p_{i,j}||_1^m$ — матрица вероятностей переходов ($p_{i,j} > 0, \sum_j p_{i,j} = 1$), а $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ — левосторонний собственный вектор

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i p_{i,j} = \pi_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Выберем метрику

$$\rho(x, y) = 2^{-\min\{i \,:\, x_i \neq y_i\}}.$$

Нетрудно видеть, что сдвиг является растягивающим с $\theta = 2$ и разбиением на цилиндры, $\alpha = ([1], [2], \dots, [m])$.

Пусть $x = (i, j, x_3, x_4, \dots)$, тогда

$$\tau(x) = \frac{\mu(T[i, j, x_3, \dots, x_n])}{\mu([i, j, x_3, \dots, x_n])} = \frac{\mu([j, x_3, \dots, x_n])}{\mu([i, j, x_3, \dots, x_n])} = \frac{\pi_j}{\pi_i p_{i,j}}.$$

По формуле Рохлина (11) имеем

$$h(T) = \int_M \log \tau(x) \, d\mu(x) = \sum_{i,j} \pi_i p_{i,j} \log \frac{\pi_j}{\pi_i p_{i,j}} = -\sum_{i,j} \pi_i p_{i,j} \log p_{i,j}.$$

2.2. Кусочно-линейные отображения отрезка

Пусть $M = [0, 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $T(x)$ — кусочно-линейное отображение на M.

Инвариантная мера μ существует и ее плотность $p(x)$ удовлетворяет уравнению Перрона–Фробениуса

$$p(x) = \sum_{y \,:\, Ty = x} \frac{1}{|T'(y)|} p(y). \tag{12}$$

1. Пусть $|T'(x)| = a$ на каждом интервале линейности.

   Поскольку $\tau(x) = a > 1$, то по формуле Рохлина (11) имеем

$$h(T) = \int_0^1 \log a \, d\mu(x) = \log a.$$

2. Пусть интервалы линейности заданы как $(0, p_1)$, $(p_1, p_1 + p_2)$, $\dots$, $(p_1 + \dots + p_{n-1}, 1)$ и $T(x)$ изменяется от 0 до 1 на каждом интервале линейности, тогда $|T'(x)| = \frac{1}{p_k}$ на k-м интервале линейности.

   Нетрудно, видеть, что решением уравнения Перрона–Фробениуса является константа. Поэтому $\mu(x) = x$.

   По формуле Рохлина (11) имеем

$$h(T) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k.$$

Примерами таких отображений служат: $T_1(x) = \{2x\}$, $T_2(x) = 2\min\{x, 1-x\}$. Инвариантной мерой для этих отображений будет мера Лебега,

$$h(T_1) = h(T_2) = \log 2.$$

2.3. Цепные дроби

Пусть $M = [0, 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$,

$$T(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}.$$

Инвариантная мера $\mu(x) = \log_2(1 + x)$ найдена еще Гауссом.

Поскольку $\tau(x) = |T'(x)| = x^{-2}$, то по формуле Рохлина (11) имеем

$$h(T) = \int_0^1 \log x^{-2} \, d\log_2(1 + x) = -\frac{2}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln x}{1 + x}\, dx = \frac{\pi^2}{6\ln 2}.$$

Последний интеграл можно найти, раскладывая дробь $\dfrac{1}{1+x}$ в ряд, либо воспользоваться [7, 4.231.1].

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.12873.2018/12.1.

Ссылки

[1] Боуэн Р. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.

[2] *Мартин Н., Ингленд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.

[3] *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры //Матем. сб. 1949. Т. 25(67), вып. 1. С. 107–150.

[4] *Рохлин В. А.*, Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25, вып. 4. С. 499–530.

[5] *Синай Я. Г.* Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.

[6] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложенияю Т. 2. М.: Мир, 1984.

[7] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

УДК 514.112+51(091)

А. Ю. Ухалов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: alex-uhalov@yandex.ru

Об одном доказательстве Архимеда

Излагается доказательство теоремы о равенстве площадей круга и треугольника, принадлежащее Архимеду. В современной терминологии основные идеи доказательства оказываются эквивалентны применению понятий супремум и инфимум.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: площадь круга, площадь треугольника, инфимум, супремум.

Приведем фрагмент главы «Измерение круга» из собрания сочинений Архимеда (см. [1]).

Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника.

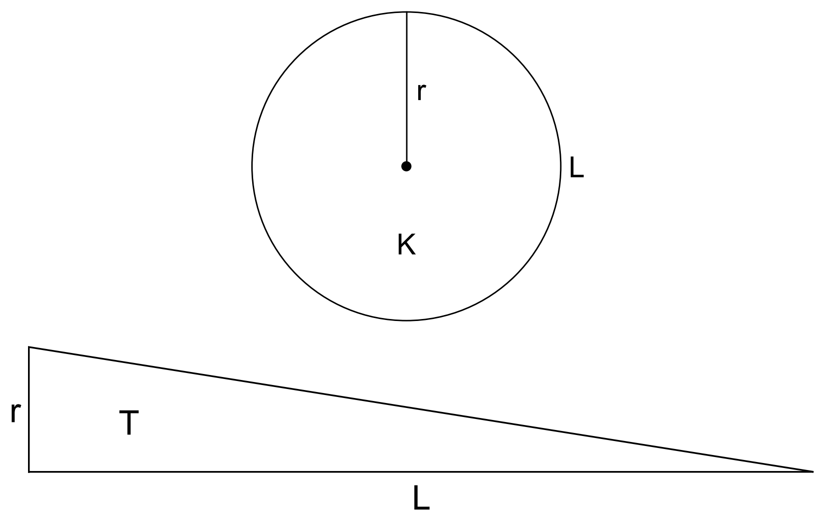


Рис. 1

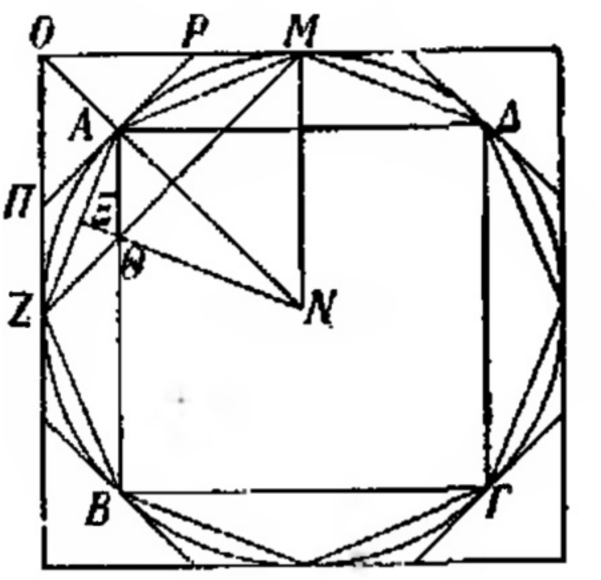


Рис. 2

Пусть Круг K (Рис. 1) относится к треугольнику T, как высказано в предложении; я утверждаю, что он будет ему равен.

Действительно, пусть, если возможно, круг будет больше; впишем в него квадрат $A\Gamma$, будем <постоянно> делить дуги пополам, <и проводить прямые BZ, ZA, AM, $M\Delta$ и т. д.>, и пусть <когда нибудь> получатся сегменты, меньшие той разницы, на которую круг больше треугольника; тогда полученная прямолинейная фигура будет также больше треугольника. Возьмем центр <круга> N и <проведем> перпендикуляр $N\Xi$; тогда $N\Xi$ будет меньше соответствующей стороны треугольника T. Также и периметр прямолинейной фигуры меньше оставшейся стороны, поскольку он меньше периметра круга; значит, полученная прямолинейная фигура будет меньше треугольника T, а это нелепо.

Пусть теперь круг, если возможно, будет меньше треугольника T; опишем около него квадрат, разделим пополам его стороны и через полученные точки <делений> проведем касательные; тогда угол OAP будет прямым. Следовательно, OP будет больше MP, так как PM равна PA; и значит, треугольник $PO\Pi$ будет больше половины фигуры $OZAM$. Возьмем такие сегменты, подобные ΠZA, чтобы они были <вместе> меньше избытка, на который треугольник T больше круга K; тогда описанная прямолинейная фигура будет менее T, а это нелепо; действительно, она больше, так как NA равна <вертикальному> катету этого треугольника, а периметр ее больше основания треугольника. Значит, круг будет равен треугольнику T.

В приведенном отрывке изменены лишь буквенные обозначения круга и треугольника. Доказательство проиллюстрировано чертежом, приведенным на Рис. 2.

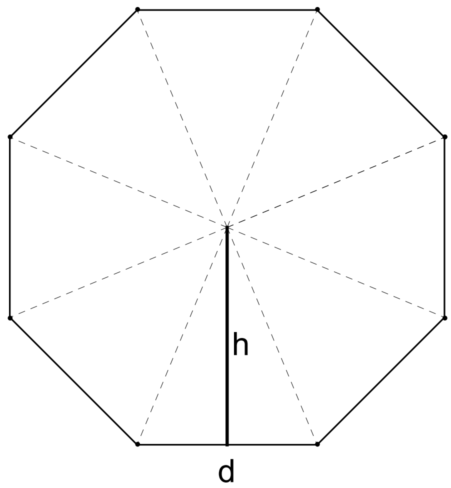
По существу, Архимед исходит из следующих предположений: 1) существует такой правильный многоугольник, вписанный в круг, что площадь многоугольника отличается от площади круга на сколь угодно малую величину; 2) существует такой правильный многоугольник, описанный вокруг круга, что площадь многоугольника отличается от площади круга на сколь угодно малую величину. В современных обозначениях можно записать эти утверждения следующим образом.

Пусть K — круг. Тогда 1) $S(K) = \sup_{M \subset K} S(M)$, где M — вписанный в круг K правильный многоугольник; 2) $S(K) = \inf_{K \subset M} S(M)$, где M — описанный вокруг круга K правильный многоугольник.

Здесь и далее $S(F)$ обозначает площадь плоской фигуры F.

Архимед получает многоугольники, все более точно приближающиеся к кругу, путем удвоения числа сторон, но принципиального значения для доказательства это не имеет. Важно лишь существование правильного многоугольника, площадь которого достаточно близка (с избытком или с недостатком) к площади круга.

Нам потребуется формула для вычисления площади правильного многоугольника.



Разобъем правильный многоугольник M на равнобедренные треугольники Q_i. Пусть d — основание равнобедренного треугольника, а h — его высота, перпендикулярная основанию. Тогда $S(Q_i) = \frac{1}{2}hd$. Площадь многоугольника есть сумма площадей всех треугольников, то есть

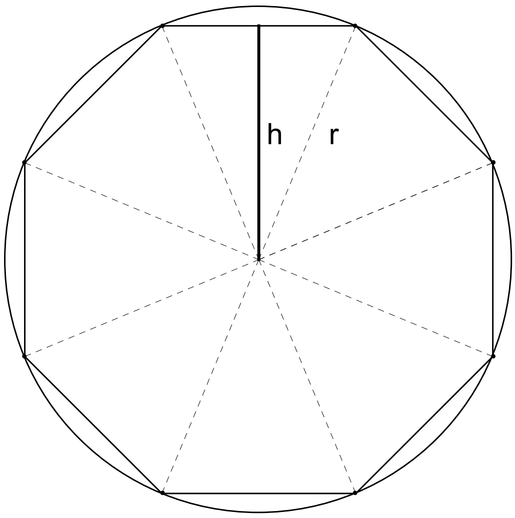
$$S(M) = \sum_i S(Q_i) = \sum_i \frac{1}{2}hd = \frac{1}{2}h \sum_i d = \frac{1}{2}hP,$$

где P — периметр многоугольника M.

Сформулируем и докажем утверждение Архимеда в современных терминах и обозначениях. При изложении «современной версии» доказательства использована книга [2, гл. 2].

Теорема. *Пусть K — круг с радиусом r и длиной окружности L, T — прямоугольный треугольник с катетами r и L (см. Рис. 1). Тогда площади K и T равны.*

Доказательство. Предположим, что $S(K) \neq S(T)$. Тогда либо $S(K) > S(T)$, либо $S(K) < S(T)$.



а) Пусть $S(K) > S(T)$. В силу того, что $S(K) = \sup_{M \subset K} S(M)$, существует такой правильный вписанный в круг многоугольник M, что

$$S(T) < S(M) < S(K). \tag{1}$$

Площади многоугольника и треугольника выражаются равенствами

$$S(M) = \frac{1}{2}hP, \qquad S(T) = \frac{1}{2}rL.$$

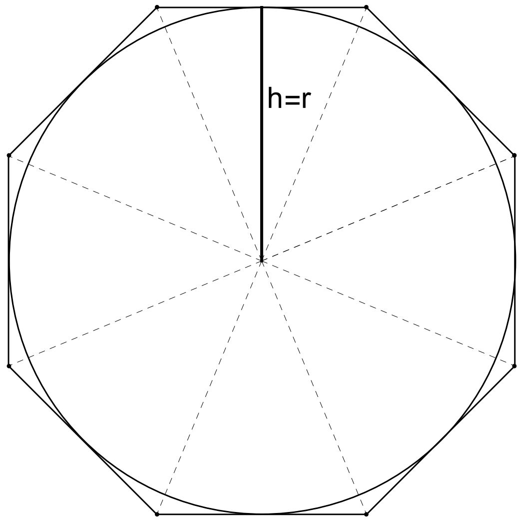
В данном случае $h < r$, $P < L$, следовательно $S(M) < S(T)$. Это противоречит первому неравенству в (1). Следовательно, наше предположение неверно.

б) Пусть $S(K) < S(T)$. Справедливо равенство $S(K) = \inf_{K \subset M} S(M)$. Следовательно, существует правильный описанный вокруг круга многоугольник M, для которого выполняется неравенство

$$S(K) < S(M) < S(T). \tag{2}$$

Имеем:

$$S(M) = \frac{1}{2}hP = \frac{1}{2}rP, \qquad S(T) = \frac{1}{2}rL.$$



В этом случае $h = r$, но $P > L$. Следовательно, $S(M) > S(T)$. Это противоречит второму неравенству в (2). Снова пришли к противоречию.

Итак, наше предположение $S(K) \neq S(T)$ неверно, и следовательно, $S(K) = S(T)$. $\square$

Как видно из приведенного «осовремененного» изложения доказательства, по существу Архимед уже пользовался свойствами точной верхней и точной нижней грани, хотя, естественно, такими терминами не оперировал.

Приведенное доказательство можно использовать как наглядный и содержательный пример при изучении понятий точной верхней и точной нижней грани числового множества. Кроме того, доказательство представляет большой самостоятельный интерес.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.12873.2018/12.1.

Ссылки

[1] *Архимед.* Сочинения. М.: Физматгиз, 1962.

[2] *Dunham, William.* Journey through genius: the great theorems of mathematics. New York: Wiley, 1990.

УДК 519.23+004.41

Д. Д. Федулов, А. Е. Рагимов
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: mr.fedulow@yandex.ru
E-mail: andrey@ragimov.info

Исследование методов машинного обучения на примере задачи бинарной классификации

Исследуются модели машинного обучения для решения задачи бинарной классификации. Описывается вычислительный эксперимент, в ходе которого были построены и обучены на данных модели машинного обучения. Использована библиотека scikit-learn языка программирования python. Оценено качество построенных моделей.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: машинное обучение, бинарная классификация, кредитный скоринг, алгоритмы классификации, python, scikit-learn.

Машинное обучение (Machine Learning) — обширный подраздел искусственного интеллекта, изучающий методы построения алгоритмов, способных обучаться. Различают два типа обучения. *Обучение по прецедентам*, или *индуктивное обучение*, основано на выявлении общих закономерностей по частным эмпирическим данным. *Дедуктивное обучение* предполагает формализацию знаний экспертов и их перенос в компьютер в виде базы знаний. Дедуктивное обучение принято относить к области экспертных систем, поэтому термины машинное обучение и обучение по прецедентам можно считать синонимами.

Задача обучения по прецедентам ставится следующим образом. Дано конечное множество прецедентов, по каждому из которых собраны некоторые данные — описание прецедента. Совокупность всех имеющихся описаний прецедентов называется обучающей выборкой. Требуется по этим частным данным выявить общие зависимости, закономерности, взаимосвязи, присущие не только этой конкретной выборке, но вообще всем прецедентам, в том числе тем, которые ещё не наблюдались. В подавляющем большинстве случаев, прецеденты описываются с помощью признаков. Фиксируется совокупность n показателей, измеряемых у всех прецедентов. Прецеденты, чаще всего описываются числовыми, текстовыми данными, изображениями, временными рядами или сигналами, видеорядами, попарными отношениями сходства или интенсивности взаимодействия и т. д. Для решения задачи обучения по прецедентам в первую очередь фиксируется модель восстанавливаемой зависимости. Затем вводится функционал качества, значение которого показывает, насколько хорошо модель описывает наблюдаемые данные. Алгоритм обучения (learning algorithm) ищет такой набор параметров модели, при котором функционал качества на заданной обучающей выборке принимает оптимальное значение. Процесс настройки (fitting) модели по выборке данных в большинстве случаев сводится к применению численных методов оптимизации.

Наиболее распространенным типом задач машинного обучения является задача обучения без учителя (supervised learning). Каждый прецедент представляет собой пару <объект, ответ>. Требуется найти функциональную зависимость ответов от описаний объектов и построить алгоритм, принимающий на входе описание объекта и выдающий на выходе ответ. Одним из подтипов задачи обучения с учителем является задача классификации. Данная задача отличается тем, что в качестве ответов может выступать конечное множество значений, называемых метками классов (при этом, класс — множество всех объектов с данным значением метки)

В настоящей работе рассмотривается задача т. н. «кредитного скоринга». Необходимо спрогнозировать кредитоспособность клиента банка на основе данных анкетирования. Для построения модели использована выборка данных о заёмщиках немецкого банка, содержащая данные об анкетировании 1000 клиентов (статус текущего чекового счета, кредитная история, цель кредита, срок кредита, сумма кредита, средний баланс на накопительном счете, стаж работы на последнем месте, доход в %, семейное положение, поручители, постоянное проживание на последнем месте, данные об имуществе, возраст, имеющиеся кредиты, вид жилья, количество предыдущих кредитов в этом банке, вид деятельности, количество иждивенцев, наличие телефона, гражданство) и их кредитоспособность.

В работе было проведено сравнение следующих алгоритмов: стохастический градиентный спуск (в том числе с L_1- и L_2-регуляризатором), логистическая регрессия (с L_1- и L_2-регуляризатором), пассивно-агрессивный алгоритм (Passive Aggressive), гребневая регрессия, K ближайших соседей, AdaBoost, градиентный бустинг, многослойный персептрон, метод опорных векторов (с линейным ядром и rbf-ядром), гауссовский процесс, гауссовский наивный байесовский классификатор, бернуллиевский наивный байесовский классификатор, решающее дерево, бэггинг, случайный лес (в том числе взвешенный), сверхслучайные деревья (в том числе взвешенный). Описание этих алгоритмов можно найти в [7] и [8].

При выполнении исследования использовались средства языка python и библиотеки scikit-learn.

В качестве метрик качества классификации использовались доля правильных ответов (accuracy) и взвешенная f1-мера ([5], [9]). Доля правильных ответов не может выступать единственной метрикой качества, поскольку, как выявило исследование выборки, имеет место несбалансированность классов (30% являются некредитоспособными, 70% — кредитоспособными). При помощи библиотеки scikit-learn (метод `train_test_split`) выборку была разбита на две подвыборки — тренировочную и тестовую (70% и 30% от исходной выборки, соответственно). Настройка модели производилась на тренировочной подвыборке, а оценка качества — на тестовой. Параметры метода были выбраны таким образом, чтобы в подвыборках сохранялся балланс классов исходной выборки.

	Accuracy	Weighted F1 score
sgd	0,700000000000	0,576470588235
sgd_l1	0,700000000000	0,576470588235
sgd_l2	0,700000000000	0,576470588235
lr_l1	0,780000000000	0,765333333333
lr_l2	0,770000000000	0,752561156913
Passive Agressive	0,700000000000	0,576470588235
Ridge	0,776666666667	0,761109540321
knn	0,683333333333	0,663151373914
adaboost	0,760000000000	0,749263989919
gradient boosting	0,796666666667	0,784866429793
MLP	0,300000000000	0,138461538462
SVC	0,700000000000	0,576470588235
SVC linear	0,770000000000	0,764500560081
Gaussian process	0,613333333333	0,621458880582
Gaussian NB	0,756666666667	0,762033479865
Bernoulli NB	0,713333333333	0,630552109181
Decision Tree	0,730000000000	0,725726904674
Bagging	0,750000000000	0,745054160546
Random Forest	0,726666666667	0,727514590672
RF weighted	0,756666666667	0,748710533335
Extra trees	0,750000000000	0,744022347914
ET weighted	0,743333333333	0,736091954023

Рис. 1: Результаты первой серии опытов

Первая серия опытов состояла в настройке реализаций алгоритмов машинного обучения библиотеки scikit-learn с параметрами по умолчанию. В ходе анализа результатов (см. Рис. 1) было выявлено, что модели таких алгоритмов, как стохастический градиентный спуск, пассивно-агрессивный алгоритм, многослойный персептрон, метод опорных векторов (с rbf-ядром) переобучились на исходных данных, т. е. при настройке на тренировочных данных были показаны высокие значения метрики качества, однако на тестовых данных — низкая. В частности, данные алгоритмы относили к классу кредитоспособных все объекты тестовой выборки. Исключение составил многослойный персептрон, который относил тестовые объекты к классу некредитоспособных. Модель алгоритма гауссовского процесса показала долю правильных ответов 61%, что ниже, чем у переобученных алгоритмов.

Максимальная доля правильных ответов и взвешенная f1-мера наблюдалась у модели алгоритма градиентного бустинга — 79,67% и 0,784867, соответственно. Бустинг является композиционным методом, т. е. использующим несколько простых базовых алгоритмов. Основная идея бустинга — последовательное построение базовых алгоритмов так, что каждый следующий алгоритм строится с целью исправления ошибок уже построенной композиции. Некоторые практики утверждают, что алгоритм градиентного бустинга в подавляющем большинстве случаев показывает довольно высокие значения метрик качества, и советуют начинать построение композиционных моделей с применением данного алгоритма.

	Accuracy	Weighted F1 score
sgd	0,760000000000	0,750454545455
sgd_l1	0,716666666667	0,693368700265
sgd_l2	0,713333333333	0,686868811120
lr_l1	0,773333333333	0,762023562024
lr_l2	0,783333333333	0,771946357376
Passive Agressive	0,726666666667	0,693241944783
Ridge	0,786666666667	0,773684210526
knn	0,753333333333	0,725126774848
adaboost	0,776666666667	0,767235699311
gradient boosting	0,773333333333	0,758222222222
MLP	0,766666666667	0,756228879088
SVC	0,753333333333	0,692467532468
SVC linear	0,766666666667	0,760590750097
Gaussian process	0,746666666667	0,696406217034
Gaussian NB	0,436666666667	0,422041890069
Bernoulli NB	0,743333333333	0,742068357575
Decision Tree	0,713333333333	0,715071070234
Bagging	0,750000000000	0,746043430254
Random Forest	0,750000000000	0,740658469984
RF weighted	0,720000000000	0,715020519836
Extra trees	0,736666666667	0,725546570830
ET weighted	0,720000000000	0,712708900117

Рис. 2: Результаты второй серии опытов

Второй по доле правильных ответов и взвешенной f1-мере является модель алгоритма логистической регрессии с L_1-регуляризатором — 78% и 0,765, соответственно. Логистическая регрессия строит линейный классификатор с логистической функцией потерь. Данный алгоритм примечателен тем, что также позволяет оценивать апостериорные вероятности принадлежности объектов классам, что необходимо для оценивания рисков, связанных с возможными ошибками классификации. Подробная информация об алгоритме указана в [1] и [2].

Вторая серия экспериментов основывалась на предварительной обработке исходных данных. Для этого, числовые признаки стандартизируются: из каждого признака вычитается его среднее значение и делится на стандартное отклонение. Таким образом, можно сказать, что после применения стандартизации все признаки объектов принимают вид случайных величин стандартного нормального распределения (с математическим ожиданием $\mu = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = 1$). Для категориальных признаков применяется бинарное кодирование: каждый категориальный признак, принимающий N возможных значений, заменяется на N бинарных признаков так, что признак, имеющий i-ю категорию, имеет значение 1 в i-м бинарном признаке и только в нем. Подобные преобразования, в теории, улучшают качество линейных моделей.

Результаты второй серии экспериментов (см. Рис. 2) позволяют сделать вывод об улучшении качества линейных моделей (напрмер, стохастического градиентного спуска, гребневой регрессии). Лучшей молелью является модель гребневой регрессии, которая применяется в случае наличия линейно зависимых признаков, второй по качеству является модель логистической регрессии с L_2-регуляризатором.

Предполагается, что дальнейшие эксперименты будут связаны с отбором признаков и понижением размерности с целью повышения качества модели.

Ссылки

[1] *Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989.

[2] *Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J.* The Elements of Statistical Learning: 2nd edition. Springer, 2009.

[3] *Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.* Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974.

[4] *Вапник В. Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1979.

[5] *Powers D.M.W.* Evaluation: from Precision, Recall and F-measure to ROC, Informedness, Markedness and Correlation // Journal of Machine Learning Technologies. 2011. Vol. 2. Iss. 1. P. 37–63.

[6] *Шунина Ю.С., Алексеева В.А., Клячкин В.Н.* Прогнозирование кредитоспособности клиентов на основе методов машинного обучения // Финансы и кредит. 2015. № 27(651). С. 2–12.

[7] http://www.machinelearning.ru

[8] *Воронцов К. В.* Курс лекций по машинному обучению. URL:http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title= Машинное_обучение _(курс_лекций%2C_К.В.Воронцов)

[9] URL:https://en.wikipedia.org/wiki/F1_score

УДК 511 + 003.26(075.8)

С. И. Яблокова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: yabl@uniyar.ac.ru

Непрерывные дроби в различных математических курсах для специальности «Компьютерная безопасность»

В статье рассматривается процесс изучения основных свойств непрерывных дробей и их применения при решении различных математических задач в ходе обучения студентов специальности «Компьютерная безопасность».

Библиография : 5 названий.

Ключевые слова: непрерывная дробь, подходящая дробь бесконечная периодическая непрерывная дробь.

Первое короткое знакомство с непрерывными дробями студенты специальности «Компьютерная безопасность» получают в курсе теории чисел. Вводится определение непрерывной дроби, доказываются некоторые свойства непрерывных дробей и их подходящих дробей и выводятся некоторые простейшие соотношения. В этом курсе приводится связь алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя чисел с процессом разложения рационального числа в непрерывную дробь, показано, что последовательные частные, получаемые в ходе применения алгоритма Евклида к двум целым числам a и b, являются соответсвующими неполными частными непрерывной дроби, в которую раскладывается рациональное число $\frac{a}{b}$. Из равенств

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_nq_n, \qquad r_0 = a, \quad r_1 = b \end{aligned}$$

получаем разложение рационального числа $\dfrac{a}{b}$ в непрерывную дробь:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} = [q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, q_n].$$

Вводится определение k-й подходящей дроби $\dfrac{P_k}{Q_k}$, выводятся рекуррентные формулы вычисления числителей и знаменателей подходящих дробей (см. [1]):

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad P_0 = 1, \quad P_1 = q_1,$$
$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1.$$

Полученные свойства непрерывных дробей используются при изучении вопроса о приближении действительных чисел рациональными. Наилучшим приближением действительного числа α называется рациональная дробь $\dfrac{a}{b}$ такая, что не существует ни одной рациональной дроби $\dfrac{x}{y}$ со знаменателем $y \le b$, которая была бы ближе к α, чем $\dfrac{a}{b}$. Опираясь на свойства подходящих дробей, получаем следующее утверждение.

Теорема 1 ([1]). *При $k \ge 1$ любая подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k}$ к действительному числу α является наилучшим приближением.*

Дальнейшее знакомство с непрерывными дробями обучаемые получают при изучении курса алгебраической алгоритмики. Помимо дальнейшего изучения свойств подходящих дробей доказываются такие основополагающие утверждения как лемма о приближении вещественного числа α подходящими дробями и теорема о близости подходящих дробей к α.

Лемма 1 ([2]). *Для четных значений n последовательность подходящих дробей $\dfrac{P_n}{Q_n}$ монотонно убывает и ее предел равен α; для нечетных значений n соответствующая последовательность подходящих дробей монотонно возрастает и ее предел равен α.*

Каждая подходящая дробь $\dfrac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ больше, чем $\dfrac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$, и каждая дробь $\dfrac{P_n}{Q_n}$ лежит между двумя предыдущими подходящими дробями.

Теорема 2 ([2]). *Пусть α — иррациональное число и пусть $\alpha = [c_1, c_2, \ldots, c_n, \alpha_n]$ — его разложение в непрерывную дробь, где $\alpha_n = [c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots]$, $n \ge 1$. Справедливы следующие утверждения:*

(а) каждая подходящая дробь $\dfrac{P_n}{Q_n}$ *расположена ближе к* α*, чем предыдущая;*

(б) $\dfrac{1}{2Q_{n+1}Q_n} < \left|\alpha - \dfrac{P_n}{Q_n}\right| < \dfrac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \dfrac{1}{Q_n^2}$ *при* $n \geq 1$;

(в) существует бесконечно много рациональных чисел вида $\dfrac{a}{b}$ *таких, что НОД*$(a, b) = 1$ *и* $\left|\alpha - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{1}{b^2}$.

Кроме того, доказывается теорема единственности для конечных непрерывных дробей и теорема о представлении рациональных чисел непрерывными дробями.

Теорема 3 ([2]). *Если* $[c_1, c_2, \ldots, c_m] = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$, *причем* $c_m > 1,\ d_n > 1$, *то* $m = n$ *и* $c_i = d_i$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4 ([2]). *Любая конечная непрерывная дробь представляет рациональное число и обратно, всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной непрерывной дроби. Это представление однозначно.*

Задачи, которые предлагаются на практических занятия в курсах теории чисел и алгебраической алгоритмики касаются в основном вопросов разложения рационального или вещественного числа в непрерывную дробь и обратного процесса — нахождения рационального или вещественного числа, представленного непрерывной дробью. Кроме того, обучаемые учатся использовать непрерывные дроби для решения линейных сравнений и линейных диофантовых уравнений.

Более полное представление о непрерывных дробях студенты специальности «Компьютерная безопасность» получают в курсе теоретико-числовых методов в криптографии. Во-первых, доказывается теорема о фундаментальном соответствии.

Теорема 5 ([4]). *Для любой последовательности натуральных чисел* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *равенства* $[d_1, d_2, \ldots, d_n] = \dfrac{P_n}{Q_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, *выполняются тогда и только тогда, когда выполняются матричные равенства*

$$\begin{pmatrix} d_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} d_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Из этой теоремы легко выводятся основные свойства подходящих дробей. Далее вводятся бесконечные непрерывные дроби и доказывается, что любая бесконечная непрерывная дробь сходится. Получаем теорему об однозначном представлении иррациональных чисел бесконечными непрерывными дробями.

Следующий шаг в изучении непрерывных дробей — рассмотрение непрерывных периодических дробей и квадратичных иррациональностей. Доказывается теорема Лагранжа.

Теорема 6 ([5]). *Квадратичные иррациональности и только они могут быть представлены в виде бесконечной периодической непрерывной дроби.*

В качестве приложения рассматривается уравнение Пелля — диофантово уравнение вида

$$x^2 - Ny^2 = 1,$$

где N — натуральное число, свободное от квадратов. Доказывается теорема о разрешимости этого уравнения.

Теорема 7 ([5]). *Уравнение Пелля $x^2 - Ny^2 = 1$ имеет бесконечно много решений в целых числах, кроме того, существует фундаментальное решение (x_1, y_1) такое, что любое другое решение (x_k, y_k) можно задать соотношением*

$$x_k + y_k\sqrt{N} = \pm(x_1 + y_1\sqrt{N})^k.$$

Далее показываем, что фундаментальное решение уравнения Пелля можно найти, раскладывая $\sqrt{N}$ в непрерывную дробь, которая будет периодической дробью вида $[a_1, (a_2, a_3, \ldots, a_n, 2a_1)]$, а решением уравнения Пелля является пара (P_n, Q_n) при четном n и пара (P_{2n}, Q_{2n}) при нечетном n.

Поздее в этом же курсе студенты опять встречаются с непрерывными дробями при изучении методов факторизации больших целых чисел. Один из методов повышения эффективности алгоритма факторизации Диксона, имеющего экспоненциальную оценку сложности, состоит в более удачном выборе случайных чисел, квадраты которых могут быть разложены в произведение элементов факторной базы. Эти разложения нужны для дальнейшей успешной работы алгоритма. Модификация алгоритма Диксона, использующая свойства непрерывных дробей, носит название алгоритма Брилхарта–Моррисона. В этом алгоритме «случайные» числа выбираются методом непрерывных дробей. Обоснованием такого выбора являются следующие утверждения.

Теорема 8 ([4]). *Пусть $x > 1$ действительное число и $\{\dfrac{P_k}{Q_k}\}$ — последовательность его подходящих дробей, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда при всех $k \geq 1$ справедливо*

$$|P_k^2 - x^2Q_k^2| < 2x.$$

Следствие ([4]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$ не является квадратом и $\frac{P_k}{Q_k}$ — подходящая дробь для числа $\sqrt{n}$. Тогда минимальный по абсолютной величине вычет $P_k^2 (mod\ n)$ равен $P_k^2 - nQ_k^2$ и не превосходит $2\sqrt{n}$.*

В результате такого выбора вместо случайных чисел берутся числители подходящих дробей P_k, тогда минимальный по абсолютной величине вычет $P_k^2 (mod\ n)$ не будет превышать $2\sqrt{n}$, т. е. будет сравнительно небольшим, что повышает вероятность его разложения в произведение элементов из факторной базы. Кроме того, такой выбор позволяет уменьшить и саму факторную базу, удалив из нее все простые числа p, по модулю которых n является квадратичным невычетом. Эти изменения позволяют улучшить оценку сложности и следовательно, уменьшить время работы алгоритма.

Для закрепления изученного материала на практических занятиях в курсе теории чисел студентам предлагаются следующие задания.

1). Разложить в непрерывную дробь: а) рациональное число; б) иррациональное число (квадратичную иррациональность).

2). Свернуть непрерывную дробь: а) конечную; б) бесконечную периодическую.

3). Решить сравнение $ax \equiv b\ (mod\ n)$ с помощью непрерывных дробей.

В курсе алгебраической алгоритмики к задачам типов 1–3 добавляются следующие задания ([3]).

4). Найти иррациональность $\alpha = [a_1, \ldots, a_k, \alpha_k]$ и представить ее в виде $\frac{a + b\sqrt{c}}{d}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, если дана k-я подходящая дробь $\frac{P_k}{Q_k}$ и иррациональное число α_k.

5). Оценить погрешность приближения вещественного числа α k-й подходящей дробью.

6). Решить линейное диофантово уравнение $ax + by = c$ с помощью непрерывных дробей.

7). Задачи на доказательство соотношений между числителями и знаменателями подходящих дробей.

В курсе теоретико-числовых методов в криптографии добавляются следующие задания.

8). Сократить рациональную дробь, используя непрерывные дроби.

9). Найти подходящую дробь, приближающую вещественное число с данной точностью.

10). Найти фундаментальное решение уравнения Пелля.

Например, это могут быть следующие задачи ([3]).

1). Разложить в непрерывную дробь: а) $-\frac{171}{23}$; б) $\sqrt{53}$.

2). Свернуть непрерывную дробь: а) $[5, 2, 3, 1, 4, 6, 3]$;
б) $[3, 2, 1, (2, 1, 3)]$.

3). С помощью непрерывных дробей решить сравнение $121x \equiv 33\ (mod\ 561)$.

4). Найти иррациональность $\alpha = [a_1, \ldots, a_k, \alpha_k]$ и представить ее в виде $\dfrac{a + b\sqrt{c}}{d}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$, если дана k-я подходящая дробь $\dfrac{P_k}{Q_k} = \dfrac{17}{5}$ и иррациональное число $\alpha_k = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

5). Оценить погрешность приближения вещественного числа $\alpha = \dfrac{17 + \sqrt{3}}{5}$ 4-й подходящей дробью.

6). Решить линейное диофантово уравнение $101x - 73y = 39$ с помощью непрерывных дробей.

7). Доказать, что

$$[\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}] = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1}}{(1 + \sqrt{2})^{n} - (1 - \sqrt{2})^{n}}.$$

8). Сократить рациональную дробь $\dfrac{2413}{1905}$, используя непрерывные дроби.

9). Найти подходящую дробь, приближающую вещественное число $\alpha = \sqrt{59}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-9}$.

10). Найти фундаментальное решение уравнения $x^2 - 31y^2 = 1$.

Ссылки

[1] *Бухштаб А. А.* Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

[2] *Яблокова С. И.* Основы алгебраической алгоритмики. Ч. 1: учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2008.

[3] *Яблокова С. И.* Задачи по алгебраической алгоритмике: практикум. Ярославль: ЯрГУ, 2016.

[4] *Черемушкин А. В.* Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии: учебное пособие. М.: МЦНМО, 2002.

[5] *Маховенко Е. Б.* Теоретико-числовые методы в криптографии: учебное пособие. М.: Гелиос АРВ, 2006.

УДК 515.142

С. И. Яблокова
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: yabl@uniyar.ac.ru

Вычисление групп гомологий одного подкомплекса пространства триангуляций двумерного симплекса с 8 точками разбиения границы

Статья посвящена вычислению групп гомологий подпространства триангуляций двумерного симплекса с не более чем 8 точками разбиения границы в случае, когда число точек разбиения ребер симплекса не превосходит соответственно 4,3 и 1 и когда триангуляции с границы продолжаются на внутренность симплекса без добавления новых точек разбиения.

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: симплекс, триангуляция, клеточный комплекс, группа гомологий, матрица инцидентности.

Рассматривается двумерный симплекс σ^2 с вершинами $D_0,\ D_1,\ D_2$, граница которого подразделена не более чем 8 новыми точками. Число точек разбиения на каждой из сторон определено числами $p,\ q$ и s $p+q+s=8$. Пусть на ребре D_0D_1 находится не более чем $p=4$ точки разбиения, на ребре D_1D_2 — не более чем $q=3$ точек, на ребре D_2D_0 — не более чем $s=1$ точка. Триангуляции с границы симплекса продолжаются на его внутренность без добавления новых точек разбиения.

Отождествим множество разбиений границы симплекса с 8-мерной клеткой $\nabla^8_{4,3,1}$. Поскольку триангуляции с границы симплекса на внутренность продолжаются неоднозначно, то будем считать, что каждому способу продолжения триангуляций с границы симплекса σ^2 на его внутренность соответствует n-клетка (n-слой), т. е. рассмотрим конечное накрытие $\tilde{\nabla}^k_{p,q,s}$ каждого полиэдра $\nabla^k_{p,q,s}$, $(2 \leq k \leq 8,\ 0 \leq p \leq 4,\ 0 \leq q \leq 3,\ 0 \leq s \leq 1)$, число слоев которого соответствует количеству способов продолжения триангуляции с границы на внутренность симплекса.

Каждый такой слой соответствует набору весов точек разбиения граней симплекса σ^2, который однозначно определяет триангуляцию этого симплекса ([1]).

Полученное накрытие $\tilde{\nabla}^n_{4,3,1}$ представляет собой подкомплекс клеточного комплекса $W_1(\nabla^8) = \bigcup_{\substack{p+q+s=n,\\ 0\le n\le 8,\\ p,q,s\ge 0}} \tilde{\nabla}^n_{p,q,s}$, изоморфного пространству триангуляций симплекса σ^2 с не более чем 8 точками разбиения границы. Структура комплекса $W_1(\nabla^N)$ для любого натурального N описана в работах [1–4].

Для вычисления групп гомологий комплекса $\tilde{\nabla}^8_{4,3,1}$ и его подкомплексов $\tilde{\nabla}^n_{p,q,s}$ воспользуемся цепным комплексом $C = \oplus_n C_n$, соответствующим рассматриваемому клеточному комплексу, и построим матрицы инцидентности ${}^nE$, задающие оператор границы $C_{n+1} \to C_n$. В левом указателе (входе) матрицы ${}^nE$ выписываются все n-мерные клетки (n-слои) клеточного комплекса, а в верхнем — все $(n+1)$-мерные клетки ($(n+1)$-слои), каждая с раз и навсегда выбранной ориентацией. На пересечении строки i и столбца j стоит коэффициент инцидентности $(n+1)$-мерной клетки с номером j и n-мерной клетки с номером i.

Порядок следования n-клеток (n-слоев) в базисе группы C_n можно выбрать так, чтобы матрица ${}^nE$ приняла клеточно-блочный вид с ненулевыми клетками, стоящими на главной диагонали или рядом с ней.

Укажем порядок следования клеток (слоев) комплекса $\tilde{\nabla}^n_{4,3,1}$ в базисе группы C_8. Всего этот комплекс содержит 91 8-мерную клетку (8-слой). Первыми расставим 8-клетки, соответствующие триангуляциям симплекса без внутреннего подсимплекса τ^2, вершины которого лежат на трех гранях σ^2. Сначала разместим клетки, соответствующие триангуляциям σ^2, в которых сумма весов точек разбиения на ребре D_0D_1 максимальна, т. е. равна 8. Первыми стоят 4 клетки (8-слои), соответствующие следующим наборам весов точек разбиения

$$(5,1,1,1;1,1,1;1),\ (1,5,1,1;3,1,1,;2),\ (1,1,5,1;2,1,1;3),\ (1,1,1,5;1,1,1;4).$$

Следующие 12 клеток (8-слоев) соответствуют наборам весов

$$(4,2,1,1;3,2,1;1),\ (4,1,2,1;2,3,1;1),\ (4,1,1,2;1,4,1;),\ (2,4,1,1;3,1,1;1),$$
$$(1,4,2,1;2,2,1;2),\ (1,4,1,2;1,3,1;2),\ (2,1,4,1;2,1,1;1),\ (1,2,4,1;2,1,1;2),$$
$$(1,1,4,2;1,2,1;3),\ (2,1,1,4;1,1,1;1),\ (1,2,1,4;1,1,1;2),\ (1,1,2,4;1,1,1;3).$$

Следующие 6 клеток (8-слоев) соответствуют наборам весов, в которых на ребре D_0D_1 есть два веса, равных 3, и два, равных 1. Следующими поставим 12 клеток (8-слоев), соответствующих наборам весов ребра D_0D_1, где есть вес, равный 3, два веса, равных 2, и один, равный 1 . Эти клетки расставляются так же, как 12 клеток второй группы, т. е.

сначала стоит клетка, соответствующая триангуляциям с весами ребра D_0D_1 равными $(3,3,1,1)$, затем стоят клетки, соответствующие всевозможным перестановкам этого набора. Последней клеткой является 8-слой, соответствующий набору весов $(2,2,2,2;1,2,2;1)$.

Следующими поставим клетки (8-слои), соответствующие триангуляциям симплекса σ^2, в которых сумма весов точек разбиения на ребре D_1D_2 максимальна, т. е. равна 8. Первыми стоят 3 клетки, соответствующие наборам весов

$$(1,1,1,1;6,1,1;3), \quad (1,1,1,2;1,6,1;2), \quad (1,1,1,3;1,1,6;1),$$

затем 6 клеток, соответствующих триангуляциям σ^2 с наборами весов 5, 2 и 1 на ребре D_1D_2. Следующие 6 клеток соответствуют набору весов $(4,3,1)$ второго ребра симплекса и всевозможным перестановкам этого набора. Далее следуют 3 клетки, соответствующие набору весов $(3,3,2)$ ребра D_1D_2 и перестановкам этого набора. Последней идет клетка, соответствующая набору весов $(1,1,1,1;1,1,1;8)$, где сумма весов ребра D_2D_0 максимальна, т. е. равна 8.

Остальные 34 клетки 8-клетки, входящие в базис группы C_8, соответствуют триангуляциям σ^2 с внутренним подсимплексом τ^2. Упорядочивание 8-слоев в этой части связано с расположением вершин внутреннего подсимплекса $\tau^2 = F_0F_1F_2$ на ребрах σ^2. Так как на ребре D_2D_0 находится только одна точка разбиения границы, то вершина F_2 подсимплекса τ^2 всегда находится в этой точке. Первыми ставим 8-слои, соответствующие таким триангуляциям σ^2, в которых вершинами τ^2 являются первые точки разбиения ребер D_0D_1 и D_1D_2; при этом изменение весов точек разбиения трех подсимплексов σ^2, два ребра которых лежат на ребрах σ^2, подчиняется тому же правилу, которое использовано для триангуляций без внутреннего подсимплекса τ^2. Затем рассматриваются клетки, отвечающие триангуляциям σ^2, в которых вершинами τ^2 являются первая точка разбиения ребрар D_0D_1 и вторая точка разбиения ребра D_1D_2 и т. д. После того, как в качестве вершины F_1 внутреннего подсимплекса τ^2 будут использованы все точки разбиения ребра D_1D_2, сдвигаем вершину F_0 на ребре D_0D_1 во вторую точку разбиения этого ребра и повторяем процесс и т. д. Таким образом, первым 8-слоем будет клетка, отвечающая набору весов $(2,1,1,1;5,1,1;4)$, затем следуют четыре 8-слоя, соответствующие наборам весов $(2,2,1,1;3,3,1;3)$, $(2,1,2,1;2,4,1;3)$, $(2,1,1,2;1,5,1;3)$, $(3,1,1,1;4,2,1;3)$. Следующие 10 клеток соответствуют триангуляциям σ^2, в которых вершинами τ^2 являются первая точка разбиения ребра D_0D_1 и третья точка разбиения ребра D_1D_2. После сдвига вершины F_0 подсимплекса τ^2 во вторую точку разбиения ребра D_0D_1, перебираем точки разбиения ребра D_1D_2 в качестве вершины F_1.

Получаем девять 8-мерных клеток (слоев). Далее сдвигаем F_0 в третью вершину разбиения ребра D_0D_1 и опять, перебирая точки разбиения ребра D_1D_2 в качестве F_1 получаем шесть 8-мерных клеток. Наконец, последние три 8-клетки получаются, когда вершина F_0 находится в четвертой точке разбиения ребра D_0D_1, а F_1 пробегает точки разбиения ребра D_1D_2.

Аналогично расставляются k-слои в базисах групп C_k (при $k \le 7$).

Матрица инцидентности ${}^7E$ для подкомплекса $\tilde\nabla^8_{4,3,1}$ имеет размер 126×91. Верхний вход составляют 8-мерные клетки, перечисленные выше и соответствующие триангуляциям симплекса σ^2 с 4, 3 и 1 точками разбиения его ребер. Левый вход составляют 7-клетки (слои) подкомплексов $\tilde\nabla^7_{4,3,0}$, $\tilde\nabla^7_{4,2,1}$ и $\tilde\nabla^7_{3,3,1}$. Сначала расставляются 7-клетки подкомплекса $\tilde\nabla^7_{4,3,0}$. Затем следуют 7-клетки, составляющие подкомплекс $\tilde\nabla^7_{4,2,1}$. Наконец, последними стоит 7-клетки подкомплекса $\tilde\nabla^7_{3,3,1}$. Подкомплекс $\tilde\nabla^7_{4,3,0}$ состоит из 35 7-мерных клеток, подкомплекс $\tilde\nabla^7_{4,2,1}$ — из 41 7-клетки, подкомплекс $\tilde\nabla^7_{3,3,1}$ — из 50 7-клеток.

Матрица инцидентности ${}^6E$ имеет размер 101×126. В верхнем входе стоят 7-клетки подкомплексов $\tilde\nabla^7_{4,3,0}$, $\tilde\nabla^7_{4,2,1}$ и $\tilde\nabla^7_{3,3,1}$ в том порядке, в котором они стояли в левом входе матрицы ${}^7E$. В верхнем входе стоят 6-мерные клетки (слои) подкомплексов $\tilde\nabla^6_{4,2,0}$, $\tilde\nabla^6_{3,3,0}$, $\tilde\nabla^6_{4,1,1}$, $\tilde\nabla^6_{3,2,1}$ и $\tilde\nabla^6_{2,3,1}$ в указанном порядке. Слои каждого подкомплекса упорядочиваются по такому же правилу, что и клетки большей размерности. $\tilde\nabla^6_{4,2,0}$ состоит из 15 6-мерных клеток, $\tilde\nabla^6_{3,3,0}$ — из 20 6-мерных клеток, $\tilde\nabla^6_{4,1,1}$ — из 16 6-мерных клеток, $\tilde\nabla^6_{3,2,1}$ и $\tilde\nabla^6_{2,3,1}$ каждый состоит из 25 6-мерных клеток.

Матрица ${}^5E$ имеет размер 66×101. В верхнем входе стоят 6-мерные клетки подкомплексов $\tilde\nabla^6_{4,2,0}$, $\tilde\nabla^6_{3,3,0}$, $\tilde\nabla^6_{4,1,1}$, $\tilde\nabla^6_{3,2,1}$ и $\tilde\nabla^6_{2,3,1}$ следующие в том порядке, в каком они входили в левый вход матрицы ${}^6E$. В верхнем входе стоят 5-мерные клетки (слои) подкомплексов $\tilde\nabla^5_{4,1,0}$, $\tilde\nabla^5_{4,0,1}$, $\tilde\nabla^5_{3,2,0}$, $\tilde\nabla^5_{2,3,0}$, $\tilde\nabla^5_{3,1,1}$, $\tilde\nabla^5_{1,3,1}$ и $\tilde\nabla^5_{2,2,1}$ в указанном порядке. 5-мерные клетки каждого подкомплекса упорядочиваются по тому же правилу, что и клетки большей размерности. Подкомплексы $\tilde\nabla^5_{4,1,0}$ и $\tilde\nabla^5_{4,0,1}$ содержат каждый по 5 5-мерных клеток (слоев), подкомплексы $\tilde\nabla^5_{3,2,0}$ и $\tilde\nabla^5_{2,3,0}$ содержат по 10 5-мерных клеток, подкомплексы $\tilde\nabla^5_{3,1,1}$ и $\tilde\nabla^5_{1,3,1}$ содержат по 11 5-мерных клеток, подкомпдекс $\tilde\nabla^5_{2,2,1}$ состоит из 14 5-клеток. Таким образом,

$$
{}^7E = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 \end{pmatrix}, \quad
{}^6E = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \\ \mathcal{B}_3 & & \mathcal{B}_4 \\ & \mathcal{B}_5 & \\ & \mathcal{B}_6 & \mathcal{B}_7 \\ & & \mathcal{B}_8 \end{pmatrix}, \quad
{}^5E = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 & & \\ & & \mathcal{C}_3 & & \\ \mathcal{C}_4 & \mathcal{C}_5 & & \mathcal{C}_6 & \\ & \mathcal{C}_7 & & & \mathcal{C}_8 \\ & & \mathcal{C}_9 & \mathcal{C}_{10} & \\ & & & & \mathcal{C}_{11} \\ & & & \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{13} \end{pmatrix},
$$

где матрицы имеют следующие размеры: $\mathcal{A}_1$ — 35×91, $\mathcal{A}_2$ — 41×91, $\mathcal{A}_3$ — 50×91, $\mathcal{B}_1$ — 15×35, $\mathcal{B}_2$ — 15×41, $\mathcal{B}_3$ — 20×35, $\mathcal{B}_4$ — 20×50, $\mathcal{B}_5$ — 16×41, $\mathcal{B}_6$ — 25×41, $\mathcal{B}_7$, $\mathcal{B}_8$ – 25×50. $\mathcal{C}_1$ — 5×15, $\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3$ — 5×16, $\mathcal{C}_4$ — 10×15, $\mathcal{C}_5,\mathcal{C}_7$ — 10×20, $\mathcal{C}_6$ — 10×25, $\mathcal{C}_8$ — 10×25, $\mathcal{C}_9$ — 11×16, $\mathcal{C}_{10},\mathcal{C}_{11}$ — 11×25, $\mathcal{C}_{12},\mathcal{C}_{13}$ — 14×25.

Матрица ${}^4E$ имеет размер 37×66. В верхнем входе стоят 5-мерные клетки подкомплексов $\tilde\nabla^5_{4,1,0}$, $\tilde\nabla^5_{4,0,1}$, $\tilde\nabla^5_{3,2,0}$, $\tilde\nabla^5_{2,3,0}$, $\tilde\nabla^5_{3,1,1}$, $\tilde\nabla^5_{1,3,1}$ и $\tilde\nabla^5_{2,2,1}$ следующие в том порядке, в каком они входили в левый вход матрицы ${}^5E$. В левом входе стоят 4-мерные клетки (слои) подкомплексов $\nabla^{4,0,0}$, $\tilde\nabla^4_{3,1,0}$, $\tilde\nabla^4_{3,0,1}$, $\tilde\nabla^4_{1,3,0}$, $\tilde\nabla^4_{0,3,1}$, $\tilde\nabla^4_{2,2,0}$, $\tilde\nabla^4_{2,1,1}$ и $\tilde\nabla^4_{1,2,1}$ в указанном порядке. $\nabla^{4,0,0}$ состоит из одной 4-мерной клетки, подкомплексы $\tilde\nabla^4_{3,1,0}$, $\tilde\nabla^4_{3,0,1}$, $\tilde\nabla^4_{1,3,0}$, $\tilde\nabla^4_{0,3,1}$ состоят каждый из 4 клеток, подкомплекс $\tilde\nabla^4_{2,2,0}$ состоит из 6 4-мерных клеток, подкомплексы $\tilde\nabla^4_{2,1,1}$ и $\tilde\nabla^4_{1,2,1}$ сосотоят каждый из 7 4-мерных клеток.

Матрица ${}^3E$ имеет размер 18×37. В верхнем входе стоят 4-мерные клетки подкомплексов $\nabla^{4,0,0}$, $\tilde\nabla^4_{3,1,0}$, $\tilde\nabla^4_{3,0,1}$, $\tilde\nabla^4_{1,3,0}$, $\tilde\nabla^4_{0,3,1}$, $\tilde\nabla^4_{2,2,0}$, $\tilde\nabla^4_{2,1,1}$ и $\tilde\nabla^4_{1,2,1}$. В левом входе стоят 3-мерные клетки (слои) подкомплексов $\nabla^{3,0,0}$, $\nabla^{0,3,0}$, $\tilde\nabla^3_{2,1,0}$, $\tilde\nabla^3_{2,0,1}$, $\tilde\nabla^3_{1,2,0}$, $\tilde\nabla^3_{0,2,1}$ и $\tilde\nabla^3_{1,1,1}$. $\nabla^{3,0,0}$ и $\nabla^{0,3,0}$ состоят каждый из одной 3-клетки, $\tilde\nabla^3_{2,1,0}$, $\tilde\nabla^3_{2,0,1}$, $\tilde\nabla^3_{1,2,0}$ и $\tilde\nabla^3_{0,2,1}$ состоят каждый из трех 3-мерных клеток, $\tilde\nabla^3_{1,1,1}$ состоит из четырех клеток. В результате получаем

$$
{}^4E=\begin{pmatrix}
\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & & & & & \\
\mathcal{D}_3 & & \mathcal{D}_4 & & \mathcal{D}_5 & & \\
& \mathcal{D}_6 & & & \mathcal{D}_7 & & \\
& & & \mathcal{D}_8 & & \mathcal{D}_9 & \\
& & & & & \mathcal{D}_{10} & \\
& & \mathcal{D}_{11} & \mathcal{D}_{12} & & & \mathcal{D}_{13} \\
& & & & \mathcal{D}_{14} & & \mathcal{D}_{15} \\
& & & & & \mathcal{D}_{16} & \mathcal{D}_{17}
\end{pmatrix},
$$

$$
{}^3E=\begin{pmatrix}
\mathcal{F}_1 & \mathcal{F}_2 & \mathcal{F}_3 & & & & & \\
& & & \mathcal{F}_4 & \mathcal{F}_5 & & & \\
& \mathcal{F}_6 & & & & \mathcal{F}_7 & \mathcal{F}_8 & \\
& & \mathcal{F}_9 & & & \mathcal{F}_{10} & & \\
& & & \mathcal{F}_{11} & & \mathcal{F}_{12} & & \mathcal{F}_{13} \\
& & & & \mathcal{F}_{14} & & & \mathcal{F}_{15} \\
& & & & & & \mathcal{F}_{16} & \mathcal{F}_{17}
\end{pmatrix}
$$

где матрицы имеют следующие размеры: $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ — 1×5, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_6$ — 4×5, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_8$ — 4×10, $\mathcal{D}_5$, $\mathcal{D}_7$, $\mathcal{D}_9$, $\mathcal{D}_{10}$ — 4×11, $\mathcal{D}_{11}$, $\mathcal{D}_{12}$ — 6×10, $\mathcal{D}_{13}$ – 6×14, $\mathcal{D}_{14}$, $\mathcal{D}_{16}$ — 7×11, $\mathcal{D}_{15}$, $\mathcal{D}_{17}$ – 7×14; $\mathcal{F}_1$ — 1×1, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$ — 1×4, $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}_{11}$, $\mathcal{F}_{14}$ — 3×4, $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_{12}$ — 3×6, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}_{10}$, $\mathcal{F}_{13}$, $\mathcal{F}_{15}$ — 3×7, $\mathcal{F}_{16}$, $\mathcal{F}_{17}$ — 4×7.

Матрица Матрица ${}^2E$ имеет размер 8×18. В верхнем входе стоят 3-мерные клетки (слои), входящие в левых вход матрицы ${}^3E$, а в левом входе стоят 2-мерные клетки подкомплеков $\nabla^{2,0,0}$, $\nabla^{0,2,0}$, $\tilde{\nabla}^2_{1,1,0}$, $\tilde{\nabla}^2_{1,0,1}$, и $\tilde{\nabla}^2_{0,1,1}$. Наконец, матрица ${}^1E$ имеет размер 3×8. В верхнем входе стоят 2-мерные клетки, входящие в левый вход матрицы ${}^2E$ а в левом входе — одномерные клетки $\nabla^{1,0,0}$, $\nabla^{0,1,0}$ и $\nabla^{0,0,1}$.

$$
{}^2E=\begin{pmatrix}
0&0&1&0&1&0&-1&-1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&-1&0&-1&1&0&1&&&&\\
&&&&&&&&-1&0&-1&&&&&&&-1\\
&&1&0&1&&&&&&&&&&&&&1\\
&&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
&&&&&&1&1&&&&&&&&&&1\\
&&&&&&&&&&&&&&&&&-1\\
&&&&&&&&&&&1&0&1&&&&1
\end{pmatrix},
$$

$$
{}^1E=\begin{pmatrix}
-1&&&1&&-1&&\\
&-1&1&&&&&1\\
&&&&-1&&1&
\end{pmatrix}.
$$

Далее матрицы инцидентности следует привести к канонической форме, изменяя базисы группы C_n, $n = 0, 1, \ldots, 8$, при помощи элементарных преобразований. При этом изменение базиса группы C_n влечет за собой согласованные между собой элементарные преобразования системы строк матрицы ${}^{n+1}E$ и системы столбцов матрицы ${}^nE$. Поэтому каждые две последовательные матрицы инцидентности ${}^{n+1}E$ и ${}^nE$ рассматриваются одновременно, в них проводятся согласованные элементарные преобразования систем строк и столбцов соответственно.

Используются следующие элементарные преобразования столбцов матрицы ${}^nE$: 1) перестановка i-го и j-го столбцов; 2) умножение i-го столбца на -1 ; 3) прибавление к i-му столбцу j-го столбца.

В матрице ${}^{n+1}E$ при этом происходят соответствующие согласованные преобразования: 1) перестановка i-й и j-й строк; 2) умножение i-й строки на -1 ; 3) вычитание i-й строки из j-й.

С помощью этих преобразований каждую из матриц инцидентности ${}^nE$ $(n = 0, 1, \ldots, 7)$ можно привести к каноническому виду, когда отличные от нуля числа стоят только на главной диагонали. Поскольку изменяться должны все матрицы инцидентности, причем согласованно, то рассуждения проводятся, начиная с $n = 1$. В результате получаем ранги матриц инцидентности:

$$
rang\ {}^1E = 3,\quad rang\ {}^2E = 5,\quad rang\ {}^3E = 13,\quad rang\ {}^4E = 23,
$$

$$
rang\ {}^5E = 43,\quad rang\ {}^6E = 58,
$$

откуда по формулам

$$
p_0 = 1,\quad p_1 = \alpha_1 - rang\ {}^1E,\quad p_k = \alpha_k - rang\ {}^kE - rang\ {}^{k-1}E,
$$

где α_k — число k-мерных клеток (слоев), получаем

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = p_6 = 0, \quad p_4 = 1,$$

Коэффициенты кручения отсутствуют.

Теорема. *Пусть $W_1(\nabla^8)$ — клеточный комплекс, представляющий собой пространство триангуляций двумерного симплекса σ^2 с не более чем 8 новыми точками разбиения границы, соответствующее случаю, когда триангуляции продолжаются с границы симплекса на его внутренность без добавления новых точек разбиения. Группы гомологий H_n подкомплекса $\tilde{\nabla}^n_{4,3,1}$ ($\tilde{\nabla}^n_{4,1,3}$, $\tilde{\nabla}^n_{3,4,1}$, $\tilde{\nabla}^n_{1,4,3}$. $\tilde{\nabla}^n_{3,1,4}$, $\tilde{\nabla}^n_{1,3,4}$) клеточного комплекса $W_1(\nabla^8)$ при $n = 1, 2, 3, 5, 6$ тривиальны, а при $n = 0, 4$ представляют собой бесконечную свободную циклическую группу.*

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.12873.2018/12.1.

Ссылки

[1] *Яблокова С.И.* Триангуляции двумерного симплекса, все вершины которых лежат на его границе // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1994. С. 69–87.

[2] *Yablokova S.I.* The polyhedron of boundary subdivisions // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1998. С. 267–273.

[3] *Yablokova S.I.* The space of triangulations of the 2-simplex without interior vertices // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1998. С. 275–283.

[4] *Яблокова С.И.* Модель пространства почти барицентрических триангуляций двумерного симплекса. Ориентация и склейка // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1992. С. 83–102.

На 6-й научной конференции «Математика и компьютерные науки в классическом университете». Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова. 28 апреля 2016 г.

Об авторах

Балабаев Владимир Евгеньевич — профессор кафедры математического анализа, доктор физико-математических наук

Бестужева Людмила Петровна — доцент кафедры общей математики, кандидат педагогических наук

Богомолов Юрий Викторович — доцент кафедры дискретного анализа, кандидат физико-математических наук

Большаков Юрий Иванович — доцент кафедры общей математики, кандидат физико-математических наук

Васильчиков Владимир Васильевич — заведующий кафедрой вычислительных и программных систем, кандидат технических наук

Власова Ольга Владимировна — старший преподаватель кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

Дурнев Валерий Георгиевич — заведующий кафедрой компьютерной безопасности и математических методов обработки информации, доктор физико-математических наук

Иродова Ирина Павловна — профессор кафедры общей математики, доктор физико-математических наук

Климов Владимир Степанович — профессор кафедры математического анализа, доктор физико-математических наук

Коновалов Евгений Владиславович — доцент кафедры компьютерных сетей, кандидат физико-математических наук

Кубышкин Евгений Павлович — профессор кафедры математического моделирования, доктор физико-математических наук

Куликов Анатолий Николаевич — доцент кафедры дифференциальных уравнений, кандидат физико-математических наук

Куликов Дмитрий Анатольевич — доцент кафедры дифференциальных уравнений, кандидат физико-математических наук

Лагутина Надежда Станиславовна — доцент кафедры вычислительных и программных систем, кандидат физико-математических наук

Ларина Юлия Александровна — старший преподаватель кафедры вычислительных и программных систем

Литвинов Владимир Викторович — доцент кафедры математического анализа, кандидат технических наук

Литвинова Ольга Ивановна — старший преподаватель кафедры общей математики

Майорова Наталия Львовна — доцент кафедры математического моделирования, кандидат педагогических наук

Невский Михаил Викторович — заведующий кафедрой математического анализа, доктор физико-математических наук

Рагимов Андрей Евгеньевич — студент 6 курса математического факультета, специальность «Компьютерная безопасность»

Рублев Вадим Сергеевич — профессор кафедры теоретической информатики, кандидат физико-математических наук

Семко Елена Романовна — директор муниципального общеобразовательного учреждения «Средняя школа с углубленным изучением отдельных предметов Провинциальный колледж», доцент кафедры математического анализа, кандидат физико-математических наук

Смирнов Ярослав Александрович — ассистент кафедры социальной политики

Тимофеев Евгений Александрович — профессор кафедры теоретической информатики, доктор физико-математических наук

Ухалов Алексей Юрьевич — доцент кафедры математического анализа, кандидат физико-математических наук

Федулов Даниил Дмитриевич — студент 3 курса математического факультета, направление «Прикладная математика и информатика»

Шабаршина Галина Владимировна — доцент кафедры дискретного анализа, кандидат физико-математических наук

Юсуфов Мурад Теймурович — аспирант ЯрГУ

Яблокова Светлана Ивановна — доцент кафедры алгебры и математической логики, кандидат физико-математических наук

Якимова Ольга Павловна — доцент кафедры компьютерной безопасности и математических методов обработки информации, кандидат физико-математических наук

Научное издание

Математика и компьютерные науки в классическом университете

Материалы конференции

7-я научная конференция
(26–27 апреля 2018 г., Ярославль)

Компьютерная верстка А. Ю. Ухалов

Подписано в печать 23.05.2018. Формат 60×84 1/8.
Усл. печ. л. 23,5. Уч.-изд. л. 14,0.
Тираж 60 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14

Отпечатано в типографии ООО «Филигрань».
г. Ярославль, ул. Свободы, д. 91. Тел. (4852) 982705, pechataet@bk.ru